الاسم :	مذاكرة التابع الأسي "1" الدرجة الكاملة : 400	BAC MATHS

السؤال الأول (40 درجة) :

حل المتراجحتين الآتيتين : $2)\ e^{2x}-3e^{x}+2\le 0$ $1)\ e^{x}+20e^{-x}-12\le 0$

السؤال الثاني (40 درجة) :

حل المعادلتين الآتيتين : $2)\ 4^{x}+2^{x}=2$ $1)\ 4^{x}+6^{x}=9^{x}$

السؤال الثالث (40 درجة) :

حل جملة المعادلتين : $x+y=0$ $e^{x-1}+e^{y+1}=2$

السؤال الرابع (40 درجة) :

أثبت صحة المتراجحة $e^{\sqrt{x}}\ge\sqrt{x}+1$ من أجل $x\ge 0$.

السؤال الخامس (40 درجة) :

f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=e^{|x|}$ ادرس قابليّة اشتقاق التابع f عند الصفر .

السؤال السادس (50 درجة) :

C_f و C_g هما الخطان البيانيّان للتابعين المعرفين وفق : $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, $g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ **المطلوب :**

1- أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T في نقطة يُطلَب تعيين إحداثياتها .

2- اكتب معادلة المماس المشترك T .

السؤال السابع (50 درجة) :

f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=e^{\sin x}$ **المطلوب :**

1- احسب $f(0)$ ، $f'(x)$ ، $f'(0)$ و استنتج $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$.

2- أعد حساب $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$ بطريقة أخرى .

السؤال الثامن : حل المسألة الآتية (100 درجة) :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=xe^{x}-1$

و المطلوب :

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ، و اكتب معادلة المقارب الأفقي ثم ادرس وضعه النسبي .

2- ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، و دل على القيم الحديّة .

3- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=0$ ، و ادرس وضع T بالنسبة ل C .

4- احسب قيمة تقريبيّة ل $f(0.01)$.

5- أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً Ω ينتمي إلى المجال $]0,1[$.

6- في معلم متجانس ارسم المقارب الأفقي و T ثم ارسم C .

طلب إضافي (20 درجة إضافية)

احسب مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل و المستقيمين $x=-1$ و $x=0$.

-- انتهت الأسئلة --

حل مذاكرة التابع الأسي "1"

السؤال الأول:

1) $e^x + 20e^{-x} - 12 \le 0$

نضرب الطرفين بـ $e^x > 0$:

$e^{2x} - 12e^x + 20 \le 0$

$(e^x - 2)(e^x - 10) \le 0$

نفرض $(e^x - 2)(e^x - 10) = 0$

إما $e^x - 2 = 0$

$e^x = 2$ $\boxed{x_1 = \ln(2)}$

أو $e^x - 10 = 0$

$e^x = 10$ $\boxed{x_2 = \ln(10)}$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$\ln 10$		$+\infty$
$(e^x-2)(e^x-10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه حل المتراجحة $S = [\ln 2, \ln 10]$

2) $e^{2x} - 3e^x + 2 \le 0$

$(e^x - 1)(e^x - 2) \le 0$

نفرض $(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$

إما $e^x - 1 = 0$

$e^x = 1 \rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

أو $e^x - 2 = 0$

$e^x = 2$ $\boxed{x_2 = \ln 2}$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$(e^x-1)(e^x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه حل المتراجحة

$S = [0, \ln 2]$

السؤال الثاني:

1) $4^x + 6^x = 9^x$

نعلم أن $4 = 2^2$ و $9 = 3^2$

$2^{2x} + (3 \cdot 2)^x = 3^{2x}$

$2^{2x} + 3^x \cdot 2^x = 3^{2x}$

نقسم الطرفين على $3^{2x} \neq 0$:

$\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x}{3^x} = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0$

$t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$t^2 + t - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$x_1 \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

$t_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} < 0$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$.

