ملخص التعامل مع مسائل الهندسة

لكل من يجد صعوبة في ايجاد حل طلبات المسائل

_ يتضمن الملخص ملاحظات وطرق الحل الموجودة ضمن المنهاج لكل طلب ممكن أن يطرح في المسألة كحساب طول ضلع أو قياس زاوية أو ....

_ طرق الحل الموجودة تشمل كل ما تعلمه الطالب خلال العام الدراسي دون زيادة أو نقصان ولكن بطريقة مرتبة لكل طلب على حدا مما يساعد في تنظيم الأفكار والقدرة على تحليل طلبات المسألة وحلها بسهولة

_ اقرأ طرق الحل الموجودة بتمعن ثم قم بحفظها وعندما تواجه الطلب في الامتحان تذكر أن واحدة من هذه الطرق هي التي ستساعدك على حل الطلب

_ انتبه للأمثلة الموجودة مع كل طريقة وذلك لتتعلم صياغة الكتابة الصحيحة

_ يشمل هذا الملخص *95%* من طرق وأساليب حل طلبات الهندسة ويبقى *5%* تترك لمهارات وقدرات الطالب في التعامل مع المسألة بما يمتلكه من معلومات من السنوات السابقة كخواص الأشكال الهندسة وخاصية مركز الثقل .... وغيرها

_ يوجد في نهاية الملخص نصائح للتعامل مع مسألة الدائرة تفيد في تحليل المسألة وفهم كيفية التعامل معها بالإضافة لجميع القوانين التي يحتاجها الطالب من محيط ومساحة وحجم و ....

ملاحظة

هذا العمل غير ربحي أو تجاري

مقدم كهدية لأبنائنا طلبة وطننا الحبيب سوريا

يسمح بطباعته ونشره وتداوله

غير مخصص للبيع أو التداول التجاري

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

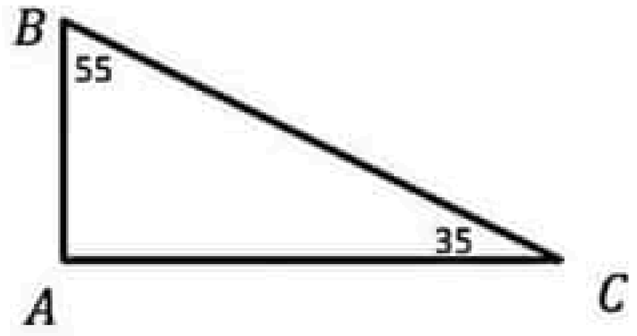
أ مهدي زهوة

مدرس لدى مدارس دمشق الخاصة ومعاهدها

0932522825

((مجموعة الرياضيات مع الاستاذ مهدي زهوة)) *face book*

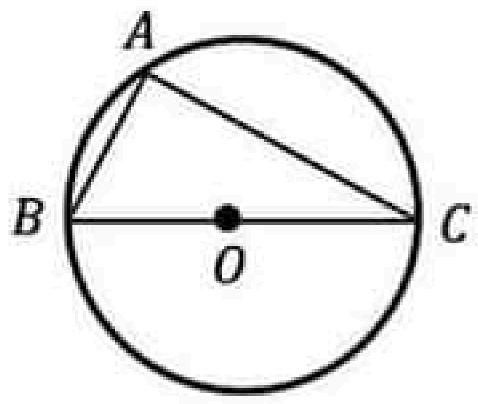
إثبات أن مثلث قائم :



١_ الاعتماد على مجموع زوايا مثلث 180 إذا علم منه زاويتان

مثال : $A = 180 - (35 + 55) = 90$

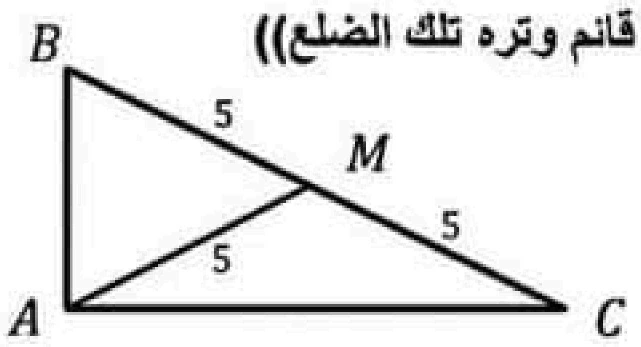
وبالتالي المثلث قائم في A



٢_ ((إذا كان أحد أضلاع المثلث قطرا للدائرة المارة برؤوسه كان المثلث قائم وتره تلك الضلع))

مثال :

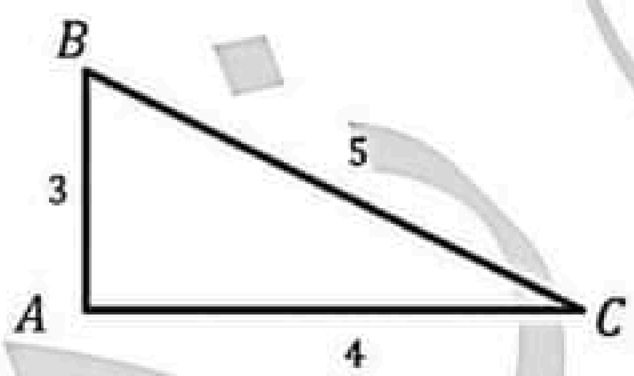
ABC قائم في A لأن أحد أضلاعه BC قطر للدائرة المارة برؤوسه



