قسم الهندسة

عزيزي الطالب نصيحة لك:

قبل البدء بحل مسألة الهندسة وأثناء قراءتها ضع معطيات المسألة "" الأطوال و قياسات الزوايا "" على الرسم لتساعدك في تركيز انتباهك .

مراجعة وأساسيات في الصف الثامن:

1) في المثلث متساوي الساقين : تكون زاويتي القاعدتين متساويتين، والضلعان متساويان.

2) المبرهنة الأولى في المنتصفات:

((المستقيم المرسوم من منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالثة))

((طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوي نصف طول الضلع الثالثة)).

3) المنصف الداخلي : هو نصف المستقيم المحدود برأس الزاوية ويقسم الزاوية إلى قسمين متساويين.

4) تعريف شبه المنحرف : هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان نسميهما القاعدتين ، ونميز بين القاعدتين بأنهما إحداهما صغرى والأخرى كبرى.

5) في المثلث المنصفات الداخلية الثلاثة تتلاقى في نقطة واحدة، ويكفي تقاطع منصفين لمعرفة نقطة تقاطع المنصفات الداخلية.

6) مجموع زوايا المثلث يساوي 180° .

7) العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

8) المثلث متساوي الأضلاع هو مثلث أضلاعه متساوية الطول وزواياه الثلاثة متساوية القياس وقياس كل منها 60° .

9) الارتفاع في المثلث : هو المستقيم النازل من رأس المثلث عمودياً على الضلع المقابلة.

10) المنصف الداخلي لزاوية في مثلث : هو نصف المستقيم المحدود برأس الزاوية ويقسم الزاوية إلى قسمين متساويين.

11) المتوسط في المثلث : هو المستقيم الواصل بين رأس المثلث و منتصف الضلع المقابلة.

12) المتوسطات في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة وهذه النقطة تقسم كل خط متوسط إلى قسمين أحدهما ضعفي الآخر، أو بتعبير آخر :

((... أحدهما $\frac{1}{3}$ المتوسط " القريب من منتصف الضلع " والقسم الآخر $\frac{2}{3}$ المتوسط " القريب من الرأس " ...)) .

13) محيط المثلث : هو مجموع أطوال أضلاعه.

14) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

15) مساحة المثلث القائم : جداء طولي الضلعين القائمين ÷ 2 .

16) المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر .

17) إذا كان طول المتوسط في مثلث مساوياً نصف طول الضلع المقسوم به، كان المثلث قائم الزاوية في الرأس المرسوم منه ذلك المتوسط .

18) مماس الدائرة هو المستقيم العمودي على نصف قطر الدائرة عند نقطة التماس .

19) مبرهنة فيثاغورث : في المثلث القائم ((مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين)) .

20) مبرهنة فيثاغورث العكسية : ((إذا كان مربع طول ضلع في مثلث مساوياً مجموع مربعي الضلعين القائمين ، كان المثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل للضلع الأطول)).

الوحدة الأولى :

النسب المثلثية للزاوية الحادة

تعلم :

النسبة : هي مقارنة بين مقدارين من نفس الواحدة ، أي أما البسط والمقام من نفس الواحدة أو البسط والمقام بلا واحدة .

النسب المتساوية (المتكافئة)

هي نسب لها القيمة ذاتها ولكن حدودها مختلفة، وللحصول على نسب متكافئة :

1) إما أن نضرب حدي النسبة بعدد واحد مغاير للصفر.

2) أو أن نقسم حدي النسبة على عدد واحد مغاير للصفر.

التناسب

هو مساواة بين نسبتين $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

الخاصة الأساسية في التناسب

(خاصة الضرب التقاطعي)

جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين

خواص التناسب :

1) في أي تناسب إذا بادلنا بين الطرفين نحصل على تناسب جديد وصحيح.

أي : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تصبح: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

2) في أي تناسب إذا بادلنا بين الوسطين نحصل على تناسب جديد وصحيح.

أي : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تصبح: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

3) في أي تناسب إذا بادلنا بين بسط ومقام كل نسبة نحصل على تناسب جديد وصحيح.

أي : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تصبح: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

4) في أي تناسب إذا ثبتنا البسوط وأضفنا إلى كل مقام البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد وصحيح.

أي : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تصبح: $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

5) في أي تناسب إذا ثبتنا البسوط وطرحنا من كل مقام البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد وصحيح.

أي : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تصبح: $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

6) في أي تناسب إذا ثبتنا المقامين وأضفنا إلى كل بسط المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد وصحيح.

أي : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تصبح: $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

7) في أي تناسب إذا ثبتنا المقامين وطرحنا من بسط المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد وصحيح.

أي : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تصبح: $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

8) **(خاصة سلسلة النسب المتساوية)**

في أي تناسب يمكن جمع البسوط إلى البسوط والمقامات إلى المقامات فنحصل على تناسب جديد وصحيح.

أي : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

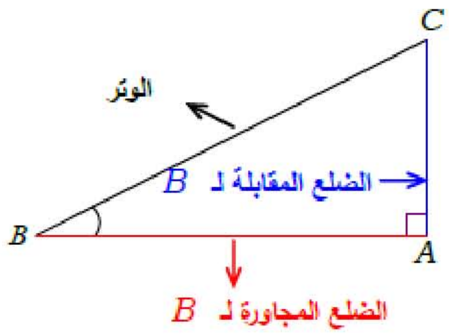
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

ملاحظة :

يمكن الاستفادة من خواص التناسب في حل التناسب الذي يحوي قيمتين مجهولتين وقيمتين معلومتين ((الخواص هي من الخاصة 3 وحتى الخاصة 8)) .

النسب المثلثية لزاوية حادة

((لا تطبق إلا في المثلث القائم))



في مثلث قائم:

- تجيب زاوية حادة يساوي النسبة: $\frac{\text{طول الضلع المجاورة لتلك الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$.
- جيب زاوية حادة يساوي النسبة: $\frac{\text{طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$.
- ظل زاوية حادة يساوي النسبة: $\frac{\text{طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية}}{\text{طول الضلع المجاورة لها}}$.

1) يرمز إلى تجيب الزاوية الحادة بالرمز $\cos \hat{B}$

2) يرمز إلى جيب الزاوية الحادة بالرمز $\sin \hat{B}$

3) يرمز إلى ظل الزاوية الحادة بالرمز $\tan \hat{B}$

ملاحظات :

1) النسب المثلثية ليس لها وحدات قياس .

2) النسب المثلثية للزاوية الحادة هي أعداد موجبة تماماً لكون كل منها نسبة طولي ضلعين في مثلث .

3) دائماً جواب sin , cos محصور بين الصفر والواحد دون أن يساويا الصفر والواحد .

أي : $0 < sin < 1$

$0 < cos < 1$

كيف نحسب طول ضلع في مثلث قائم بمعرفة نسبة مثلثية ؟

تعلم :

1) **إذا كانت النسبة المعلومة هي جيب الزاوية :** يمكن استعمالها في حساب طول الضلع المقابل لهذه الزاوية أو طول وتر المثلث القائم .

2) **إذا كانت النسبة المعلومة هي تجيب الزاوية :** يمكن استعمالها في حساب طول الضلع المجاور لهذه الزاوية أو طول وتر المثلث القائم .

3) **إذا كانت النسبة المعلومة هي ظل الزاوية :** يمكن استعمالها في حساب طول الضلع المقابل لهذه الزاوية أو طول الضلع المجاور لهذه الزاوية .

علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية

متطابقتان مثلثيتان :

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ملاحظات :

1) إذا أعطانا في المسألة $\sin\theta$ وطلب مني $\cos\theta , \tan\theta$ فإننا أمام طريقتين للحل وهما أما أن نستعين بالمتطابقات المثلثية أو نستعين برسم مساعد .

2) إذا أعطانا في المسألة $\cos\theta$ وطلب مني $\sin\theta , \tan\theta$ فإننا أمام طريقتين للحل وهما أما أن نستعين بالمتطابقات المثلثية أو نستعين برسم مساعد .

3) إذا أعطانا في المسألة $\tan\theta$ وطلب مني $\sin\theta , \cos\theta$ فإننا نستعين برسم مساعد للحل .

نسب زوايا شهيرة

تعلم :

1) في المثلث القائم : الضلع المقابل للزاوية 30^0 تساوي نصف طول الوتر .

2) في المثلث القائم إذا كان طول أحد الضلعين القائمين مساوياً نصف طول الوتر، كانت الزاوية الحادة المقابلة لتلك الضلع قياسها 30^0 .

3) المثلث القائم الذي قياسا زاويتيه الحادتان 30^0 و 60^0 يسمى **المثلث الثلاثيني الستيني** .

4) المثلث القائم والمتساوي الساقين : هو مثلث قائم تساوى فيه طولا ضلعيه القائمتين، وبالتالي تساوى قياسي كل من زاويتيه الحادتان ، وقياس كلاً منهما 45^0 .

جدول بالنسب المثلثية لزوايا شهيرة

	30^0	45^0	60^0
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

كيف نحسب طول الوتر بمعرفة طول ضلع قائمة وقياس زاوية حادة ؟

الضلع التي نعرف طولها ، تقابل زاوية ، لذلك نستعمل تعريف جيب الزاوية .

كيف نحسب طول ضلع قائمة بمعرفة طول الوتر وقياس زاوية حادة ؟

الضلع التي نعرف طولها هي الوتر ، ونحن نبحث عن طول الضلع المجاور لتلك الزاوية ، لذلك نستعمل تعريف تجيب الزاوية .

كيف نحسب طول ضلع قائمة بمعرفة قياس زاوية حادة وطول الضلع القائمة الأخرى

الضلع التي نعرف طولها هي ضلع قائمة ، ونحن نبحث عن طول الضلع القائمة الأخرى ، لذلك نستعمل تعريف ظل الزاوية .

إعداد المدرس : جلال عدي – جوال0955942677

تذكر :

1) ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

حيث a طول ضلع المثلث

2) مساحة المثلث المتساوي الأضلاع ؟

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

حيث a طول ضلع المثلث

3) تمر دائرة من رؤوس المثلث القائم مركزها نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث ، التي هي في هذه الحالة منتصف الوتر .

4) إذا وقعت رؤوس مثلث على دائرة واحدة وكان أحد أضلاع المثلث قطراً في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

تذكر :

الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسهما 90^0.

$$\sin x = \cos(90 - x)$$

$$\cos x = \sin(90 - x)$$

تمرينات ومسائل الوحدة الأولى ص24

السؤال الأول :

التمرين	الجواب
1	3
2	1
3	3
4	1

السؤال الثاني :

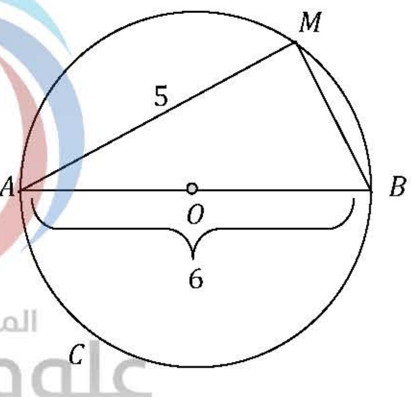
التمرين	الجواب
1	3+2
2	3+1
3	3+2+1

السؤال الثالث :

التمرين	الرأي
1	م
2	غ م
3	م
4	م
5	م

السؤال الرابع :

1)



2) المثلث AMB قائم الزاوية في $\widehat{M}$

التعليل : لأنه مثلث تمر من رؤوسه دائرة أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

السؤال الخامس :

1)

$$DL^2 = 16 \qquad (1)$$

$$CD^2 + CL^2 = 10.24 + 5.76 = 16 \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد :

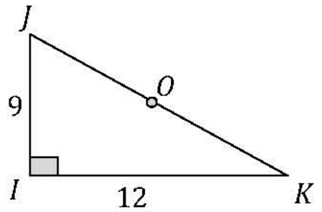
$$DL^2 = CD^2 + CL^2$$

وحسب مبرهنة فيثاغورث العكسية نستنتج أن المثلث CDL قائم الزاوية في $\hat{C}$ ووتره DL .

2)

$\tan\hat{L} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$\sin\hat{L} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\cos\hat{L} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
$\tan\hat{L} = \frac{DC}{LC}$	$\sin\hat{L} = \frac{CD}{DL}$	$\cos\hat{L} = \frac{CL}{DL}$
$\tan\hat{L} = \frac{3.2}{2.4}$	$\sin\hat{L} = \frac{3.2}{4}$	$\cos\hat{L} = \frac{2.4}{4}$
$\tan\hat{L} = \frac{32}{24}$	$\sin\hat{L} = \frac{32}{40}$	$\cos\hat{L} = \frac{24}{40}$
$\tan\hat{L} = \frac{4}{3}$	$\sin\hat{L} = \frac{4}{5}$	$\cos\hat{L} = \frac{3}{5}$

السؤال السادس :



1) حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث IJK القائم في $\hat{I}$.

$$JK^2 = IJ^2 + IK^2$$

نعوض

$$JK^2 = 81 + 144$$

$$JK^2 = 225$$

بجذر الطرفين :

$$JK = 15\ cm$$

2) نعلم أن مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث القائم هو منتصف الوتر ، لذلك O منتصف $[JK]$ هو مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث IJK .

حساب R :

$$R = \frac{1}{2} JK = \frac{1}{2} \times 15 = \frac{15}{2} = 7.5$$

السؤال السابع :

1)

في المثلث CED	في المثلث ABD
$\sin \hat{D} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\sin \hat{D} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
$\sin \hat{D} = \frac{CE}{DC}$	$\sin \hat{D} = \frac{AB}{AD}$
$\sin \hat{D} = \frac{2}{DC}$	$\sin \hat{D} = \frac{4}{6}$
	$\sin \hat{D} = \frac{2}{3}$

وبما أن $\hat{D}$ مشتركة بين المثلثين ABD , CED ومنه :

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{DC}$$

ومنه : $DC = 3\ cm$ (البسطان متساويان فالمقامان متساويان)

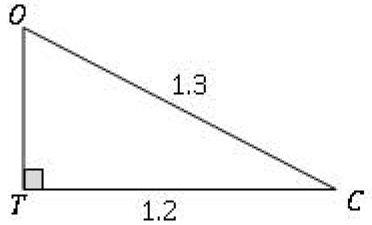
2) * حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث CDE القائم في $\hat{E}$: نستنتج أن $ED = \sqrt{5}\ cm$.

* $AE = 6 - \sqrt{5}\ cm$

* حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث ABD القائم في $\hat{B}$: نستنتج أن $BD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ cm$.

