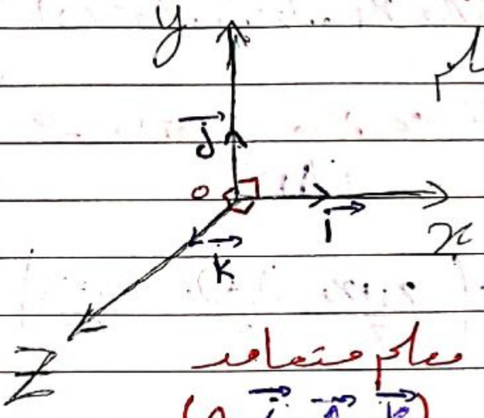
Math-Taher-SY

الموضوع : ....

Taher الأشعة

لدينا بعض الاساسيات :

1- معلم



معلم متعامد

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

2- الشعاع : يكتب

$\vec{u} = (x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

3- النقطة :

$M = (x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

4- مركبات شعاع يعرف نقطتيه

$A(x_1, y_1, z_1)$

$B = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

مثال اوجد $\vec{BC}$

$B(0, 1, 3) \quad C = (5, -1, -3)$

$\vec{BC} = (5-0, -1-1, -3+3)$
$= (5, -2, 0)$

ملاحظة: لو طلب $\vec{CB}$
نقول:

$\vec{CB} = -\vec{BC} = (-5, 2, 0)$

$\vec{AB} = -\vec{BA}$

حيثما يمكنك ان يكتب $\vec{BC}$ ب

$\vec{BC} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{BC} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 2 أعمدة

5- جمع الاشعة : هنا حالتين

أ- جمع شعاعين نهاية الاولى مع بداية الثاني يكون الأول والآخر

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$\vec{BC} + \vec{AB} =$ نبدله
$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

وما سبقه جمعه مثال

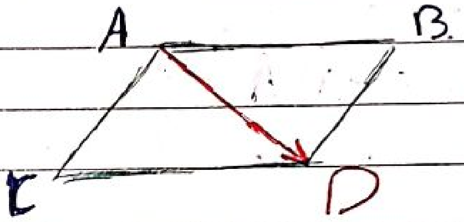
1 المبتدأ والخبر 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

الموضوع : Math-TAHER -S-Y

ب- جمع شعاعين لهما نفس البداية
هو شعاع من نفس البداية
اما النهاية فهي رأس متوازي
الاضلاع.

$$\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$$

هذا رأس متوازي الاضلاع



هو قطر متوازي الاضلاع.

مثال:

$$\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD}=\vec{AE}$$

عندها يكون الشكل مكعب سنرى
ذلك قريباً.

6- طرح الاشعة
لا يمكن طرح شعاعين:
نقوم بتحويل الطرح الى جمع

مثال: $-\vec{AB}=+\vec{BA}$

$\vec{AB}-\vec{AC}=$

نبدل $\vec{AB}+\vec{CA}=$

$\vec{CA}+\vec{AB}=\vec{CB}$

7- احداثيات مركبات شعاع $\vec{AB}$

$A=(x_1,y_1,z_1)$ $B(x_2,y_2,z_2)$

$$\vec{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

8- منتصف قطعة مستقيمة
[AB]

$$[AB]=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

9- مركز مثلث ABC
نسميه G

$$G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

10- المسافة بين نقطتين
هو: طول شعاع او طول قطعة

$$AB=\|\vec{AB}\|$$

$$=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

11- نظيم شعاع (الطول)

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

أ. طاهر

Taher-sy

الموضوع : ....

العثال الاول لكي تعرف ...
حل الاساسيات

معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فيه

$A=(3,5,2)$ $B=(2,-1,3)$ $C(0,-2,2)$

$D(-2,5,1)$ $E(3,9,2)$ $F(8,13,3)$

1- احسب مركبات إشعاع $\vec{AB}, \vec{ED}$

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2-3 \\ -1-5 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ج1

ج2

$$\vec{CD} = (-2-0, +5+2, 1-2) = (-2, 7, -1)$$

2- اوجد منتصف AB, EF

منتصف AB هو:

$$\left(\frac{3+2}{2}, \frac{5-1}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$$

منتصف EF

$$\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+13}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 11, \frac{5}{2}\right)$$

3- احسب طول الشعاع:
$\vec{AE}$; $\vec{AB}$

الحل:

$$\vec{AB} = (-1, -6, +1)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1+36+1} = \sqrt{38}$$

$$\|\ \| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{AE} = (0, 4, 0)$$

$$\|\vec{AE}\| = \sqrt{0+16+0} = \sqrt{16} = 4.$$

4- احسب طول القطعة
BC , AD

الحل: ج1

$$AD = \sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2+(z_D-z_A)^2}$$

$$= \sqrt{(-5)^2+(0)^2+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{25+0+1} = \sqrt{26}$$

ج2 نوجد $\vec{BC}$ ثم طوله

$$\vec{BC} = (-2, -1, -1)$$

$$BC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

5- اوجد مركز ثقل AEC

الحل: نعين G

$$G = \left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{5+9-2}{3}, \frac{2+2+2}{3}\right)$$

$$= (2, 4, 2)$$

ج3

6- اوجد k بحيث يكون الشكل ABKE متوازي اضلاع

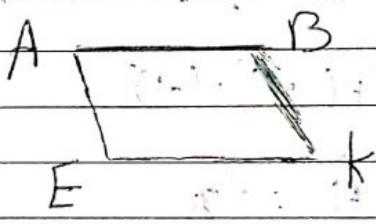
الحل: ملاحظة:

الشكل: فرق - مستطيل

متوازي اضلاع - معين

الكل نفس الحل.

نرسم مسودة



نأخذ متجهين متساويين

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EK}$$

انتبه الى الجهة

$$k=(x,y,z)$$

$$\begin{bmatrix}-1\\-6\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-3\\y-9\\z-2\end{bmatrix}$$

مقارنة

$$-1 = x-3 \Rightarrow x=2$$
$$-6 = y-9 \Rightarrow y=3$$
$$1 = z-2 \Rightarrow z=3$$

$$K=(2,3,3)$$

7- اوجد N بحيث يكون الرباعي ACDN معين

8- اوجد مركبات الاشعة

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$$

$$= 3\begin{bmatrix}-1\\-6\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-2\\7\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-3\\-18\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\14\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\-4\\1\end{bmatrix}$$

Taher

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$$

$$= 2\begin{bmatrix}-1\\-6\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\14\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-2\\-6\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\12\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\7\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-2-0+3\\-12-12+7\\2-0+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-17\\2\end{bmatrix}$$

أ. طاهر

المثال الثالثة لمعرفة الاساسيات

في معلم : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(3,0,-1)$

$B(-2,3,2)$ $C(1,2,-2)$

1- جد احداثيات I منتصف AB

$$I\left(\frac{3-2}{2},\frac{0+3}{2},\frac{-1+2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

2- اوجد احداثيات D نظيرة B بالنسبة الى C

شرح : كلمة بالنسبة يعني منتصف

بالنسبة الى C اي C منتصف

$B \longrightarrow C \longrightarrow D$

الحل:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$$

$$\begin{bmatrix}3\\-1\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-1\\y-2\\z+2\end{bmatrix}$$

$3=x-1 \Rightarrow x=4$

$-1=y-2 \Rightarrow y=1$

$-4=z+2 \Rightarrow z=-6$

$D(4,1,-6)$

Taher Math

3- اوجد احداثيات M

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}x+2\\y-3\\z-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\3\\3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$x+2=-5-6$

$y-3=3+6$

$z-2=3-3$

$$\left.\begin{aligned}x&=-13\\y&=12\\z&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow M(-13,12,2)$$

4- اوجد احداثيات N

$$\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NC}$$

$$\begin{bmatrix}3-x\\0-y\\-1-z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1-x\\2-y\\-2-z\end{bmatrix}$$

$3-x=2-2x$

$0-y=4-2y$

$-1-z=-4-2z$

$$\left.\begin{aligned}x&=-1\\y&=4\\z&=-3\end{aligned}\right\}\Rightarrow N(-1,4,-3)$$

الموضوع : أ. ماهر

$A(1,3,-1)$ $B(3,6,-2)$
$C(0,4,0)$

هل ABC قائم

متساوي الساقين
متساوي الاضلاع

الحل : نوجد الاطوال :

$AB=\sqrt{(1-3)^2+(3-6)^2+(-1+2)^2}$

$=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

$AC=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$BC=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$

حتى يكون قائم نأخذ العكس من فيثاغورث

$\sqrt{17}^2=\sqrt{3}^2+\sqrt{14}^2$

$17=3+14$

$17=17$

ABC قائم في A

غير متساوي الساقين وغير متساوي الاضلاع

الوحدة 17

$A(3,1,-3)$ $B(-1,5,-3)$
$C=(-1,1,\alpha)$

اثبت ان المثلث ABC متساوي الساقين ايا كانت α.

وهل يمكن ان يكون متساوي الاضلاع

الحل: نوجد اطوال اضلاع المثلث

$AB=\sqrt{16+16+0}=4\sqrt{2}$

$CB=\sqrt{16+(\alpha+3)^2}$ ماهر
$CA=\sqrt{16+(\alpha+3)^2}$

نلاحظ ان :
$CB=CA \Leftarrow$ متساوي الساقين

حتى يكون (ABC) متساوي الاضلاع
يجب : $AB=CA=CB$

$4\sqrt{2}=\sqrt{16+(\alpha+3)^2}$

$32=16+(\alpha+3)^2$

$(\alpha+3)^2=16$

اما $\alpha+3=4 \Rightarrow \alpha=1$
او $\alpha+3=-4 \Rightarrow \alpha=-7$

Taher-Math

الموضوع : ....

الارتباط الخطي لشعاعين
$\vec{v}$, $\vec{u}$

أ- يوجد ارتباط خطي اذا كان: $\vec{u} = k\vec{v}$ او $\vec{v} = k\vec{u}$

مثال:

$\vec{u} = (3, -1, 5)$

$\vec{v} = (6, -2, 10)$

نعم يوجد ارتباط لأن:

$\vec{v} = 2\vec{u}$

ب- يوجد ارتباط خطي اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بينهما توازي.

$u \parallel v$

ج- الأهم: يوجد ارتباط خطي اذا كانت النسب متساوية

$$\frac{x}{x} = \frac{y}{y} = \frac{z}{z}$$

هل يوجد ارتباط.

$\vec{u} = (6, 2, 10)$

$\vec{v} = (3, 1, 5)$

الحل:

$$\frac{6}{3} = \frac{2}{1} = \frac{10}{5} = 2$$

محقق ← $\vec{u}$, $\vec{v}$ مرتبطة خطيا

$\vec{u} = (0, 1, 3)$

$\vec{v} = (0, 2, 6)$

الحل: $\boxed{\frac{0}{0}} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

يهمل

محقق ←

$\vec{u}$, $\vec{v}$ مرتبطة خطيا

$\vec{u} = (0, 3, 1)$

$\vec{v} = (0, 2, 6)$

$\boxed{\frac{0}{0}} = \frac{3}{2} \neq \frac{1}{6}$

يهمل

لا يوجد ارتباط

$\vec{u} = (0, 0, 5)$

$\vec{v} = (0, 0, 7)$

الحل: $\boxed{\frac{0}{0} = \frac{0}{0}} = \frac{5}{7}$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطيا

طاهر

اذا وجد هذا الشكل نقول يوجد ارتباط مباشرة

يستخدم الارتباط الخطي لشعاعين

أ- لاثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

ب- لاثبات ان نقطة من مستقيم

TAHer

الموضوع : ....

الارتباط الخطي لثلاثة اشعة   دولة الاشعة

نقول عن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ انها مرتبطة خطياً اذا تحقق:

① عدم وجود ارتباط خطي لـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فنكتب:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

② ان يكون لـ α و β قيمة واحدة فقط

- يوجد على هذه الفكرة سلسلة اسئلة
و كلها تحل بنفس الطريقة

الأهم

١- اثبات الارتباط الخطي لثلاث اشعة.

2- اثبات ان اربع نقاط تنتمي الى مستوٍ واحد

3- ايجاد معادلة مستوٍ مار من ثلاث نقاط

4- اثبات ان نقطة تنتمي الى مستوٍ $P(ABC)$

5- اثبات تقاطع مستقيمين علم شعاعي التوجيه ونقطتين

6- اثبات ان مستوي يوازي مستقيم

كل ما نسبقه هو نجد الارتباط الخطي لشعاعيه ويكون الحل بنفس الطريقة

فهم الفكرة من خلال مثال:

$\vec{u}(1,2,-1)$ $\vec{v}=(0,3,4)$ $\vec{w}=(2,0,0)$

هل يوجد ارتباط خطي لـ $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$

الحل: نلاحظ ان:

شرط هام

عدم وجود ارتباط خطي لـ $\vec{u}\,\vec{v}$

$$\frac{1}{0} = \frac{2}{3} = \frac{-1}{4}$$

⇐ يوجد عددين α و β يحققان :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

$$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2 &= \alpha + 0\beta & (1)\\ 0 &= 2\alpha + 3\beta & (2)\\ 0 &= -\alpha + 4\beta & (3)\end{aligned}$$

سؤال:

$A=(3,-1,2)$ $B(0,2,4)$

$C=(2,0,-3)$

هل النقاط تقع على استقامة واحدة

الحل: نشكل متجهين ثم ندرس الارتباط الخطي

$\overrightarrow{AB}=(-3,3,2)$

$\overrightarrow{AC}=(-1,1,-5)$

$$\frac{-3}{-1}=\frac{3}{1}\neq\frac{2}{-5}$$

النقاط لا تقع على استقامة واحدة لأن النسب غير متساوية

$\boxed{\alpha=2}$ من (1)

$0=2\times2+3\beta$ من (2)

$$\Rightarrow \boxed{\beta=\frac{-4}{3}}$$

نتحقق من 3

$$0=-2+4\times\frac{-4}{3}$$

$$0\neq\frac{-22}{3}$$

$\Leftarrow$ غير محققة

$\Leftarrow$ يوجد α و β الترين
القيمة

ومنه الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$
غير مرتبطة خطياً

وهيك للكل ...