٣_ ((إذا كان طول الخط المتوسط في مثلث يساوي نصف طول الضلع المقابلة كان المثلث قائم وتره تلك الضلع))

مثال : $AM = \frac{1}{2}BC$ وبالتالي ABC قائم في A

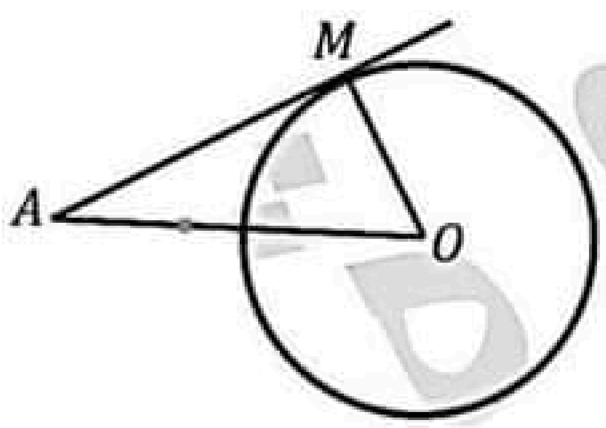
٤_ عكس مبرهنة فيثاغورث إذا علمت أطوال أضلاع المثلث الثلاثة



مثال: $BC^2 = 25$

$AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$

وبالتالي ABC قائم في A

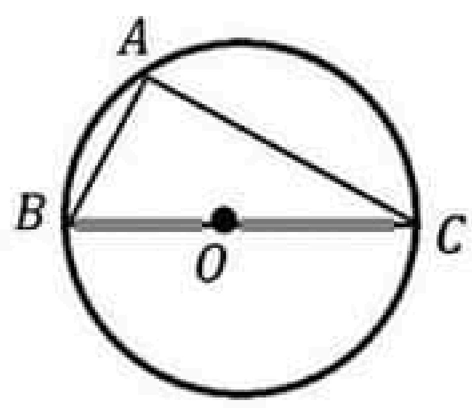


٥_ ((إذا وجد مماس للدائرة فإنه عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس))

مثال : بما أن AM مماس للدائرة عند النقطة M

فإن $AM \perp OM$ لأن نصف القطر عمودي على المماس في نقطة التماس

وبالتالي المثلث AOM قائم في M



٦_ ((الزاوية المحيطية التي تحصر قوس نصف الدائرة هي زاوية قائمة))

مثال : $\widehat{BAC}$ محيطية تحصر القوس $BC = 180$

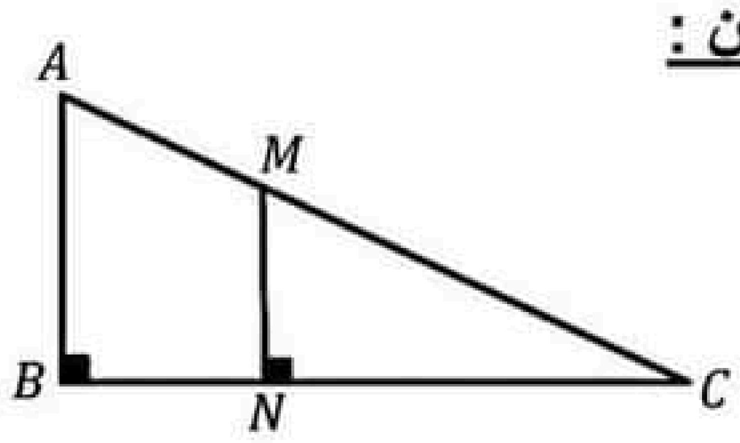
وبالتالي $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}BC = 90$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A

ملاحظة: الطريقة الثانية تغني عن الطريقة السادسة وبالعكس أيضا

ملاحظة : نحتاج المثلث القائم دوما لاستخدام مبرهنة فيثاغورث لحساب طول ضلع فيه او لايجاد النسب المثلثية للزاوية الحادة واستخدام تطبيقاتها

إثبات توازي مستقيمين :

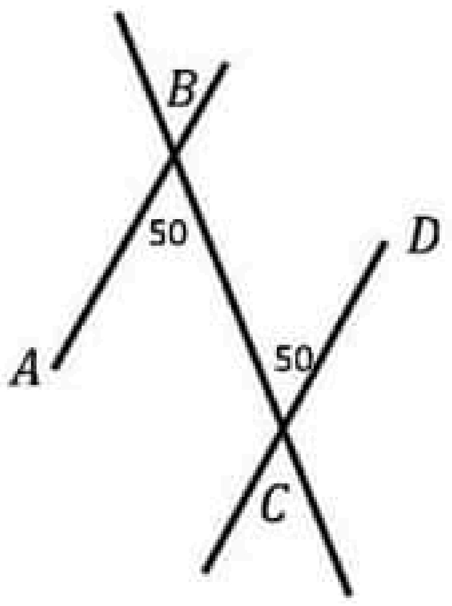


١_ ((العمودان على مستقيم واحد متوازيان))