ومنه : $BC = 2\sqrt{5} - 5\ cm$

السؤال الثامن :



1) حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث TOC القائم في $\hat{T}$:

$$OC^2 = TO^2 + TC^2$$

نعوض :

$$1.69 = TO^2 + 1.44$$
$$TO^2 + 1.44 = 1.69$$
$$TO^2 = 1.69 - 1.44$$
$$TO^2 = 0.25$$

بجذر الطرفين

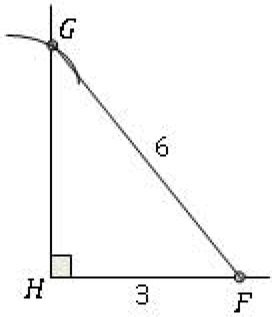
$$TO = 0.5\ cm$$

2)

$\tan \hat{O} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$\sin \hat{O} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\cos \hat{O} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
$\tan \hat{O} = \frac{TC}{TO}$	$\sin \hat{O} = \frac{TC}{OC}$	$\cos \hat{O} = \frac{TO}{OC}$
$\tan \hat{O} = \frac{1.2}{0.5}$	$\sin \hat{O} = \frac{1.2}{1.3}$	$\cos \hat{O} = \frac{0.5}{1.3}$
$\tan \hat{O} = \frac{12}{5}$	$\sin \hat{O} = \frac{12}{13}$	$\cos \hat{O} = \frac{5}{13}$

السؤال التاسع : (مع تعديل قائم في $\hat{H}$)

تذكر : (تسمى هذه الحالة رسم مثلث قائم علم منه طول الوتر وطول إحدى ضلعيه القائمتين).



خطوات الإنشاء :

1) نرسم زاوية قائمة $\widehat{H}$.

2) نعين على أحد الضلعين القائمين النقطة F ، بحيث $HF = 3\ cm$.

3) نفتح الفرجار فتحة $6\ cm$.

4) نثبت إبرة الفرجار في F ، ونرسم قوساً من دائرة يقطع الضلع الآخر للزاوية القائمة في نقطة G .

5) نصل FG فنحصل على المثلث المطلوب .

السؤال العاشر :

1) $A\hat{O}C = D\hat{O}B$ (بالتقابل بالرأس)

2)

في المثلث AOC	في المثلث BDO
$tan\,A\hat{O}C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$tan\,B\hat{O}D = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
$tan\,A\hat{O}C = \frac{AC}{AO}$	$tan\,B\hat{O}D = \frac{DB}{DO}$
$tan\,A\hat{O}C = \frac{1}{2}$	$tan\,B\hat{O}D = \frac{DB}{3}$

وبما أن $A\hat{O}C = D\hat{O}B$ (بالتقابل بالرأس) ،

ومنه :

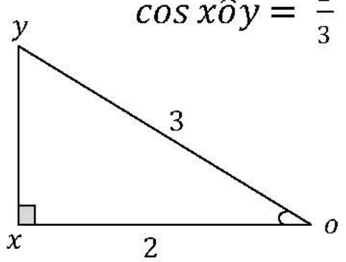
$$\frac{1}{2} = \frac{DB}{3}$$

3) $2\,DB = 3$

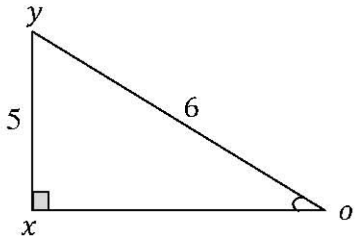
$$DB = \frac{3}{2} = 1.5$$

السؤال الحادي عشر :

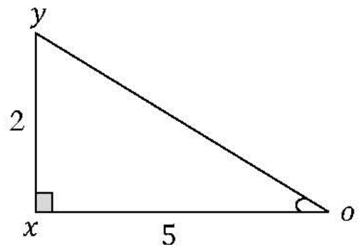
1) $cos\,x\hat{o}y = \frac{2}{3}$



2) $sin\,x\hat{o}y = \frac{5}{6}$

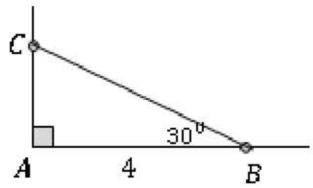


3) $tan\,x\hat{o}y = \frac{2}{5}$



السؤال الثاني عشر :

تذكر : (تسمى هذه الحالة رسم مثلث قائم علم منه طول إحدى ضلعيه القائمتين وقياس الزاوية المجاورة له).



خطوات الإنشاء :

1) نرسم زاوية قائمة $\hat{A}$.

2) نعين على أحد الضلعين القائمين النقطة B ، بحيث $AB = 4\ cm$.

3) نستعمل المنقلة في تعيين الزاوية $\hat{B} = 30^0$.

4) نرسم تلك الزاوية فتقطع الضلع الآخر للزاوية القائمة في نقطة C ، فيكون لدينا المثلث ABC المطلوب .

السؤال الثالث عشر :

ارتفاع الشجرة قبل السقوط هو :

$$h = PC + CS$$

في المثلث CPS القائم في $\hat{P}$ ، لدينا $\hat{S} = 30^0$ ،

ومنه :

$$\cos \hat{S} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos 30^0 = \frac{PS}{CS}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{CS}$$

$$\sqrt{3}\ CS = 8$$

$$CS = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$CS = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ m$$

$$PC = \frac{1}{2} CS$$

$$PC = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$PC = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ m$$

ومنه :

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$h = 4\sqrt{3}\ m$$

السؤال الرابع عشر :

في المثلث HIO القائم في $\hat{I}$ ، فيه $H\hat{O}I = 76.8^0$

نجد :

$$\tan H\hat{O}I = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 76.8^0 = \frac{HI}{OI}$$

$$4.26 = \frac{HI}{5}$$

$$HI = 4.26 \times 5$$

$$HI = 21.3\ m$$

ومنه ارتفاع المبنى هو :

$$HB = 21.3 + 1.7$$

$$HB = 23\ m$$

السؤال الخامس عشر :

(1

$\cos \hat{B} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	$\sin \hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$	$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$

2) لأنهما زاويتان متتامتان مجموع قياسهما 90^0

(3

$$\sin 30^0 = \cos 60^0$$

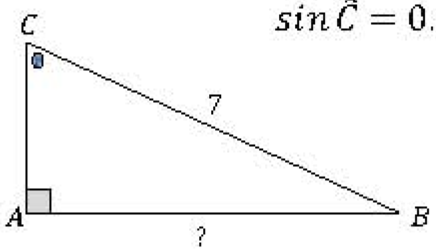
$$\cos 20^0 = \sin 70^0$$

$$\sin 45^0 = \cos 45^0$$

$$\cos 18^0 = \sin 72^0$$

السؤال السادس عشر :

1) $\sin \hat{C} = 0.4$



الحل :

في المثلث ABC القائم في $\hat{A}$:

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

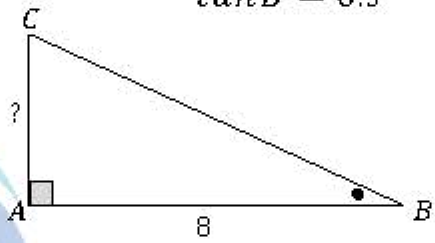
$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

$$0.4 = \frac{AB}{7}$$

$$AB = 0.4 \times 7$$

$$AB = 2.8$$

2) $\tan \hat{B} = 0.5$



الحل :

في المثلث ABC القائم في $\hat{A}$:

$$\tan \hat{B} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

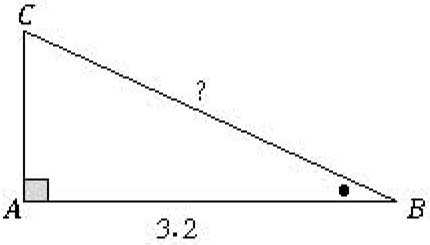
$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$0.5 = \frac{AC}{8}$$

$$AC = 0.5 \times 8$$

$$AC = 4.0 = 4$$

3) $\cos \hat{B} = 0.4$



الحل :

في المثلث ABC القائم في $\hat{A}$:

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$0.4 = \frac{3.2}{BC}$$

$$0.4\, BC = 3.2$$

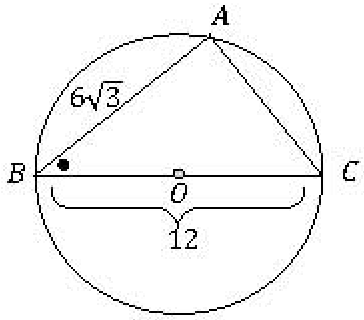
$$BC = \frac{3.2}{0.4}$$

$$BC = \frac{32}{4}$$

$$BC = 8$$

السؤال السابع عشر :

1)



2) المثلث ABC قائم الزاوية في $\hat{A}$

التعليل : لأنه مثلث تمر من رؤوسه دائرة، أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

3)

$$\cos A\hat{B}C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos A\hat{B}C = \frac{BA}{BC}$$

$$\cos A\hat{B}C = \frac{6\sqrt{3}}{12}$$

$$\cos A\hat{B}C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

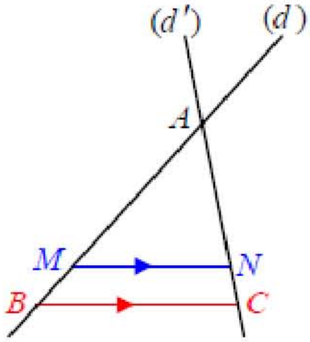
ومنه :

$$A\hat{B}C = 30^0$$

الوحدة الثانية :

مبرهنة النسب الثلاث

نص مبرهنة النسب الثلاث (مبرهنة تالس



إذا كان (d) و (d') مستقيمان متقاطعان في نقطة A

النقطتان B و M من (d) مختلفتان عن A

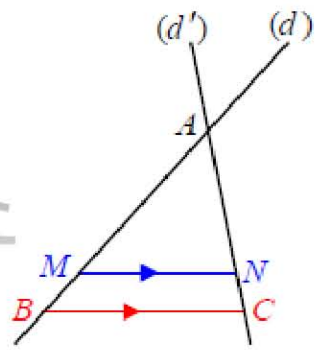
النقطتان C و N من (d') مختلفتان عن A أيضاً

وكان (BC) يوازي (MN) كان :

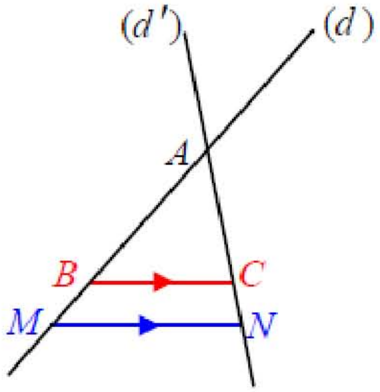
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

الحالات الثلاث لمبرهنة النسب الثلاث

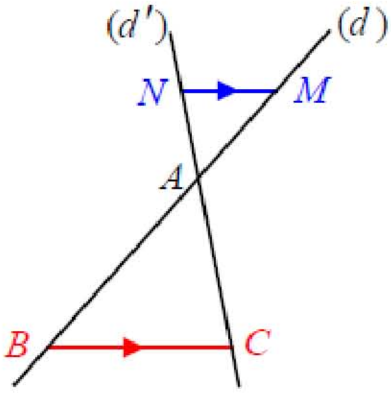
(1



(2



(3



ملاحظة :

عند استعمال مبرهنة النسب الثلاث نرتب الحروف التي تقع على استقامة واحدة في السطر الأول على المستقيم الأول ، ومن ثم نرتب الحروف التي تقع على استقامة واحدة في السطر الثاني على المستقيم الثاني ونبدأ بتكوين النسب الثلاثة .

نتيجة مهمة :

إذا كان (BM) و (CN) متقاطعين في A

وكانت :

$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ كان المستقيمين (BC) و (MN)

غير متوازيين.

إعداد المدرس : جلال عدي – جوال0955942677

كيف نستعمل مبرهنة النسب الثلاث ؟

إذا وجد مستقيمين متقاطعين في نقطة، ووجد مستقيمين متوازيين ، وطلب مني إيجاد طول قطعة مجهولة .

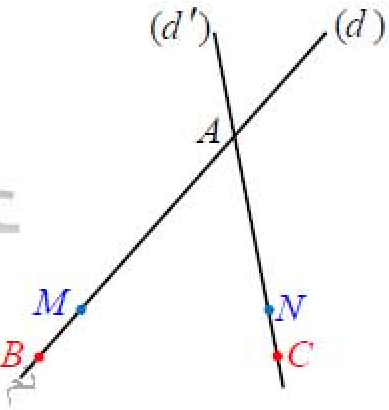
<u>والطريقة على النحو التالي :</u>

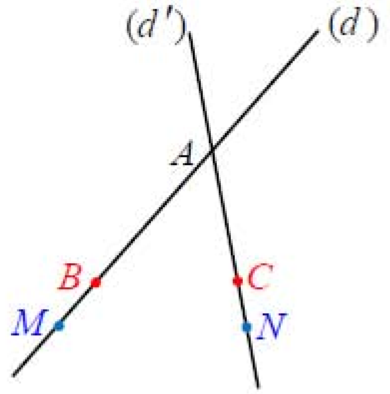
1) نذكر اسم المستقيمين المتقاطعين في النقطة .
2) نذكر المستقيمين المتوازيين.
3) حسب مبرهنة النسب الثلاث .
4) نكتب النسب الثلاثة .
5) نعوض الأطوال المعلومة بقيمها .
6) نأخذ النسبتين التي تحوي طول القطعة المطلوبة مني والأخرى التي بسطها ومقامها معلومة .
7) حسب الخاصة الأساسية نحل ونوجد الناتج .

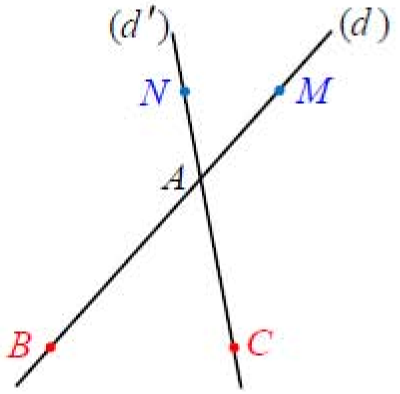
عكس مبرهنة النسب الثلاث

في الأشكال الثلاثة التالية ، نقول أن النقاط A و B و M متوضعة على المستقيم (d) بترتيب مماثل لترتيب توضع النقط A و C و N على المستقيم (d') .

أو نقول أن النقاط A و B و M على المستقيم (d) منسجمة بالترتيب مع النقاط A و C و N على المستقيم (d') .







