BAC MATHS	مذاكرة الاحتمالات الدرجة الكاملة : 300	الاسم : المدّة :

أوّلاً: أجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: يمثّل الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحوّلات العشوائيّة . **المطلوب :**

1) أوجد $\mathbb{P}(X=0)$ و $\mathbb{P}(Y=1)$ و $\mathbb{P}(X=0,Y=1)$.
2) هل المتحوّلان العشوائيّان (X,Y) مستقلان احتمالياً ؟

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

السؤال الثاني: في أحد الامتحانات المؤتمتة ، يتضمّن الاختبار ستون سؤالاً كلّ منها مزوّد بأربعة إجابات مقترحة ، منها واحدة صحيحة فقط . يقرّر أحد المتقدّمين الإجابة عشوائياً عن هذه الأسئلة .
ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدل على عدد الإجابات الصحيحة التي يحققها الطالب ، احسب توقعه الرياضي و تباينه .

ثانياً: حل التمرينين الآتيين : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: في أحد المجتمعات تظهر أعراض مرض كورونا على 70% من الأشخاص ، 20% منهم مسحاتهم إيجابيّة ، و 70% من المسحات المأخوذة من أشخاص لا تظهر عليهم أعراض المرض تكون نتيجتها سلبيّة ، نختار عشوائياً شخص من هذا المجتمع .
نتأمّل الحدثين : A : " الشخص المختار تظهر عليه الأعراض " ، B : " مسحة الشخص المختار إيجابيّة "

1) أعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة . 2) احسب احتمال أن تكون مسحة الشخص المختار إيجابيّة .
3) إذا علمت أنّ الشخص المختار مسحته إيجابيّة ، فما احتمال أن تظهر عليه الأعراض ؟

التمرين الثاني: في تجربة رمي أهداف العدو بقذائف الدبابات ، نفترض أنّ احتمال أن تصيب القذيفة الهدف $\frac{5}{6}$ ، إلّا أنّ القذيفة لا تنفجر باحتمال 0.2 . نفترض أنّ الهدف يتم تدميره عندما تصيبه قذيفة واحدة على الأقل و تنفجر .
إذا تم إطلاق قذيفتين على هدف معيّن ، فما هو احتمال أن يُدمّر ؟

ثالثاً: حل المسألة الآتية : (100 درجة)

يخضع الطالب سعيد لعدّة اختبارات متتالية وفق ما يلي : احتمال نجاحه في الاختبار الأوّل يساوي احتمال رسوبه .
إذا نجح سعيد في اختبار ما ، يكون احتمال رسوبه في الاختبار التالي $\frac{2}{5}$ ، و إذا رسب في ذلك الاختبار ، يكون احتمال نجاحه في الاختبار التالي هو $\frac{3}{10}$ ، ليكن A_n حدث نجاح الطالب سعيد في الاختبار n ، و B_n حدث رسوب الطالب سعيد في الاختبار n .
نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n\geq 1$: $p_n=\mathbb{P}(A_n)$ و $q_n=\mathbb{P}(B_n)$. **المطلوب :**

1) احسب p_2 . 2) عبّر عن p_{n+1} بدلالة p_n .
3) نعرّف المتتالية $u_n=p_n-\frac{3}{7}$ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسيّة ، عيّن أساسها و حدّها الأوّل ، ثم اكتب u_n بدلالة n .
4) استنتج p_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

-------- انتهت الأسئلة --------

عبد الملك خير الله – 0964621810

حل مذاكرة الاحتمالات 2022-1

أولاً: السؤال الأول:

(1) $P(X=0)=\frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$

$P(Y=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{8}$

(2) $P(X=0)\times P(Y=1)=\frac{3}{20}\neq\frac{1}{8}$

$P(X=0,Y=1)\neq P(X=0)\cdot P(Y=1)$

فالمتحولان العشوائيان (X,Y) غير مستقلين احتمالياً.