مثال: معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(0,1,-1)$ $B(1,0,0)$

$C(-1,2,1)$ $D(0,1,2)$

اثبت ان A و B و C و D تنتمي الى مستوٍ واحد

الحل:

لكي تكون A, B, C, D من مستوٍ واحد يجب ان تكون الاشعة الثلاثة مرتبطة خطياً

$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\quad \overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\quad \overrightarrow{AD}=\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$$

اولاً نتحقق من عدم وجود ارتباط خطي لـ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

$$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}=\frac{1}{2}$$

المركبات غير متناسبة

اذاً $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطة خطياً

اذاً يوجد α و β يحققان

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$0=\alpha-\beta$ (1)

$0=-\alpha+\beta$ (2)

$3=\alpha+2\beta$ (3)

من (1) $\Leftarrow \alpha=\beta$

نعوض في (3)

$3=\beta+2\beta$

$3=3\beta \Rightarrow \boxed{\beta=1}$

ومنه $\Rightarrow \alpha=\beta=1$

$\boxed{\alpha=1}$

نتحقق في (2)

$0=-1+1$

$0=0$

محققة

$\Leftarrow$ الاشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً

ومنه A و B و C و D من مستوٍ واحد

ملاحظة:

لو تم الحل (1) و (2) لا نستفيد

لاننا نحصل $0=0$ وهذا غير ممكن

لان 3 لم نقترب منها

الوحدة 5 : معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(3,-1,1)$ $B(3,-3,1)$

والشعاع $\vec{u}(1,0,-2)$ شعاع موجه لـ d

ويمر من A

و $\vec{v}(2,1,3)$ شعاع موجه لـ d' ويمر من B

اثبت تقاطع d , d' وعين I نقطة تقاطعهما

الحل: حتى يكون d , d' متقاطعان

يجب ان يكونا غير متوازيين

ندرس ارتباط $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-2}{3}$$

غير متناسبة ⇐ d , d' غير متوازيان

الآن يجب اثبات ان d و d' يقعان في مستوي واحد من خلال دراسة الارتباط الخطي لثلاثة اشعة

$\vec{u}$ $\vec{v}$ $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$0 = \alpha + 2\beta$ (1)

$-2 = 0\alpha + \beta \Rightarrow \boxed{\beta = -2}$

$-2 = -2\alpha + 3\beta$

نعوض قيمة β في (1)

$0 = \alpha + 2(-2)$

$\boxed{\alpha = 4}$

نعوض في (3)

$-2 = -2(4) + 3(2)$

$-2 = -8 + 6$

$-2 = -2$

محققة

⇐ يوجد ارتباط خطي بين

$\vec{AB}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$

⇐ d و d' متقاطعان في نقطة I

ايجاد I : من

$\vec{AB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$

نجمع I الى $\vec{AB}$ حسب شال

$\vec{AI} + \vec{IB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$

نوازن

$\vec{AI} = 4\vec{u}$ ...(1)

$\vec{IB} = -2\vec{v}$ ...(2)

نأخذ (1) او (2)

$\vec{AI} = 4\vec{u}$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-1 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

بالحل نجد

$I(7,-1,-7)$

أكمل

الوحدة 4 :

$A(2,0,1)$

$B(1,-2,1)$

$C(5,5,0)$

$D(-3,-5,6)$ $E(3,1,2)$

اثبت ان A, B, C, D تنتمي الى مستوٍ واحد P

ثم بين هل E تنتمي الى P ، أم لا

الحل: الانتماء الى مستوٍ P

ارتباط خطي للثلاثة اشعة

نشكل هذه الاشعة

$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AD}$

$(-1,-2,0)$ $(3,5,-1)$ $(-5,-5,+5)$

ندرس الارتباط الخطي لشعاعين $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$

$$-\frac{1}{3} \neq -\frac{2}{5}$$

$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ ⇐ غير متناسبة
غير مرتبطة خطياً

⇐ يوجد α, β يحققان

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$-5 = -\alpha + 3\beta$ ①

$-5 = -2\alpha + 5\beta$ ②

$+5 = -\beta$ ③

من ③ نجد $\boxed{\beta = -5}$

نعوض ① $-5 = -\alpha + 15$

$\boxed{\alpha = -10}$

نتحقق في ②

$-5 = -2(-10) + 5(-5)$

$-5 = 20 - 25$

$-5 = -5$

محقق

⇐ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$
مرتبطة خطياً ومنه
النقاط A, B, C, D من
مستوٍ واحد P

هل E من P

اثبات ان نقطة من مستوي
هو ارتباط خطي للثلاثة
نأخذ ثلاثة اشعة

$\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$

يوجد α, β لان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير
مرتبطة خطياً

$$\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$1 = -\alpha + 3\beta$ (1)

$1 = -2\alpha + 5\beta$ (2)

$1 = -\beta$ (3)

$\Rightarrow \boxed{\beta = -1}$ (3)

من (1)

$1 = -\alpha - 3$

$\boxed{\alpha = -4}$

نتحقق من (2)

$1 = -2(-4) + 5(-1)$

$1 = -8 - 5$

$1 = -13$

غير محقق

لا يوجد ارتباط خطي

ملاحظة الصيغة لا يوجد

الشرط قيمة لـ α, β

ومنه E لا ينتمي الى P

MathTaher

سؤال مهم : مكرر كثير

اثبت ان A, B, C تحدد مستوي

يكون الحل نقوم بدراسة الارتباط الخطي لشعاعين

ويكون عدم وجود هنا الارتباط دليل على ان هذه النقاط تحدد مستوي

مثال:

اثبت ان $A(3, 1, 0)$

$B(2, 1, 4)$

$C(5, -1, 0)$

تشكل مستوي P

الحل: ندرس الارتباط الخطي لشعاعين

$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 4)$

$\overrightarrow{AC} = (2, -2, 0)$

$\frac{-1}{2} = \frac{0}{-2} = \frac{4}{0}$

غير متناسبة

$\Leftarrow A, B, C$ تشكل مستوي P

أهم

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ زاوية$(\vec{u},\vec{v})$ =

الموضوع : ....

الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{v}$

1- عند وجود زاوية نأخذ

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$$

او رسمة

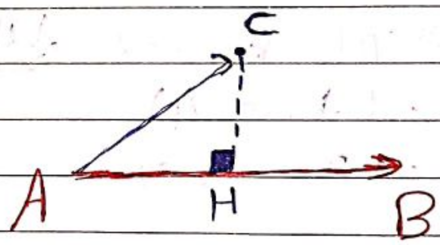
2- عند وجود معلم متعامد نأخذ

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\cdot x' + y\cdot y' + z\cdot z'$$

3- عند وجود احداثيات فقط :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

4- الاسقاط القائم (هام)



H هو مسقط قائم ل C على مستقيم (AB)
عندئذ يكون :

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AH}$$

5- حالة التعامد

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

معلم متعامد منظم

$A(0,1,-3)$ $B(-3,4,1)$
$C(2,1,5)$ $D(1,0,2)$

احسب $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$
$\vec{AC}\cdot\vec{BD}$

الحل: متعامد واحداثيات

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$\vec{AB} = (-3, 3, 4)$
$\vec{AD} = (1, -1, 5)$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AD} = -3\times1 + 3\times(-1) + 4\times5 = -3 - 3 + 20 = 14$$

$\vec{AC} = (2, 0, 8)$
$\vec{BD} = (4, -4, 1)$

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = 2\times4 + 0(-4) + 8\times1 = 8 + 0 + 8 = 16$$

6- هام $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا
ونفس الجهة $\Leftarrow$
زاوية $(\vec{u},\vec{v}) = 0$

7- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا
ومتعاكسان بالجهة $\Leftarrow$
$(\vec{u},\vec{v}) = \pi$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

الموضوع : ....

مثال مميز

احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ حيث

$\vec{u} = (3,1,2) \quad \vec{v}(0,1,4)$

$(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

الحل : يوجد زاوية

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{0+1+16} = \sqrt{17}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{14}\cdot\sqrt{17}\cdot\cos(\frac{\pi}{3})$

$= \frac{\sqrt{238}}{2}$

مثال :

$\vec{u}(3,1,4) \quad \vec{v}(2,-1,5)$

احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$

الحل : لا يوجد معلم متجانس

لا يوجد زاوية اذاً

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = ?$

$\vec{u}+\vec{v} = (5,0,9)$

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{25+0+81} = \sqrt{106}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{106}^2 - \sqrt{26}^2 - \sqrt{30}^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[106 - 26 - 30\right]$

$= \frac{1}{2}\, 50 = 25$

مثال : ليكن

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -4$

$\|\vec{u}\| = 5 \qquad \|\vec{v}\| = 2$

احسب $\boxed{1}$

$\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v}$

$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u}\cdot\vec{v}$

$= 5^2 + (-4) = 21$

$\boxed{2}$

$2\vec{u}\cdot(3\vec{v})$

$= 2\cdot 3(\vec{u}\cdot\vec{v})$

$= 6(-4) = -24$

$\boxed{3}$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 =$

$= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$= 25 + 2(-4) + 4 = 21$

$\boxed{4}$

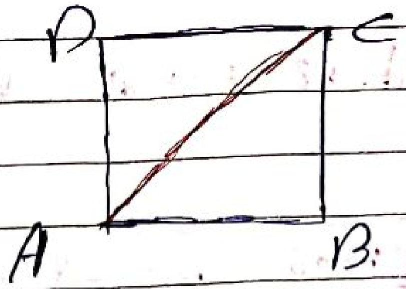
$(2\vec{u} - 3\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) =$ نشر

$= 2\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{v}\cdot\vec{u} - 3\|\vec{v}\|^2$

$= 2\times 25 - 8 + 12 - 3\times 4$

$= 42$

مثال تقريبي لمثال أكبر



ABCD مربع طول ضلعه 5

المطلوب: اوجد $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

الحل:

المطلوب موجود بساعد

لا يوجد تباين ولا احداثيات

الموجود هو رسمة إذاً

لدينا زاوية

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AD}\|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 5 \qquad \|\overrightarrow{AD}\| = 5$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = 90 = \frac{\pi}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 5\times5\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 5$

نوجد DAC بفيثاغورث

$AC = 5\sqrt{2}$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} = 45$$

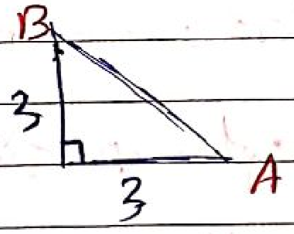
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5\times5\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 25\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 25\times1 = 25$$

ملاحظة من العائلة الجميلة

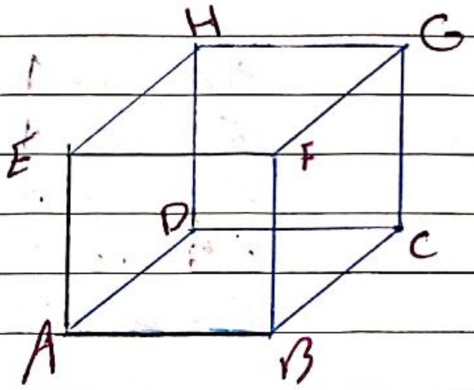
في المثلث القائم المتساوي الساقين يكون طول الوتر هو طول الساق $\times \sqrt{2}$



وتر $AB = 3\sqrt{2}$.

الموضوع : مثال مشاكله من خلاله حضعته الجداء السلمي في الرسم ٣ ، ١ ، ١

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a



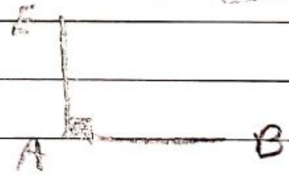
احسب

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$

الحل: لا يوجد احداثيات
يوجد رسمة اذا

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

الزاوية هي A لان A هو مكرر بين
الشعاعين فتكون A هي الزاوية
المحصورة بين F و B



$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AE}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \cos(E\hat{A}B)$

$= a \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{2})$

$= a^2 \times 0$

$= 0.$

*

$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DG} = ?$

$(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DG}) = \frac{\pi}{4}$

$\|\overrightarrow{DG}\| = a\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{DH}\| = a$

$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DG} = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{4})$

$= a^2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$

*

$AF \cdot EB = ?$

لاحظ ان AF و EB قطران للمربع $ABFE$ ⇐
التعامد موجود ومنه

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$

0 بسبب التعامد.

*

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CG}$

هذان شعاعان مرتبطان خطيا
بسبب التوازي
لهما نفس الجهة ⇐ الزاوية
بينهما صفر

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CG} = a \cdot a \cdot \cos(0)$

$= a^2 \times 1 = a^2$

*

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{GC}$

هذان شعاعان مرتبطان خطيا
بسبب التوازي وهما مختلفان بالجهة
⇐ الزاوية بينهما π

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{GC} = a \cdot a \cdot \cos(\pi)$

$= a^2 \cdot (-1) = -a^2$

الموضوع : ....

تمارين شـاملة لإيجاد الحل

1 من 50
1 من 53
2 من 53
3 من 53
تدريب 56

* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$

الحل : لا يوجد زاوية
لا يوجد اسقاط ظاهر
لا يوجد تعامد

هنا نقوم بزرع نقطة مثلاً A

$\overrightarrow{AB} [\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ الزاوية

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$ الزاوية

$= -0 + a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= a^2 \cdot \frac{2}{2} = a^2$

* $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH}$

لا يوجد زاوية ولا اسقاط
ولا تعامد لكن يوجد
تبديل اذاً نبدل

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{CH}$

الزاوية H المحصورة بين D و C
وهي $\frac{\pi}{4}$ ⇐ الحل السابق a^2

الموضوع: مثال مهم يشمل فكرتين من الأشباه الخطية لثلاث أشعة Taher

13 الوحدة معلم متجانس
$A(3,2,1)$ $B(1,2,0)$
$C(3,1,-2)$

1- اثبت ان A، B، C ليست على استقامة واحدة

الحل: نوجد مركبات شعاعين
$\overrightarrow{AB} = (-2,0,-1)$
$\overrightarrow{AC} = (0,-1,-3)$

ندرس الأشباه الخطية
$$\frac{-2}{0} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$$
غير متناسبة

ومنه لا يوجد ارتباط خطي بين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ اذا فالنقاط لا تقع على استقامة واحدة

2- عين قيمة للوسيط m تكون $M(m,1,3)$ من المستوي (ABC)

الحل: حتى تكون M من هذا المستوي نقوم بدراسة الارتباط الخطي لثلاث اشعة مثل
$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AM}$

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا $\Leftarrow$ يوجد α و β تحقق

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{bmatrix} m-3 \\ -1 \\ +2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$m-3 = -2\beta$ *
$-1 = -\alpha \Longrightarrow \boxed{\alpha = 1}$
$2 = -3\alpha - \beta \Longrightarrow$

$2 = -3 - \beta \Longrightarrow \boxed{\beta = 5}$

نعوض في *
$m - 3 = -2(5)$
$m - 3 = -10 \Longrightarrow \boxed{m = -13}$

3- ما العلاقة بين x و y لتقع A، B، C، و $D(x,y,3)$ في مستوي واحد

الحل: نريد اثبات ان اربع نقاط من مستوي واحد $\Leftarrow$ ارتباط خطي لثلاث اشعة مثل:
$\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$
ولدينا ان $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطيا $\Leftarrow$ يوجد α و β يحققان:
$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\alpha - 2\beta \\ -\alpha + 0\beta \\ -3\alpha - \beta \end{bmatrix}$$

$x - 3 = -2\beta \Longrightarrow \beta = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
$y - 2 = -\alpha \Longrightarrow \alpha = -y + 2$
$2 = -3\alpha - \beta$

$2 = -3[-y+2] - [-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}]$
نرتب

$x + 6y = 19$

14 المسألة:

ع مجموعة نقاط $M(x,y,z)$ تحقق
$$x-2y+3z-5=0$$

1- اثبت ان النقاط $A(7,1,0)$ $B(5,0,0)$ $C(2,0,1)$ تنتمي الى ع

الحل: نعوض نفس الاحداثيات لهذه النقاط في ع

أولاً

نعوض $A(7,1,0)$ في ع:

$$x-2y+3z-5=0$$
$$7-2(1)+3(0)-5=0$$
$$7-2+0-5=0$$
$$0=0$$

محقق $\Leftarrow$ $A\in$ ع

وهكذا يكون لـ B و C للمعلم

2- اثبت ان A, B, C تعين مستوي

الحل: ندرس الأشعة الخطية شعاعية $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,0)$ $\overrightarrow{AC}(-5,-1,1)$

$$\frac{-2}{-5}\neq\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{1}$$

غير متناسبة

$\Leftarrow$ لا يوجد ارتباط خطي $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

ومنه A, B, C تعين مستوي P

3- اثبت ان مركبات $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y-3z, y, z)$

الحل: $M(x,y,z)$ $B(5,0,0)$

$\overrightarrow{BM}(x-5, y, z)$

لاحظ: المطلوب هو كتابة احداثيات $\overrightarrow{BM}$ بدلالة y , z فقط

اذا من:

$$x-2y+3z-5=0$$
$$x-5=+2y-3z$$

$\overrightarrow{BM}(2y-3z, y, z)$

تم المطلوب.