مثال : $MN \perp BC$, $AB \perp BC$

وبالتالي $AB \,//\, MN$ لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان

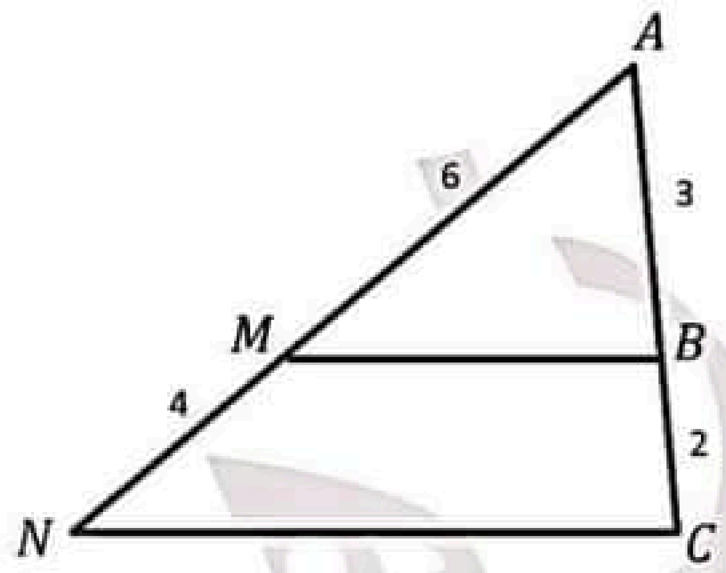
٢_ إذا وجد زاويتان إما متبادلتان داخلا أو متبادلتان خارجا أو متناظرتان وكانت قياساتهما متساوية كان المستقيمان متوازيان



مثال : $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 50$ وهما زاويتان متبادلتان داخلا

وبالتالي $AB \,//\, CD$

٣_ عكس مبرهنة تالس (النسب الثلاثة المتساوية)

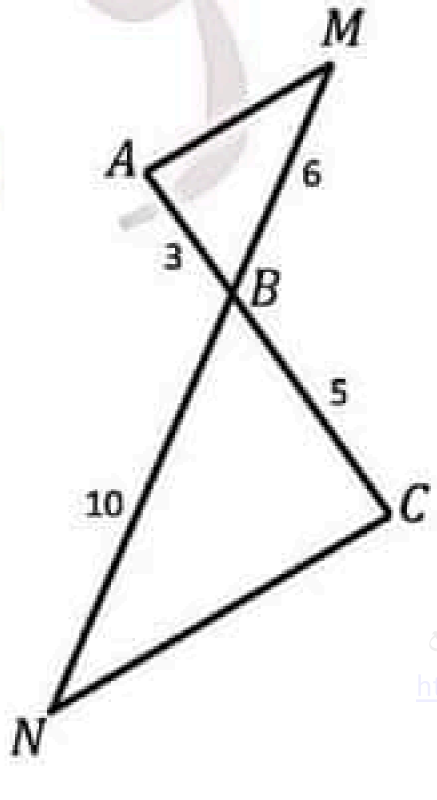


مثال ١ : $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$

$\frac{AM}{AN} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

ومنه $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$

وبالتالي حسب عكس مبرهنة تالس فإن $MB \,//\, NC$



مثال ٢ : $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$

$\frac{MB}{BN} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

ومنه $\frac{AB}{BC} = \frac{MB}{BN}$

وبالتالي حسب عكس مبرهنة تالس فإن $AM \,//\, NC$

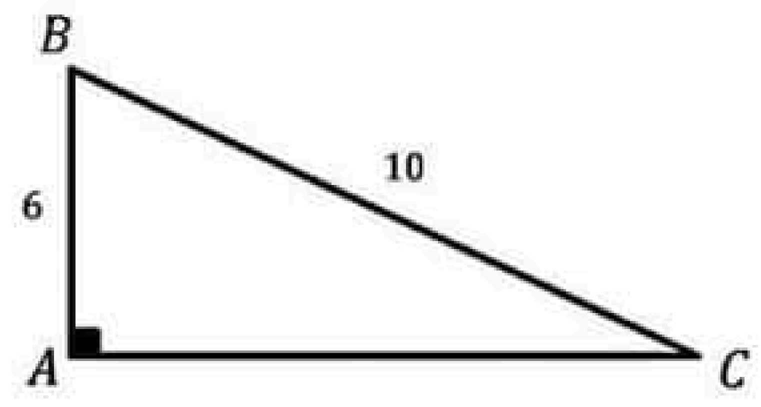
ملاحظة : نحتاج التوازي دوما لاستخدام مبرهنة النسب الثلاثة المتساوية (تالس) التي نستفيد منها في حساب اطوال أضلاع المثلث أو في اثبات تشابه مثلثين

