وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

الطبعة المعدلة
١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

يوزع مجانًا ولا يباع

الرياضيات
الصف الثالث الثانوي
قسم العلوم الطبيعية

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان
عمر محمد أبوغليون
خلود عبدالحفيظ لوباني
أحمد مصطفى سمارة
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

إعداد الصور
د. سعود بن عبد العزيز الفراج

Original Title:

Precalculus ©2011 & Algebra 2 ©2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

أخي المعلم/ أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولًا: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وأساليب التدريس المتَّبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تمَّ توزيع المقرر إلى فصول، ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخطط الفصل وأهدافه، ومصادر تدريسه، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس، ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آليةً لتعلُّم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة، ثم يقدم دعمًا للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطةً مقترحةً تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم على شرح كل درس، وبعد ذلك يعرض الدليل الدرس في خطواتٍ محددةٍ هي:

التركيز: يبيِّن ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس, كما يقدّم أمثلةً إضافيةً للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريباتٍ متنوعةً تحقق أهداف الدرس بحسب مستويات الطلاب.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم؛ للتأكد من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آليةً لمتابعة المطويات.
كما يقدّم الدليل في كل درس إجاباتٍ مفصّلةً لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.
ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلِّمين والمعلِّمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبِّي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، وأن يساعدهم على أداء رسالتهم.

الفهرس

الفصل 5 المتجهات

مخطط الفصل 5 ..... 8A
التقويم والمعالجة 8C
تنويع التعليم 8D
المحتوى الرياضي 8E
التهيئة للفصل 5 9
5-1 مقدمة في المتجهات 10
5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي 18
5-3 الضرب الداخلي 26
اختبار منتصف الفصل 32
5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد 33
5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء 39
دليل الدراسة والمراجعة 44
اختبار الفصل 49
ملحق الإجابات 49A

الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

مخطط الفصل 6 ..... 50A
التقويم والمعالجة 50C
تنويع التعليم 50D
المحتوى الرياضي 50E
التهيئة للفصل 6 51
6-1 الإحداثيات القطبية 52
6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات 59
6-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر 68
دليل الدراسة والمراجعة 79
اختبار الفصل 83
ملحق الإجابات 83A
نماذج للمستوى القطبي 83G

الفهرس

الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

مخطط الفصل 7 ..... 84A
التقويم والمعالجة 84C
تنويع التعليم 84D
المحتوى الرياضي 84E
التهيئة للفصل 7 85
7-1 الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة 86
توسع 7-1 معمل الحاسبة البيانية: تقويم البيانات المنشورة 91
7-2 التحليل الإحصائي 92
7-3 الاحتمال المشروط 97
اختبار منتصف الفصل 101
7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية 102
7-5 التوزيع الطبيعي 108
توسع 7-5 معمل الجبر: القانون التجريبي والمئينات 113
7-6 التوزيعات ذات الحدين 114
دليل الدراسة والمراجعة 120
اختبار الفصل 125
ملحق الإجابات 125A

الفصل 8 النهايات والاشتقاق

مخطط الفصل 8 ..... 126A
التقويم والمعالجة 126C
تنويع التعليم 126D
المحتوى الرياضي 126E
التهيئة للفصل 8 127
8-1 تقدير النهايات بيانيًّا 128
8-2 حساب النهايات جبريًّا 137
استكشاف 8-3 معمل الحاسبة البيانية: ميل المنحنى 147
8-3 المماس والسرعة المتجهة 149
اختبار منتصف الفصل 155
8-4 المشتقات 156
8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل 164
8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل 173
دليل الدراسة والمراجعة 180
اختبار الفصل 185
ملحق الإجابات 185A

مخطط الفصل

الفصل 5

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (9)