4- استنتج ان $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$ وماذا يمكن الاستنتاج منها

$$\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$$
$$(2y-3z, y, z)=y(2,1,0)+z(-3,0,1)$$
$$\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$$

محققة

نستنتج ان هذه الاشعة مرتبطة خطياً ومنه A, B, C, M تقع في مستوي واحد

5- بالعكس اثبت ان اي نقطة $M(x,y,z)$ من مستوي P تحقق

$$x-2y+3z-5=0$$

ماهي المجموعة E

الحل: نريد اثبات ان M من مستوي

نقطة من مستوي اذا

الارتباط الخطي لثلاث اشعة موجود

$$\vec{AM}=\alpha\,\vec{AB}+\beta\,\vec{AC}$$

حيث تم في الطلب الثاني اثبات ان $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ غير مرتبطة خطية

$$\begin{bmatrix} x-7 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x-7=-2\alpha-5\beta$ (1)

$y-1=-\alpha-\beta$ (2)

$z=0\alpha+\beta$ (3)

من (3) $\boxed{z=\beta}$ نعوض في 2

$y-1=-\alpha-z$

$\Rightarrow \alpha=-y-z+1$

نعوض في (1)

$x-7=-2[-y-z+1]-5z$

$x-7=+2y+2z-2-5z$

$x-7=2y-3z-2$

$x-2y+3z-5=0$

⇐ فعلاً M من المستوي P

والمجموعة E هي نفسها P.

Math-Taher

15 الوحدة

م حل مثال مشابه له

وهو المثال ٢ من الوحدة

16 الوحدة

جد على محور السينات C متساوية البعد عن $A(2,-1,3)$ $B(0,5,-1)$

الحل:

C تقع على محور السينات $C(x,0,0)$

ومتساوية البعد اذا $AC=BC$

$$\sqrt{(x-2)^2+(1)^2+(-3)^2}=\sqrt{(x)^2+(-5)^2+(1)^2}$$

نربع

$$(x-2)^2+1+9=x^2+25+1$$

: نحل ونبسط

$x=-3$

$C(-3,0,0)$

أ. طاهر

19.

الوحدة:

$A(2,3,0)$ $B(2,3,6)$

$M(4,-1,2)$

نهدف الى حساب بعد M عن (AB)

1- اثبت ان M لا تقع على المستقيم (AB)

الحل: لاثبات ان M لا تنتمي الى المستقيم (AB) يجب اثبات عدم وجود ارتباط خطي لشعاعين

$\overrightarrow{MA}$ $\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MA} = (-2,4,-2)$ $\overrightarrow{MB}(-2,4,4)$

$$\frac{-2}{-2} = \frac{4}{4} \neq \frac{-2}{4}$$

غير متناسبة ⇐ لا يوجد ارتباط ⇐ M لا تقع على المستقيم (AB)

2- اثبت ان كل نقطة K من (AB) احداثيات من النوع $(2,3,Z)$

الحل: $K(x,y,Z)$

K من (AB) ⇐ يوجد ارتباط خطي لشعاعين

$\overrightarrow{AK}$ $\overrightarrow{AB}$

اي:

$\overrightarrow{AK} = t\,\overrightarrow{AB}$ $t \in R$

$$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \\ Z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$y-3=0 \Rightarrow y=3$

$Z=6t \Rightarrow Z=6t$

$K(2,3,6t)$

$K(2,3,Z)$

3- احسب MK^2 بدلالة Z

$$MK = \sqrt{(2-4)^2+(3+1)^2+(Z-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+16+(Z-2)^2}$$

نربع

$$MK^2 = 20 + (Z-2)^2.$$

4: عند اي قيمة Z تكون MK اصغر ما يمكن وحدد بعد M عن AB

تكون MK اصغر ما يمكن عندما

$Z=2$

$MK^2 = 20+0 = 20$

والبعد لـ M عن AB

$MK = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

أ. طاهر

Math-Taher

معادلة المستوي

$P: ax+by+cz+d=0$

كل مستوي يحتاج الى ناظم ونقطة

الناظم $\vec{n}(a,b,c)$ هو شعاع عمودي على المستوي دائماً

وكل مستوي يحتوي على عدد كبير منه من الأشعة الناظمية

الناظم يضرب بأي عدد حسب ما نريد

أكتب معادلة مستوي P يمر من $A(3,11,2)$ ويقبل شعاع ناظمي $\vec{n}(\underset{a}{-3},\underset{b}{1},\underset{c}{2})$

الحل:

$-3x+y+2z+d=0$

$A \in P$

$-3(3)+1(11)+2(2)+d=0$

$-9+11+4+d=0$

$d=-6$

$P: -3x+y+2z-6=0$

أ. ماهر

ملاحظة: اي شعاع يعامد مستوي يكون ناظم للمستوي.

أكتب معادلة مستوي يقبل النقطة $A(1,2,3)$ ويعامد الشعاع $\vec{u}=(5,4,2)$

الحل:

P ← ناظم $\vec{n}$ ، نقطة A معلوم

فرع

الشعاع $\vec{u}$ يعامد المستوي P اذاً $\vec{u}$ ناظم على المستوي

$P: 5x+4y+2z+d=0$

$A \in P$

$5+8+6+d=0$

$d=-19$

$P: 5x+4y+2z-19=0$

تدريب صفحة 59 دراسة

ملاحظة: متى يكون $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم لمستوي يجب ان يكون $\vec{n}$ عمودي على شعاعين من المستوي غير مرتبطان خطياً

اثبت ان $\vec{n}(0,1,1)$ ناظم المستوي P الذي يقبل شعاعين:

$\vec{u}(3,-1,1)$

$\vec{v}(-3,2,-2)$

الحل:

يكون $\vec{n}$ ناظم لـ P اذا كان $\vec{n}$ عمودي لـ $\vec{v}, \vec{u}$ غير المرتبطان خطياً

$$\frac{3}{-3} \neq \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$$

غير متناسبة ⇐ $\vec{v}, \vec{u}$ غير مرتبطة خطياً

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0\times 3 + 1\times(-1) + 1(1) = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\vec{u} \perp \vec{n}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0(-3) + 1(2) + 1(-2) = 0 + 2 - 2 = 0$$

$$\vec{n} \perp \vec{v}$$

⇐ $\vec{n}(0,1,1)$ ناظم للمستوي P

انتبه انو $\vec{n}$

حتى يكون ناظم لازم

معامد لشعاعين من P

غير مرتبطان خطياً

يمكن ضرب الناظم بأي عدد

$\vec{n}(\frac{1}{3}, 5, 7)$

نضرب بـ 3

$\vec{n}(1, 15, 21)$

$\vec{n}(\frac{2}{9}, \frac{7}{3}, 1)$

نضرب بـ 9

$\vec{n}(2, 21, 9)$

Taher Math

/ /

الموضوع : ....

الوضع بين مستويين P ، Q

P $\quad$ Q

$ax + by + cZ + d = 0$ $\quad\quad$ $a'x + b'y + c'Z + d' = 0$

نأخذ ناظم P و Q

$\vec{n}_P(a, b, c)$ $\quad\quad$ $\vec{n}_Q(a', b', c')$

ندرس الارتباط الخطي

لا يوجد ارتباط خطي

نفحص شرط التعامد $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$

اذا لم يكون تعامد يكون تقاطع $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q \neq 0$.

يوجد ارتباط خطي

المستوي P يوازي Q

$\vec{n}_P = \vec{n}_Q$

نفس الناظم

اكتب معادلة مستوي P يوازي المستوي $Q: 3x - 2y + 5Z + 1 = 0$.

ويمر من $A(1, 3, 5)$

الحل: بما ان P يوازي Q $\Leftarrow$ لهما نفس الناظم

$\vec{n}_P = \vec{n}_Q = (3, -2, 5)$

$P: 3x - 2y + 5Z + d = 0$

$A \in P$

$3 - 2 \times 3 + 5 \times 5 + d = 0 \Rightarrow d + 22 = 0$

$d = -22$

$P: 3x - 2y + 5Z - 22 = 0$

2 تدريب صفحة 59 درب نفسك

$$\vec{n}\cdot\vec{n'} = xx' + yy' + zz'$$

الموضوع : ....

ادرس وضع المستويين

$P: 3x-2y+5z-1=0$

$Q: 6x-4y+10z=0$

الحل: نأخذ نواظم P و Q

$\vec{n_P}=(3,-2,5)$

$\vec{n_Q}=(6,-4,10)$

ندرس الأشعة الناظمية

$$\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{5}{10}$$

المركبات متناسبة ⇐ P و Q متوازيان

$P: x-2y+z-1=0$

$Q: -x-3y+5z-1=0$

الحل

$\vec{n_P}=(1,-2,1)$

$\vec{n_Q}=(-1,-3,5)$

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{1}{5}$$

لا يوجد تناسب ⇐ لا يوجد توازي

هل يوجد تعامد؟

$\vec{n_P}\cdot\vec{n_Q} = 1\times(-1)+(-2)(-3)+1\times5$

$= -1+6+5 = 10 \neq 0$

لا يوجد تعامد

⇐ P و Q متقاطعان.

$P: 7x+3y-z-1=0$

$Q: 2x-3y+5z=0$

الحل:

$\vec{n_P}=(7,3,-1)$

$\vec{n_Q}=(2,-3,5)$

$$\frac{7}{2} \neq \frac{3}{-3} \neq \frac{-1}{5}$$

لا يوجد ارتباط خطي

هل يوجد تعامد؟

$\vec{n_P}\cdot\vec{n_Q} = 7\times2+3\times(-3)+(-1)\times5$

$= 14-9-5=0$

يوجد تعامد ⇐ P, Q متعامدان

تذكر: مستويان متوازيان مستويان لهما نفس الناظم

بعد نقطة عن مستوي

$P: ax+by+cz+d=0$

$A(x_0,y_0,z_0)$ بعد A عن P يعطى

$$Dist(A,P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

4 , 3 من 59

مثال: احسب بعد $A(5,-3,4)$ عن المستوي $P: 2x-y+3z-5=0$

الحل: $Dist(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\frac{|5\times 2-3\times(-1)+4\times 3-5|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{20}{\sqrt{14}}$$

$B(2,\ 2,\ 5)$

$Q:\ y-z=0$

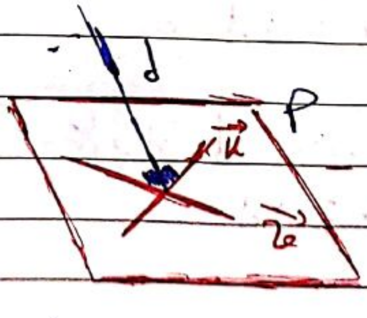
الحل:

$Dist(B,Q)=$

$$=\frac{|2\times 0+2\times 1+5\times(-1)+0|}{\sqrt{0+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

تعامد مستوي ومستقيم

نقول عن المستقيم d انه عمودي على P اذا كان عمودي على شعاعين منه غير مرتبطان خطياً



$d\perp\vec{v}$ $\quad$ $d\perp\vec{u}$

مثال: اثبت ان المستقيم (AB) يعامد المستوي P حيث

$A(0,1,\frac{1}{2})$ $\quad$ $B(2,4,1)$

وشعاعي المستوي P الشعاعين

$\vec{u}=(1,-1,2)$ $\quad$ $\vec{v}(-3,2,0)$

الحل: يكون (AB) عمودي على مستوي P اذا كان الشعاع الموجه للمستقيم (AB) وهو $\vec{AB}$ عمودي على شعاعين من P غير مرتبطان خطياً وهما $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\frac{1}{-3}\neq\frac{-1}{2}\neq\frac{2}{0}$$

غير مرتبطة خطياً

نوجد $\vec{AB}=(2,+3,\frac{1}{2})$

$\vec{AB}\cdot\vec{u}=2(1)+3(-1)+\frac{1}{2}(2)=0$ تعامد

$\vec{AB}\cdot\vec{v}=2(-3)+3(2)+\frac{1}{2}(0)=0$ تعامد

$\Leftarrow$ $\vec{AB}$ يعامد كلاً من $\vec{u}$, $\vec{v}$

$\Leftarrow$ (AB) يعامد P.

درب نفسك السؤال 7 من الوحدة

/ / الموضوع: 4 تمارين متنوعة في الحل الاختلاف بسيط

التمرين الاولى
اكتب معادلة مستوي يعرف
ثلاث نقاط
$A(3,1,2)$ $B(2,-1,5)$
$C(1,0,3)$

الحل: اولاً يجب اثبات ان النقاط
تشكل مستوي
اذا تشكل مستقيمة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
وندرس الارتباط الخطي
$\overrightarrow{AB}=(-1,-2,3)$
$\overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)$ Taner

$$\frac{-1}{-2}\neq\frac{-2}{-1}\neq\frac{3}{1}$$

غير متناسبة اذا A وB وC تشكل مستوي

ثانياً نفرض الناظم على المستوي (ABC)
$\vec{n}(a,b,c)$
الناظم يحقق انه يكون عمودي على
شعاعين من المستوي غير مرتبطان
خطياً هما $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$(a,b,c)(-1,-2,3)=0$
$-a-2b+3c=0$ —— (1)

$(a,b,c)(-2,-1,1)=0$
$-2a-b+c=0$ —— (2)

$-a-2b+3c=0$
$-2a-b+c=0$

معادلتين بثلاث مجاهيل
نفرض ان $\boxed{a=1}$ غير الصفر

لان الحل غير منتهٍ من
الاشعة الناظمة

$-1-2b+3c=0$
$-2-b+c=0$ } الحل

$-2b+3c=+1$
$-b+c=+2$ *
نضرب * بـ -3 ثم نجمع
$3b-3c=-5$

$\boxed{b=-5}$

نعوض في * لايجاد C

$+5+c=2\Rightarrow\boxed{c=-3}$

$\Rightarrow\vec{n}(1,-5,-3)$
$P: ax+by+cz+d=0$
$P: x-5y-3z+d=0$

لايجاد d نأخذ $A\in P$
$3-5\times1-3\times2+d=0$
$d=+8$

$P: x-5y-3z+8=0$

أ. علي

Math Taher

/ /

الموضوع : ....