ومنه حل المعادلة $4^x + 6^x = 9^x$

هو $\boxed{x = \frac{\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}}$

السؤال الرابع :

ليكن g التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$

وفق : $g(x)=e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}-1$

لندرس اطراد g على المجال $[0,+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-1)$$

$$x\geqslant 0$$

$$\sqrt{x}\geqslant 0 \rightarrow e^{\sqrt{x}}\geqslant 1$$

$$e^{\sqrt{x}}-1\geqslant 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}}-1)\geqslant 0$$

$$g'(x)\geqslant 0$$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	0 $\nearrow$

نستنتج أن $g(x)\geqslant 0$

أي $e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}-1\geqslant 0$

$$e^{\sqrt{x}}\geqslant \sqrt{x}+1$$

السؤال الخامس :

معدل التغير $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$t(x)=\frac{e^{|x|}-1}{x}=\begin{cases}\dfrac{e^{x}-1}{x} & x>0\\[2mm] \dfrac{e^{-x}-1}{x} & x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}t(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

التابع f اشتقاقي عند الصفر من اليمين

حيث $f'(0^+)=1$

2) $4^x+2^x=2$

$$2^{2x}+2^x-2=0$$

$$t=2^x$$

$$t^2+t-2=0$$

$$(t-1)(t+2)=0$$

إما $t+2=0$

$$t=-2$$

$2^x=-2$ مرفوض

أو $t-1=0$

$$t=1$$

$$2^x=1$$

$\boxed{x=0}$ مقبول

السؤال الثالث :

$$\begin{cases}e^{x-1}+e^{y+1}=2 & \text{---- (1)}\\ x+y=0 & \text{---- (2)}\end{cases}$$

من (2) $x=-y$

نعوض في (1) :

$$e^{x-1}+e^{-x+1}=2$$

$$e^{x-1}+e^{-(x-1)}=2$$

نضرب الطرفين ب $e^{x-1}\neq 0$

$$e^{2(x-1)}+1=2e^{x-1}$$

$$e^{2(x-1)}-2e^{x-1}+1=0$$

$$t=e^{x-1}$$

$$t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=0$$

$$t=1$$

$$e^{x-1}=1\Rightarrow x-1=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=1}\\ \boxed{y=-1}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} t(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) = -1$$

فالدالة f اشتقاقية عند الصفر على اليسار

بحيث $f'(0^-)=-1$

لكن $f'(0^-)\neq f'(0^+)$

فالدالة f غير اشتقاقية عند الصفر.

السؤال السادس :

1- لكي يقبل C_f و C_g مماساً مشتركاً في نقطة فاصلتها a يجب تحقق الشرطين

$f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$

لإيجاد a نحل المعادلة

$$f(x)=g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$$

لدينا : $e^{2x}-1 = (e^x-1)(e^x+1)$

$$\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^{2x}+1} = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{2e^x}$$

نقسم الطرفين على $e^x+1\neq 0$:

$$\frac{e^x-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x-1}{2e^x}$$

$$2e^x(e^x-1) = (e^{2x}+1)(e^x-1)$$

$$(e^x-1)[2e^x-e^{2x}-1]=0$$

$$-(e^x-1)(\underbrace{e^{2x}-2e^x+1}_{\text{مربع كامل}})=0$$

$$(e^x-1)(e^x-1)^2=0$$

$$(e^x-1)^3=0$$

$$\Leftrightarrow e^x=1$$

$\boxed{x=0}$ (أو $a=0$)

نتحقق من الشرط الثاني

$$f'(0)=g'(0)$$

حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$f'(0)=\frac{1+1}{2}=1$$

حساب $g'(x)$:

$$g'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}(\cancel{e^{2x}}+1-\cancel{e^{2x}}+1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$g'(0)=\frac{4(1)}{2^2}=\frac{4}{4}=1$$

نلاحظ أنّ

$f(0)=g(0)$ و $f'(0)=g'(0)$

ومنه C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً

عند النقطة التي فاصلتها $a=0$

وترتيبها $f(0)=0$

أي أنّ T يمس C_f و C_g عند

مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$

2) $T:\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$\boxed{T:\ y=x}$$

$f(x)-(-1) = xe^{x}-1+1 = xe^{x}$

في حالة $x>0$ يكون C فوق المقارب.

في حالة $x<0$ يكون C تحت المقارب.

يتقاطع C مع المقارب الأفقي عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = (1)e^{x} + e^{x}(x) = e^{x}(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \iff$$
$$e^{x}(x+1) = 0$$
$$x+1 = 0$$
$$x = -1$$

$$f(-1) = -e^{-1}-1 = -1-\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = -1-\frac{1}{e}$ قيمة حدية صغرى.