السؤال الثاني:

X متحول عشوائي ثنائي (تجربة برنولية)

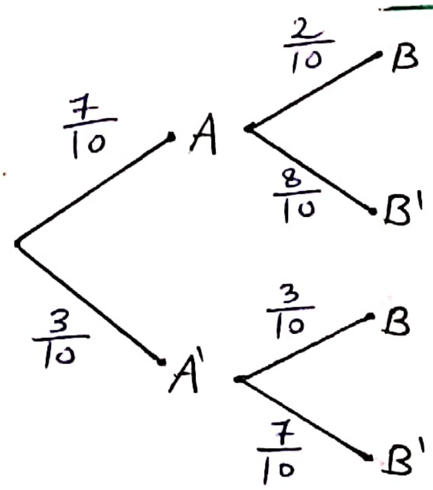
$n=60\ ,\ p=\frac{1}{4}$

التوقع الرياضي $E(X)=n.p=\frac{60}{4}=15$

التباين $V(X)=n.p.q=60\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{45}{4}$

ثانياً: التمرين الأول:

(1)



(2) $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$

$=P(B|A)\cdot P(A)+P(B|A')\cdot P(A')$

$=\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)+\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{23}{100}$

(3) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$

$=\frac{\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)}{\frac{23}{100}}=\frac{14}{23}$

التمرين الثاني:

ليكن A_1 الحدث «تم تدمير الهدف بالقذيفة الأولى»

$P(A_1)=\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{10}=\frac{2}{3}$

A_2 الحدث «تم تدمير الهدف بالقذيفة الثانية»

$P(A_2)=\frac{2}{3}$

احتمال تدمير الهدف هو احتمال تدميره بأحد القذيفتين على الأقل:

$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)$

حيث $P(A_1)\cdot P(A_2)=P(A_1\cap A_2)$

{لأن الحدثين مستقلين احتمالياً}

$P(A_1\cup A_2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{4}{3}-\frac{4}{9}=\frac{12-4}{9}=\boxed{\frac{8}{9}}$

وهو احتمال تدمير الهدف.

طريقة ثانية:

$P(A_1\cup A_2)=1-P(A_1\cup A_2)'$

$=1-P(A_1'\cap A_2')$

$=1-P(A_1')\cdot P(A_2')$

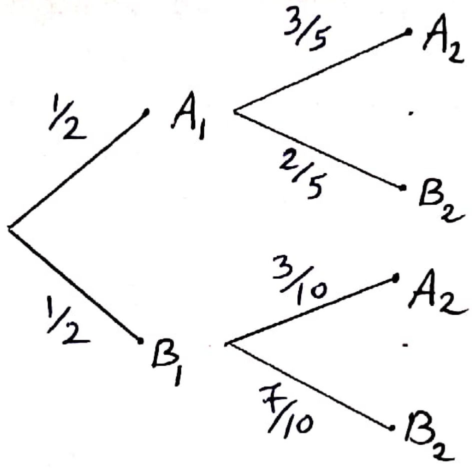
$=1-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{9}=\boxed{\frac{8}{9}}$

حيث $(A_1\cup A_2)'=A_1'\cap A_2'$

(قانون ديمورغان)

ثانياً :

1

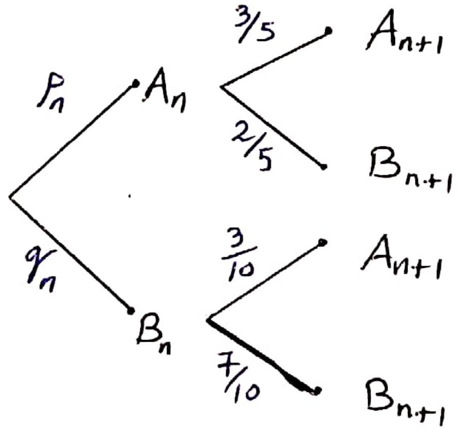


$$P_2 = P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1)$$

$$= P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2|B_1) \cdot P(B_1)$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{9}{20}}$$

2



$$P_{n+1} = \frac{3}{5} P_n + \frac{3}{10} q_n$$

$$= \frac{3}{5} P_n + \frac{3}{10}(1 - P_n)$$

$$= \frac{3}{5} P_n - \frac{3}{10} P_n + \frac{3}{10}$$

$$\boxed{P_{n+1} = \frac{3}{10} P_n + \frac{3}{10}}$$

3

$$u_n = P_n - \frac{3}{7}$$

$$u_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{3}{10} P_n + \frac{3}{10} - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{3}{10} P_n - \frac{9}{70}$$

$$= \frac{3}{10}\left(P_n - \frac{3}{7}\right) = \frac{3}{10} u_n$$

فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ هندسية أساسها $q = \frac{3}{10}$

وحدّها الأول :

$$u_1 = P_1 - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

$$\boxed{u_n = \frac{5}{21}\left(\frac{3}{10}\right)^n}$$

4

$$P_n = u_n + \frac{3}{7}$$

$$P_n = \frac{5}{21}\left(\frac{3}{10}\right)^n + \frac{3}{7}$$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \frac{5}{21}(0) + \frac{3}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

لأن : $|q| < 1$

- انتهى الحل -

عبد الملك خير الله 0964621810