درب نفسك :

اثبت ان معادلة المستوى المار من ثلاث نقاط
$A(0,1,0)$
$B(-1,1,0)$ $C(-1,-2,-3)$
تعطى بالشكل :
$y - z - 1 = 0$.

التمرين الثاني

اكتب معادلة المستوي P
الذي يعامد المستوي Q
$Q: 3x - 2y + 5z - 1 = 0$
ويقبل نقطتين
$A(2,3,1)$ $B(0,1,4)$

الحل :

نفرض $\vec{n}_P(a,b,c)$ ناظم لـ P ولكن
المستوي P يقبل نقاط A, B $\Leftarrow$
$\vec{n}_P \perp \vec{AB}$
$\vec{n}_P \cdot \vec{AB} = 0$. ; $\vec{AB}(-2,-2,3)$

المستوي P يعامد Q $\Leftarrow$
$\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$ $\vec{n}_Q(3,-2,5)$

$$\begin{cases} -2a - 2b + 3c = 0 \\ 3a - 2b + 5c = 0 \end{cases}$$

نفرض ان $\boxed{c=1}$

$-2a - 2b + 3 = 0$ *

$3a - 2b + 5 = 0$

بالطرح

$-5a - 2 = 0$

$\boxed{a = -\frac{2}{5}}$ أم

نعوض في *

$-2\left[\frac{-2}{5}\right] - 2b + 3 = 0$

$\frac{4}{5} - 2b + 3 = 0$

$-2b = \frac{-19}{5} \Rightarrow \boxed{b = \frac{19}{10}}$

$\vec{n}_P\left(-\frac{2}{5}, \frac{19}{10}, 1\right)$

يمكن اصلاح الناظم نضرب بـ 10

$\vec{n}_P(-4, 19, 10)$

$P: -4x + 19y + 10z + d = 0$

لايجاد d نأخذ $A \in P$

$-4(2) + 19(3) + 10(1) + d = 0$

$-8 + 57 + 10 + d = 0$

$d = -59$

$P: -4x + 19y + 10z - 59 = 0$.

درب نفسك

التمرين 4 من الوحدة .

الموضوع : ....

التمرين 3

اكتب معادلة مستوي P يعامد المستويين

$R: 3x - y + Z + 1 = 0$

$Q: 2x - y + 2Z - 4 = 0$

ويمر من النقطة $A(0,1,0)$

الحل: $P: ax + by + cZ + d = 0$

نفرض أن الناظم P وليكن $\vec{n}_p(a,b,c)$

$P \perp R \Rightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n}_R = 0$

$\vec{n}_R = (3,-1,1)$

$3a - b + c = 0$

$P \perp Q \Rightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = 0$

$\vec{n}_Q = (2,-1,2)$

$2a - b + 2c = 0$

$$\begin{cases} 3a - b + c = 0 \\ 2a - b + 2c = 0 \end{cases}$$

نفرض $\boxed{a = 1}$

$3 - b + c = 0 \quad *$

$2 - b + 2c = 0$ بالطرح

$1 - c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 1}$

نعوض في $*$

$3 - b + 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{b = 4}$

$\vec{n}_p = (1, 4, 1)$

$P: x + 4y + Z + d = 0$

$A \in P$

$0 + 4 + 0 + d = 0$

$d = -4$

أ.طاهر

$P: x + 4y + Z - 4 = 0$

درب نفسك :

اثبت ان معادلة المستوي P العمودي على المستويين

$R: x - 2y + 3Z - 5 = 0$

$Q: x + y + Z + 11 = 0$

ويمر من $A(2,5,-2)$

معادلته هي:

$5x - 2y - 3Z - 6 = 0$

MathTaher

التمرين الرابع

اكتب معادلة مستوي يمر من $A(3,0,4)$ ويقبل

$\vec{u}(2,-1,4)$

$\vec{v}(3,1,2)$

اشعة توجيه

الحل: ندرس الارتباط الخطي $\vec{v},\vec{u}$

$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{4}{2}$

غير متناسبة ⇐

غ مرتبطان خطيا ومنه

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ الناظم للمستوي P يكون عمودي على $\vec{v},\vec{u}$

$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0$

$2a-b+4c=0$

$\vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v}=0$

$3a+b+2c=0.$

نفرض $c=1$

$2a-b+4=0$ *

$3a+b+2=0$

بالجمع

$5a+6=0$

$a=\frac{-6}{5}$

نعوض في *

$2\left(\frac{-6}{5}\right)-b+4=0$

$\frac{-12}{5}-b+4=0 \Rightarrow b=\frac{8}{5}$

$\vec{n}\left(\frac{-6}{5},\frac{8}{5},1\right)$

$\vec{n}(-6,8,5)$ أ. ظاهر

$P: -6x+8y+5z+d=0$

$A \in P$

$-6(3)+8\times 0+5(4)+d=0$

$-18+0+20+d=0$

$d=-2$

$P: -6x+8y+5z-2=0.$

أكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة [CD]

$C=(1,2,3)$ $\quad D(3,2,4)$

الحل: نوجد الناظم $\vec{n}=\vec{CD}$

$\vec{n}=(2,0,1)$

نحتاج الى نقطة
كلمة محوري اي انه يمر من منتصف القطعة [CD] مهم
اي منتصف [CD] وليكن I هو من المستوي

$I\in P$ منتصف [CD]

$$I\left(\frac{3+1}{2},\frac{2+2}{2},\frac{3+4}{2}\right)$$

$$=\left(2,2,\frac{7}{2}\right)$$

$$P: 2x+0y+z+d=0$$

$$I\in P$$

$$2\times 2+0+\frac{7}{2}+d=0$$

$$\frac{15}{2}+d=0$$

$$d=-\frac{15}{2}$$

$$P: 2x+0y+z-\frac{15}{2}=0$$

أكتب معادلة مستوي محوري للقطعة [AB]

$A(1,3,-1)$

$B(1,1,1)$

أ.ماهر

تستطيع ايجاد الحل لكامله الصفحة 27

تذكر جيداً

المستوي المحوري للقطعة [AB]
ناظم هذا المستوي هو شعاع القطعة
$\vec{n}=\vec{AB}$

اما النقطة هي منتصف [AB]

أ.ماهر

(من المستقيم ( )) ومن القطعة المستقيمة [ ] نصف المستقيم [ )

الموضوع : ....

المستقيم d

التمثيل الوسيطي للمستقيم

يحتاج الى شعاع موجه ونقطة

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

شعاع موجه $\vec{u} = (a, b, c)$

$A(x_0, y_0, z_0) \quad A \in d$

أكتب معادلات التمثيل المستقيم d يقبل شعاع موجه $\vec{u} = (1, 3, 5)$ ويشمل $A(2, 0, 4)$

الحل:

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 0 \\ z = 5t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

ماهر

أكتب معادلات التمثيل الوسيطي مستقيم يشمل النقطتين A و B

$A(2, 1, 4) \quad B(1, 3, 5)$

$$\vec{AB} = (-1, 2, 1)$$

$$(AB): \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$A \in d$

ماهر

التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة [AB]

$$[AB]: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; \; t \in [0, 1]$$

أكتب معادلة التمثيل الوسيطي للقطعة [AB] حيث

$A(3, 1, 2) \quad B(1, 0, 5)$

الحل: $\vec{u} = \vec{AB} = (-2, -1, 3)$

$$[AB] = \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

ماهر

التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم [AB)

$$[AB) \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \quad t \in [0, +\infty[$$

أكتب معادلات التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم مبدأه $\underline{A}$

$A(1, 2, 3) \quad B(2, 3, 5)$

الحل: P_1 [AB) $\Leftarrow$ $\vec{AB} = (1, 1, 2)$

$$[AB): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \quad t \in [0, +\infty[$$

P_2 نستخرج الآن [BA)

$\vec{BA} = (-1, -1, -2)$

$$[BA) = \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad t \in]-\infty, 0]$$

لأن المبدأ هو A واذا عكسنا المبدأ

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي

نعوض المستقيم في المستوي

نميز الحالات :

$0 = 0$

يكون d محتوى في P

$d \in P$

٢. ظاهر

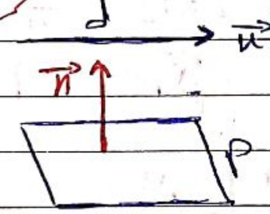
عدد $\neq$ عدد

يكون d و P متوازيان

هذه الحالة تحقق

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

لأن :



نلاحظ $\vec{u} \perp \vec{n}$

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

يكون d و P متوازيان

نوجد قيمة t

أي

$t =$ عدد

يكون d و P متقاطعان

يمكن بشرط :

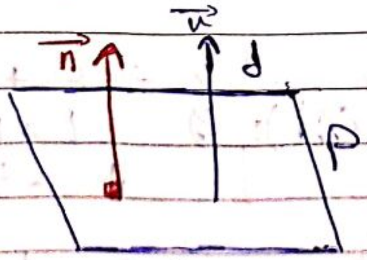
عدم وجود ارتباط خطي لأن هذا الارتباط يعني تعامد

التعامد حالة خاصة من التقاطع

المهم :

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ توازي وليس تعامد

$\vec{n} , \vec{u}$ مرتبطان خطياً نوجد تعامد وليس توازي $\Rightarrow \vec{u} = \vec{n}$



أي $\vec{u}$ الذي يمثل d يعمل عمل الناظم

$\vec{u} = \vec{n}$

Taher - SX

الموضوع : ....

ادرس الوضع النسبي لـ d و P

$$d: \begin{cases} x = t-1 \\ y = -t-2 \\ z = -4t-4 \end{cases} \quad t \in R$$

$P: x-3y+z-1=0$

الحل: نعوض d في P

$x-3y+z-1=0$

$t-1-3(-t-2)+(-4t-4)-1=0$

$t-1+3t+6-4t-4-1=0$

$0=0$

⇐ d محتوى في P.

$P: x-3y+z-1=0$

$$d: \begin{cases} x = t-1 \\ y = -t-2 \\ z = -4t-3 \end{cases} \quad t \in R$$

الحل: نعوض d في P

$x-3y+z-1=0$

$t-1-3(-t-2)+(-4t-3)-1=0$

$t-1+3t+6-4t-3-1=0$

$1 \neq 0$

⇐ d و P متوازيان

يمكن ايجاد الحل بالطريقة

$\vec{u}\cdot\vec{n} = (1,-1,-4)(1,-3,1)$

$= 1+3-4 = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

⇐ d و P متوازيان

$P: 4x+6y+2z-20=0$

$$d: \begin{cases} x = 2t-3 \\ y = 3t+1 \\ z = t-1 \end{cases} \quad t \in R$$

الحل: نعوض d في P

$4(2t-3)+6(3t+1)+2(t-1)-20=0$

$8t-12+18t+6+2t-2-20=0$

$28t-28=0$

$\boxed{t=1}$

يوجد قيمة لـ t

⇐ P و d متقاطعان وقد يكون هذا التقاطع هو تعامد: نختبر التعامد

التعامد هو ارتباط خطي لـ $\vec{u}$ و $\vec{n}$

$\vec{u} = (2,3,1)$

$\vec{n} = (4,6,2)$

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ أي

يوجد ارتباط خطي ⇐

P و d متعامدان في النقطة A

نعوض $t=1$ في d

$x = 2-3 = -1$

$y = 3+1 = 4$

$z = 1-1 = 0$

$A(-1,4,0)$

الموضوع : ....

$P: x - y + z - 3 = 0$

$$d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

الحل: نعوض d في P

$t - 1 - 2t - t + 2 - 3 = 0$

$-2t - 2 = 0$

$\boxed{t = -1}$

توجد قيمة لـ t تحقق

نختبر التعامد هو الارتباط الخطي

$\vec{u} = (1, 2, -1) \qquad \vec{n}: (1, -1, 1)$

$\frac{1}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{-1}{1}$

لا يوجد ارتباط خطي

$\Leftarrow$ P و d متقاطعان في النقطة A

نعوض $t = -1$ في d

$x = -2$

$y = -2$

$z = 3$

$A(-2, -2, 3)$

الموضوع : ....