حساب طول ضلع في مثلث

- **الحالة الأولى : وجود مثلث قائم**

١_ إذا علم طولا ضلعين في مثلث قائم نستخدم مبرهنة فيثاغورث

مثال : $AB^2 + AC^2 = BC^2$



$6^2 + AC^2 = 10^2$

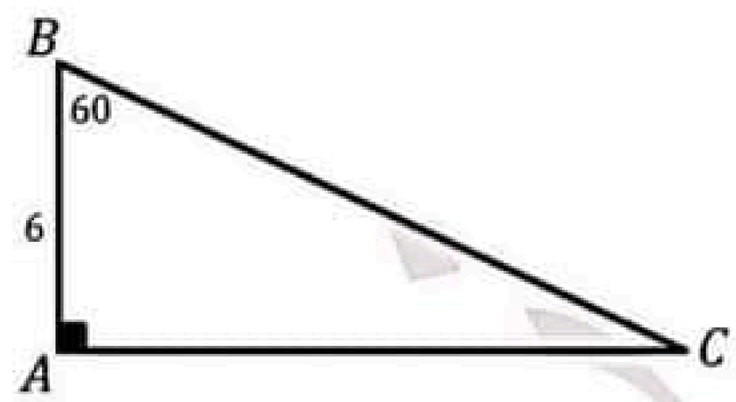
$36 + AC^2 = 100$

$AC^2 = 100 - 36$

$AC^2 = 64$

ومنه $AC = \sqrt{64} = 8$

٢_ إذا علم طول ضلع في مثلث قائم وزاوية شهيرة (30 , 45 , 60) نستخدم النسب المثلثية للزاوية الشهيرة (sin , cos , tan) وذلك حسب الضلع المعلوم والضلع المطلوب ايجاده



مثال : حساب BC

B زاية شهيرة علم المجاور AB والمطلوب الوتر BC

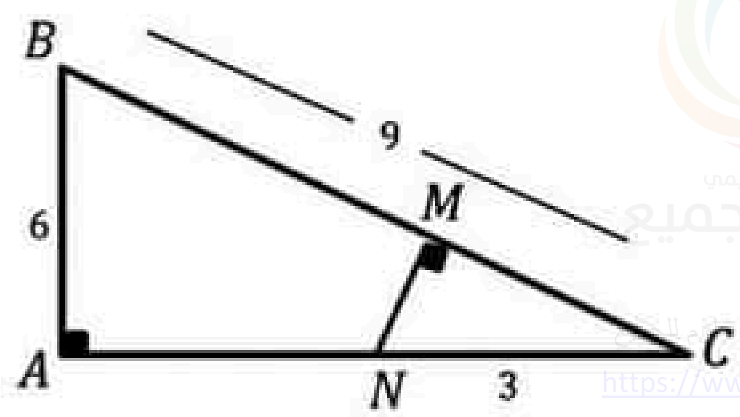
نستخدم $\cos 60$

$\cos 60 = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\frac{1}{2} = \frac{AB}{BC}$ ← لا تنسى حفظ جدول النسب المثلثية للزوايا الشهيرة

$\frac{1}{2} = \frac{6}{BC}$ ومنه $BC = \frac{2*6}{1} = 12$

٣_ استخدام النسب المثلثية (sin , cos , tan) لنفس الزاوية ولكن في مثلثين مختلفين



مثال : عبر عن $\sin C$ في كل من المثلثين ABC , MNC

ثم استنتج طول MN ؟

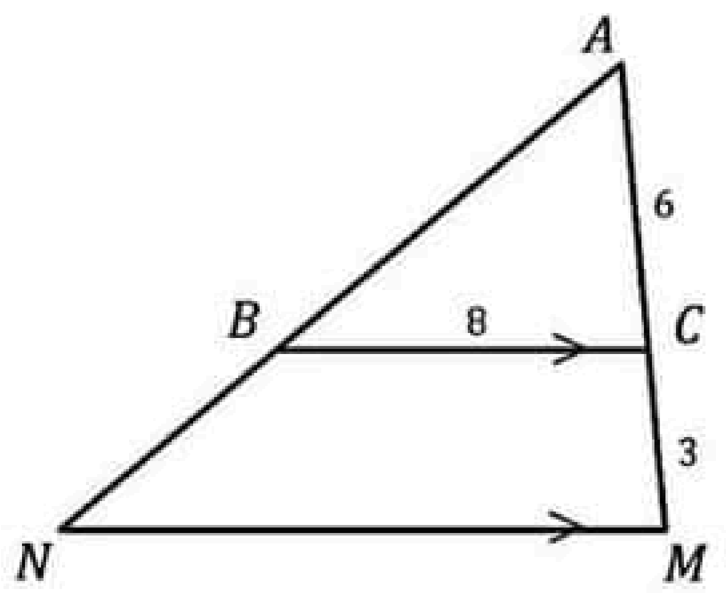
$\sin NCM = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{MN}{NC}$

$\sin ACB = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC}$

وبالتالي $\frac{MN}{NC} = \frac{AB}{BC}$ ((لأن النسب المثلثية لا تتغير إذا لم تتغير الزاوية الحادة وذلك مهما تغير المثلث القائم))

ومنه $\frac{MN}{3} = \frac{6}{9}$ ومنه $MN = \frac{6*3}{9} = 2$

- **الحالة الثانية : وجود ضلعين متوازيين في مثلث نستخدم مبرهنة النسب الثلاثة المتساوية (تالس)**