النص :

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A .

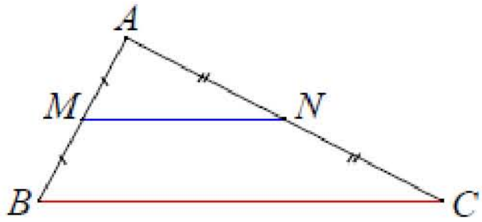
B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A ، C و N نقطتان من (d') مختلفتان أيضاً عن A ، إذا كان $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ وكان ترتيب النقاط A و B و M على (d) مماثل لترتيب توضع النقط A و C و N على المستقيم (d') ، **كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين .**

كيف نستعمل عكس مبرهنة النسب الثلاث ؟

إذا وجد مستقيمين متقاطعين في نقطة، ووجدت القطع المستقيمة بأطوالها المعلومة جميعاً ، وطلب مني إثبات التوازي بين مستقيمين .

حالة خاصة :

القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين



في المثلث ABC : بما أن M منتصف $[AB]$ ، N منتصف $[AC]$ ، إن ترتيب النقاط A و M و B على المستقيم (AB) مماثل لترتيب النقاط A و N و C على المستقيم (AC) ، ثم إن $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ وحسب مبرهنة عكس مبرهنة النسب الثلاث نستنتج : **المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين.**

يمكن تلخيص ما سبق بمبرهنة تسمى مبرهنة مستقيم المنتصفين ((**القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة وطولها يساوي نصف طول تلك الضلع**)) .

كيف نستدل على عدم توازي مستقيمين

إذا كانت النسب غير متساوية $\frac{AN}{AC} \neq \frac{AM}{AB}$ استنتجنا أن المستقيمين غير متوازيين .

كيف نستعمل عكس مبرهنة النسب الثلاث ؟

إذا وجد مستقيمين متقاطعين في نقطة، ووجدت التقطع المستقيمة بأطوالها المعلومة جميعاً ، وطلب مني إثبات التوازي بين مستقيمين .

كيف نستعمل عكس مبرهنة النسب الثلاث ؟

إذا وجد مستقيمين متقاطعين في نقطة، ووجدت التقطع المستقيمة بأطوالها المعلومة جميعاً ، وطلب مني إثبات التوازي بين مستقيمين .

<u>والطريقة على النحو التالي :</u>

1) نوجد كل نسبة على حدا .
2) نتحقق من تساوي النسبتين.
3) وبما أن النقاط ، ، ، متوضعة على المستقيم ( ) .
4) هي بترتيب مماثل لتوضع النقاط ، ، ، على المستقيم ( ) .
5) فحسب عكس مبرهنة النسب الثلاث .
6) يكون المستقيمان ( ) و ( ) متوازيان .

التشابه

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتقابلة في مثلثين، قلنا إن المثلثين متشابهان ويكون أحدهما مصغر أو مكبر عن الآخر أو مطابق له.

حيث نسمي النسبة بين الضلعين المتقابلين (نسبة التشابه) ، ونرمز لها بالرمز k .

تعلم (1) :

تشابه نسبته $(k > 0)$

1) **يحافظ على قياسات الزوايا .**

2) يُضرب الأطوال بالعدد k .

ملاحظات :

1) إذا كانت نسبة التشابه $k > 1$ ، يؤول التشابه إلى تكبير الشكل .

2) إذا كانت نسبه التشابه $0 < k < 1$ ، يؤول التشابه إلى تصغير الشكل .

تعلم (2) :

تشابه نسبته $(k > 0)$

1) يُضرب الأطوال بالعدد k .

2) نضرب مساحة السطح بالعدد k^2 .

3) نضرب حجم المجسم بالعدد k^3 .

انتبه :

الدائرتان المتماستان :

هما دائرتان تشتركان بنقطة واحد تسمى نقطة التماس

والتماس نوعان :

أولاً : تماس داخلي :

حيث يقع مركز الدائرة C' داخل الدائرة C .

ثانياً : تماس خارجي :

حيث يقع مركز الدائرة C' خارج الدائرة C .

تذكر :

العمودان على مستقيم واحد متوازيان .

تمرينات ومسائل الوحدة الثانية صـ43

السؤال الأول :

التمرين	الجواب
1	2
2	3
3	2
4	3
5	3
6	3

السؤال الثاني :

التمرين	الجواب
1	3+2
2	3+2

السؤال الثالث :

التمرين	الرأي
1	غ م
2	غ م
3	م
4	غ م

السؤال الرابع :

بما أن $(BC \parallel B'C')$ فأضلاع المثلثين $ABC , AB'C'$ متناسبة حسب مبرهنة النسب الثلاث فالمثلثين متشابهين ، ونسبة تشابههما :

$$k = \frac{AB}{AB'} = \frac{1.5}{3.5} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

ونعلم أنه : $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = k^2$

ومنه : $S_{AB'C'} = k^2 \times S_{ABC}$

$$S_{AB'C'} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times 9$$

$$S_{AB'C'} = \frac{9}{49} \times 9$$

$$S_{AB'C'} = \frac{81}{49}\ cm^2$$

السؤال الخامس :

نعلم أن قاعدتا شبه المنحرف متوازيتان ومنه :

$$AB \parallel DC$$

بما أن $(AB \parallel DC)$ فأضلاع المثلثين AOB , DOC متناسبة حسب مبرهنة النسب الثلاث فالمثلثين متشابهين .

نكتب خوارزمية النسب الثلاثة :

$$\frac{AO}{DO} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$$

نعوض : $\frac{3}{DO} = \frac{2}{5} = \frac{4}{DC}$

من النسبتين (1) و (2) :

$$\frac{3}{DO} = \frac{2}{5}$$

ومنه : $2DO = 15$

$$DO = \frac{15}{2} = 7.5$$

من النسبتين (3) و (2) :

$$\frac{4}{DC} = \frac{2}{5}$$

ومنه : $2\,DC = 20$

$$DC = \frac{20}{2} = 10$$

السؤال السادس :

$$\frac{AO}{OD} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

$$\frac{BO}{OC} = \frac{2.4}{7} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35} = \frac{4}{7} \qquad (2)$$

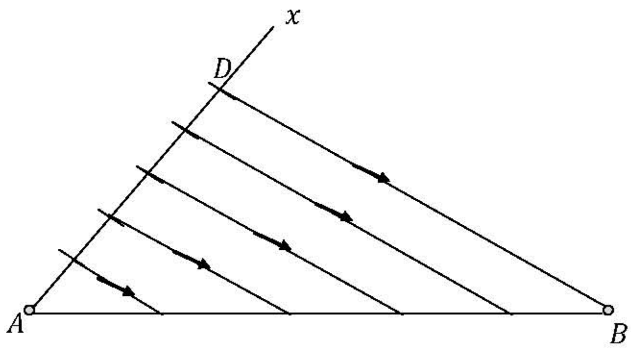
من النسبتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{AO}{OD} \neq \frac{OB}{OC}$$

وحسب مبرهنة عكس مبرهنة النسب الثلاث نستنتج أن : AB لا يوازي CD .

السؤال السابع :

1)



الخطوات :

1) نرسم نصف مستقيم إما من A أو من B وليكن $(Ax]$ غير منطبق على $[AB]$.

2) نفتح الفرجار فتحة لا على التعيين ونثبت إبرة الفرجار في A ونرسم 5 أقواس متتالية بنفس الفتحة على $(Ax]$ ، لتكن القوس الأخيرة D .

3) نصل D مع B .

4) نرسم من كل من الأقواس الأربعة المتبقية مستقيمات توازي BD فتقطع $[AB]$ وبذلك تنقسم $[AB]$ إلى خمس قطع متساوية في الطول .

2) نفس الخطوات في الطلب السابق ، لكن في الخطوة الثانية نرسم 7 أقواس متتالية بنفس الفتحة .

السؤال الثامن :

حالة (1) :

$$\frac{NA}{AC} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \qquad (1)$$

$$\frac{MA}{AB} = \frac{13}{15} \qquad (2)$$

من النسبتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{NA}{AC} \neq \frac{MA}{AB}$$

وحسب مبرهنة عكس مبرهنة النسب الثلاث نستنتج أن :

MN لا يوازي CB .

حالة (2) :

$$\frac{AC}{AN} = \frac{8.4}{14.4} = \frac{84}{144} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12} \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{AM} = \frac{7}{12} \qquad (2)$$

من النسبتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$$

وحسب مبرهنة عكس مبرهنة النسب الثلاث نستنتج أن :

$$MN \parallel BC$$

حالة (3) :

$$\frac{AB}{BM} = \frac{3}{7} \qquad (1)$$

$$\frac{AC}{CN} = \frac{5}{9} \qquad (2)$$

من النسبتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{AB}{BM} \neq \frac{AC}{CN}$$

وحسب مبرهنة عكس مبرهنة النسب الثلاث نستنتج أن :

MN لا يوازي CB .

حالة (4) :

$$\frac{BA}{AM} = \frac{5}{8} \qquad (1)$$

$$\frac{CA}{AN} = \frac{7.5}{12} = \frac{75}{120} = \frac{5}{8} \qquad (2)$$

من النسبتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{BA}{AM} = \frac{CA}{AN}$$

وحسب مبرهنة عكس مبرهنة النسب الثلاث نستنتج أن :

$$MN \parallel BC$$

السؤال التاسع :

1) بما أن $BI \parallel KA$ وحسب مبرهنة النسب الثلاث نجد :

$$\frac{SI}{SK} = \frac{IB}{KA} = \frac{SB}{SA}$$

نعوض : $\frac{4}{6} = \frac{IB}{4.5} = \frac{SB}{SA}$

من النسبتين (1) و (2) :

$$\frac{2}{3} = \frac{IB}{4.5}$$

$$3\,IB = 9$$

$$IB = \frac{9}{3} = 3\ cm$$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث AKS القائم في $\widehat{K}$

$$SA^2 = KA^2 + KS^2$$

نعوض :

$$SA^2 = 20.25 + 36$$

$$SA^2 = 56.25$$

بجذر الطرفين :

$$SA = 7.5\ cm$$

2) معامل التصغير هو نفسه نسبة تشابه المثلثين SIB , AKS .

$$k = \frac{SI}{SK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V_k = \frac{1}{3} S . h$$

$$V_k = \frac{1}{3} \times (\pi R^2) \times SK$$

$$V_k = \frac{1}{3} \times \pi \times 20.25 \times 6$$

$$V_k = 40.5\,\pi\ cm^3$$

نعلم أن :

$$\frac{V_I}{V_K} = k^3$$

ومنه :

$$V_I = k^3 \times V_k$$

$$V_I = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 40.5\,\pi$$

$$V_I = \frac{8}{27} \times 40.5\,\pi$$

$$V_I = \frac{8}{27} \times 40.5\,\pi = 12\,\pi\ cm^3$$

السؤال العاشر :

بما أن $JC \parallel IB$ وحسب مبرهنة النسب الثلاث نجد :

$$\frac{AJ}{AI} = \frac{JC}{IB} = \frac{AC}{AB}$$

نعوض : $\frac{AJ}{AI} = \frac{JC}{3} = \frac{4.9}{7}$

من النسبتين (2) و (3) :

$$\frac{JC}{3} = \frac{4.9}{7}$$

ومنه : $7\,JC = 3 \times 4.9$

$$7\,JC = 14.7$$

$$JC = \frac{14.7}{7} = 2.1\ cm$$

$$CB = 7 - 4.9 = 2.1\ cm$$

في المثلث BCJ نلاحظ أن : $CJ = CB = 2.1\ cm$

فالمثلث BCJ متساوي الساقين ورأسه C ومنه :

$$C\hat{J}B = C\hat{B}J$$

(زاويتا القاعدة في المثلث متساوي الساقين متساويتان بالقياس) .

السؤال الحادي عشر :

حالة (1) :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{ED}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{x}$$

ومنه : $x = 6$

(البسطان متساويان فالمقامان متساويان) .

حالة (2) :

$$\frac{EA}{AC} = \frac{ED}{CB}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{x}{6.6}$$

ومنه : $4x = 6.6 \times 2$

$$4x = 13.2$$

$$x = \frac{13.2}{4} = \frac{132}{40} = \frac{66}{20} = \frac{33}{10} = 3.3$$

حالة (3) :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{CB}{ED}$$

نعوض : $\frac{AB}{2AB} = \frac{AC}{2\,AC} = \frac{4}{x}$

من النسبتين (1) و(3) أو من النسبتين (2) و(3)

$$\frac{AC}{2\,AC} = \frac{4}{x}$$

أي : $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$

$$x = 4 \times 2 = 8$$

حالة (4) :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{CB}{ED}$$

نعوض : $\frac{AB}{AD} = \frac{x}{3} = \frac{6}{4}$

من النسبتين (2) و(3)

$$\frac{x}{3} = \frac{6}{4}$$

أي : $4x = 18$

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

السؤال الثاني عشر :

1) بما أن المثلث ABC تكبير عن المثلث EFG فالمثلثين متشابهين ، ونعلم أن التشابه يحافظ على قياسات الزوايا المتقابلة ومنه :

$$\hat{E} = \hat{A} = 65^0$$
$$\hat{F} = \hat{B} = 80^0$$
$$\hat{G} = \hat{C} = 180 - (65 + 80) = 35^0$$

2) نعلم أن :

$$\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = k^2$$

أي : $S_{EFG} = k^2 \times S_{ABC}$

وبما أن $k = 2$ ومنه :

$$S_{EFG} = 4\,S_{ABC}$$

السؤال الثالث عشر :

نعلم أن قانون حجم الهرم يعطى بالعلاقة :

$$V = \frac{1}{3}S \times h$$

بما أن النموذج المصغر للهرم يشابه الهرم الأصلي ومنه :

$$\frac{V'}{V} = k^3$$

أي : $V' = k^3 \times V$

وبما أن $k = \frac{1}{3}$ ومنه :

$$V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V$$

$$V' = \frac{1}{27} \times V$$

$$V' = \frac{V}{27}\ m^3$$

السؤال الرابع عشر :

1) المثلث EFG قائم الزاوية في $\widehat{F}$

التعليل : لأنه مثلث تمر من رؤوسه دائرة، أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

أي أن : $GF \perp EF$

أيضاً : المثلث EHO قائم الزاوية في $\widehat{H}$

التعليل : لأنه مثلث تمر من رؤوسه دائرة، أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

أي أن : $OH \perp EF$

ومنه : $GF \parallel OH$ (العمودان على مستقيم واحد متوازيان).