الوضع النسبي لمستقيمين

$d_2 \quad \overrightarrow{u_2}$ $\qquad$ $d_1 \quad \overrightarrow{u_1}$

1- يوجد ارتباط خطي ⟵ متوازيان

2- $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$ ⟵ متعامدان

3- لا يوجد ارتباط : نميز

تقاطع

يوجد بالحل المشترك قيمة واحدة لـ s و t

تخالف

يوجد بالحل المشترك أكثر من قيمة لـ s و t

سؤال دورة :

متى يقع d_1 و d_2 في مستوي واحد

الحل: يقع d_1 و d_2 في مستوي واحد في حالة التوازي والتعامد والتقاطع فقط

لكن في حالة التخالف يكون كل من d_1 و d_2 في مستوي خاص

Taher math - sy

ادرس الوضع النسبي
هل d_1 و d_2 في مستوى واحد علل

$$d_1: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t+3 \\ z = 2t+2 \end{cases} \quad t \in R$$

$$d_2: \begin{cases} x = 2s+3 \\ y = 6s+2 \\ z = 4s-1 \end{cases} \quad s \in R$$

الحل: d_1 موجه $\vec{u} = (1,3,2)$
d_2 موجه $\vec{v} = (2,6,4)$

ندرس الأرتباط
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$

$\Leftarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً
$\Leftarrow$ d_1 و d_2 متوازيان
اي هما في مستوى واحد حسب التوازي

أ. ماهر

$$d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t+3 \end{cases} \quad t \in R$$

$$d': \begin{cases} x = 2s-1 \\ y = s+1 \\ z = -2s+13 \end{cases} \quad s \in R$$

ماهر

الحل: $\vec{u}(1,2,3)$ موجه d
$\vec{v}(2,1,-2)$ موجه d'

ندرس الأرتباط الخطي
$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$$

لا يوجد ارتباط

بالحل المشترك
$$t+1 = 2s-1$$
$$2t-1 = s+1$$
$$3t+3 = -2s+13$$

بالاختزال:
$t-2s = -2$ ①
$2t-s = +2$ ②
$3t+2s = 10$ ③

من ① و ②
نضرب ① -2 ثم نجمع مع ②

$+3s = 6 \Rightarrow \boxed{s=2}$

نعوضها في ①
$t-4 = -2 \Rightarrow \boxed{t=2}$

نتحقق في ③
$$3(2)+2(2) = 10$$
$$6+4 = 10$$
$$10 = 10$$

محققة $\Leftarrow$ d و d' متقاطعان في A
نعوض $t=2$ و $s=2$
$A = (3,3,9)$
ومنه d و d' يقعان في مستوي واحد

هل d_1 ، d_2 يقعان في مستوى واحد

$$d_1 \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 3t+3 \end{cases} \quad t \in R$$

$$d_2 : \begin{cases} x = 2s-1 \\ y = s+1 \\ z = -2s+2 \end{cases} \quad s \in R$$

الحل:

$\vec{u} = (1, 2, 3)$ موجه لـ d_1

$\vec{v}\,(2, 1, -2)$ موجه لـ d_2

ندرس الأشباه

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{1}$$

لا يوجد تناسب

الحل المشترك

أ.م.ه

$t + 1 = 2s - 1$
$2t - 1 = s + 1$
$3t + 3 = -2s + 2$

بالإصلاح

$t - 2s = -2$ * ①
$2t - s = 2$ ②
$3t + 2s = -1$ ③

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نضرب * بـ -2

$3s = 6$
$s = 2$

من *
$t - 2(2) = -2$
$t - 4 = -2$
$\boxed{t = 2}$

أ.م.ه

نعوض في ③ للتحقق

$3(2) + 2(2) = -1$
$6 + 4 = -1$
$10 \neq -1$

غير محققة

$\Leftarrow$ d_1 و d_2 متخالفان

أي كل منهما يقع في مستوى

أ.م.ه

/ / الموضوع : ....

اثبت تقاطع P_1 و P_2 ثم أكتب معادلة الفصل المشترك

هنا

$P_1: x - y + 2z - 3 = 0$

$P_2: 2x - y + z - 4 = 0$

ملاحظة: معادلة الفصل المشترك هي معادلات التمثيل الوسيطية d

الحل: P_1 في $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$

P_2 في $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$

ندرس الارتباط $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{2}{1}$

لا يوجد تناسب

$\Leftarrow$ تقاطع اذاً

$x - y + 2z - 3 = 0$

$2x - y + z - 4 = 0$

بالطرح

$-x + z + 1 = 0$

ومنه نضع $\boxed{z = t}$ مثلاً

نسمي الوضع لأجل التعيين

$-x + t + 1 = 0$

$\boxed{x = t + 1}$

نعوض y نعوض في P_1

$t + 1 - y + 2t - 3 = 0$

$y = 3t - 2$

اذاً معادلات التمثيل الوسيطية

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أو لاحظ

B

$P_1: x + y = 2$

$P_2: x + z = 1$

الحل: $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$

$\vec{n}_2 = (1, 0, 1)$

لا يوجد ارتباط $\frac{1}{1} = \frac{1}{0} = \frac{0}{1}$

تقاطع $\Leftarrow$

$x + y = 2$

$x + z = 1$

لا داعي للحل المشترك. نأخذ مباشرة قيمة y و z لأن x مشترك معهم

$y = 2 - x$

$z = 1 - x$

نفرض $x = t$

$y = 2 - t$

$z = 1 - t$

ومنه المعادلات الوسيطية

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

اثبت التقاطع ثم اكتب معادلة التقاطع الوسيطية

$P_1 : -x + y + z = 3$

$P_2 : 2x - y = 1$

الحل:

$P_1 \quad \vec{n}_1 = (-1, 1, 1)$

$P_2 \quad \vec{n}_2 = (2, -1, 0)$

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{-1} = \frac{1}{0}$$

لا يوجد تناسب

$\Leftarrow$ P_1 و P_2 متقاطعان

ومنه الفصل المشترك

يكون: بما أن P_2 يحوي مجهولين نوجد احداهما بدلالة الآخر

من P_2 : $y = 2x - 1$

نضع $x = t$

$y = 2t - 1$

نعوض في P_1

$-t + 2t - 1 + z = 3$

$z = -t + 4$

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad t \in R$$

[illegible]

الموضوع : ....

اعط تمثيل وسيطي للمستقيم d_1 ثم بين هل d_1 و d_2 متوازيان ام d_1 منطبق مع d_2

$$d_1 \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad d_2 \begin{cases} x = s \\ y = -s \\ z = 2s - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

الحل: d_1 هو عبارة عن مستويين $\vec{n_1}(3,-1,-2)$

$\vec{n_2}(1,-1,-2)$

لا يوجد تناسب بين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ ومنه متقاطعان بالحل:

$$3x - y - 2z = 1$$

$$* \; x - y - z = 0$$

بالطرح:

$$2x - z = 1 \Rightarrow z = 2x - 1$$

$* $ نعوضه $z = 2t - 1 \Leftarrow \boxed{x = t}$ نفرض

$$t - y - (2t - 1) = 0$$

$$t - y - 2t + 1 = 0 \Rightarrow y = -t + 1$$

ومنه التمثيل الوسيطي

$$d_1 \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

دراسة التوازي او التطابق:

$\vec{u_2}(1,-1,2)$ $\qquad \vec{u_1} = (1,-1,2)$

نلاحظ ان $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطان خطيا $\Leftarrow$ d_1 و d_2 متوازيان

نبحث عن التطابق بالحل المشترك

$$\begin{cases} ① \; t = s \\ ② \; -t - 1 = -s \\ 2t - 1 = 2s - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

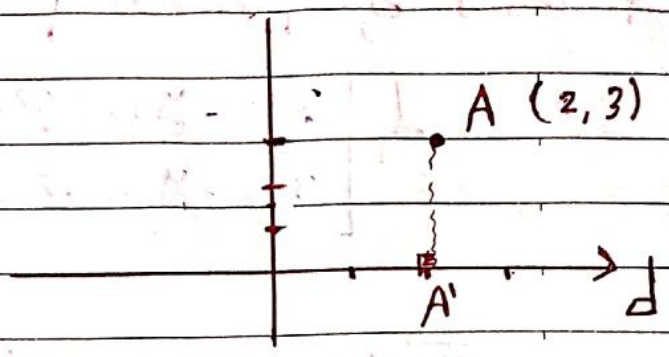
نعوض ① في ② $\quad -s - 1 = -s$

$$0 = 1$$

غير ممكن $\Leftarrow$ يوجد توازي تام.

ملاحظة : اي نقطة من المستقيم تكون محققة للتمثيلات $M(x,y,z)$

الموضوع : ....



اوجد بعد A عن d ؟

الحل: نوجد اسقاط قائم ل A على d ونسميه A'

A' هو المسقط القائم ل A على d

$A'(2,0)$

الان: نأخذ طول AA'

$AA' = \sqrt{(2-2)^2+(3-0)^2}$

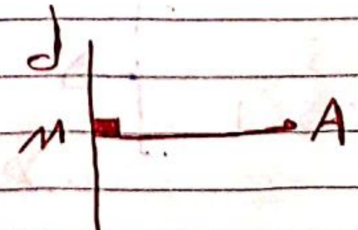
$= \sqrt{0+9} = 3.$

EB

اوجد بعد $A(3,0,1)$ عن المستقيم :

$$d: \begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t+1 \\ z = t+2 \end{cases} \quad t \in R$$

الحل:



نفرض ان M هي المسقط القائم ل A على d

اذا M تحقق المعادلات الوسيطية لـ d

$M(t-1, 2t+1, t+2)$

لنوجد قيمة t

لاحظ التعامد $d \perp (AM)$

$\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$

$\vec{u}(1,2,1)$

$\vec{AM} = (t-4, 2t+1, t)$

$\vec{u} \cdot \vec{AM} = 1(t-4)+2(2t+1)+1\times t = 0$

$\Rightarrow t-4+4t+2+t = 0$

$6t-2=0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

نعوضه في $\vec{AM}$

$\vec{AM}\left(\frac{-11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\|\vec{AM}\| = \sqrt{\frac{121}{9}+\frac{25}{9}+\frac{1}{9}}$

$= \frac{\sqrt{147}}{3}$

سؤال : $P_1: x-y+z-3=0$

$P_2: 2x-y+4=0$

اثبت تقاطع P_1, P_2 ثم عين d الفصل المشترك لهما ثم احسب بعد النقطة $M(1,0,1)$ عن d

الحل :

$\vec{n}_{P_1}=(1,-1,1)$

$\vec{n}_{P_2}=(2,-1,0)$

ندرس الارتباط $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-1}$

⇐ لا يوجد ارتباط خطي ⇐ يوجد تقاطع

الفصل المشترك

$P_1: x-y+z-3=0$

$P_2: 2x-y+4=0$

من P_2 ⇐ $y=2x+4$

نفرض أن $x=t$

$\Rightarrow y=2t+4$

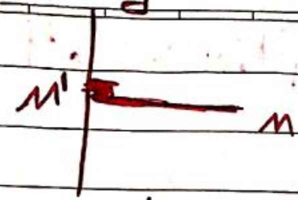
نعوض في P_1

$t-2t-4+z-3=0$

$\Rightarrow z=t+7$

$$d: \begin{cases} x=t \\ y=2t+4 \\ z=t+7 \end{cases} \quad t\in R$$

بعد M عن d :



نفرض M' مسقط قائم لـ M على d

⇐ M' تحقق المعادلات الوسيطية لـ d

$M'=(t, 2t+4, t+7)$

$d \perp (MM')$ بالتعامد

$\vec{u}\cdot\vec{MM'}=0$

$\vec{u}=(1,2,1)$

$\vec{MM'}=(t-1, 2t+4, t+6)$

$1(t-1)+2(2t+4)+t+6=0$

$t-1+4t+8+t+6=0$

$6t=-13$

$t=\frac{-13}{6}$

نعوض في $\vec{MM'}$

$\vec{MM'}=\left(\frac{-13}{6}-1, \frac{-26}{6}+4, \frac{-13}{6}+6\right)$

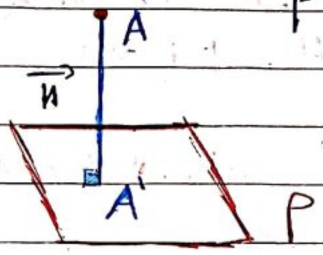
$=\left(\frac{-19}{6}, \frac{-2}{6}, \frac{23}{6}\right)$

$\|\vec{MM'}\|=\sqrt{\ }$

المسقط القائم لنقطة على مستوي

$P: x - y + z - 3 = 0$

اوجد A' المسقط القائم لـ $A(1,2,3)$ على المستوي P



الحل:

A' هي جزء من P و جزء من (AA')

اي هي نقطة تقاطع بين المستوي والمستقيم

ولكي نوجد تقاطع مستوي ومستقيم نقوم بتعويض المستقيم في المستوي

(AA') بشرط موجود ... نوجده

لا $\vec{n} = \vec{AA'}$

$\vec{n} = (1,-1,1) = \vec{AA'}$

$$(AA'): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad t \in R$$

نعوض الان (AA') في P

$t+1-(-t+2)+t+\cancel{3}-\cancel{3}=0$

$t+1+t-2+t = 0$

$t = \frac{1}{3}$

نعوض t في (AA') ونحصل على A'

$x = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

$y = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$

$z = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$

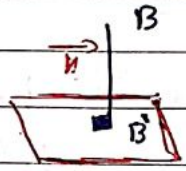
$A'\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$

اوجد مسقط قائم لـ B على المستوي R

$R: x - z + 11 = 0$

$B(1, 0, 2)$

الحل:



B' هي تقاطع المستوي R والمستقيم (BB')

نوجد (BB')

$\vec{n} = \vec{BB'} = (1, 0, -1)$

$$(BB'): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 0t + 0 \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad t \in R$$

نعوض (BB') في R

$t+1-(-t+2)+11=0$

$t+1+t-2+11=0$

$t = -5$

نعوض $t=-5$ في (BB') ونحصل على B'

$x = -5+1 = -4$

$y = 0 = 0$

$z = +5+2 = 7$

$B'(-4, 0, 7)$

الموضوع : ....

معادلة الكرة

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

R نصف قطر الدائرة

(x_0,y_0,z_0) مركزها

يوجد اربع اشكال للكرة

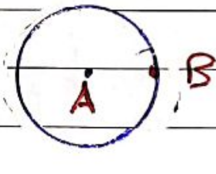
$\boxed{1}$ المعطيات مركز ونصف قطر
نعوض به مباشرة

أكتب معادلة الكرة التي مركزها $(1,0,-2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$

الحل: نعوض فقط

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2=3$$

$\boxed{2}$ المعطيات مركز وتمر من نقطة



المركز A موجود أما نصف القطر

$R = AB = \sqrt{}$

أكتب معادلة كرة مركزها $A(1,2,3)$ وتمر من $B(-2,1,5)$

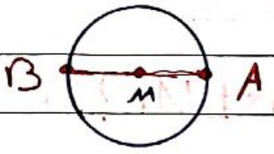
الحل: نوجد R فقط هو

$$R = AB = \sqrt{(1+2)^2+(2-1)^2+(3-5)^2}$$

$$R = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 14$$

$\boxed{3}$ المعطيات الكرة تمر من النقطتين A و B



مركزها $M = \dfrac{A+B}{2}$

$R = \dfrac{AB}{2}$ AB قطرها

أكتب معادلة الكرة تمر من $A(3,1,4)$ $B(2,-5,2)$

الحل: M مركزها

$$M = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{1-5}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{2}, -2, 3\right)$$

$$R = \frac{AB}{2}$$

$$AB = \sqrt{(3-2)^2+(1+5)^2+(4-2)^2}$$

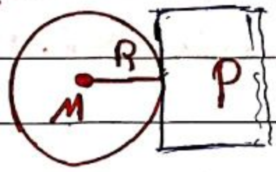
$$= \sqrt{1+36+4} = \sqrt{41}$$

$$R = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = \frac{41}{4}$$

(4) الأهم في الكرة

المعطيات مركزها ... وتمس مستوى



$$R = Dist(M, P)$$

أكتب معادلة كرة مركزها $A(3, 1, 4)$ وتمس المستوى

$$P: 2x - y + z - 3 = 0$$

الحل:

$$R = Dist(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|2(3) - (1) + (4) - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 1}}$$

$$= \frac{|6 - 1 + 4 - 3|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4) = 6$$

Math-Taher

G هو الأول والمكرر

الموضوع :

مركز الابعاد المتناسبة

النقط المثقلة :

A و B نقطتان

α , β عددين حيث $\alpha+\beta\neq 0$

عندئذ توجد نقطة وحيدة G :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

عندئذ G هو م أ م ل (A,α) (B,β)

1- العلاقة الشعاعية :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$$

$\alpha+\beta\neq 0.$

2- العلاقة الانسحابية :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

هام $\boxed{G \text{ م أ م } \Leftarrow \overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AB} \quad (A,1-t)\ (B,t)}$

3- $\alpha=\beta \Leftarrow$ G م أ م يقع منتصف القطعة [AB]

4- G م أ م متناسبة للقطعة المستقيمة :

A —//—G—//— B

$(A,1)$ $(B,1)$

$(G,2)$

5- G مركز ثقل المثلث ABC $\Leftarrow$ G م أ م الابعاد :

$(G,3) \Leftarrow (A,1)$ $(B,1)$ $(C,1)$

6- (A,α) (B,β)

α هي المسافة بين B و G

β هي المسافة بين A و G

7- α و β من نفس الاشارة $\Leftarrow$ G يقع بين A و B .

