شرح المتتاليات
مع الأستاذ شوكت أقجة

رابط قناة Syria math على التلغرام :

https://t.me/syrianmaths132

رابط قناتنا على اليوتيوب لشرح كامل المنهاج:♡
https://youtube.com/channel/UCl9f119VqsO3muJNvic2JlQ

للتواصل: ٠٩٨٨٠٤٣٦٦٧

ماهي المتتالية؟

هو تابع منطلقه N (مجموعة الأعداد الطبيعية) ومستقره R (مجموعة الأعداد الطبيعية)

نرمز للمتتالية بالشكل: عدد $\geq$ $(U_n)n$ حيث:

عدد: دليل البدء n: لدليل (U_n): الحد العام

طرق تعريف التابع:

١)صيغ تتبع العدد n أي يعطى الحد العام

مثال:

لتكن المتتالية (U_n)n≥ 0 المعرفة وفق: $U_n = n^2 + 2$

$U_0=0^2+2$

$U_1=1^2+2$

٢)صيغة تابع U_n =F(n)

مثال:

ليكن التابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية:

$U_0 = f(0) = \sqrt{0+1} = 1$

$U_1 = f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$U_3 = f(3) = \sqrt{3+1} = 2$

٣)صيغة التدريجية: "يعطى حد البدء + علاقةU_n+1 بدلالة U_n"

مثال:

لتكن المتتالية: $U_0 = 5$

$U_n+1 = U_n + 2$ أوجد الحدود الثلاثة الأولى:

$U_0=5$

$U_1 = U_0+2=5+2=7$

$U_2 = U_1+2=7+2=9$

جهة اطراد متتالية:

أي معرفة هل المتتالية متزايدة ام متناقصة(تماماً)

١)المتتالية المتزايدة تماما: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل ازدادت قيمة الحد

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} > U_n$

٢)المتتالية المتزايدة: هي متتالية كلما ازداد الدليل **ازدادت** قيمة الحد او **بقي قيمة الحد**

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} \geq U_n$

٣)المتتالية المتناقصة تماما: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **نقصت** قيم الحد

أي تحقق: $U_{n+1} < U_n$

٤)المتتالية المتناقصة: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **نقصت** قيمة الحد أو **بقيت** كما هي

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} \leq U_n$

٥)المتتالية الثابتة $U_{n+1} = U_n$

أنواع المتتاليات:

المتتالية الحسابية:

نقول عن متتالية أنها حسابية اذا نتج كل حد عن سابقه **بإضافة** عدد ثابت يسمى أساس المتتالية (r)

أي تحقق العلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = U_n + r$$

قواعد المتتالية الحسابية:

اذا كان (p ,m) دليلين ل U فان:(اثبات ان المتتالية حسابية نستخدم القانون التالي):

$$U_m - U_p = (m - p)r$$

قانون مجموع المتتالية الحسابية:

$$S = \frac{(\text{حدالأول} + \text{حد الأخير}) \times \text{عدد الحدود}}{2}$$

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

فائدة القانون السابق:

يفيد في معرفة الأساس وذلك اذا كان لدينا حدين معلومين أو في معرفة حد من أحد الحدود

مثال:

اوجد الحد ذي الدليل 20 لمتتالية الحسابية $(U_n)_{n\geq0}$ اذا علمت ان $U_2 = 4$ واساسها $r = 2$

الحل:

$$U_m - U_p = (m-p)r$$

$$U_{20} - U_2 = (20-2)2$$

$$U_{20} = 4 + 36 = 40$$

المتتالية الهندسية:

نقول عن متتالية انها هندسية اذا نتج كل حد عن سابقه بضربه بعدد ثابت (q) يسمى أساس المتتالية

أي تحقق العلاقة التدريجية

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

قواعد المتتالية الهندسية:

اذا كان (m, p) دليلين ل U فان:(اثبات ان المتتالية هندسية نستخدم القانون التالي :

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

قانون مجموع المتتالية الهندسية:

$$S = \text{الحد الأول} \times \frac{1-(\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}} =$$

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

فائدة القانون السابق:

يفيد في معرفة الأساس وذلك اذا كان لدينا حدين معلومين أو في معرفة حد من أحد الحدود

مثال:

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و $U_1 = 3$ اوجد الحد ذي الدليل 8

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

$$\frac{U_8}{U_1} = 2^{(8-1)}$$
$$U_8 = 3 \times 2^7 = 384$$

ملاحظة هامة: لمعرفة عدد الحدود نميز عدة حالات منها:

١)اذا كانت الأدلة متعاقبة فان عدد الحدود يعطى كما يلي:

عدد الحدود = الدليل الأخير – الدليل الأول +١

٢)اذا كانت الأدلة زوجية بدءا من العدد 2 فان عدد الحدود يعطى كما يلي:

عدد الحدود = $\frac{\text{الدليل الأخير}}{2}$

المتتاليات

- جهة اطراد متتالية
  - متزايد تماماً: $U_{n+1} > U_n$
  - متناقص تماماً: $U_{n+1} < U_n$
  - ثابتة: $U_{n+1} = U_n$
- المتتالية الحسابية
  - $U_{n+1} = U_n + r$
  - $U_m - U_p = (m-p)r$
  - المجموع: $S = \frac{n(a+l)}{2}$
  - اذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية كان: $b = \frac{a+c}{2}$
- المتتالية الهندسية
  - $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$
  - $\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$
  - المجموع: $S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$
  - اذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية كان: $b^2 = a.c$
- الاثبات بالتدريج

الاثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي):

نطبق الخطوات التالية:

١) نبرهن صح العلاقة من أجل اصغر عدد طبيعي في المجموعة المعطاة

٢) نفرض صحة العلاقة من أجل أي عدد طبيعي n

٣) نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$

مثال: أثبت أنه من اجل العدد الطبيعي الموجب تماماً N فان :

الحل: نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 1$

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1 = 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad *$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

ننطلق من * : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$l_1 = 1^3 + 2^3 + \dots + (n^3) + (n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$(n+1)^2 = \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right]$$

$$(n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] = l_2$$

لمتابعة كل جديد: https://t.me/syriansmaths132

انتهى البحث

وهكذا نكون قد انتهينا من شرح بحث المتتاليات .

أ شوكت أقجة دورات رياضيات لجميع المراحل(٠٩٨٨٠٤٣٦٦٧)