الفصل ٣

المتطابقات و المعادلات المثلثية

المحتوي

١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية علمًا بأن: $0° < \theta < 90°$.

1) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ $\quad \frac{12}{13}$

2) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = 4$ $\quad \sqrt{17}$

4) $\cot\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = \frac{2}{5}$ $\quad \frac{5}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $180° < \theta < 270°$.

5) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{15}{17}$ $\quad -\frac{17}{8}$

6) $\cot\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -\frac{3}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $270° < \theta < 360°$.

7) $\cot \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{10}$ $\quad$ **$-\frac{3\sqrt{91}}{91}$**

8) $\sec \theta$ ، إذا كان $\csc \theta = -8$ $\quad$ **$\frac{8\sqrt{7}}{21}$**

9) $\sin \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ $\quad$ **$-\frac{\sqrt{5}}{5}$**

10) $\cot \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$ $\quad$ **$-\frac{\sqrt{2}}{4}$**

بسّط كل عبارة ممّا يأتي:

11) $\csc \theta \tan \theta$ $\quad$ **$\sec \theta$**

12) $\frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \theta}$ $\quad$ **$\cos^2 \theta$**

13) $\sin^2 \theta \cot^2 \theta$ $\quad$ **$\cos^2 \theta$**

14) $\cot^2 \theta + 1$ $\quad$ **$\csc^2 \theta$**

15) $\frac{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}$ $\quad$ **$\csc^2 \theta$**

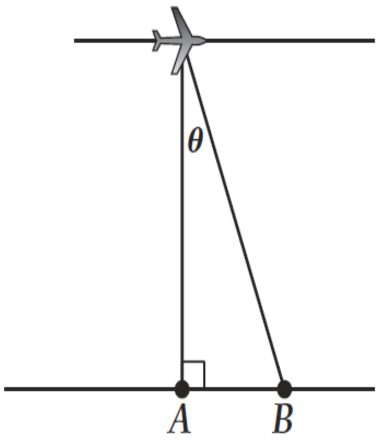
16) $\frac{\csc \theta - \sin \theta}{\cos \theta}$ $\quad$ **$\cot \theta$**

17) $\sin \theta + \cos \theta \cot \theta$ $\quad$ **$\csc \theta$**

18) $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$ $\quad$ **$2 \tan \theta$**

19) $\sec^2 \theta \cos^2 \theta + \tan^2 \theta$ $\quad$ **$\sec^2 \theta$**

20) **التصوير الجوي:** يُبيّن الشكل المجاور طائرة تلتقط صورة جوية للنقطة A . وبما أن النقطة تقع تحت الطائرة تمامًا، فإنه لا يوجد تشويه أو عيوب في الظل أو الصورة. وفي النقاط التي لا تقع مباشرة أسفل الطائرة يوجد تشويه في الصورة، يعتمد مقداره على بُعد النقاط عن الموقع أسفل الطائرة. وعندما تزيد المسافة من الكاميرا إلى المنطقة المراد تصويرها يقل زمن عرض الصورة على فيلم التصوير في الكاميرا، بحسب العلاقة: $\sin\theta\,(\csc\theta - \sin\theta)$. اكتب هذه العلاقة بدلالة $\cos\theta$ فقط.



$\cos^2\theta$

21) **الأمواج:** المعادلة $y = a\sin\theta t$ تُمثّل ارتفاع الأمواج على العوامة عند الزمن t بالثواني. عبّر عن a بدلالة $\csc\theta t$.

$a = y\csc\theta t$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة:

1) $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta}=$$
$$\sec^2\theta$$

2) $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=1$

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=1$$

3) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)=\cos^2\theta$

$$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$$
$$=1-\sin^2\theta$$
$$=\cos^2\theta$$

4) $\tan^4\theta+2\tan^2\theta+1=\sec^4\theta$

$$\tan^4\theta+2\tan^2\theta+1=$$
$$(\tan^2\theta+1)^2=$$
$$(\sec^2\theta)^2=$$
$$\sec^4\theta$$

$$\cos^2\theta\cot^2\theta = \cot^2\theta - \cos^2\theta \quad (5$$

$$\cot^2\theta - \cos^2\theta =$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta =$$

$$\frac{\cos^2\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta} =$$

$$\frac{(\cos^2\theta)(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta} =$$

$$\frac{\cos^2\theta}{1}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} =$$

$$\cos^2\theta\cot^2\theta$$

$$\sin^2\theta(\csc^2\theta + \sec^2\theta) = \sec^2\theta \quad (6$$

$$(\sin^2\theta)(\csc^2\theta + \sec^2\theta) =$$

$$(\sin^2\theta)\left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\right) =$$