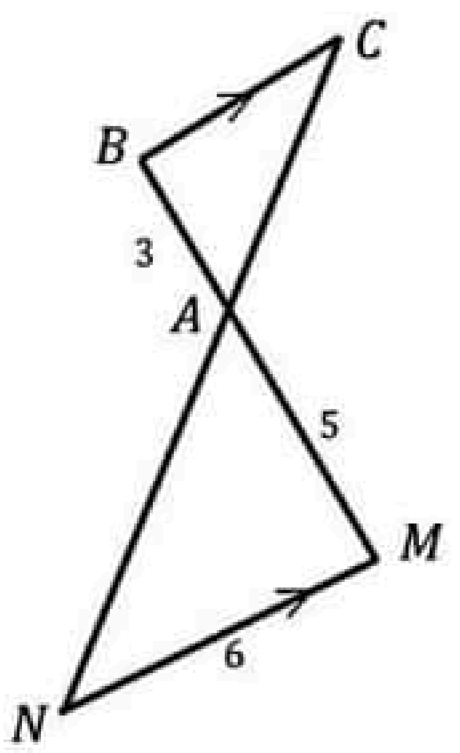


مثال ١ : حسب مبرهنة تالس

$$\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{AB}{AN} = \frac{8}{MN}$$

ومنه $MN = \frac{8*9}{6} = \frac{24}{2} = 12$



مثال ٢ : حسب مبرهنة تالس

$$\frac{CA}{AN} = \frac{BA}{AM} = \frac{CB}{MN}$$

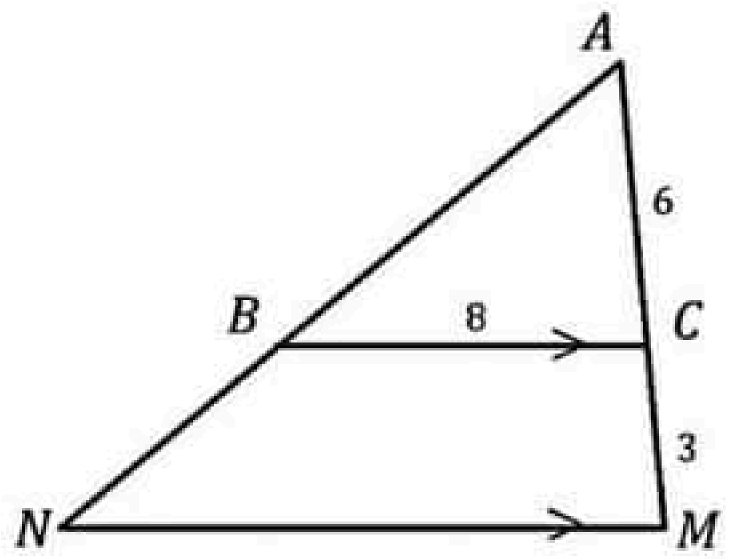
$$\frac{CA}{AN} = \frac{3}{5} = \frac{CB}{6}$$

ومنه $CB = \frac{3*6}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$

طرق إثبات تشابه مثلثين (تصغير ، تكبير)

١_ إذا وجد ضلعين متوازيين من المثلثين ⟵ طريقة (ت ، ت ، ت) أي (توازي ، تناسب ، تشابه)

مثال : بما أن $BC \parallel MN$ ⟵ توازي



وبالتالي حسب مبرهنة تالس

$\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN} = \frac{BC}{MN}$ ⟵ تناسب

وبالتالي ABC تصغير للمثلث AMN ⟵ تشابه

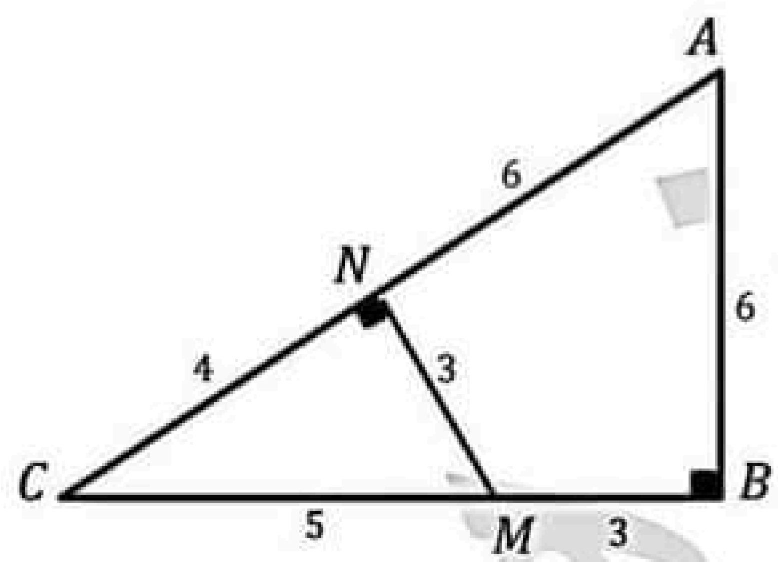
$K = \frac{AC}{AN} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ معامل التصغير

ملاحظة : يحسب معامل التناسب K في هذه الطريقة من أي نسبة من النسب الثلاث

ملاحظة : عندما يكون نوع التشابه تصغير نضع أضلاع المثلث الصغير في البسط

٢_ إذا لم يوجد التوازي وعلمت أطوال أضلاع المثلثين جميعا ⟵ طريقة تناسب الأضلاع المتقابلة

مثال :



$\frac{AB}{MN} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$ ⟵ الضلعين الصغيرين من المثلثين

$\frac{CB}{CN} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$ ⟵ الضلعين الأوسطين من المثلثين

$\frac{AC}{CM} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$ ⟵ الضلعين الكبيرين من المثلثين