2) بما أن O منتصف $[EG]$ ، $GF \parallel OH$ ، وحسب المبرهنة الثانية في المنتصفات نستنتج أن H منتصف $[EF]$ ، وحسب المبرهنة الأولى في المنتصفات نستنتج: $FG = 2 \times OH$

$$FG = 2 \times 3$$
$$FG = 6\ cm$$

السؤال الخامس عشر :

المثلث AMC قائم الزاوية في $\widehat{M}$

التعليل : لأنه مثلث تمر من رؤوسه دائرة، أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

أي أن : $AM \perp MN$

أيضاً : المثلث BNC قائم الزاوية في $\widehat{N}$

التعليل : لأنه مثلث تمر من رؤوسه دائرة، أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

أي أن : $BN \perp MN$

ومنه : $AM \parallel NB$ (العمودان على مستقيم واحد متوازيان).

وحسب مبرهنة النسب الثلاث :

$$\frac{CN}{CM} = \frac{NB}{MA} = \frac{CB}{CA}$$

نعوض : $$\frac{CN}{CM} = \frac{NB}{3} = \frac{4}{6}$$

من النسبتين (2) و (3) :

$$\frac{NB}{3} = \frac{2}{3}$$

ومنه : $NB = 2$ (المقامان متساويان فالبسطان متساويان).

السؤال السادس عشر :

1) حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC حيث $DE \parallel BC$ نكتب :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

نعوض : $$\frac{2}{5} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \qquad (1)$$

2) حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث BFC حيث $DE \parallel BC$ نكتب :

$$\frac{DF}{CF} = \frac{FE}{FB} = \frac{DE}{BC}$$

نعوض : $$\frac{DF}{CF} = \frac{FE}{4} = \frac{DE}{BC} \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{EF}{4} = \frac{2}{5}$$

ومنه : $5\,EF = 8$

$$EF = \frac{8}{5}\ cm$$

السؤال السابع عشر :

نعلم أن قاعدتا شبه المنحرف متوازيتان

1) حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث COD حيث $AB \parallel DC$ نكتب :

$$\frac{AO}{DO} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$$

نعوض : $$\frac{AO}{DO} = \frac{8}{OC} = \frac{AB}{DC} \qquad (1)$$

أيضاً : حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث CDG حيث $AB \parallel DC$ نكتب :

$$\frac{AG}{CG} = \frac{GB}{GD} = \frac{AB}{DC}$$

نعوض : $$\frac{4}{6} = \frac{GB}{GD} = \frac{AB}{DC} \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{AG}{GC} = \frac{OB}{OC}$$

2) نعوض :

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{OC}$$

$$4\,OC = 6 \times 8$$

$$OC = \frac{48}{4} = 12\,cm$$

$$BC = 12 - 8 = 4\ cm$$

السؤال الثامن عشر :

1) حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث ABC القائم في $\hat{A}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

نعوض :

$$BC^2 = 16 + 9$$

بجذر الطرفين : $BC^2 = 25$

$$BC = 5 \ cm$$

2) الشكل الرباعي EFCH متوازي أضلاع (لأن فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان) .

حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC حيث $EH \parallel BC$ نكتب :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BC} = \frac{AH}{AC}$$

نعوض : $\frac{x}{4} = \frac{EH}{5} = \frac{AH}{3}$

من النسبتين (1) و (2) :

$$\frac{x}{4} = \frac{EH}{5}$$

$$5\,x = 4\,EH$$

$$EH = \frac{5\,x}{4} \ cm$$

$$EH = FC = \frac{5\,x}{4} \ cm$$

(كل ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع متساويان بالطول)

أيضاً : حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC حيث $EF \parallel AC$ نكتب :

$$\frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

نعوض : $\frac{4-x}{4} = \frac{EF}{3} = \frac{BF}{5}$

من النسبتين (1) و (2) :

$$\frac{4-x}{4} = \frac{EF}{3}$$

$$4\,EF = 3(4-x)$$

$$4\,EF = 12 - 3x$$

$$EF = \frac{12-3x}{4}$$

$$EF = 3 - \frac{3x}{4} \ cm$$

$$EF = HC = 3 - \frac{3x}{4} \ cm$$

السؤال التاسع عشر :

1) بما أن $BC \perp EG$

$ED \perp EG$

ومنه : $BC \parallel ED$

(العمودان على مستقيم واحد متوازيان)

حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC حيث $DE \parallel BC$ نكتب :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

نعوض : $\frac{6.5}{12} = \frac{DE}{7.2} = \frac{AE}{9.6}$

من النسبتين (1) و (3) :

$$\frac{6.5}{12} = \frac{AE}{9.6}$$

$$12\,AE = 6.5 \times 9.6$$

$$12\,AE = 62.4$$

$$AE = \frac{62.4}{12} = \frac{624}{120} = \frac{104}{20} = \frac{52}{10} = 5.2 \ cm$$

2) (1) $\frac{AC}{CG} = \frac{9.6}{8.4} = \frac{96}{84} = \frac{8}{7}$

(2) $\frac{AB}{BF} = \frac{12}{10.5} = \frac{120}{105} = \frac{8}{7}$

من النسبتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{AC}{CG} = \frac{AB}{BF}$$

وحسب مبرهنة عكس مبرهنة النسب الثلاث نستنتج أن :

$$FG \parallel BC$$

3) في المثلث ABC القائم في $\hat{C}$:

$$\sin A\hat{B}C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin A\hat{B}C = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin A\hat{B}C = \frac{9.6}{12} = \frac{96}{120} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10} = 0.8$$

السؤال العشرون :

1) حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC

حيث $NM \parallel AC$ نكتب :

$$\frac{AN}{AB} = \frac{CM}{CB}$$

نعوض :

$$\frac{AN}{AB} = \frac{\frac{2}{3}BC}{BC}$$

$$\frac{AN}{AB} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

2) حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث ABC

حيث $EM \parallel AB$ نكتب :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BM}{BC}$$

نعوض :

$$\frac{AE}{2AB'} = \frac{\frac{1}{3}BC}{BC}$$

$$\frac{AE}{2AB'} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AE}{AB'} = \frac{2}{3} \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AE}{AB'}$$

وحسب مبرهنة عكس مبرهنة النسب الثلاث في

المثلث ABB' نستنتج أن :

$$NE \parallel BB'$$

الوحدة الثالثة :

الزوايا والمضلعات في الدائرة

المضلعات المنتظمة

تذكر :

1) الزاويتان المتتامتان : هما الزاويتان اللتان مجموع قياسهما 90^0 .

2) الزاويتان المتكاملتان : هما الزاويتان اللتان مجموع قياسهما 180^0 .

3) إذا وقعت رؤوس مثلث على دائرة واحدة وكان أحد أضلاع المثلث قطراً في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

4) مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث القائم : هي منتصف وتره .

5) مركز ثقل المثلث : هو نقطة تلاقي متوسطاته .

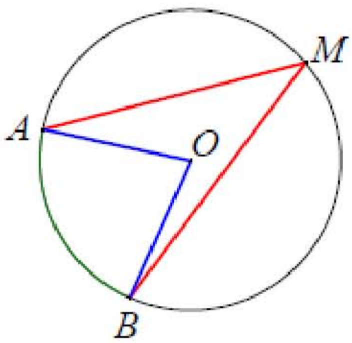
6) في المثلث متساوي الساقين : زاويتا القاعدة متساويتا القياس .

7) مجموع زوايا أي مثلث 180^0 .

8) يمتلك المثلث متساوي الأضلاع ثلاث محاور تناظرية .

9) نقطة تلاقي المحاور في المثلث متساوي الأضلاع هي مركز تناظر له .

زوايا محيطية وزوايا مركزية



الزاوية المركزية في الدائرة :

هي الزاوية التي يقع رأسها عند مركز الدائرة أما ضلعاها فهما أنصاف أقطار في الدائرة.

مثل الزاوية : $A\hat{O}B$

تعلم :

تقاس الزاوية المركزية في الدائرة بقياس القوس المقابل لها وبالعكس .

نتائج حول الزاوية المركزية :

1) الزوايا المركزية المتساوية في الدائرة يقابلها أقواس متساوية .

2) الأقواس المتساوية في الدائرة يقابلها زوايا مركزية متساوية.

3) الأقواس المتساوية في الدائرة يقابلها أوتار متساوية .

4) الأوتار المتساوية في الدائرة يقابلها أقواس متساوية .

الزاوية المحيطية في الدائرة :

الزاوية المحيطية في الدائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة أما ضلعاها فهما إما وتران أو وتر وقطر.

مثل الزاوية : $A\widehat{M}B$

إعداد المدرس : جلال عدي – جوال0955942677

تعلم :

1) الزاوية المحيطية في الدائرة تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس .

2) الزاوية المحيطية في الدائرة تساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

نتائج حول الزاوية المحيطية :

1) الزوايا المحيطية التي تقابل قوس واحدة هي زوايا متساوية .

2) الزوايا المحيطية المتساوية يقابلها أقواس متساوية.

3) الأقواس المتساوية يقابلها زوايا محيطية متساوية.

4) الزاوية المحيطية المقابلة لقوس نصف الدائرة هي زاوية قائمة ((الزاوية المحيطية التي تحصر قطر الدائرة هي زاوية قائمة)).

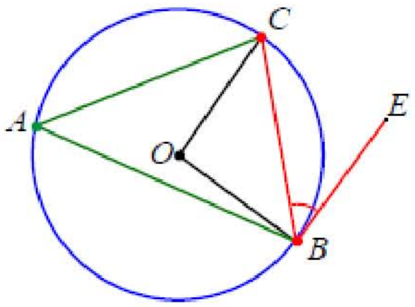
كيف يتم التعامل مع الزوايا المحيطية والزوايا المركزية ؟

1) لحساب زاوية محيطية في دائرة نحسب قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس أو نحسب القوس المقابل لها ، ومن ثم تكون الزاوية المحيطية نصف الزاوية المركزية أو نصف القوس المقابل لها .

2) لحساب زاوية مركزية في دائرة نحسب قياس القوس المقابل لها ، ومن ثم تكون الزاوية المركزية نفس قياس القوس المقابل لها .

3) لحساب زاوية مركزية في دائرة نحسب قياس القوس المقابل لها عن طريق الزاوية المحيطية التي تقابل ذلك القوس ومن ثم تكون الزاوية المركزية ضعفي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بنفس القوس أو بقياس ضعفي القوس المقابل لها .

الزاوية المماسية في الدائرة



الزاوية المماسية في الدائرة :

الزاوية المماسية في الدائرة هي الزاوية المتشكلة بين وتر ومماس للدائرة عند أحد طرفي الوتر .

مثل : الزاوية $C\hat{B}E$

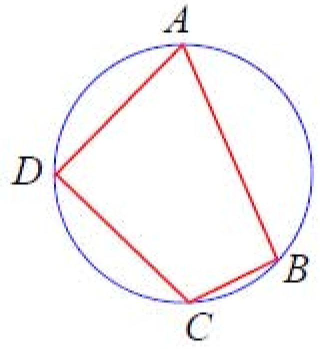
تعلم :

1) قياس الزاوية المماسية في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

2) الزاوية المماسية في الدائرة تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس .

3) الزاويتان المحيطية والمماسية المشتركتان بنفس القوس هما زاويتان متساويتان .

الرباعي الدائري



الرباعي الدائري هو أي شكل رباعي تقع رؤوسه الأربعة على دائرة واحدة ((تمر من رؤوسه الأربعة دائرة واحدة)) .

تعلم :

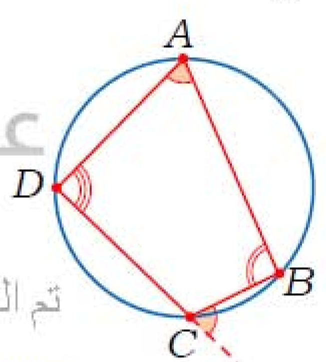
1) مجموع زوايا أي شكل رباعي 360^0 .

2) متوازي الأضلاع هو شكل رباعي ليس من الممكن أن يكون رباعي دائري .

3) في الرباعي الدائري : كل زاويتان متقابلتان متكاملتان .

4) في الرباعي الدائري : قياس الزاوية الخارجية يساوي قياس الزاوية المقابلة لمجاورتها .

((الزاوية الخارجية لمضلع تكون محصورة بين ضلع وامتداد ضلع أخرى)) .



انتبه وتعلم :

لإثبات أن الشكل رباعي دائري نحاول إثبات أن :

1) نبحث عن زاويتان متقابلتان متكاملتان.

((إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي فالشكل رباعي دائري)) .

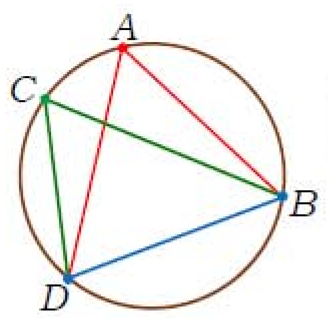
2) نبحث عن زاوية خارجية تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها .

((إذا تساوت الزاوية الخارجية في شكل رباعي مع الزاوية المقابلة لمجاورتها فالشكل رباعي دائري)) .

3) نحاول إثبات أن رؤوسه متساوية البعد عن نقطة ثابتة .

4) نحاول إثبات أن لدينا زاويتان متساويتان تحصران قطعة مستقيمة واحدة وفي نفس الجهة .

((إذا تساوت زاويتان تحصران قطعة مستقيمة واحدة وفي نفس الجهة، وقعت النقط الأربعة على دائرة واحدة)) .



ملاحظة هامة وتعلم :

عندما يطلب مني إثبات أن الشكل رباعي دائري ومن ثم يطلب تعين مركز الدائرة المارة برؤوسه : نبحث عن التكامل بين زاويتين متقابلتين تكون كلاً منهما قياسها 90^0 أو نبحث عن زاويتان متساويتان قياس كلاً منهما 90^0 تحصران قطعة مستقيمة واحدة وفي نفس الجهة.

أما بالنسبة لمركز الدائرة في هذه الحالة فإننا نهمل الرأسيين القائمين فيكون مركز الدائرة منتصف الخط الواصل بين الرأسيين غير القائمين .

من الممكن لحساب هذه القطعة تطبيق مبرهنة فيثاغورث ومن ثم حساب نصف القطر الذي هو نصف تلك القطعة .

ملاحظات :

1) من ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تمر دائرة وحيدة.
2) من ثلاث نقط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر أي دائرة (لأن المحاور لا تتقاطع) .
3) تمر دائرة من رؤوس مثلث مفروض مركزها نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث .

تذكر :

1) تتلاقي المحاور في المثلث قائم الزاوية في منتصف الوتر.
2) **في المثلث المتساوي الأضلاع :** المحور المرسوم من أي رأس هو محور ومنصف ومتوسط وارتفاع بآن واحد.
3) **في المثلث متساوي الساقين :** المحور المرسوم من زاوية الرأس هو محور ومنصف ومتوسط و ارتفاع بآن واحد.
4) مركز ثقل المثلث هو نقطة تلاقي متوسطاته .

المضلعات المنتظمة

تعلم :

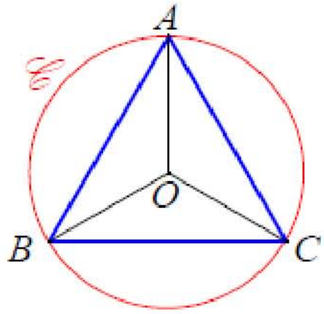
المضلع المنتظم هو مضلع قياسات زواياه متساوية وأطوال أضلاعه متساوية .

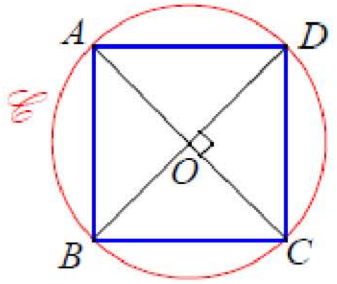
خواص في المضلعات المنتظمة :

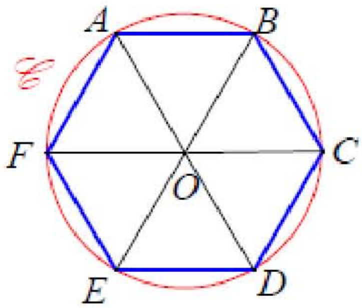
1) كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة (بمعنى وجود دائرة تمر من رؤوسه)، يسمى مركز الدائرة المارة برؤوس المضلع المنتظم أيضاً مركز المضلع المنتظم .

2) إذا كان $[AB]$ ضلعاً في مضلع منتظم مركزه O ، وكان عدد أضلاع المضلع n ، فإن قياس الزاوية المركزية $A\hat{O}B$ يعطى بالعلاقة :

$$A\hat{O}B = \frac{360}{n}$$

ثلاثي (مثلث متساوي الأضلاع)

ABC مثلث متساوي الأضلاع
$\widehat{ABC} = 60^\circ$ $\widehat{AOB} = 120^\circ$

رباعي (مربع)

$ABCD$ مربع
$\widehat{ABC} = 90^\circ$ $\widehat{AOB} = 90^\circ$

سداسي (مسدس)

$ABCDEF$ مسدس
$\widehat{ABC} = 120^\circ$ $\widehat{AOB} = 60^\circ$

تعلم :

1) مجموع قياسات زوايا المضلع المنتظم يعطى بالقانون :

$$180(n-2)$$

2) قياس الزاوية الواحدة في المضلع المنتظم يعطى بالقانون :

$$\frac{180\,(n-2)}{n}$$

3) مجموع الزوايا الخارجية في أي مضلع 360^0 .

كيف نحسب طول ضلع مضلع منتظم ؟

نعتمد على أحد المثلثات المتساوية الساقين ومن ثم نرسم الارتفاع المتعلق بالرأس في المثلث المتساوي الساقين الذي هو ارتفاع ومنصف ومتوسط ومحور في آن واحد ومن ثم إما أن نطبق مبرهنة فيثاغورث أو أن نطبق أحد تعاريف النسب المثلثية للزاوية الحادة .

تذكره بقوانين المحيط والمساحة والحجم

1) مساحة المربع = الضلع × الضلع

2) محيط أي شكل هندسي هو مجموع أطوال أضلاعه .

3) حجم متوازي المستطيلات = جداء أبعاده الثلاثة.

4) حجم المكعب = ^{3}(طول الحرف)

5) المساحة الكلية للمكعب = 6× مساحة الوجه الواحد.

تمرينات ومسائل الوحدة الثالثة صـ63

السؤال الأول :

التمرين	الجواب
1	1
2	1
3	3
4	2
5	2
6	3
7	2

السؤال الثاني :

التمرين	الجواب
1	3+2+1
2	2+1

السؤال الثالث :

التمرين	الرأي	التمرين	الرأي
1	م	5	م
2	غ م	6	م
3	غ م	7	غ م
4	غ م	8	م

السؤال الرابع :

بما أن القطرين متعامدين فإن قياس كل قوس

يساوي 90^0 ومنه :

1) $A\hat{M}B = \frac{1}{2}\,\widehat{ADB}$

$A\hat{M}B = \frac{1}{2} \times 180^0$

$A\hat{M}B = 90^0$

((الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس)) .

2) $A\hat{M}C = \frac{1}{2}\,\widehat{AC}$

$A\hat{M}C = \frac{1}{2} \times 90^0$

$A\hat{M}C = 45^0$ ((زاوية محيطية))

3) $B\hat{M}C = \frac{1}{2}\,\widehat{BDAC}$

$B\hat{M}C = \frac{1}{2} \times 270^0$

$B\hat{M}C = 135^0$ ((زاوية محيطية))

السؤال الخامس :

1) بما أن $B\hat{A}D = 58^0$ وهي زاوية محيطية

ومنه : $\widehat{BD} = 116^0$

((الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس)) .

ومنه : $B\hat{C}D = \frac{1}{2}\,\widehat{BD}$

$A\hat{M}B = \frac{1}{2} \times 116^0$

$A\hat{M}B = 58^0$ ((زاوية محيطية))

طريقة ثانية للحل :

$B\hat{C}D = B\hat{A}D = 58^0$

(زاويتان محيطيتان تحصران قوساً واحدة $\widehat{BD}$ فهما متساويتان بالقياس)

2) بما أن $A\hat{B}C = 22^0$ وهي زاوية محيطية

ومنه : $\widehat{AC} = 44^0$

((الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس)) .

ومنه : $A\hat{D}C = \frac{1}{2}\,\widehat{AC}$

$A\hat{D}C = \frac{1}{2} \times 44^0$

$A\hat{D}C = 22^0$ ((زاوية محيطية))

طريقة ثانية للحل :

$A\hat{D}C = A\hat{B}C = 22^0$

(زاويتان محيطيتان تحصران قوساً واحدة $\widehat{AC}$ فهما متساويتان بالقياس)

3) $C\hat{J}D = 180 - (58 + 22)$

$C\hat{J}D = 180 - 80$

$C\hat{J}D = 100^0$

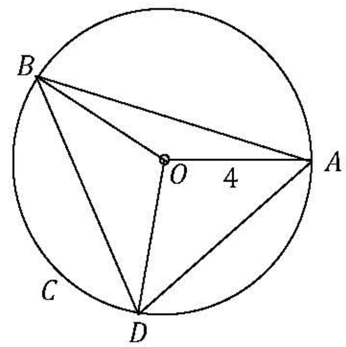
(مجموع زوايا المثلث 180^0)

السؤال السادس :

1)

2)

3)



الخطوات :

1) نرسم ثلاث زوايا مركزية قياس كل منها 120^0

2) نصل النقاط الرئيسية على الدائرة فنحصل على المثلث ABC المتساوي الأضلاع .

التعليل :

$AB = BD = DA$

(الزوايا المركزية المتساوية تحصر أوتار متساوية في الطول)

4) نفتح الفرجار بمقدار OA ، نثبت إبرة الفرجار في A ، ونرسم أقواس متتالية بنفس الفتحة ، نصل بدءاً من A بين كل نقطتين (تقاطع الأقواس مع الدائرة) غير متتاليتين فنحصل على المثلث المطلوب .

السؤال السابع :

بما أن $L\hat{O}M = 52^0$ وهي زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها وبالعكس، ومنه

$\widehat{LM} = 52^0$

$M\hat{K}L = \frac{1}{2}\widehat{LM}$

$M\hat{K}L = \frac{1}{2} \times 52^0$

$M\hat{K}L = 26^0$

((الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس)) .

وبما أن $K\hat{J}L = 104^0$ وهي زاوية محيطية تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس، ومنه

$\widehat{LK} = 104^0$

$K\hat{M}L = \frac{1}{2}\widehat{KL}$

$K\hat{M}L = \frac{1}{2} \times 104^0$

$K\hat{M}L = 52^0$

((الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس)) .

$K\hat{L}M = 180 - (52 + 26)$

$C\hat{J}D = 180 - 78$

$C\hat{J}D = 102^0$

(مجموع زوايا المثلث 180^0)

السؤال الثامن :

1) بما أن $[BC]$ قطر في الدائرة ، وبما أن $B\hat{A}E = 120^0$ وهي زاوية مركزية ومنه $\widehat{BE} = 120^0$ (الزاوية المركزية في الدائرة تقاس بقياس القوس المقابل لها وبالعكس).

$\widehat{CE} = 180 - 120 = 60^0$

ومنه : $C\hat{A}E = \widehat{CE} = 60^0$ (زاوية مركزية)

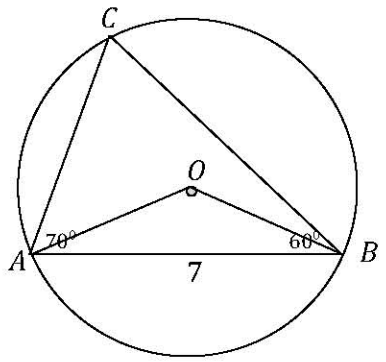
2) $E\hat{C}B = \frac{1}{2}\widehat{BEC} = 90^0$ (الزاوية المحيطية المقابلة لقوس نصف الدائرة هي زاوية قائمة).

3) $C\hat{B}E = \frac{1}{2}\widehat{EC} = \frac{1}{2} \times 60^0 = 30^0$

(الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس).

السؤال التاسع :

1)



نعلم أن مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هي نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث .

2) $A\hat{C}B = 180 - (70 + 60)$

$A\hat{C}B = 50^0$

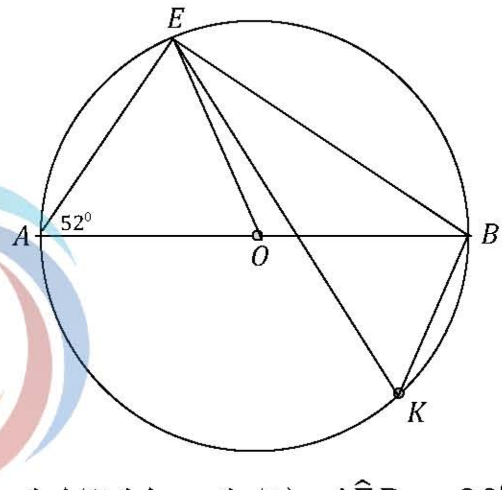
(لأن مجموع زوايا المثلث 180^0) ، وبما أن $A\hat{C}B$ هي زاوية محيطية ومنه :

$A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B = 100^0$

(الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس وبالعكس)

السؤال العاشر :

1)



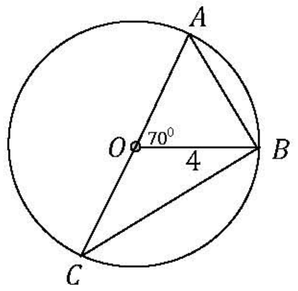
2) $A\hat{E}B = 90^0$ (زاوية محيطية تقابل قوس نصف الدائرة في زاوية قائمة) ، ومنه المثلث AEB قائم الزاوية في $\hat{E}$.

3) $B\hat{O}E = 2\,B\hat{A}E = 2 \times 52 = 104^0$

(الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس وبالعكس)

بما أن $E\hat{A}B = 52^0$ وهي زاوية محيطية ومنه $\widehat{BE} = 104^0$ (الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس) ، ومنه : $B\hat{K}E = \frac{1}{2}\widehat{BE} = 52^0$ (زاوية محيطية) .

السؤال الحادي عشر :



1) بما أن $A\hat{B}C = 90^0$ (زاوية محيطية تقابل قوس نصف الدائرة في زاوية قائمة) ، فالمثلث ABC قائم الزاوية في $\hat{B}$.

حل آخر :

ABC مثلث تمر من رؤوسه دائرة، أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

2) $A\hat{C}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = 35^0$ (الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس وبالعكس)

3) في المثلث ABC القائم في $\hat{B}$:

$$\sin\hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 35^0 = \frac{AB}{8}$$

$$AB = 8\sin 35^0 \ \ cm$$

إعداد المدرس : جلال عدي – جوال0955942677

السؤال الثاني عشر :

1) بما أن $A\widehat{M}H = 90^{0}$ (زاوية محيطية تقابل قوس نصف الدائرة في زاوية قائمة) ، فالمثلث AMH قائم الزاوية في $\widehat{B}$.

حل آخر :

AMH مثلث تمر من رؤوسه دائرة، أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

2) في المثلث AMH القائم في $\widehat{M}$:

$$\sin A\widehat{H}M = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin A\widehat{H}M = \frac{AM}{AH}$$

$$\sin A\widehat{H}M = \frac{5.3}{9} = \frac{53}{90} \cong \frac{1}{2}$$

ومنه : $A\widehat{H}M = 30^{0}$

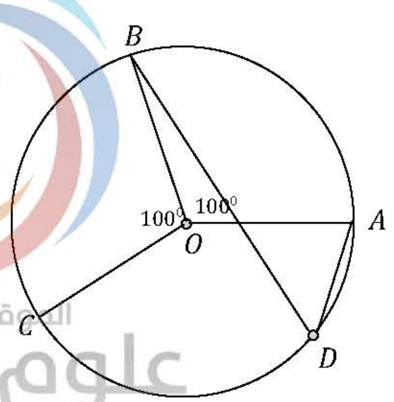
3)

$$H\widehat{T}M = H\widehat{A}M = 180-(90+30) = 60^{0}$$

(الزوايا المحيطية التي تشترك بذات القوس هي زوايا طبوقة) .

السؤال الثالث عشر :

1)



2) $A\widehat{D}B = \frac{1}{2}A\widehat{O}B = 50^{0}$

(الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس وبالعكس)

3) بما أن $A\widehat{D}B = B\widehat{D}C = 50^{0}$

ومنه نستنتج أن : $[DB)$ منصف للزاوية $A\widehat{D}C$.

السؤال الرابع عشر :

1) بما أن $A\widehat{D}B = 90^{0}$ (زاوية محيطية تقابل قوس نصف الدائرة في زاوية قائمة) ، فالمثلث ADB قائم الزاوية في $\widehat{B}$.