$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} =$$

$$1 + \tan^2\theta =$$

$$\sec^2\theta$$

7) **فيزياء:** مربع السرعة الابتدائية لجسيم قُذف من سطح الأرض هو $v^2 = \dfrac{2gh}{\sin^2\theta}$ ، حيث θ زاوية القذف و h أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم. و g مقدار تسارع الجاذبية الأرضية. أثبت صحّة المتطابقة الآتية:

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta} = \frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}$$

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta} = \frac{2gh}{1-\cos^2\theta} = \frac{2gh}{1-\dfrac{1}{\sec^2\theta}} = \frac{2gh}{\dfrac{\sec^2\theta-1}{\sec^2\theta}} = \frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}$$

8) **ضوء:** تُقاس شدة مصدر الضوء بالشمعة، من خلال المعادلة $I = ER^2\sec\theta$ ، حيث E مقدار الإنارة بالشمعة لكل قدم مربعة على السطح، و R المسافة بالأقدام من مصدر الضوء، و θ الزاوية بين شعاع الضوء والخط العامودي على السطح. برهن المتطابقة التالية: $ER^2\sec\theta = ER^2(1+\tan^2\theta)\cos\theta$.

$$ER^2(1+\tan^2\theta)\cos\theta = ER^2\sec^2\theta\cos\theta = ER^2\sec^2\theta \cdot \frac{1}{\sec\theta} = ER^2\sec\theta$$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

1) $\cos 75^\circ$ $\quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) $\cos 375^\circ$ $\quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3) $\sin(-165^\circ)$ $\quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

4) $\sin(-105^\circ)$ $\quad \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5) $\sin 150^\circ$ $\quad \frac{1}{2}$

6) $\cos 240^\circ$ $\quad -\frac{1}{2}$

7) $\sin 225^\circ$ $\quad \frac{-\sqrt{2}}{2}$

8) $\sin(-75^\circ)$ $\quad \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

9) $\sin 195^\circ$ $\quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

(10 $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$$\begin{aligned}\cos(180° - \theta) &= \cos 180° \cos\theta + \sin 180° \sin\theta \\ &= -1\cos\theta + 0\sin\theta \\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

(11 $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$

$$\begin{aligned}\sin(360° + \theta) &= \sin 360° \cos\theta + \cos 360° \sin\theta \\ &= 0\cos\theta + 1\sin\theta \\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

$$\sin(45^\circ + \theta) - \sin(45^\circ - \theta) = \sqrt{2}\sin\theta \quad \textbf{(12}$$

$$\sin(45^\circ + \theta) - \sin(45^\circ - \theta)$$
$$= \sin 45^\circ \cos\theta + \cos 45^\circ \sin\theta - (\sin 45^\circ \cos\theta - \cos 45^\circ \sin\theta)$$
$$= 2 \cdot \cos 45^\circ \sin\theta$$
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\theta$$
$$= \sqrt{2}\sin\theta$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \quad \textbf{(13}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} + \sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$
$$= \sin x$$

14) **الطاقة الشمسية:** في 21 من شهر مارس، تُحدّد القيمة العظمى للطاقة الشمسية الساقطة على القدم المربع من سطح الكرة الأرضية في موقع معيّن بالتعبير: $E \sin (90° - \phi)$، حيث ϕ خط العرض الجغرافي للموقع، و E مقدار ثابت. استخدم صيغة النسب المثلثية للفرق بين الزوايا لإيجاد كمية الطاقة الشمسية بدلالة جيب التمام $(\cos \phi)$ للموقع الجغرافي الذي يُمثّله خط العرض ϕ.

$E \cos \phi$

15) **كهرباء:** تُحدّد شدة التيار (c) بالأمبيرات في دائرة كهربائية فيها تيار متردّد بالصيغة: $c = 2\sin(120t)$ بعد t ثانية.

a) أعد كتابة الصيغة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين. **$c = 2 \sin (90t + 30t)$**

b) استعمل صيغة النسب المثلثية لمجموع الزوايا في إيجاد قيمة التيار عند $t = 1$ ثانية.