وبالتالي $\frac{AB}{MN} = \frac{CB}{CN} = \frac{AC}{CM} = \frac{2}{1}$ أي الأضلاع متناسبة

وبالتالي ABC تكبير للمثلث CMN

$K = \frac{2}{1}$ معامل التكبير

ملاحظة : يحسب معامل التناسب K في هذه الطريقة من قيمة النسب الثلاث

ملاحظة : عندما يكون نوع التشابه تكبير نضع أضلاع المثلث الكبير في البسط

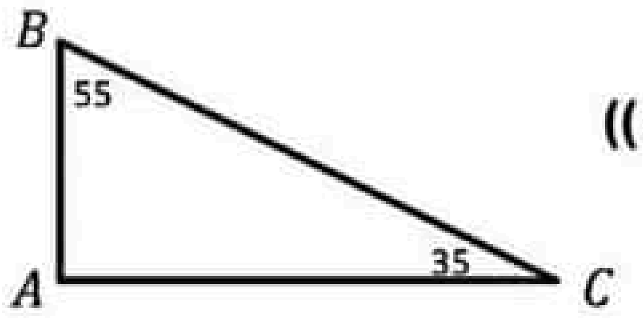
ملاحظة : يمكن استخدام هذه الطريقة أيضا لإثبات تشابه (مستطيلين ، مربعين ، .....)

- لا تنسى استخدام هذه القوانين للاستفادة في حساب أحد مجاهيلها بعد إثبات التشابه

$$K^2 = \frac{\acute{S}}{S}$$

$$K^3 = \frac{\acute{V}}{V}$$

حساب قياس زاوية

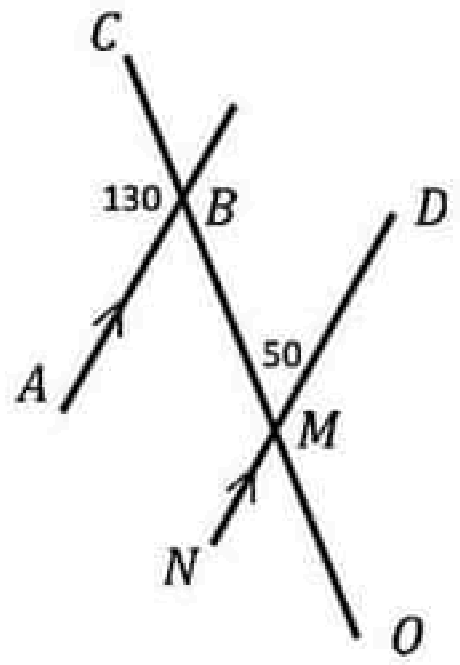


١_ إذا علم قياس زاويتان في مثلث نستخدم الخاصة ((مجموع زوايا مثلث 180))

مثال: $A = 180 - (35 + 55) = 90$

٢_ إذا وجد مستقيمان متوازيان ومستقيم قاطع لهما فإن كل زاويتين متبادلتين داخلا أو متبادلتين خارجا أو متناظرتين قياسهما متساويان

مثال :

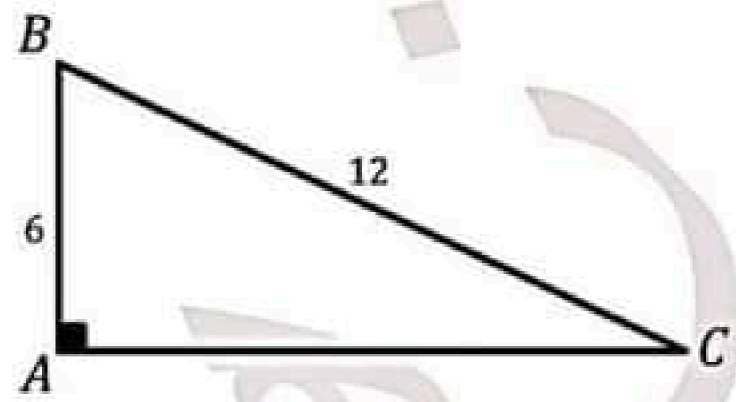


$\widehat{ABC} = \widehat{NMB} = 130$ للتناظر

$\widehat{ABC} = \widehat{OMD} = 130$ للتبادل الخارجي

$\widehat{ABM} = \widehat{BMD} = 50$ للتبادل الداخلي

٣_ إذا علم طولا ضلعين في مثلث قائم يحسب قياس الزاوية بالاعتماد على النسب المثلثية للزوايا الشهيرة