3) $T:\ y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$f(0) = -1 \quad , \quad f'(0) = 1$

$$y = (1)(x-0)-1$$

$$\boxed{T:\ y = x-1}$$

$$f(x)-y_{1} = xe^{x}-1-(x-1)$$
$$= xe^{x}-x = x(e^{x}-1)$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$x(e^{x}-1)$		$+$	0	$+$	
الوضع النسبي		C فوق T		C فوق T	

السؤال السابع:

1) $f(0) = e^{\sin(0)} = e^{0} = 1$

$$f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$f'(0) = \cos(0)\cdot e^{0} = 1\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = 1$$

حسب تعريف العدد المشتق.

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= (1)\cdot(1) = 1$$

لأن $\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} = 1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

السؤال الثامن:

1) $D_f =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(0)$$

حالة عدم تعيين نزيلها:

نضع $t = -x$

ومراعاة أن $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{n}}{e^{t}} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}-1\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^{t}}-1\right) = 0-1 = -1$$

المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مقارب أفقي لـ C في جوار $-\infty$.

④

$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\cdot h$

نضع $a=0$ و $h=0.01$

$f(0.01) \simeq f(0) + f'(0)(0.01)$

$\simeq -1 + 0.01$

$f(0.01) \simeq -0.99$

-5) من جدول التغيرات :

المجال $]-\infty,-1[$ $f(]-\infty,-1[) =]\frac{-e-1}{e},-1[$ لا يحوي الصفر

المجال $]-1,+\infty[$ $f(]-1,+\infty[) =]\frac{-e-1}{e},+\infty[$ يحوي الصفر

حيث f معرف ومستمر ومطرد تماماً على $]-1,+\infty[$

وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α .

اثبات أن α ينتمي إلى المجال $]0,1[$:

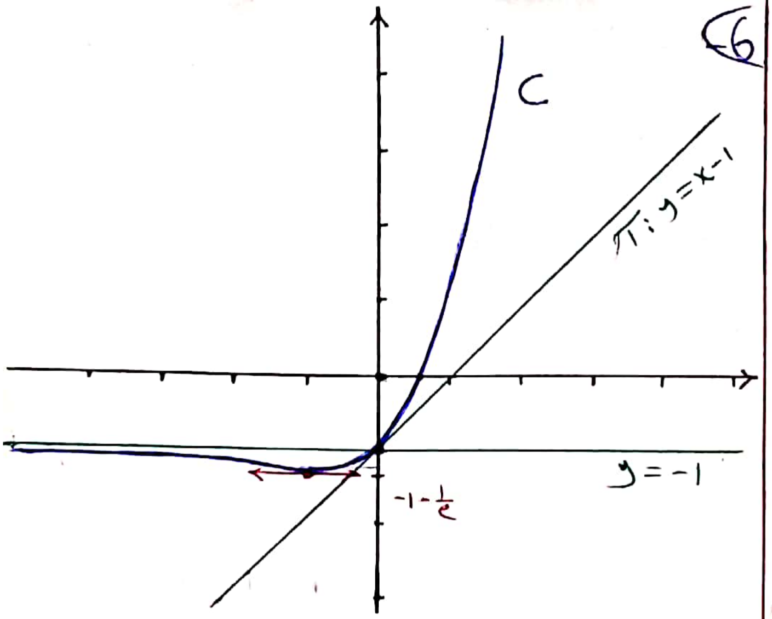
f معرف ومستمر ومطرد تماماً على المجال $]0,1[$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e-1 > 0 \end{array}\right\} f(0)\cdot f(1) < 0$$

وبالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]0,1[$ أي بأن

$\alpha \in]0,1[$

⑥



حل الطلب الإضافي :

$S = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_{-1}^0 |xe^x - 1|\,dx$

على المجال $[-1,0]$ يقع C تحت محور الفواصل أي $f(x)<0$

$S = \int_{-1}^0 (1 - xe^x)\,dx$

$= \int_{-1}^0 (1)\,dx - \int_{-1}^0 xe^x\,dx$

تجزئة

$u = x$	$u' = 1$
$v' = e^x$	$v = e^x$

$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b vu'$

$\int_{-1}^0 xe^x\,dx = [xe^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x\,dx$

$= 0 + e^{-1} - [e^x]_{-1}^0 = \frac{2}{e} - 1$

ومنه

$S = [x]_{-1}^0 - (\frac{2}{e} - 1)$

$\boxed{S = 2 - \frac{2}{e}}$