حل آخر :

ADB مثلث تمر من رؤوسه دائرة، أحد أضلاع المثلث قطر في هذه الدائرة ، فالمثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

2) بما أن $B\widehat{O}C = 30^{0}$ وهي زاوية مركزية ومنه $\widehat{BC} = 30^{0}$ (الزاوية المركزية في الدائرة تقاس بقياس القوس المقابل لها وبالعكس)، وبما أن $B\widehat{A}D = 45^{0}$ وهي زاوية محيطية ومنه $\widehat{BCD} = 90^{0}$ (الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف القوس المقابل لها وبالعكس)،

ومنه : $\widehat{DC} = 90 - 30 = 60^{0}$

ومنه : $D\widehat{O}C = 60^{0}$ (زاوية مركزية)

المثلث DOC متساوي الساقين لأن :

$OD = OC = R$

وفيه $D\widehat{O}C = 60^{0}$ فالمثلث متساوي الأضلاع .

السؤال الخامس عشر :

1) المثمن غير منتظم ، لأنه على سبيل المثال $[AB] \neq [BC]$.

2) بفرض $AB = x \neq 0$ ومنه طول ضلع المربع $3\,x$ ومساحة المربع : $\mathcal{A} = 9x^2$.

مساحة المثلث القائم BNC هي $\frac{x^2}{2}$ ،

فتكون مساحة المثمن هي :

$$\mathcal{A}' = 9x^2 - 4 \times \frac{x^2}{2}$$
$$\mathcal{A}' = 9x^2 - 2x^2$$
$$\mathcal{A}' = 7x^2$$

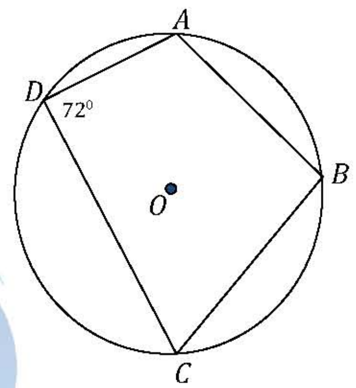
من قانون مساحة المربع نجد :

$$x^2 = \frac{\mathcal{A}}{9}$$

نعوض في قانون مساحة المثمن لنجد :

$$\mathcal{A}' = \frac{7}{9}\,\mathcal{A}$$

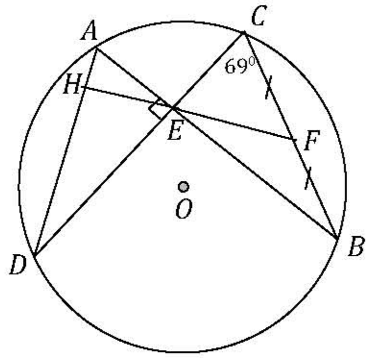
السؤال السادس عشر :



نعلم أنه في الرباعي الدائري : كل زاويتان متقابلتان متكاملتان ،

ومنه : $A\hat{B}C = 180 - 72 = 108^0$

السؤال السابع عشر :



1) بما أن الوتران متعامدان فإن $B\hat{E}C = 90^0$ ،

وبما أن $B\hat{C}E = 69^0$ ،

ومنه $E\hat{B}C = 180 - (90 + 69)$

$$E\hat{B}C = 180 - 159$$
$$E\hat{B}C = 21^0$$
$$A\hat{D}C = A\hat{B}C = 21^0$$

(زاويتان محيطيتان تحصران قوساً واحدة $\widehat{AC}$ فهما زاويتان طبوقتان)

2) 2) بما أن $[EF]$ متوسط متعلق بالوتر $[BC]$ في المثلث القائم EBC ومنه :

$$[EF] = \frac{1}{2}[BC] = [FC] = [FB]$$

(في المثلث القائم : المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر) ، ومنه : فالمثلث EFC متساوي الساقين .

3) بما أن المثلث EFC متساوي الساقين ورأسه F ومنه : $C\hat{E}F = E\hat{C}F = 69^0$

3) 1) $D\hat{E}H = C\hat{E}F = 69^0$ (بالتقابل بالرأس)

2) $D\hat{H}E = 180 - (69 + 21)$

$$D\hat{H}E = 180 - 90$$
$$D\hat{H}E = 90^0$$

3) في المثلث ADE نلاحظ أن $EH \perp AD$ ، لأن $D\hat{H}E = 90^0$ ، ومنه EH الارتفاع النازل من رأس المثلث E على الضلع $[AD]$.

السؤال الثامن عشر :

1) بما أن $B\hat{O}C = 50^0$ ومنه $\widehat{BC} = 50^0$

وبما أن $D\hat{O}E = 120^0$ ومنه $\widehat{DE} = 120^0$

(الزاوية المركزية في الدائرة تقاس بقياس القوس المقابل لها وبالعكس).

نصل EC

$$B\hat{E}C = \frac{1}{2}\widehat{AC} = 25^0$$

(الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس وبالعكس)

$$E\hat{C}D = \frac{1}{2}D\hat{O}E = 60^0$$

(زاوية محيطية)

في المثلث ACE :

$$E\hat{A}C = 180 - (60 + 25)$$
$$E\hat{A}C = 180 - 85$$
$$E\hat{A}C = 95^0$$

ومنه :

$$D\hat{A}E = 180 - 95$$
$$D\hat{A}E = 85^0$$

2) قياس الزاوية الداخلية في الدائرة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المحصورين بين الوتران المتقاطعان المشكلان للزاوية .

السؤال التاسع عشر :

1) بما أن المخمس منتظم ومنه :

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA} = \frac{360}{5} = 72^0$$

$$C\hat{G}D = \widehat{CD} = 72^0$$

(الزاوية المركزية في الدائرة تقاس بقياس القوس المقابل لها وبالعكس).

2)
$$E\hat{A}B = \frac{1}{2}\ \widehat{BCDE}$$

$$E\hat{A}B = \frac{1}{2} \times (72 + 72 + 72)$$

$$E\hat{A}B = \frac{1}{2} \times (216)$$

$$E\hat{A}B = 108^0$$

(الزاوية المحيطية في الدائرة تقاس بقياس نصف الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس وبالعكس)

السؤال العشرون :

1) $ABCD$ ، $AKJB$ ، $AKOI$ ، $BJOI$.

2) في المثلث AOB نلاحظ أن :

$BJ \perp AO$ أي أن BJ ارتفاع

$AK \perp BO$ أي أن AK ارتفاع

$IO \perp AB$ أي أن IO ارتفاع

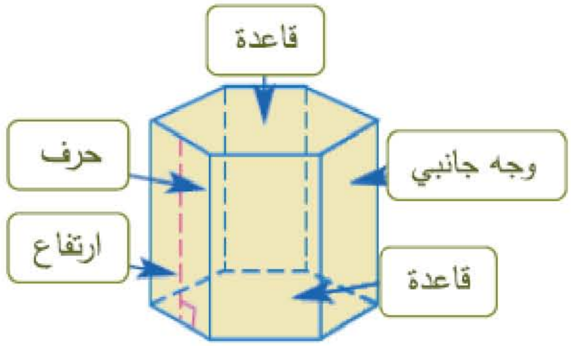
ومنه : المستقيمات $(BJ), (BK), (IO)$ تتلاقى في نقطة واحدة (الارتفاعات في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة) .

الوحدة الرابعة :

مجسمات ومقاطع

تذكر :

الموشور : هو المجسم الذي يميزه وجهان متوازيان نسميهما القاعدتين.



1) **الارتفاع** هو العمود النازل من الرأس إلى الضلع المقابلة لهذا الرأس.

2) المساحة الجانبية للموشور القائم تساوي محيط القاعدة مضروباً بالارتفاع.

أي : $S_L = P \times h$

3) المساحة الكلية للموشور القائم تساوي مجموع المساحة الجانبية + ضعفي قاعدتيه.

أي : $S_T = S_L + 2S_b$

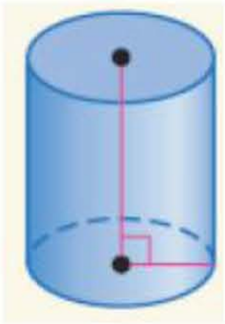
4) حجم الموشور القائم يساوي جداء مساحة القاعدة بالارتفاع .

أي : $V = S_b \times h$

5) مجموع زوايا أي مثلث 180^0 .

6) **المضلع المنتظم :** هو مضلع تساوت أطوال أضلاعه وتساوت قياسات زواياه.

7) العمودان على مستقيم واحد متوازيان.



8) **الاسطوانة :** هي المجسم الناتج عن دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة .

9) المساحة الجانية للاسطوانة تساوي محيط القاعدة مضروباً بالارتفاع.

أي : $S_L = P \times h$

$S_L = 2\pi R \times h$

10) المساحة الكلية للاسطوانة تساوي مجموع المساحة الجانبية + ضعفي قاعدتيه.

أي : $S_T = S_L + 2S_b$

$S_T = 2\pi R \times h + 2\pi R^2$

11) حجم الأسطوانة يساوي جداء مساحة القاعدة بالارتفاع .

أي : $V = S_b \times h$

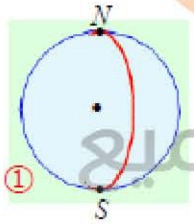
$V = \pi R^2 \times h$

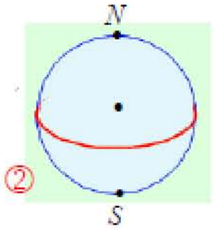
12) حجم متوازي المستطيلات : جداء أبعاده الثلاثة .

13) حجم المكعب الذي طول حرفه x : $V = (x)^3$

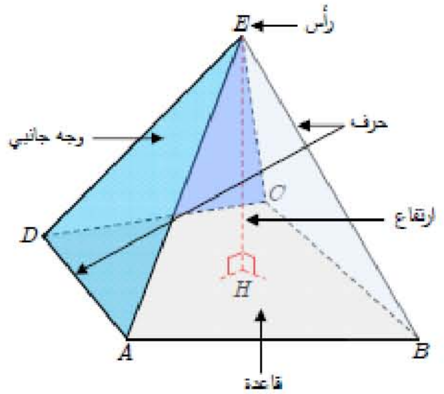
14) مصطلحات في الكرة الأرضية :

يرمز N إلى القطب الشمالي ، و يرمز S إلى القطب الجنوبي





الهرم



الهرم هو المجسم الذي يميزه :

1) مضلع يسمى قاعدة الهرم.

2) E لا تنتمي إلى القاعدة تسمى رأس الهرم.

3) مثلثات مشتركة بالرأس E وقاعداتها هي أضلاع قاعدة الهرم، يسمى كل منها وجهاً جانبياً.

4) السطح الجانبي، هو السطح المؤلف من مجموعة الأوجه الجانبية.

<u>ارتفاع الهرم</u>

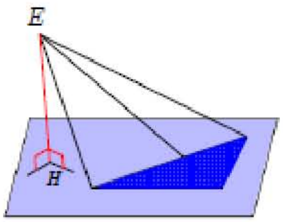
1) ارتفاع الهرم من رأسه E، هو العمود $[EH]$ على مستوي قاعدته، حيث H نقطة من القاعدة، (يسمى H مسقط الرأس E على مستوي القاعدة، كما تسمى موقع الارتفاع).

2) يسمى الطول EH أيضاً ارتفاع الهرم.

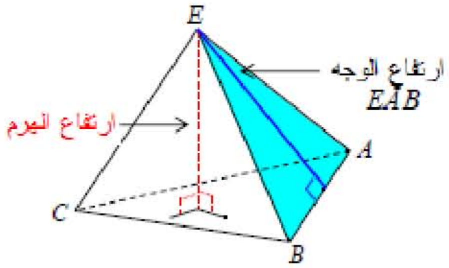
3) الحرف : هو الخط الفاصل بين وجهين جانبيين أو بين وجه جانبي والقاعدة.

ملاحظات :

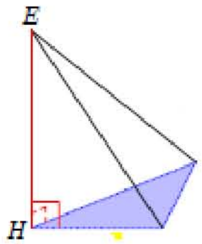
1) قد يقع ارتفاع الهرم داخل الهرم (كما في الشكل السابق) أو خارجه كما في الشكل التالي :



2) يجب عدم الخلط بين ارتفاع الهرم وارتفاع الوجه الجانبي، كما في الشكل التالي :

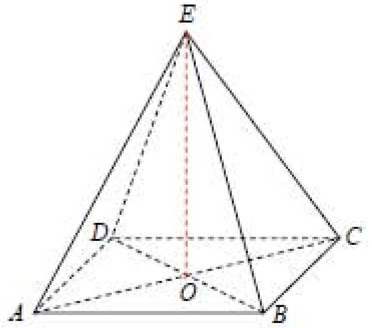


3) قد يكون أحد أحرف الهرم ارتفاعاً فيه ، كما في الشكل التالي :



الهرم المنتظم

نقول أن هرماً رأسه E هو هرم منتظم، إذا استوفى الشرطين التاليين :



هرم منتظم رباعي

1) قاعدته P مضلع منتظم مركزه O (مثل المثلث متساوي الأضلاع أو المربع ......)

2) ارتفاعه القطعة المستقيمة $[EO]$ الواصلة بين رأس الهرم ومركز قاعدته.

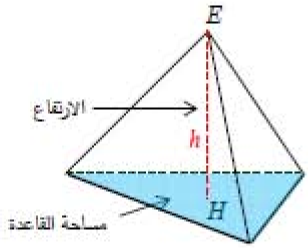
ملاحظات:

1) الأوجه الجانبية للهرم المنتظم هي مثلثات متساوية الساقين وهي طبوقه .

2) رباعي الوجوه المنتظم هو هرم ثلاثي، جميع أوجهه هي مثلثات متساوية الأضلاع.

3) رباعي الوجوه المنتظم هو هرم منتظم باتخاذ أي وجه من وجوهه الأربعة قاعدة له .

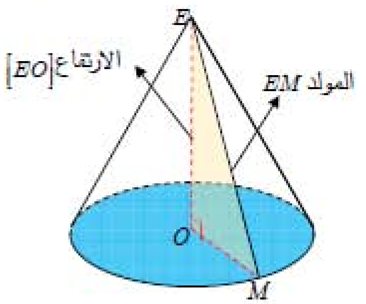
حجم الهرم



حجم هرم وليكن V ، يساوي ثلث جداء ضرب مساحة القاعدة ولتكن S_b بارتفاعه h

أي : $V = \frac{1}{3} S_b \times \ h$

المخروط الدوراني



تعريف المخروط الدوراني :

هو المجسم المتولد من دوران مثلث EOM قائم في O ، حول المستقيم (OE) ، القرص المتولد عن دوران $[OM]$ هو قاعدة المخروط.