B —G— A

8- α, β مختلفة بالاشارة $\Leftarrow$ G يقع خارج القطعة A و B اي يقع على امتداد لها

G — A — B — G

ثلاث نقاط :

G م أ م ل (A,α) (B,β) (C,γ)

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=0$$

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

العلاقة التجميعية

(A,α) (B,β) (C,γ)

$(H,\alpha+\beta)$

$(G,\alpha+\beta+\gamma)$

تمارين : عين α, β حتى يكون G مرجح لـ (A,α) , (B,β)

P- $2\vec{GB} - 3\vec{AB} = \vec{0}$ *

الحل: نعلم ان

$$\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$$

ومنه * $\vec{GB}$ موجود لدينا $\vec{GA}$

ندرج G في AB

$$2\vec{GB} - 3[\vec{AG} + \vec{GB}] = \vec{0}$$

$$2\vec{GB} - 3\vec{AG} - 3\vec{GB} = \vec{0}$$

$$-3\vec{AG} - \vec{GB} = 0$$

$$+3\vec{GA} - \vec{GB} = 0$$

$\alpha = 3$ $\beta = -1$

$(A,3)$ $(B,-1)$

'B

ب $2\vec{AB} + \vec{GA} - 3\vec{GB} = \vec{0}$

$$2[\vec{AG} + \vec{GB}] + \vec{GA} - 3\vec{GB} = \vec{0}$$

$$2\vec{AG} + 2\vec{GB} + \vec{GA} - 3\vec{GB} = 0$$

$$-\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0}$$

$\alpha = -1$ $\beta = -1$

$(A,-1)$ $(B,-1)$

تمارين

القطعة متساوية الأجزاء :

عبر عن A و B بدلالتها مرجح الأبعاد للنقطتين الأخريين

الحل:

نفرض ان A مرجح لـ (B,b) , (C,c)

$\frac{\vec{AB}}{\vec{AC}} = \frac{3}{8}$ أ. معلوم

$$8\vec{AB} = 3\vec{AC}$$

$$8\vec{AB} - 3\vec{AC} = \vec{0}$$

$(B,8)$ $(C,-3)$

B مرجح لـ (A,a) (C,c)

$$\frac{\vec{BA}}{\vec{BC}} = \frac{-3}{5}$$

$$5\vec{BA} = -3\vec{BC}$$

$$5\vec{BA} + 3\vec{BC} = 0$$

$(A,5)$ $(C,+3)$

أ. معلوم

تمرين: A، B نقاط تحقق

$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

اوجد t في الحالات:

أ- M مركز ثقل $(A, \underset{\alpha}{-3})$ $(B, \underset{\beta}{1})$

الحل:

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{-2}\,\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow t = \dfrac{-1}{2}$

ب- M مركز $(A,1)$ $(B,5)$

الحل:

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{5}{1+5}\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{5}{6}\,\overrightarrow{AB}$

$t = \dfrac{5}{6}$

أ.كاظم

تمرين: اوجد α و β حتى تكون M مركز ثقل (A,α) (B,β)

1- $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{7}\,\overrightarrow{AB}$

الحل: مركز ثقل ⇐

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$

نوازن بـ $\beta = \beta$

مقام = مقام

$\beta = 2$

$\alpha+\beta = 7 \Rightarrow \alpha = 5$

2- $2\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

الحل: بالاصلاح:

$2\,\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{-1}{2}\,\overrightarrow{AB}$

$\beta = -1$

$\alpha+\beta = 2 \Rightarrow \alpha = 3$

3- $\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{AB} = 0$

الحل: بالاصلاح

$\overrightarrow{MA} = 3\,\overrightarrow{AB}$

$-\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = -\dfrac{3}{1}\,\overrightarrow{AB}$

$\beta = -3$　　$\alpha+\beta = 1$

$\alpha = 4$

تمرين:

ABC مثلث: أوجد x و y بحيث أن

$$\vec{AM} = x\,\vec{AB} + y\,\vec{AC}$$

في الحالات:

1- M مركز أبعاد

$(A,\underset{\alpha}{-1})$ $(B,\underset{\beta}{1})$ $(C,\underset{\gamma}{1})$

الحل:

$$\vec{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{1+1-1}\vec{AB} + \frac{1}{1+1-1}\vec{AC}$$

$$= 1\,\vec{AB} + 1\,\vec{AC}$$

$x = 1$ $y = 1$

2- M مركز أبعاد

$(A,\underset{\alpha}{3})$ $(B,\underset{\beta}{1})$ $(C,\underset{\gamma}{2})$

الحل:

$$\vec{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{2}{6}\vec{AC}$$

$x = \frac{1}{6}$ $y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

تمرين:

أوجد α و β و γ حتى يكون M مركز أبعاد (A,α) (B,β) (C,γ)

1- $\vec{BM} = \vec{BA} - \vec{BC}$

الحل:

$$\vec{BM} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{BC}$$

$\alpha = 1$ $\gamma = -1$

$\alpha+\beta+\gamma = 1$

$1+\beta-1 = 1$

$\beta = 1$

2- $\vec{AM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$

$$\vec{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AC}$$

$\beta = 2$ $\gamma = -1$

$\alpha+\beta+\gamma = 1$

$\alpha+2-1 = 1$

$\alpha = 0$

3- $\vec{CM} = 3\vec{CA} + 2\vec{CB}$

$$\vec{CM} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{CB}$$

$\alpha = 3$ $\beta = 2$

$\gamma = -4$

الموضوع : تمهيد .... أ. طاهر

مسألة :

أوجد G مركز الابعاد $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,4)$

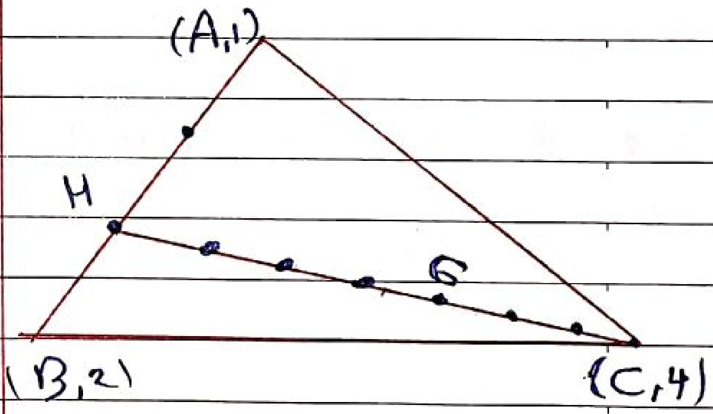
الحل : نفرض ان H مركز ابعاد $(A,1)$ $(B,2)$

$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$(H,3)$

$\Leftarrow$ G مركز $(H,3)$ $(C,4)$

$\overrightarrow{CG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{CH}$

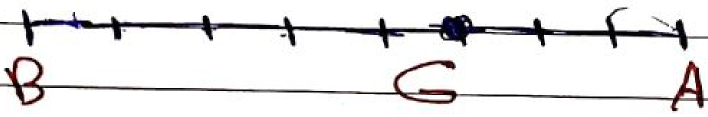


اذاً أصبحت النقطة التجميعية تكون G مركز $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,4)$

أ. طاهر

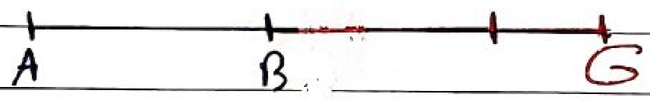
ارسم G مركز $(A,5)$ $(B,3)$

الحل : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$



ارسم G $(A,-3)$ $(B,5)$

الحل : $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$



$\frac{5}{2}$ هي 2 ونصف

ارسم G $(A,-7)$ $(B,4)$

الحل :

$\overrightarrow{AG} = \frac{4}{-3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$\frac{4}{3}$ هي $1,\bar{3}$

مسألة:

ABCD مربع طول ضلعه AB=5

ارسم G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

(A,1) (B,2) (C,3) (D,4)

أ. ماهر

الحل:

نفرض H م أ م (A,1) (D,4)

$$\overrightarrow{AH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$$

(H,5)

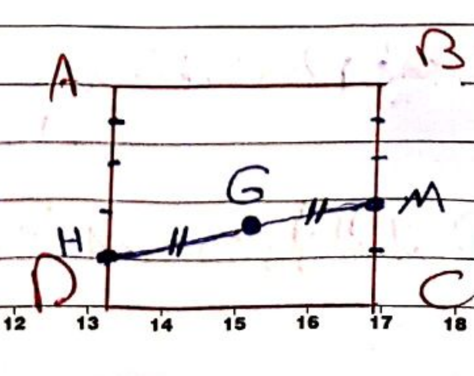
نفرض أن M م أ م (C,3) (B,2)

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$

(M,5)

⇐ G م أ م حسب الخاصة التجميعية للنقطتين

(H,5) (M,5)



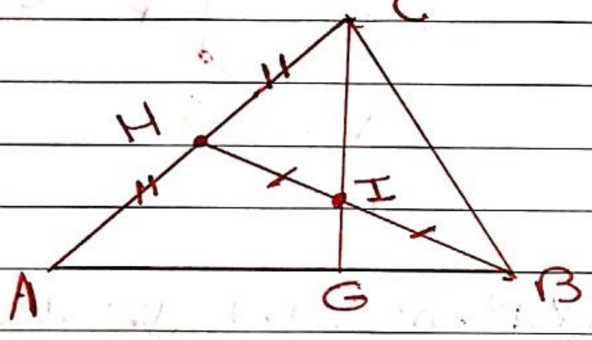
مسألة:

اوجد α، β، γ حتى تكون I مركز أبعاد للنقاط

(A,α) (B,β) (C,γ)

ثم استنتج λ المحققة

$$\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$



الحل:

من H لدينا منتصف [AC] ⇐ H هو م أ م لـ (A,1) (C,1)

(H,2)

I منتصف [HB] ⇐ I م أ م (H,2) (B,2)

(I,4)

⇐ حسب الخاصة التجميعية تكون (I,4) م أ م (A,1) (C,1) (B,2)

ايجاد λ

G هو تقاطع المستقيمين (CG)، (AB)

⇐ G يكون م أ م للنقطتين

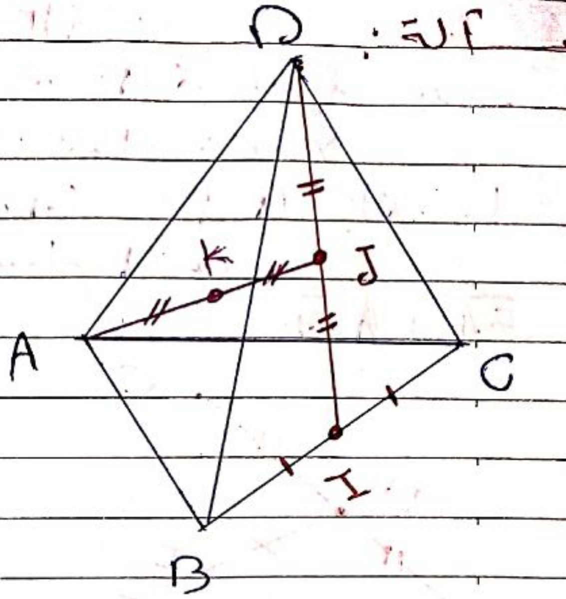
(A,1) و (B,2) لأن G تقع على (AB)

$$\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = 0$$

$$\lambda = 2$$

مثال:



هل استطيع اوجد α و β و γ و λ حتى يكون K هو م أ م

(A,α) (B,β) (C,γ) (D,λ)

الحل: I منتصف B, C $\Leftarrow$

I م أ م لـ $(B,1)$ و $(C,1)$

$\Leftarrow$ $(I,2)$

J منتصف $[DI]$ $\Leftarrow$ J م أ م

$(I,2)$ $(D,2)$

$\Leftarrow$ $(J,4)$

K منتصف $[AJ]$ $\Leftarrow$ K م أ م

$(A,4)$ $(J,4)$

$(K,8)$

$\alpha=4$

$\beta=1$ $\gamma=1$ $\lambda=2$.

تمرين:

ABCD رباعي وجوه

اثبت ان M و B و C و D تقع في مستوي واحد ثم وضح M

(1) $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{DA}$

الحل: حتى تكون M, B, C, D في مستوي واحد يجب ان تكون لها مركز ابعاد متناسبة واحد

M فكرة اذا نثبت ان M م أ م للنقاط B, C, D

$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC}=0$

من (1)

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}-\vec{DA}=0$

نزرع M

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}-[\vec{DM}+\vec{MA}]=0$

$\cancel{\vec{MA}}+\vec{MB}+\vec{MC}-\vec{DM}-\cancel{\vec{MA}}=0$

$\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=0$

$\Leftarrow$ M م أ م لـ

$(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$

$\Leftarrow$ M, B, C, D في مستوي واحد

ووضع M هو مركز ثقل المثلث BCD.