مثال : حساب قياس الزاوية C

علم المقابل AB و الوتر BC

نستخدم $\sin C$

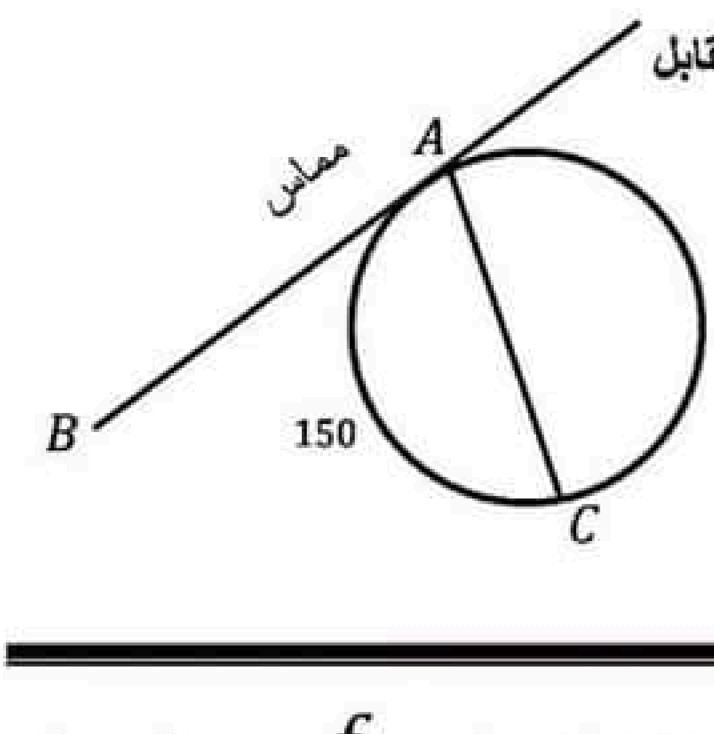
$\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\sin C = \frac{AB}{BC}$

$\sin C = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ومنه $C = 30$ → لا تنسى حفظ جدول النسب المثلثية للزوايا الشهيرة

٤_ الزوايا في الدائرة (المحيطية والمماسية والمركزية)

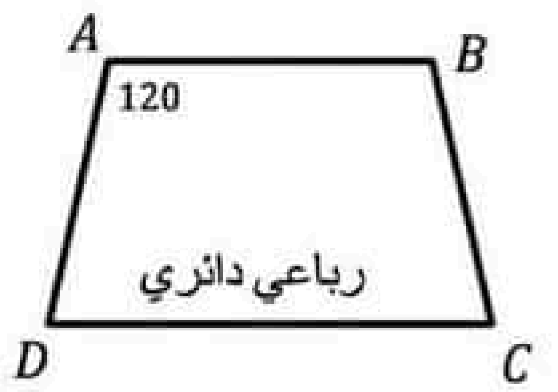
- **تقاس كل من الزاوية المحيطية والمماسية بنصف قياس القوس المقابل**
- **تقاس الزاوية المركزية بقياس القوس المقابل**



مثال : $\widehat{BAC}$ **مماسية تحصر القوس** $AC = 150$

وبالتالي $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} AC = 75$

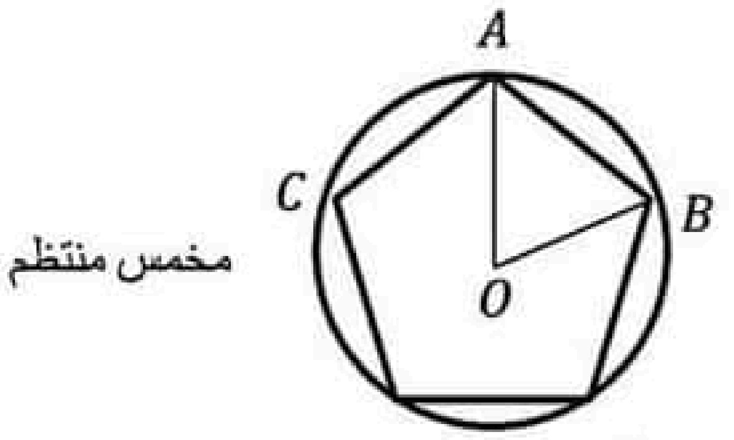
٥_ إذا وجد رباعي دائري فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتين أي مجموعهما 180



مثال : حساب قياس الزاوية C

$\widehat{C} = 180 - 120 = 60$ لأنه في الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين متكاملتين

٦_ في أي مضلع منتظم قياس زاوية المركز يعطى بالقانون $\frac{360}{\text{عدد الأضلاع}}$



مثال :

$$\widehat{AOB} = \frac{360}{5} = 72$$

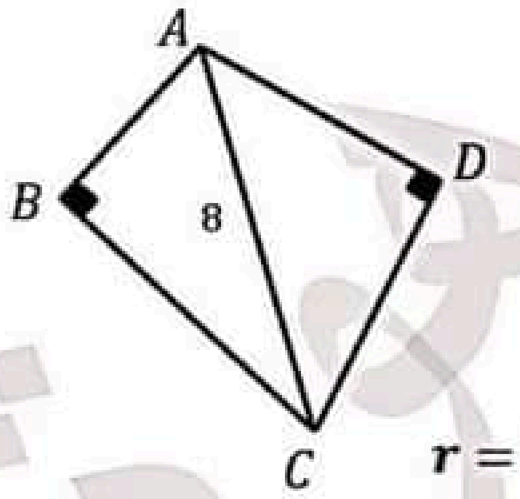
ملاحظة : تحسب زاوية المضلع $\widehat{CAB}$ بدلالة القوس المقابل كونها زاوية محيطية

إثبات أن شكل رباعي دائري

١_ إذا وجد في شكل رباعي زاويتان متقابلتان متكاملتان (أي مجموعهما 180) كان الرباعي دائري

٢_ إذا وجد في شكل رباعي زاويتان متساويتان وتقعان بجهة واحدة بالنسبة لضلع مشترك كان الرباعي دائري