$\sqrt{3}$ أمبير

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان:

1) $\cos \theta = \frac{5}{13}; 0° < \theta < 90°$

$\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}$

2) $\sin \theta = \frac{8}{17}; 90° < \theta < 180°$

$-\frac{240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$

3) $\cos \theta = \frac{1}{4}; 270° < \theta < 360°$

$-\frac{\sqrt{15}}{8}, -\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{4}$

4) $\sin \theta = -\frac{2}{3}; 180° < \theta < 270°$

$\frac{4\sqrt{5}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}, -\frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{6}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\tan 105^\circ$

$$-2-\sqrt{3}$$

6) $\tan 15^\circ$

$$2-\sqrt{3}$$

7) $\cos 67.5^\circ$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

8) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

$$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

9) $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\tan\theta-\sin\theta}{2\tan\theta}$

$$\frac{\tan\theta-\sin\theta}{2\tan\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}{2\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\cos\theta}\bullet\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\sin^2\frac{\theta}{2}$$

(10 $\sin 4\theta = 4\cos 2\theta \sin\theta \cos\theta$

$$\sin 4\theta$$
$$= \sin 2(2\theta)$$
$$= 2\sin 2\theta \cos 2\theta$$
$$= 2(2\sin\theta\cos\theta)(\cos 2\theta)$$
$$= 4\cos 2\theta \sin\theta\cos\theta$$

(11 **صور جوية :** في التصوير الجوي يوجد تناقص في درجة وضوح صور الفيلم لأي نقطة X لا تقع مباشرة أسفل الكاميرا. يُعطى التناقص في وضوح الصورة E_θ بالعلاقة $E_\theta = E_0\cos^4\theta$ ، حيث θ الزاوية بين الخط العامودي على الكاميرا إلى سطح الأرض والخط من الكاميرا إلى النقطة X ، و E_0 درجة الوضوح للنقطة الموجودة مباشرة تحت الكاميرا. استعمل المتطابقة $2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta$ في إثبات أن:

$$E_0\cos^4\theta = E_0\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

$$E_0\cos^4\theta = E_0(\cos^2\theta)^2 = E_0(1-\sin^2\theta)^2$$
$$= E_0\left(1-\frac{2\sin^2\theta}{2}\right)^2 = E_0\left(1-\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = E_0\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

1) $\sqrt{2}\cos\theta = \sin 2\theta;\ 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

$45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 270^\circ$

2) $\sin 2\theta = \cos\theta;\ 90^\circ \le \theta < 180^\circ$

$90^\circ, 150^\circ$

3) $\cos 4\theta = \cos 2\theta;\ 180^\circ \le \theta < 360^\circ$

$180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$

4) $\cos\theta + \cos(90-\theta) = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$

$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

5) $2 + \cos\theta = 2\sin^2\theta;\ \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

$\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$

6) $\tan^2\theta + \sec\theta = 1;\ \frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$

$\frac{2\pi}{3}$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

7) $\cos^2\theta = \sin^2\theta$ $\quad \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

8) $\cot\theta = \cot^3\theta$ $\quad \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

9) $\sqrt{2}\sin^3\theta = \sin^2\theta$

$k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

10) $\cos^2\theta\sin\theta = \sin\theta$ $\quad k\pi$

11) $2\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\quad \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

12) $\sec^2\theta = 2$ $\quad \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

13) $\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta$ $\quad 90^\circ + k \cdot 180^\circ$

14) $\csc^2\theta - 3\csc\theta + 2 = 0$

$30^\circ + k \cdot 360^\circ, 90^\circ + k \cdot 360^\circ,,$

$150^\circ + k \cdot 360^\circ$

15) $\frac{3}{1+\cos\theta} = 4(1-\cos\theta)$

$60^\circ + k \cdot 180^\circ\ ,\ 120^\circ + k \cdot 180^\circ$

16) $\sqrt{2}\cos^2\theta = \cos^2\theta$

$90^\circ + k \cdot 180^\circ,$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

17) $4\sin^2\theta = 3$

$\frac{\pi}{3} + k\pi\ ,\ \frac{2\pi}{3} + k\pi$

أو: $60° + k \cdot 180°\ ,\ 120° + k \cdot 180°$

18) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

$\frac{\pi}{6} + k\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6} + k\pi$

أو: $30° + k \cdot 180°\ ,\ 150° + k \cdot 180°$

19) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta = -1$

$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

أو $30° + k \cdot 360°,\ 90° + k \cdot 360°\ ,\ 150° + k \cdot 360$

20) $\cos 2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

$k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

أو: $k \cdot 180°,\ 30° + k \cdot 360°$

$150° + k \cdot 360°$

21) **كهرباء:** يمكنك وصف شدة التيار الكهربائي المتردد المار في دائرة كهربائية ما بالعلاقة: $j = 3 \sin 240t$ ، حيث j شدة التيار الكهربائي بالأمبير، و t الزمن بالثواني. اكتب عبارة تصف الزمن عندما لا يوجد تيار كهربائي.

$$t = 0.75k$$