حل السؤال الثاني عشر التدريب (١) عقدية ٢٠٢١ م.

السؤال الثاني عشر: في معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

إذا كانت النقطة $B(b)$ صورة النقطة $A(a = 2e^{i\frac{\pi}{3}})$

وفقاً لتحويل هندسي، عيّن هذا التحويل في الحالات الآتية:

① $b = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

(التفكير) نلاحظ أن $|a| = |b|$ ، $\arg b = \arg a + \frac{\pi}{2}$

(أي أن التغيير على الزاوية ومنه التحويل هو دوران)

الحل: $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

ومنه التحويل الهندسي الذي ينقل A إلى B هو دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أي أن $b = e^{i\frac{\pi}{2}}.a$ أو $b = ia$.

ويمكن التحقق أيضاً بتقسيم b على a.

② نلاحظ أن العدد b ينتج من a بإضافة قدرها $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه التحويل الهندسي هو انسحاب شعاعه يقترن بالعدد $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ أو $(1+i)$

أي أنه انسحاب شعاعه $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

③ $b = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ ينتج من العدد a بعد ضربه بالعدد الحقيقي 2.

ومنه التحويل هو تحاكي H مركزه O ونسبته $k = 2$.

④ $b = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ وهو مرافق العدد a. لأنه تم عكس الزاوية.

التحويل هو تناظر محوري محوره (ox).

حل السؤال الثالث عشر   الشهر الأول   عقدية   ٢٠٢١

السؤال الثالث عشر: في معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

إذا كانت $B(b=\bar{a})$ ، $A(a=-1+i\sqrt{3})$ ، $C(c=2)$

١- أثبت أن $b-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-c)$ واستنتج نوع المثلث ABC

٢- عين مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC واحسب نصف قطرها.

---

① لدينا $a=-1+i\sqrt{3}$ ، $b=\bar{a}=-1-i\sqrt{3}$ ، $c=2$

$a-c=-3+i\sqrt{3}$ ، $b-c=-3-i\sqrt{3}$ ،

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(a-c)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3+i\sqrt{3})=-\frac{3}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}$$

$$=-3-i\sqrt{3}=b-c$$

ومنه $b-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-c)$. والمثلث ABC متساوي الأضلاع

لأن (تعليل أول) النقطة B صورة A وفق دوران مركزه النقطة C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ حسب الصيغة العقدية للدوران

(تعليل ثاني) $\frac{b-c}{a-c}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وهو عدد طويلته 1 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

والمثلث ABC متساوي الساقين والزاوية $C=\frac{\pi}{3}$

فهو متساوي الأضلاع.

---

② مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث متساوي الأضلاع هو نفسه مركز ثقل المثلث، ومنه المركز هو

$$\Omega(w)=\frac{a+b+c}{3}=0 \Rightarrow O(0,0)$$ مركز المثلث هو

نصف القطر هو $OB=OA=OC=2$

السؤال الرابع عشر   التدريب الأول   عقدية   ٢٠٢١ .

١) بيّن أن العدد $z_1=\sqrt{3}+i$ حل للمعادلة $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ ثم أوجد الحل الآخر z_2

نعوض z_1 بالمعادلة نجد :

$$(\sqrt{3}+i)^2-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)+4=3+\underline{2\sqrt{3}i}-1-6-\underline{2\sqrt{3}i}+4=0$$

ومنه z_1 هو حل للمعادلة .

وبما أن الأمثال حقيقية نجد الحل الآخر z_2 هو $\boxed{z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}-i}$

(2

$$z_1=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}-i=2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{3+2\sqrt{3}i-1}{3+1}=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

(3

$$a'=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot a=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow a'=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$$

ومنه $A'(0,2)$.