ملاحظة: يتعين مركز الدائرة المارة برؤوس رباعي دائري أحد زواياه قائمة بأنه منتصف وتر أي مثلث قائم رؤوسه من الرؤوس الاربعة للرباعي ويكون نصف قطر دائرة الرباعي يساوي نصف وتر ذلك المثلث القائم



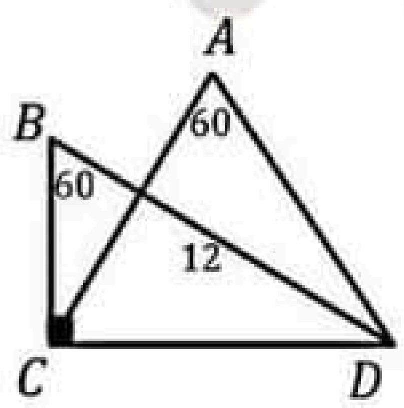
مثال ١ : في الشكل الرباعي $ABCD$

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 90 + 90 = 180$$

وبالتالي الرباعي دائري لأن فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان

مركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف الوتر AC ونصف قطرها $r = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$

مثال ٢ : في الشكل الرباعي $ABCD$



$\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = 60$ وهما زاويتان تقعان بجهة واحدة بالنسبة للضلع CD

وبالتالي الرباعي دائري

مركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف الوتر BC ونصف قطرها $r = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$

التعامل مع مسألة الدائرة

- **اقرأ نص المسألة جيدا وثبت جميع المعطيات على الرسم**
- **قبل الشروع بحل طلبات المسألة اتبع الملاحظات التالية :**

١_ إذا وجد مثلث أحد أضلاعه قطر للدائرة المارة برؤوسه أثبت أنه قائم

٢_ إذا وجد مماس للدائرة أثبت أنه عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس (إن كان نصف القطر مرسوم)

٣_ إذا علمت زاوية محيطية أو مماسية أو مركزية فاحسب قياس القوس المقابل لها

- **ابدأ بحل طلبات المسألة تباعا مستفيدا من الملاحظات التي بدأت بها سابقا ومستعينا بطرق الحل الموجودة بين يديك**
- **لا تنس تسجيل أي طول ضلع أو قياس زاوية تحصل عليه على الرسم**
- **استفد من الخواص التالية والتي تعلمتها في بحث الدائرة**

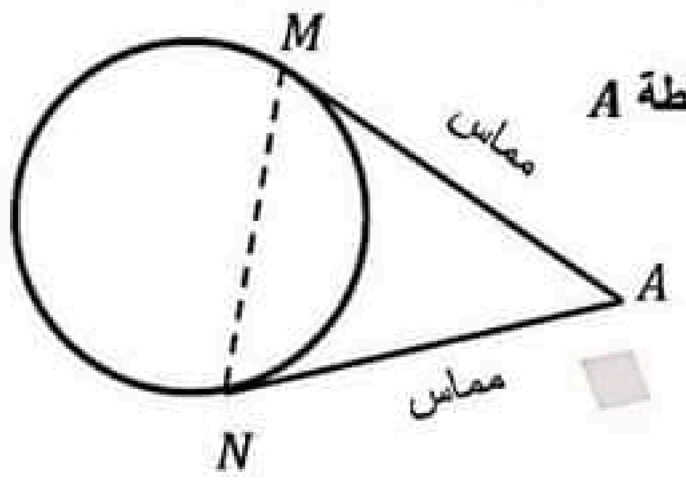
١_ من نقطة خارج دائرة يمكن رسم مماسين للدائرة بعداهما عن نقطتي التماس متساويان

مثال :

بما أن كلا من AM , AN مماسان للدائرة مرسومان من النقطة A

فإن $AM = AN$

وبالتالي المثلث AMN متساوي الساقين رأسه A



٢_ الأوتار المتساوية تحصر أقواسا متساوية وبالعكس

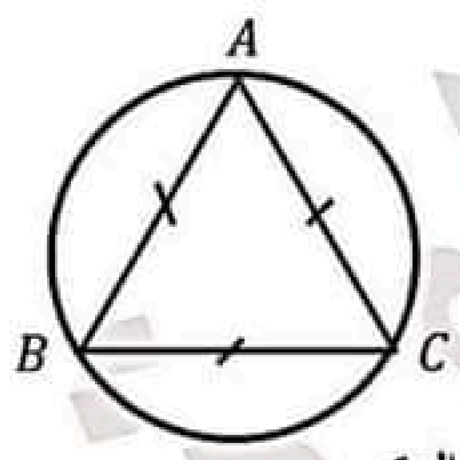
مثال :

ABC مثلث متساوي الأضلاع

أي $AB = BC = CA$

ومنه $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA} = \frac{360}{3} = 12$

لأن الأوتار المتساوية تحصر أقواسا متساوية



٣_ المستقيم المار من مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها فإنه عمودي على ذلك الوتر

٤_ المستقيم المار من مركز الدائرة عموديا على وتر فيها فإنه يقطع ذلك الوتر في منتصفه

مثال ١ :

OM مستقيم مار من مركز الدائرة ومنتصف الوتر AB

ومنه $OM \perp AB$

مثال ٢ :

ON مستقيم مار من مركز الدائرة حيث $ON \perp CD$

ومنه N منتصف الوتر CD