تعريف ارتفاع المخروط الدوراني :

1) ارتفاع المخروط الدوراني الذي رأسه E ومركز قاعدته O ، هو القطعة المستقيمة $[EO]$ وهو أيضاً الطول EO .

2) المستقيم (EO) عمودي على مستوي القاعدتين .

الكرة

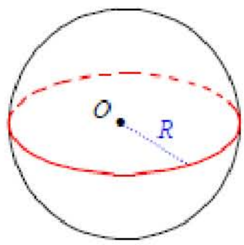
كرة القدم : شكل كروي مجوف ، له في الرياضيات شكل سطح كروي .

كرة قدم

كرة البيليارد : شكل كروي مليء ، له في الرياضيات شكل سطح كروي .

كرة بيليارد

تعلم :



1) السطح الكروي ذو المركز O ونصف القطر R : هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM = R$.

2) المجسم الكروي ذو المركز O ونصف القطر R ، هي مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM \leq R$.

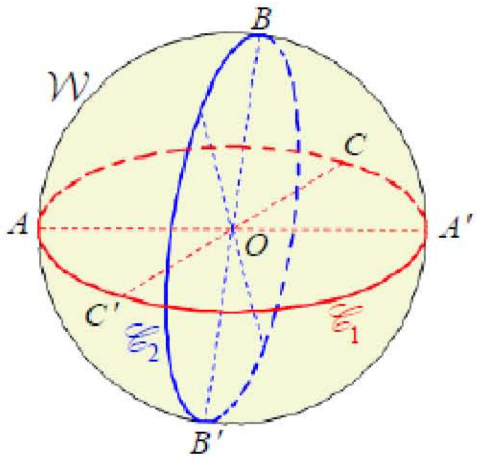
3) يعطى دستور حساب مساحة سطح الكرة بدلالة نصف قطرها R :

$$S = 4\,\pi\,R^2$$

4) يعطى دستور حساب حجم الكرة بدلالة نصف قطرها R

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

خطوط مميزة في الكرة



1) قطر الكرة W : هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O ، وطرفاها نقطتان من الكرة .

2) أقطار الكرة لها الطول ذاته وهو $2R$ ، يسمى هذا الطول أيضاً قطر الكرة .

3) الدائرة الكبرى : هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها يساوي قطر الكرة .

<u>ففي الشكل السابق :</u>

$[AA']$ و $[BB']$ و $[CC']$ أقطار في الكرة W النقطتان A و A' متقابلتان قطرياً ، كذلك النقطتان B و B' متقابلتان قطرياً ، و النقطتان C و C' متقابلتان قطرياً ، إذن : الدائرة C_1 دائرة كبرى ، كذلك الدائرة C_2 دائرة كبرى .

إعداد المدرس : جلال عدي – جوال0955942677

مقاطع مجسمات

تعلم :

1) مقطع مجسم بمستوٍ هو مجموعة النقاط المشتركة بين المجسم والمستوي.

2) عند الرسم الفراغي يمكن أن تبدو الأطوال والزوايا غير حقيقية مثلاً يظهر أحياناً المربع في الرسم الفراغي وكأنه متوازي أضلاع ، لذلك يكون من المناسب رسم هذا الشكل جانباً بأبعاده التامة.

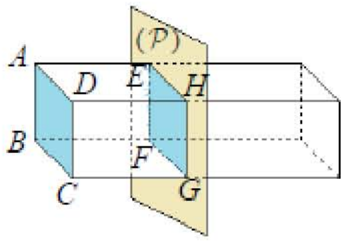
مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ

أولاً : مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد وجوهه

((هو مستطيل يطابق ذلك الوجه))

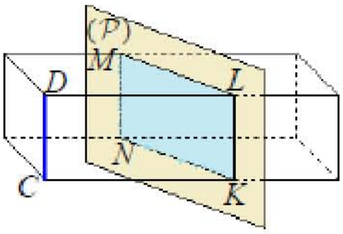
<u>ففي الشكل السابق :</u>

مقطع متوازي المستطيلات بالمستوي P ، الموازي للوجه $ABCD$ هو المستطيل $EFGH$ ، ويكون $EF = AB$ ، $HG = DC$.



ثانياً : مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد أحرفه

((هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف))



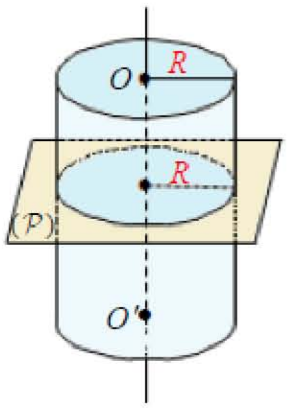
<u>ففي الشكل السابق :</u>

مقطع متوازي المستطيلات بالمستوي P ، الموازي للحرف CD هو المستطيل $MNKL$ ، ويكون : $KL = NM = CD$

مقطع أسطوانة دورانية بمستوٍ

أولاً : مقطع أسطوانة دورانية بمستوٍ يوازي قاعدتها أو يعامد محورها :

((هو دائرة تطابق قاعدتها))

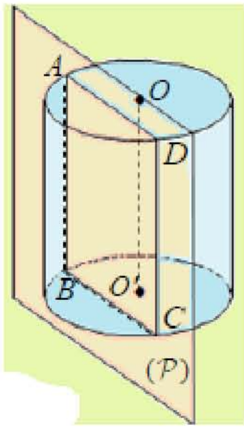


<u>ففي الشكل السابق :</u>

محور الأسطوانة هو (OO') ونصف قطر قاعدته R ، مقطع الأسطوانة بالمستوي P الموازي لمستوي القاعدة هو دائرة مركزها على (OO') ونصف قطرها R .

ثانياً : مقطع أسطوانة دورانية بمستوٍ يوازي محورها :

((هو مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الاسطوانة))

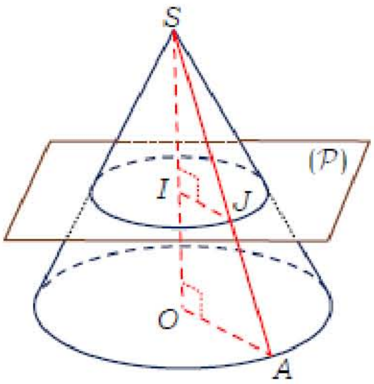


<u>ففي الشكل السابق :</u>

محور الأسطوانة هو (OO') ونصف قطر قاعدته R ، مقطع الأسطوانة بالمستوي P الموازي لمحور الأسطوانة هو المستطيل $ABCD$ ،

$AB = CD = OO'$

مقطع مخروط دوراني بمستوٍ



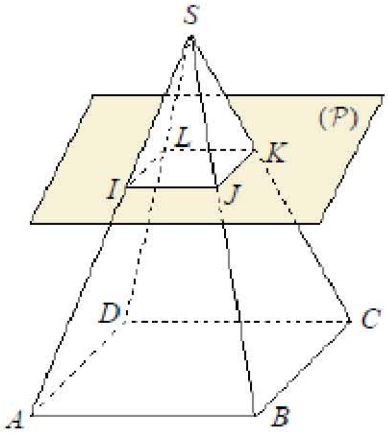
مقطع مخروط دوراني بمستو يوازي قاعدته : هو ((دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة)) .

<u>ففي الشكل السابق :</u>

مخروط دوراني ومستوٍ P يوازي قاعدته ويقطع ارتفاعه $[SO]$ في I وأحد مولداته $[SA]$ في J ، المقطع هو دائرة مركزها I ونصف قطرها IJ ، فبحسب مبرهنة النسب الثلاثة في المثلث تكون نسبة تصغيرها عن دائرة المركز تساوي : $\frac{SJ}{SA} = \frac{SI}{SO} = \frac{IJ}{OA}$

إعداد المدرس : جلال عدي – جوال0955942677

مقطع هرم بمستوٍ



مقطع هرم بمستو يوازي قاعدته : هو ((تصغير للقاعدة)) ، أضلاع المقطع توازي مقابلاتها في القاعدة .

<u>ففي الشكل المرافق :</u>

هرم رأسه S وقاعدته المربع $ABCD$ ،

المستوي P يوازي قاعدته ، مقطع المستوي بهذا المستوي هو المربع $IJKL$ ،

ونسمي $ABCD - IJKL$ جذع الهرم ،

نسبة التصغير تساوي :

$$\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SB} = \frac{IJ}{AB}$$

يعطى قانون حجم جذع المخروط بالشكل :

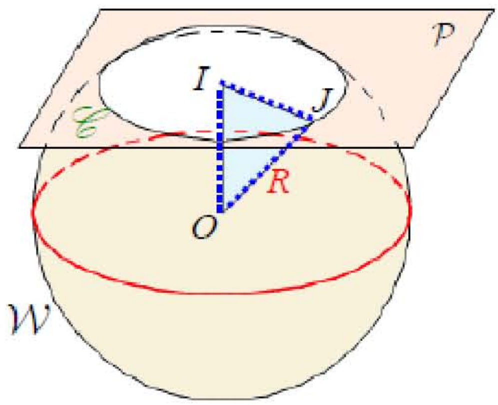
$$V = \frac{1}{3}h(s + s' + \sqrt{s \times s'})$$

حيث :

h ارتفاع الجذع

s و s' مساحتا قاعدتيه .

مقطع كرة بمستوٍ



1) مقطع كرة بمستوٍ هو دائرة .

2) مقطع مجسم كروي بمستوٍ هو قرص دائري .

<u>ففي الشكل السابق :</u>

المستوي p يقطع السطح الكروي W

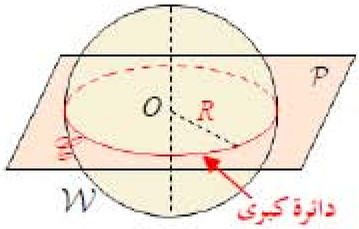
النقطة I مركز الدائرة المقطع C هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم العمودي عليه من النقطة O مركز الكرة .

OI هو بعد مركز الكرة عن المستوي P ،

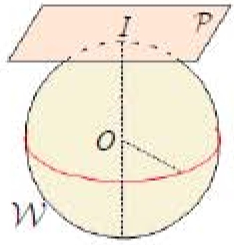
ويكون نصف قطر الكرة : $R = OJ$.

حالات خاصة :

1) عندما يمر المستوي القاطع P بمركز الكرة O ، المقطع هو دائرة كبرى C .



2) عندما يمس المستوي P الكرة ، المقطع هو نقطة .



تمرينات ومسائل الوحدة الرابعة ص88

السؤال الأول :

التمرين	الجواب	التمرين	الجواب
1	2	**5**	3
2	1	**6**	3
3	2	**7**	3
4	2		

السؤال الثاني :

التمرين	الجواب
1	1
2	3 + 2
3	2 + 1

السؤال الثالث :

التمرين	الرأي	التمرين	الرأي
1	غ . م	**5**	غ . م
2	م	**6**	غ . م
3	م	**7**	غ . م
4	غ . م	**8**	مكرر 4

السؤال الرابع :

1) بما أن I منتصف $[AD]$ ومنه :

$$[DI] = [IA] = 4\ cm$$
$$[AE] = [BF] = 3\ cm$$

وبما أن المجسم متوازي مستطيلات ومنه حسب

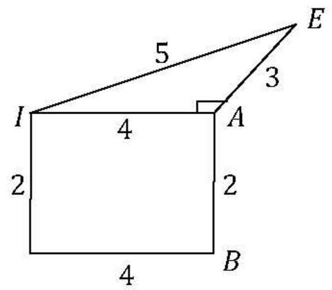
مبرهنة فيثاغورث في المثلث AEI القائم في $\hat{A}$:

$$IE^2 = AE^2 + AI^2$$
$$IE^2 = 9 + 16$$
$$IE^2 = 25$$

بجذر الطرفين :

$$IE = 5\ cm$$

2) المقطع مستطيل

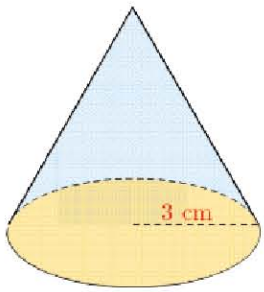


السؤال الخامس :

بما أن المستوي المقطع يوازي قاعدة المخروط، وبما أن I منتصف $[SO]$ ومنه حسب مبرهنة النسب الثلاثة (مبرهنة تالس) :

$$\frac{R'}{R} = \frac{SI}{SO}$$
$$\frac{R'}{6} = \frac{1}{2}$$
$$2\,R' = 6$$
$$R' = \frac{6}{2} = 3\ cm$$

الرسم :



إعداد المدرس : جلال عدي – جوال0955942677

السؤال السادس :

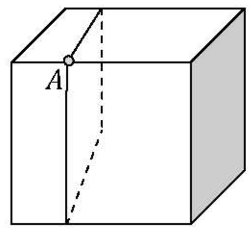
1) المقطع مثلث متساوي الأضلاع .

2) المقطع مثلث قائم الزاوية .

3) المقطع مربع .

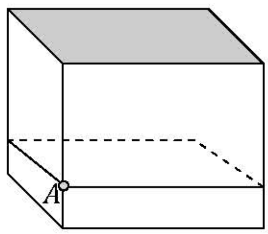
السؤال السابع :

الشكل (1) :



المقطع مربع

الشكل (2) :



المقطع مربع

السؤال الثامن :

1) مقطع متوازي المستطيلات بمستو يوازي الوجه $ABCD$ هو مستطيل طبوق على هذا الوجه ومنه:

$$P = 28\ cm$$
$$S = 48\ cm^2$$

2) مقطع متوازي المستطيلات بمستو يوازي الوجه $ADHE$ هو مستطيل طبوق على هذا الوجه ومنه:

$$P = 20\ cm$$
$$S = 24\ cm^2$$

3) مقطع متوازي المستطيلات بمستو يوازي الوجه $ABFE$ هو مستطيل طبوق على هذا الوجه ومنه:

$$P = 24\ cm$$
$$S = 32\ cm^2$$

السؤال التاسع :

1) المقطع متوازي أضلاع .

$$[LI] = [KJ] = [EF] = 7\ cm$$

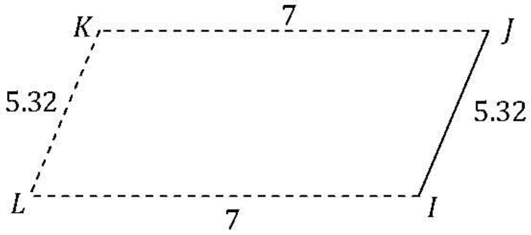
وبما أن المجسم متوازي مستطيلات ومنه حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث IGJ القائم في $\widehat{G}$:

$$IJ^2 = GJ^2 + GI^2$$
$$IJ^2 = 12.25 + 16$$
$$IJ^2 = 28.25$$

بجذر الطرفين :

$$IJ = \sqrt{28.25}\ cm$$
$$IJ \approx 5.32\ cm$$

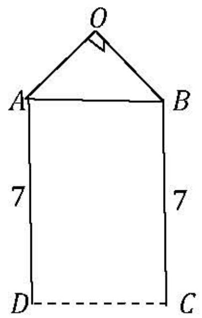
(2



السؤال العاشر :

1) المقطع مستطيل .