7 الوحدة

رباعي الوجوه ABCD

K من AB تحقق

$AK = \frac{1}{3} AB$

L من CD وتحقق $CL = \frac{2}{3} CD$

I منتصف [AD] J منتصف [BC]

G هو مرجح النقاط

(A,2) (B,1) (C,1) (D,2)

1- اثبت ان G و I و J على استقامة واحدة

الحل: حتى تكون G و I و J على استقامة يجب ان تكون احداها مرجح للبقية

I منتصف [AD] ⇐ I مرجح لـ (A,2) (D,2) ⇐ (I,4)

J منتصف [BC] ⇐ J مرجح (B,1) (C,1) ⇐ (J,2)

بما ان G هو مرجح النقاط (A,2) (D,2) (B,1) (C,1)

حسب الخاصة التجميعية تكون G مرجح (I,4) (J,2)

⇐ G و I و J على استقامة واحدة

2- اثبت ان G و K و L على استقامة

الحل: لدينا $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$

⇐ K هو مرجح لـ (A,2) (B,1)

⇐ (K,3)

و $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CD}$ ⇐ L هو مرجح (D,2) و (C,1)

⇐ (L,3)

وبما ان G هو مرجح لـ (A,2) (B,2) (C,1) (D,1)

⇐ حسب الخاصة التجميعية يكون G مرجح (L,3) (K,3)

⇐ G و K و L على استقامة واحدة

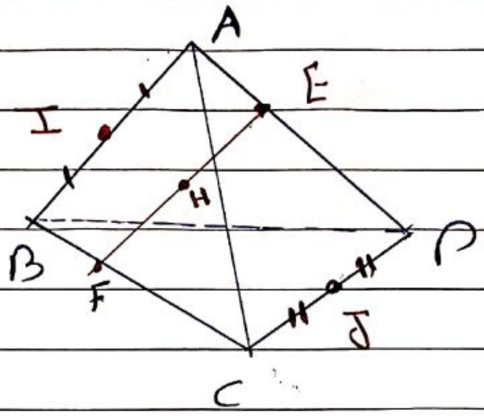
3- استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد

الحل: بما ان G هو مرجح للنقاط (I,4) (J,2) (K,3) (L,3)

⇐ النقاط تقع في مستوٍ واحد

∴ G هو تقاطع المستقيمين (KL) , (JI)

9 الوحدة الاولى دورة 2017



ABCD رباعي وجوه و a عدد

I منتصف [AB] و J منتصف [CD]

F, E تحقق $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$

H هو منتصف EF

اثبت ان I و J , H تقع على استقامة واحدة

الحل: ~~I منتصف [AB] ⇐ I م م~~

F تحقق العلاقة $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$

⇐ F م م ل

$(B, 1-a)$ (C, a)

⇐ $(F, 1)$

E تحقق العلاقة $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$

⇐ E م م

$(A, 1-a)$ (D, a)

⇐ $(E, 1)$

H هو منتصف [EF] ⇐ H م م

هو م م $(F,1)$ $(E,1)$

I منتصف [AB] ⇐ I م م

$(B, 1-a)$ $(A, 1-a)$

$(I, 2-2a)$

J منتصف [CD] ⇐ J م م

(D, a) (C, a)

⇐ $(J, 2a)$

وبالتالي H هو م م للنقاط

$\underbrace{A \text{ و } D}_{E}$ ، $\underbrace{B \text{ و } C}_{F}$

⇐ حسب الخاصة التجميعية يكون

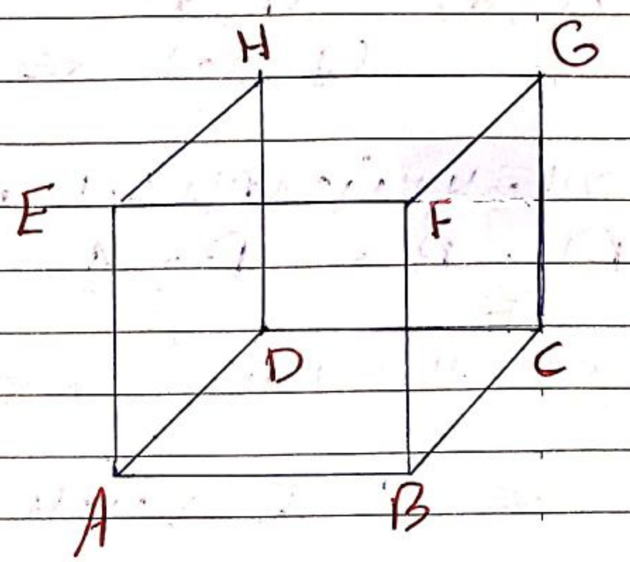
H م م I و J ⇐

النقاط مستقيمة

أ. ماهر

إيجاد الإحداثيات :

من أجل إيجاد الإحداثيات لازم تكون في معلم $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$



الحل: نأخذ المعلم $(A, 1\vec{AB}, 1\vec{AD}, 1\vec{AE})$

A ← المبدأ، $1\vec{AB}$ ← المحور x، $1\vec{AD}$ ← مثل y، $1\vec{AE}$ ← مثل z

$A(0,0,0) \longrightarrow$

$B(1,0,0) \longrightarrow$

$D(0,1,0) \longrightarrow$

$E(0,0,1) \longrightarrow$

نأخذ المقابل قطرياً لكل نقطة

$A \to G$

$B \to H$

$D \to F$

$E \to C$

وهكذا

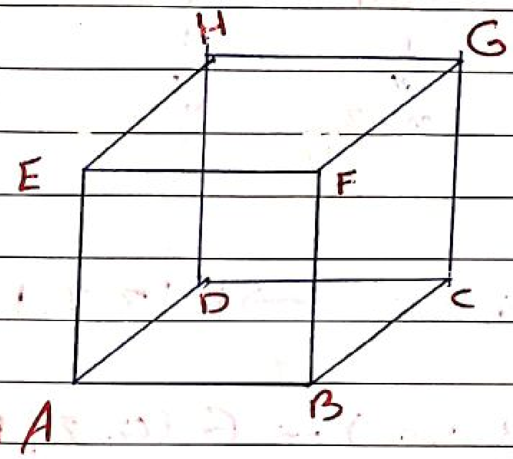
احداثيات النقاط:

يوجد عدة طرق:

مكعب $ABCDEFGH$

لازم يكون في معلم:

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$



الحل: نأخذ المعلم

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

مبدأ، محمل x، محمل y، محمل z

$A=(0,0,0)$
$B=(1,0,0)$
$D=(0,1,0)$
$E=(0,0,1)$

$\Rightarrow$ نأخذ بقية النقاط المقابلة قطرياً

ومن ثم نبدل كل $0 \leftarrow 1$

$1 \leftarrow 0$

$A \longrightarrow G=(1,1,1)$

$B \longrightarrow H=(0,1,1)$

$D \longrightarrow F=(1,0,1)$

$E \longrightarrow C=(1,1,0)$

مثال: معلم:

$(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$

مكعب طول حرفه 3. $ABCDEFGH$

الحل: نأخذ المعلم:

$A(0,0,0)$ مبدأ

$B(3,0,0)$ محمل x

$D(0,3,0)$ محمل y

$E(0,0,3)$ محمل z

نأخذ الآن المقابل قطرياً

$A \longrightarrow G=(3,3,3)$

$B \longrightarrow H=(0,3,3)$

$D \longrightarrow F=(3,0,3)$

$E \longrightarrow C=(3,3,0)$

اذاً لما يكون مكعب طول حرفه a

نأخذ المعلم ومن المعلم نأخذ النقاط ونوجد احداثياتها

ومن ثم نأخذ المقابل ونبدل

كل $0 \leftarrow a$

كل $a \leftarrow 0$

هذه الطريقة السريعة

مثال:

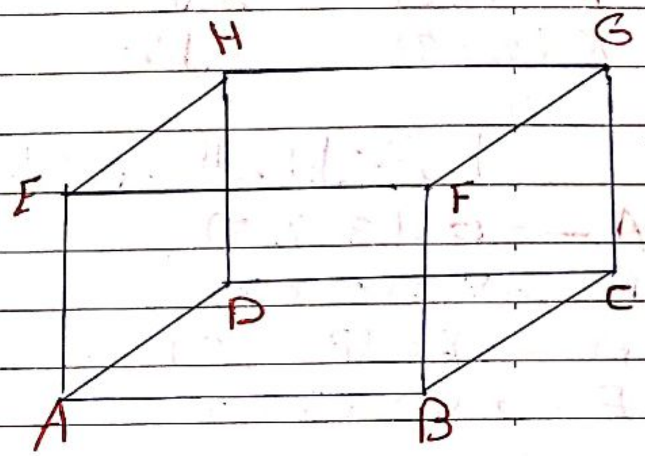
متوازي مستطيلات ABCDEFGH

فيه: $AB=4$ $AD=3$

$AE=2$

وفيه معلم:

$$\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$



الحل:

المعلم:

$$\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

مبدأ $x=4$ $y=3$ $z=2$

$A(0,0,0) \rightarrow G(4,3,2)$

$B:(4,0,0) \rightarrow H(0,3,2)$

$D:(0,3,0) \rightarrow F(4,0,2)$

$E:(0,0,2) \rightarrow C(4,3,0)$

مثال:

معلم:

$$\left(D, \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, 1\overrightarrow{DH}\right)$$

الحل:

$$\left(D, \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$$

مبدأ $x=3$ $y=2$ $z=1$

$D:(0,0,0) \rightarrow F(3,2,1)$

$A:(3,0,0) \rightarrow G(0,2,1)$

$C:(0,2,0) \rightarrow E(3,0,1)$

$H(0,0,1) \rightarrow B(3,2,0)$

ايجاد الاحداثيات بطريقة ثانية:

ملاحظات:

1- اي نقطة تقع على محور x تكون: $(x, 0, 0)$

2- اي نقطة تقع على محور y تكون $(0, y, 0)$

3- اي نقطة تقع على محور z تكون $(0, 0, z)$

4 اي نقطة تقع في المستوي (xoy) تكون: $(x, y, 0)$

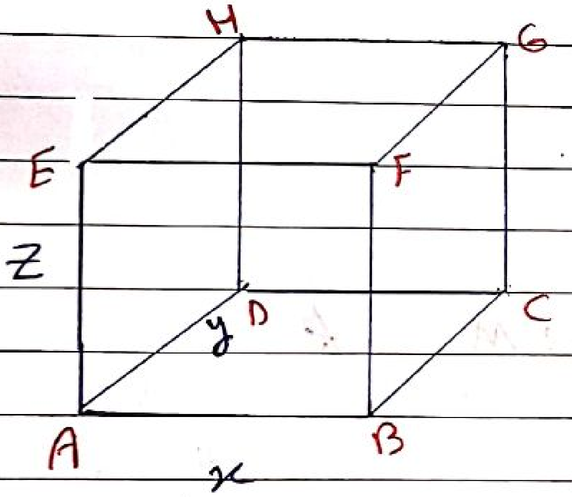
5- اي نقطة تقع في مستوي (xoz) تكون $(x, 0, z)$

6- اي نقطة تقع في مستوي (yoz) تكون $(0, y, z)$

7- عندما لا تكون احدى الحالات السابقة اذا نعلم ان الاحداثيات النقطة هي ارقام غير صفرية ويكون ايجادها:

أ- نسقطها على مستوي اول ومستوي ثاني

ب- ثم نسقطها على محور x , y و z.



ABCDEFGH مكعب طول حرفه 4 و I منتصف $[AB]$ و R تحقق $\vec{AR}=\frac{1}{4}\vec{AD}$

و N منتصف $[HG]$ و S منتصف AE

و M تحقق $\vec{BM}=\frac{1}{3}\vec{BC}$

و L تحقق $\vec{EL}=\frac{1}{4}\vec{EH}$

و K تحقق $\vec{CK}=\frac{1}{4}\vec{CG}$

$$\left(A, \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{4}\vec{AD}, \frac{1}{4}\vec{AE}\right)$$

الحل: النقاط الرئيسية

$A = (0,0,0)$

محور x $B = (4,0,0)$

محور y $D = (0,4,0)$

محور z $E = (0,0,4)$

C تقع في (xoy) $\Leftarrow$ $C(4,4,0)$

F تقع في (xoz) $\Leftarrow$ $F(4,0,4)$

H تقع في (zoy) $\Leftarrow$ $H(0,4,4)$

G هو الحالة رقم 7 $\Leftarrow$ لا يوجد اصفار

$G(4,4,4)$

الموضوع : .... / /

ايجاد : I منتصف AB ⇐ تقع على x ⇐ $I(2,0,0)$

ايجاد R : $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ وتقع على y ⇐ $R(0,1,0)$

S منتصف AF وتقع على z ⇐ $S(0,0,2)$

* : N منتصف [HG]

الحل الأول

N لا تقع على محاور ولا في مستوى
الحالة 2
نستطيع : $N(2,4,4)$

الحل الثاني

N منتصف HG
$\overrightarrow{HN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$

$$\begin{bmatrix} x-0 \\ y-4 \\ z-4 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4-0 \\ 4-4 \\ 4-4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-0=2 \Rightarrow x=2 \\ y-4=0 \Rightarrow y=4 \\ z-4=0 \Rightarrow z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow N(2,4,4).$$

* M تحقق $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

ط1

M تقع في مستوى (xoy)

$M(4,\frac{4}{3},0)$

ط2

$$\begin{bmatrix} x-4 \\ y-0 \\ z-0 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

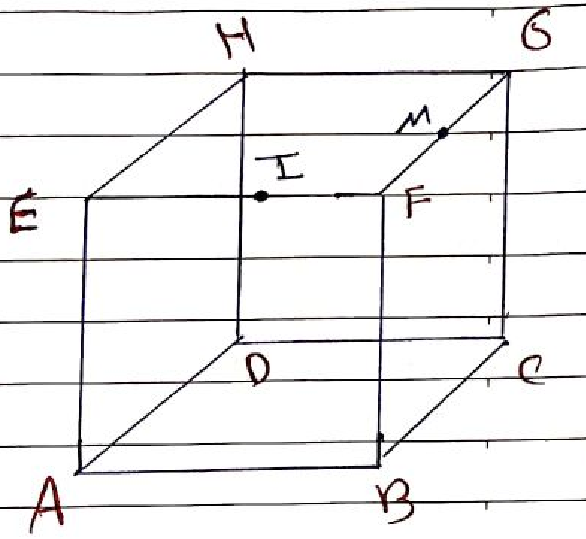
* L تحقق $\overrightarrow{EL}=\frac{1}{4}EH$

L تقع في مستوى (yoz) ⇐ $L(0,1,4)$

* $K=(4,4,1)$

الموضوع : موقع نقطة

مكعب ABCDEFGH



M منتصف [FG]

I منتصف [EF]

حدد موقع N في الحالات :

$\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{DH}$

الحل: $= \vec{AB} + \vec{AE}$

نبدل $\vec{AE} = \vec{DH}$

$\vec{AN} = \vec{AF}$

N منطبقة F

$\vec{AN} = \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$ *

الحل: $= \vec{AF} + \vec{AD}$

$\vec{AN} = \vec{AG}$

$N = G$

$\vec{AN} = \vec{FE} + \vec{DG}$ *

$= \vec{CD} + \vec{DG}$

$\vec{AN} = \vec{CG}$

$\vec{AN} = \vec{AE}$

$\vec{AN} = \vec{AG} + \vec{BF}$

$= \vec{AG} + \vec{CG}$

$= -\vec{GA} - \vec{GC}$

$= -[\vec{GA} + \vec{GC}]$

$= ?$

النقطة خارج المكعب

$\vec{AN} = \frac{1}{2}[\vec{AG} + \vec{HB}]$

$= \frac{1}{2}[\vec{AB} + \cancel{\vec{BC}} + \cancel{\vec{CG}} + \vec{HG} + \cancel{\vec{GC}} + \cancel{\vec{CB}}]$

$= \frac{1}{2}[\vec{AB} + \vec{AB}]$

$= \vec{AB}$

$N = B$

$\vec{AN} = \vec{AE} + \vec{BC} + \vec{HJ}$ *

$= \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HJ}$

$= \vec{AH} + \vec{HJ}$

$= \vec{AJ}$

$N = J$

أوضاع ثلاث مستويات:

$\vec{n_3}$ $\vec{n_2}$ $\vec{n_1}$

متوازية

• يوجد ارتباط خطي مثنى مثنى
• الجملة لا يوجد حل

المستويات منطبقة:

• النواظم مرتبطة مثنى مثنى
• للجملة عدد غير منته من الحلول

متقاطعة

* تقاطع نقطة واحدة
• النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى
• يوجد حل واحد هو نقطة (x,y,z)

* التقاطع بخط مشترك
• النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى
• يوجد عدد غير منته من الحلول

ملاحظة: في حال كان هناك ارتباط خطي بين ناظمين ولا يوجد ارتباط مع الثالث نقول الجملة مستحيلة الحل.