(2



3) حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث AOB القائم في $\widehat{O}$:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$
$$AB^2 = 9 + 9$$
$$AB^2 = 18$$

بجذر الطرفين :

$$AB = 3\sqrt{2}\ cm$$

السؤال الحادي عشر :

بما أن المقطع $ABCD$ يوازي محور الاسطوانة ،

ومنه المقطع $ABCD$ مستطيل .

بما أن $[AB] = 16\ cm$ ،

وبما أن $[OH] \perp [AB]$ ومنه :

$$[AH] = [HB] = \frac{1}{2}[AB] = 8\ cm$$

(العمود المرسوم من مركز الدائرة على وتر فيها ينصفه).

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث AOH القائم في $\widehat{H}$:

$$AO^2 = HO^2 + HA^2$$
$$AO^2 = 36 + 64$$
$$AO^2 = 100$$

بجذر الطرفين :

$$AO = 10\ cm$$

السؤال الثاني عشر :

بما أن المستوي المقطع يوازي قاعدة المخروط ،

فإن المقطع دائرة نصف قطرها R' .

حسب مبرهنة النسب الثلاث (مبرهنة تالس) نكتب :

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{R'}{15} = \frac{1}{3}$$
$$3\,R' = 15$$
$$R' = \frac{15}{3} = 5\ cm$$

السؤال الثالث عشر :

1)
$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_b \times h$$
$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \times \frac{(AB \times BC)}{2} \times SB$$
$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \times \frac{(2 \times 1)}{2} \times 3$$
$$V_{SABC} = 1\ cm^3$$

2) حسب مبرهنة النسب الثلاث نستنتج أن :

$$K = \frac{SJ}{SB} = \frac{2}{3}$$

نعلم أن
$$\frac{S_{IJK}}{S_{ABC}} = K^2$$
$$\frac{S_{IJK}}{1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$\frac{S_{IJK}}{1} = \frac{4}{9}$$
$$9\,S_{IJK} = 4$$
$$S_{IJK} = \frac{4}{9}\ cm^2$$

3) نعلم أن :
$$\frac{V_{SIJK}}{V_{SABC}} = (K)^3$$
$$\frac{V_{SIJK}}{1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$V_{SIJK} = \frac{8}{27}\ cm^3$$

السؤال الرابع عشر :

1) بما أن المقطع يوازي قاعدة الهرم وكان المقطع مربع

ومنه فإن قاعدة الهرم $ABCD$ مربع .

ونعلم أن :
$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = K^2$$

ومنه نسبة التصغير :

$$K^2 = \frac{9}{25}$$

بجذر الطرفين :

$$K = \frac{3}{5}$$

2) نعلم أن :
$$\frac{V_{SEFGH}}{V_{SABCD}} = (K)^3$$
$$\frac{V_{SEFGH}}{125} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$
$$\frac{V_{SEFGH}}{125} = \frac{27}{125}$$
ومنه :
$$V_{SEFGH} = 27\ cm^3$$

السؤال الخامس عشر :

أولاً : المقطع متوازي أضلاع .

ثانياً : حساب أبعاده

$$[AB] = [HG] = 5\ cm$$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث BCG القائم في $\hat{C}$:

$$BG^2 = CB^2 + CG^2$$
$$BG^2 = 64 + 36$$
$$BG^2 = 100$$

بجذر الطرفين :

$$BG = 10\ cm$$

السؤال السادس عشر :

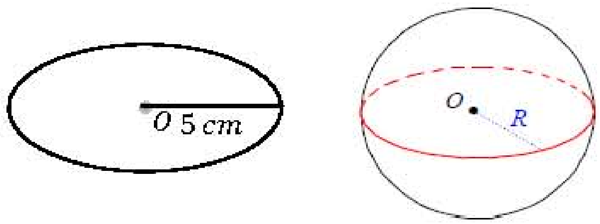
بما أن المستوي المقطع يقطع الارتفاع في نقطة تقسم الارتفاع بنسبة $\frac{2}{1}$ بدءاً من رأس المخروط ، ومنه :

$$k = \frac{2}{3}$$

نعلم أن :
$$\frac{S'}{S} = K^2$$
$$\frac{S'}{\pi R^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$\frac{S'}{\pi(9)^2} = \frac{4}{9}$$
$$\frac{S'}{81\ \pi} = \frac{4}{9}$$
$$9\ S' = 4 \times 81\ \pi$$
$$S' = \frac{4 \times 81\pi}{9}$$
$$S' = 36\ \pi\ cm^2$$

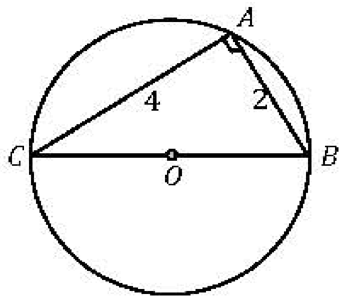
السؤال السابع عشر :

المجسم الناتج : كرة (مجسم كروي)



السؤال الثامن عشر :

1)



2) حول الضلع $[BC]$

السؤال التاسع عشر :

بما أن $[OE] = [ON] = R = 6400\ km$ ،

وبما أن : $[EO] \perp [NS]$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث EON القائم في $\hat{O}$:

$$NE^2 = OE^2 + ON^2$$
$$NE^2 = 40960000 + 40960000$$
$$NE^2 = 81920000$$

بجذر الطرفين :

$$NE = \sqrt{2} \times 6400cm$$

السؤال العشرون :

$$R_{\text{الكرة}} = [OJ] = 12\ cm$$

$$R_{\text{الدائرة}} = [IJ] = 8\ cm$$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث OIJ

القائم في $\hat{I}$:

$$OJ^2 = OI^2 + IJ^2$$
$$144 = OI^2 + 64$$
$$OI^2 + 64 = 144$$
$$OI^2 = 144 - 64$$
$$OI^2 = 108$$

بجذر الطرفين :

$$OI = \sqrt{36 \times 3}$$
$$OI = 6\sqrt{3}\ cm$$

السؤال الواحد والعشرون :

1) $R = 5\ cm$

$$S = 4\pi R^2$$
$$S = 4 \times \pi \times (5)^2$$
$$S = 4 \times \pi \times 25$$
$$S = 100\pi\ cm^2$$

2) بما أن محيط الدائرة الكبرى $28\ \pi$

ونعلم أن : $p = 2\pi R$

$$28\ \pi = 2\pi R$$
$$R = \frac{28\ \pi}{2\ \pi} = 14\ cm$$

ومنه :

$$S = 4\pi R^2$$
$$S = 4 \times \pi \times (14)^2$$
$$S = 4 \times \pi \times 196$$
$$S = 784\pi\ cm^2$$

السؤال الثاني والعشرون :

1) $R = 5$ cm

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times (5)^3$$
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 125$$
$$V = \frac{500\ \pi}{3}\ cm^3$$

2) يقصد بطول الدائرة الكبرى : محيط الدائرة الكبرى ،

وبما أن محيط الدائرة الكبرى $14\ \pi$

ونعلم أن : $p = 2\pi R$

$$14\ \pi = 2\pi R$$
$$R = \frac{14\ \pi}{2\ \pi} = 7\ cm$$

ومنه :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times (7)^3$$
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 343$$
$$V = \frac{1372\ \pi}{3}\ cm^3$$

3) بما أن مساحة الدائرة الكبرى $36\ \pi$

ونعلم أن : $S = \pi R^2$

$$36\ \pi = \pi R^2$$
$$R^2 = \frac{36\ \pi}{\pi} = 36\ cm$$

ومنه :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times (6)^3$$
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 216$$
$$V = 288\pi\ cm^3$$

السؤال الثالث والعشرون :

بما أن الدحلات كروية الشكل ومتماسة والكرة السفلية تمس قاعدة الأنبوبة والعليا تمس سطحها ، ومنه نحسب نصف قطر الكرة الواحدة (الدحلة) :

$$12.6 \div 3 = 4.1 \ cm$$

$$R = 4.1 \div 2 = 2.05 \ cm$$

$$V_{\text{المطلوبة}} = V_{\text{الاسطوانة}} - 3\, V_{\text{الدحلات}}$$

$$V = S_b \times h - 3 \times \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V = \pi R^2 \times h - 4 \pi R^3$$

$$V = \pi \times (2.1)^2 \times 12.6 - 4\pi \times (2.05)^3$$

$$V = 4.41\, \pi \times 12.6 - 4\,\pi \times 8.615125$$

$$V = 555.66 \pi - 34.4605\, \pi$$

$$V = 521.1995\, \pi \ cm^3$$

السؤال الرابع والعشرون :

1) المقطع $IJKL$ مستطيل

$$[JK] = [IL] = [BC] = 6 \ cm$$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث ABF القائم في $\hat{B}$:

$$AF^2 = BA^2 + BF^2$$
$$AF^2 = 225 + 64$$
$$AF^2 = 289$$

بجذر الطرفين :

$$AF = 17 \ cm$$

حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلث EAF حيث (IJ) يوازي (AF) :

$$\frac{EI}{EA} = \frac{EJ}{JF} = \frac{IJ}{AF}$$

من النسبتين (2) و(3)

$$\frac{EJ}{JF} = \frac{IJ}{AF}$$

نعوض :

$$\frac{12}{15} = \frac{IJ}{17}$$

$$15\, IJ = 12 \times 17$$
$$IJ = \frac{12 \times 17}{15}$$
$$IJ = \frac{4 \times 17}{5}$$
$$IJ = \frac{68}{5} = 13.6 \ cm$$

حساب مساحة المقطع :

$$S_{IJKL} = IJ \times JK$$
$$S_{IJKL} = 13.6 \times 6$$
$$S_{IJKL} = 81.6 \ cm^2$$

2) في المثلث IJK القائم في $\hat{J}$:

$$\tan J\hat{I}K = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan J\hat{I}K = \frac{JK}{IJ}$$

$$\tan J\hat{I}K = \frac{6}{13.6}$$

$$\tan J\hat{I}K = \frac{60}{136} = \frac{30}{68} = \frac{15}{34} = 0.441$$

ومنه : $J\hat{I}K \cong 26^0$

السؤال الخامس والعشرون :

1) $h = 6\, m = 600\, cm$

بما أن جذع الشجرة هو أسطوانة ، ومنه :

$$V = S_b \times h$$
$$V = \pi R^2 \times h$$
$$V = \pi \times (20)^2 \times 600$$
$$V = \pi \times 400 \times 600$$
$$V = 240000 \pi \ cm^3$$

2) بما أن الشكل $ABCD$ مربع ، عُلم طول قطره ، ومنه طول ضلعه يعطى بالقانون :

$$b = \sqrt{2}\ a$$

حيث : a طول ضلع المربع

b طول القطر في المربع

ومنه : $a = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \ cm$

$$S = a^2$$
$$S = \left(20\sqrt{2}\right)^2$$
$$S = 800\,cm^2$$

3) المجرى بشكل متوازي مستطيلات، ومنه حجم المجرى :

$$V = S_b \times h$$
$$V = 800 \times 600$$
$$V = 48000\,cm^3$$
$$V = 0.48\,m^3$$

<u>السؤال السادس والعشرون :</u>

1) بما أن المستويين متوازيين ، فحسب مبرهنة النسب الثلاث :

$$\frac{SJ}{SI} = \frac{5}{8}$$

نعوض :

$$\frac{15}{SI} = \frac{5}{8}$$
$$5\,SI = 15 \times 8$$
$$SI = \frac{15 \times 8}{5} = 24\,cm$$

(($JI = 24 - 15 = 9\,cm$

(($SO = h = 24 + 12 = 36\,cm$

2) بما أن القاعدة توازي المستويين ، فحسب مبرهنة النسب الثلاث :

$$\frac{SI}{SO} = \frac{8}{R}$$

نعوض :

$$\frac{24}{36} = \frac{8}{R}$$
$$24\,R = 5 \times 36$$
$$R = \frac{5 \times 36}{24}$$
$$R = \frac{15}{2} = 7.5\,cm$$

الحجم :

$$V = \frac{1}{3}\,S_b \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times (7.5)^2 \times 36$$
$$V = \pi \times 56.25 \times 12$$
$$V = 675\,\pi\,cm^3$$

3)
$$V = \frac{1}{3}\,S_b \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times (R)^2 \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times (5)^2 \times 15$$
$$V = \pi \times 25 \times 5$$
$$V = 125\,\pi\,cm^3$$

4)
$$V = \frac{1}{3}\,S_b \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times (R)^2 \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times (8)^2 \times 24$$
$$V = \pi \times 64 \times 8$$
$$V = 512\,\pi\,cm^3$$

5)
$$V = V_I - V_J$$
$$V = 512\pi - 125\pi$$
$$V = 387\,\pi\,cm^3$$

السؤال السابع والعشرون :

1) $V = \frac{1}{3} S_b \times h$

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times (5)^2 \times 12$

$V = \pi \times 25 \times 4$

$V = 100\,\pi\, cm^3$

حساب المولد $[SA]$:

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث SOA

القائم في $\hat{O}$:

$SA^2 = OS^2 + OA^2$

$SA^2 = 144 + 25$

$SA^2 = 169$

بجذر الطرفين :

$SA = 13\ cm$

2) 1) $V = 100\pi \times 51.2\%$

$V = 100\pi \times \frac{51.2}{100}$

$V = 51.2\,\pi\, cm^3$

$V = 0.0000512\pi\ m^3$

$V = 0.0512\pi\ L$

2) بما أن المخروط C_1 تصغير للمخروط C

نعلم أن :

$\frac{V_1}{V} = K^3$

$\frac{51.2\pi}{100\,\pi} = K^3$

$K^3 = \frac{51.2}{100} = \frac{512}{1000} = 0.512$

بالجذر التكعيبي للطرفين :

$K = 0.8$

3) حسب مبرهنة النسب الثلاث نستنتج :

$h' = K \times h$

$h' = 0.8 \times 12$

$h' = 9.6\, cm$

أيضاً :

$R' = K \times R$

$R' = 0.8 \times 5$

$R' = 4\ cm$