مثال عليها:

$$P_1: x+y-2z=1$$
$$P_2: 3x+y-z=0$$
$$P_3: -2x-2y+4z=1$$

الحل: $\vec{n_1}=(1,1,-2)$ ، $\vec{n_2}(3,1,-1)$ ، $\vec{n_3}(-2,-2,4)$

لاحظنا أن $\dfrac{\vec{n_3}}{\vec{n_1}} = \dfrac{-2}{1} = \dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{-2}$ مرتبطة خطياً

يعني لا يوجد ارتباط مع $\vec{n_2}$ ⇐ ليس للجملة حل

الحل جملة المستويات

$P_1: 5x+y+z=-5 \quad L_1$

$P_2: 2x+13y-7z=-1 \quad L_2$

$P_3: x-y+z=1 \quad L_3$

الحل: $\vec{n}_1=(5,1,1)$ $\vec{n}_2(2,13,-7)$ $\vec{n}_3=(1,-1,1)$ هذه النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى

شرح

$ax+by+cz=$

$\boxed{a'x}+b'y+c'z=$

$\boxed{a''x}+\boxed{b''y}+c''z=$

يجب ان نجعل العرى $\boxed{0}$ قيمته صفر

3 مربعات $\Rightarrow$ 3 اصفار

يصبح الشكل:

$* \; ax+by+cz=$

$0+b'y+c'z=$

$0+0+c''z=$

والأهم من ذلك حتى نرتاح بالعمليات الحسابية نحاول نجعل امثال x في $*$ تساويه الواحد

امثال x في L_1 هي 5 وامثال x في L_3 هي 1 لسهولة العمليات الحسابية:

$$L_1 \longleftrightarrow L_3$$

نبدل

$P_1: x-y+z=1 \quad L_1$

$P_2: \boxed{2x}+13y-7z=-1 \quad L_2$

$P_3: \boxed{5x}+\boxed{y}+z=-5 \quad L_3$

الآن: نجعل العرى صفر مبتدأ بـ x ثم y

$-2L_1+L_2 \longrightarrow L'_2$

$-5L_1+L_3 \longrightarrow L'_3$

$x-y+z=1 \quad L_1$

$0+15y-9z=-3 \quad L'_2$

$0+\boxed{6y}-4z=-10 \quad L'_3$

الآن مع y نجعله صفر ويكون التعامل الحصري مع L'_2 و L'_3

قبل بدء العملية نستطيع تبسيط الارقام في L'_2 و L'_3

$x-y+z=1 \quad L_1$

$0+5y-3z=-1 \quad L''_2 \qquad \frac{1}{3}L'_2 \longrightarrow L''_2$

$0+\boxed{3y}-2z=-5 \quad L''_3 \qquad \frac{1}{2}L'_3 \longrightarrow L''_3$

الموضوع : ....

$$-\frac{3}{5} L''_2 + L''_3 \longrightarrow L'''_3$$

$$x - y + z = 1 \qquad L_1$$
$$0 + 5y - 3z = -1 \qquad L''_2$$
$$0 \quad 0 \quad -\frac{1}{5} z = \frac{-22}{5} \qquad L'''_3$$

الآن ننظر الى آخر معادلة نجد انه بقي مجهول

فنقول ان الجملة لها حل وحيد وايجاد الحل !

من L'''_3 $\quad -\frac{1}{5} z = \frac{-22}{5}$

$\Rightarrow \boxed{z = 22} \longrightarrow$ نعوض في L''_2

$\Rightarrow \boxed{y = 13} \Longrightarrow$ نعوض في L_1

$\Rightarrow x = -8$

$\Leftarrow$ المستويات متقاطعة بنقطة واحدة $(-8, 13, 22)$

ملاحظة

بعد العمليات السابقة ننظر الى آخر معادلة نميز !

أ: فيها مجهول واحد : للجملة حل وحيد نقطة

ب: لم يبقى فيها اي مجهول تكون حالتان :

$0 = $ عدد	$0 = 0$
الجملة مستحيلة الحل	للجملة عدد كبير منته من الحلول وتتقاطع في ل

$P_1: 2x - y + 3z = 0$ L_1

$P_2: x + 2y + z = 0$ L_2

$P_3: 3x - 4y + 5z = 0$ L_3

الحل: $\vec{n_1} = (2,-1,3)$, $\vec{n_2} = (1,2,1)$, $\vec{n_3} = (3,-4,5)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى

من اجل سهولة العمليات الحسابية $L_1 \leftrightarrow L_2$

$x + 2y + z = 0$ L_1 $\quad -2L_1 + L_2 \to L'_2$

$\boxed{2x} - y + 3z = 0$ L_2 $\Rightarrow$

$\boxed{3x} - 4y + 5z = 0$ L_3 $\quad -3L_1 + L_3 \to L'_3$

$x + 2y + z = 0$ L_1

$0 \quad -5y + z = 0$ L'_2 $\Rightarrow -2L'_2 + L'_3 \to L''_3$

$0 \quad \boxed{-10y} + 2z = 0$ L'_3

$x + 2y + z = 0$ L_1

$0 - 5y + z = 0$ L'_2 $\Rightarrow$

$0 \quad 0 \quad 0 = 0$ L''_3

من L''_3 وجدنا $0=0$ ⇐ للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول والتقاطع بخط مشترك d

من L'_2 نفرض ان $y = t$ ⇐ $-5t + z = 0$

$\Rightarrow z = 5t$

نعوض في L_1: $x + 2t + 5t = 0$

$x = -7t$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = -7t \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

الموضوع : ....

$P_1: x+y+z=1 \quad L_1$

$P_2: x-2y+z=1 \quad L_2$

$P_3: 3x-4y+z=-1 \quad L_3$

الحل: $\begin{cases} \vec{n_1}=(1,1,1) \\ \vec{n_2}=(1,-2,1) \\ \vec{n_3}=(3,-4,1) \end{cases}$ ⇐ النواظم غير مرتبطة خطياً متقاطعة

$-L_1+L_2 \longrightarrow L'_2$

$-3L_1+L_3 \longrightarrow L'_3$

$x+y+z=1 \quad L_1$

$0-3y+0=0 \quad L'_2$

$0-7y-2z=-4 \quad L'_3$

نلاحظ: ان L'_2 فيها مجهول واحد نبدل مع L'_3

$L'_2 \longleftrightarrow L'_3$

$x+y+z=1 \quad (1)$

$-7y-2z=-4 \quad (2)$

$-3y=0 \quad *$

من * لدينا مجهول واحد ⇐ للمعادلة حل وحيد والمستويات تتقاطع بنقطة واحدة

من * $\boxed{y=0}$ نعوض في (2)

$-7\times 0-2z=-4 \Rightarrow \boxed{z=2}$

نعوض في (1)

$x+0+2=1$

$x=-1$

$(-1,0,2).$

$P_1: \quad 2x - y + 3z = 2 \qquad L_1$

$P_2: \quad x + 2y + z = 1 \qquad L_2$

$P_3: \quad 3x - 4y + 5z = 4 \qquad L_3$

الحل:

$\left[\begin{array}{l} \vec{n_1} = (2,-1,3) \\ \vec{n_2} = (1,2,1) \\ \vec{n_3} = (3,-4,5) \end{array}\right. \Rightarrow$ النواظم غير مرتبطة خطياً فمش متعامد

$L_1 \Longleftrightarrow L_2$

$$\left.\begin{array}{lll} x + 2y + z = 1 & & L_1 \\ \boxed{2x} - y + 3z = 2 & & L_2 \\ \boxed{3x} - 4y + 5z = 4 & & L_3 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} -2L_1 + L_2 \longrightarrow L'_2 \\ -3L_1 + L_3 \longrightarrow L'_3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x + 2y + z = 1 & & L_1 \\ 0 - 5y + z = 0 & & L'_2 \\ 0 \ \boxed{-10y} + 2z = 1 & & L'_3 \end{array}\right] \Longrightarrow -2L'_2 + L'_3 \longrightarrow L''_3$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 0 - 5y + z = 0 \\ 0 \quad 0 = 1 \quad \times \end{array}$$

من آخر معادلة ✗ لدينا $1 \neq 0$

لا يوجد تقاطع في الجملة مستحيلة الحل

/ /

الموضوع : ....

معادلة المستقيم في المستوي:

تعرف هذه المعادلة بالشكل:

$d: ax+by+c=0.$

هذا المستقيم يقبل:

$\vec{n}=(a,b)$ ناظم

$\vec{u}=(-b,a)$ شعاع موجه

* اكتب معادلة مستقيم في مستوي يمر من $A(3,1)$ ويقبل شعاع موجه $\vec{u}(-2,3)$

الحل: $ax+by+c=0$

$\vec{u}=(-2,3)$

$\vec{u}=(-b,a)$

توازي: $-2=-b \Rightarrow b=2$

$a=3$

$3x+2y+c=0$

$A\in d$

$3\times 3+2\times 1+c=0$

$c=-11$

$d: 3x+2y-11=0.$

حالات هذا المستقيم مع مستقيم آخر

$d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$

$d_2: a_2x+b_2y+c_2=0.$

توازي: $\begin{cases} \vec{n_1}=\vec{n_2} \\ \vec{u_1}=\vec{u_2} \end{cases}$

تعامد: $\vec{u_1}=\vec{n_2}$

$\vec{n_1}=\vec{u_2}$

أكتب معادلة مستقيم في مستوي يمر من $A(5,3)$ ويعامد المستقيم d'

$d': 2x+5y-5=0$

الحل: $d: ax+by+c=0$

$d\perp d' \Rightarrow \vec{u}=\vec{n'}$ مجهول معلوم

$\vec{n'}=(2,5) \qquad \vec{u}=(-b,a)$

$-b=2 \Rightarrow b=-2$

$a=5$

$d: 5x-2y+c=0$

$A\in d$

$25-6+c=0$

$c=-19$

$d: 5x-2y-19=0.$

الموضوع : ....

حساب البعد d عن A

$d: ax+by+c=0 \quad A(x',y')$

$$Dist(A,d) = \frac{|ax'+by'+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

احسب بعد A عن d حيث

$d: 4x+2y+3=0$

$A(3,-5)$

الحل:

$$Dist(A,d) = \frac{|4\times3+2(-5)+3|}{\sqrt{16+4}}$$

$$= \frac{|12-10+3|}{\sqrt{20}} = \frac{5}{\sqrt{20}}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

أكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة [AB]

$A(4,1) \quad B(-1,2)$

الحل: $\mathcal{D}_1$ المحور هو مستقيم يعرف منتصفه [AB] ويقبل $\vec{AB}$ ناظم

$$\vec{n} = \vec{AB} = (-5,1) = (a,b)$$

$$I = \left(\frac{4-1}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$d: -5x+y+c=0.$

$I \in d$

$$-5\times\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + c = 0$$

$-6 + c = 0 \Rightarrow c = +6$

$d: -5x+y+6=0$

A ——— I ——— B $\quad \mathcal{D}_2$

نفرض $I(x,y)$ منتصفه AB

$AI = IB$

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

نربع

$$(x-4)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2$$

$$x^2-8x+16+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2-4y+4$$

$-10x+2y+12=0.$

نقسم على 2

$-5x+y+6=0.$

ماذا تمثل المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0.$$

الحل: نقوم بالإتمام المربع كالآتي :

النتائج:
- 0 ← تمثل نقطة (x_0,y_0,z_0)
- موجب ← كرة
- عدد سالب ← مجموعة خالية

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+2=0$$

الحل:

$$x^2-2x \quad + y^2+6y \quad + z^2-4z \quad +2=0$$

الإتمام $+\left(\frac{\ }{2}\right)^2-\left(\frac{\ }{2}\right)^2$

$$x^2-2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2+y^2+6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2+z^2-4z+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2=2$$

$$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9+(z-2)^2-4=2$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=16$$

موجب

كرة مركزها $(1,-3,2)$ ونصف قطرها 4

لو -16 سالب ⇐ مجموعة خالية

لو 0 ⇐ نقطة $(1,-3,2)=(x_0,y_0,z_0)$

الموضوع : ....

الاسطوانة:

$(0,\vec{i}) \Rightarrow x$ فحتقيد

$$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ 0\leq x\leq b \end{cases}$$

r نصف القطر

b مركز القاعدة العليا

اكتب معادلة اسطوانة مركزها $(3,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$ و $(0,\vec{i})$

الحل: $(0,\vec{i}) \Leftarrow$

$$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ 0\leq x\leq b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2=5 \\ 0\leq x\leq 3 \end{cases}$$

لما يكون $(0,\vec{j})$ لـ y غير موجود

$$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ 0\leq y\leq b \end{cases}$$

لما يكون $(0,\vec{k})$ z غير موجود

$$\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ 0\leq z\leq b \end{cases}$$

المخروط

$(0,\vec{i})$

$$\begin{cases} y^2+z^2=\frac{r^2}{b^2}\cdot x^2 \\ 0\leq x\leq b \end{cases}$$

$(0,\vec{j})$

$$\begin{cases} x^2+z^2=\frac{r^2}{b^2}\cdot y^2 \\ 0\leq y\leq b \end{cases}$$

$(0,\vec{k})$

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{r^2}{b^2}z^2 \\ 0\leq z\leq b \end{cases}$$

اكتب معادلة مخروط $(0,\vec{j})$ مركز القاعدة العليا $(0,7,0)$ ونصف القطر $\sqrt{5}$

الحل: $(0,\vec{j})$

$$\begin{cases} x^2+z^2=\frac{r^2}{b^2}y^2 \\ 0\leq y\leq b \end{cases}$$

$$x^2+z^2=\frac{5}{49}y^2$$
$$0\leq y\leq 7$$