	الدرس 5-1 (3) حصص	الدرس 5-2 (4) حصص	الدرس 5-3 (4) حصص
العنوان	**مقدمة في المتجهات**	**المتجهات في المستوى الإحداثي**	**الضرب الداخلي**
الأهداف	• إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم وتمثيلها هندسيًا. • تحليل المتجه إلى مركبتَيه المتعامدتين. • حل مسائل تطبيقية على المتجهات .	• إجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وتمثيلها بيانيًا. • كتابة المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.	• إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين واستعماله في إيجاد الزاوية بينهما. • إيجاد مسقط متجهٍ على آخر.
المفردات الأساسية	المتجه، نقطة البداية، نقطة النهاية، الوضع القياسي، الاتجاه، الطول، الاتجاه الربعي، الاتجاه الحقيقي، المتجهات المتوازية، المتجهات المتكافئة، المتجهان المتعاكسان، المحصلة، قاعدة المثلث، قاعدة متوازي الأضلاع، المتجه الصفري، المركبات، المركبات المتعامدة.	الصورة الإحداثية، متجه الوحدة، توافق خطّي	الضرب الداخلي، المتجهان المتعامدان، مسقط متجه، الشغل
تمثيلات متعددة	ص (16)		
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6,7) دون • تدريبات حل المسألة، ص (8) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (9) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (4) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (10, 11) دون • تدريبات حل المسألة، ص (12) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (13) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (5) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (14, 15) دون • تدريبات حل المسألة، ص (16) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (17) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (6) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	مدونة	تسجيل مرئي	الكاميرا التوثيقية
تنويع التعليم	ص (14 , 17)	ص (19 , 22 , 24)	ص (29, 31)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (32)

المفاتيح: ضمن ضمن المستوى دون دون المستوى فوق فوق المستوى

المتجهات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(19) حصة	(4) حصص	(23) حصة

الدرس 5-4 (4) حصص	الدرس 5-5 (4) حصص
المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد	**الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء**
• تعيين النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد. • التعبير عن المتجهات جبريًا، وإجراء العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.	• إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين، والزاوية بينهما في الفضاء. • إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهات، واستعماله في إيجاد المساحات والحجوم .
نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد المحور Z الثُّمن الثلاثي المرتب	الضرب الاتجاهي متوازي السطوح الضرب القياسي الثلاثي
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (18, 19) دون • تدريبات حل المسألة، ص (20) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (21) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (7) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (22, 23) دون • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (8) دون ضمن فوق
• السبورة التفاعلية	• نظام استجابة الطالب
ص (35, 36, 38)	ص (41, 43)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (44–48)
- اختبار الفصل، ص (49)

الفصل 5 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 5**	
	التهيئة للفصل 5 ، ص (9)	مخطط المعالجة، ص (9)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (11, 12)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (32)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	اختبار منتصف الفصل، ص (13)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (44-48)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	اختبار الفصل، ص (49)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 5**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (15-20)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (21 , 22)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (14)	
	اختبار الفصل ذو الإجابات المطولة ، ص (23)	
	اختبار تراكمي ، ص (24-26)	
	www.obeikaneducation.com	

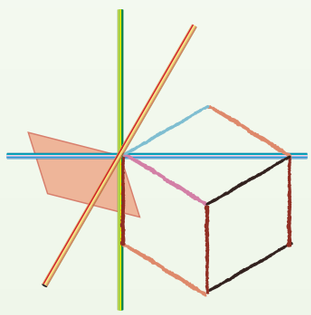
كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون وزِّع الطلاب مجموعات ثلاثية، بحيث يكتب أحد الطلاب الصورة الإحداثية لمتجهَين، ثم يمثل الطالب الثاني هذين المتجهَين في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي، ويجد الطالب الثالث الضرب الداخلي للمتجهَين؛ للتحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا، ثم تقارن المجموعة الرسم بناتج الضرب الداخلي.

المتعلمون الحركيون اطلب إلى مجموعات الطلاب عمل نموذج للنظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد باستعمال ماصَّات العصير والغراء أو المعجون، ثم اطلب إليهم تحديد الأثمان التي ينقسم إليها الفضاء، وأن يستعملوا صفحة من دفترٍ لتمثيل مستوى، واستعمال عيدان القش أو الكبريت لتمثيل متوازي السطوح.



البديل 2 دون المتوسط دون

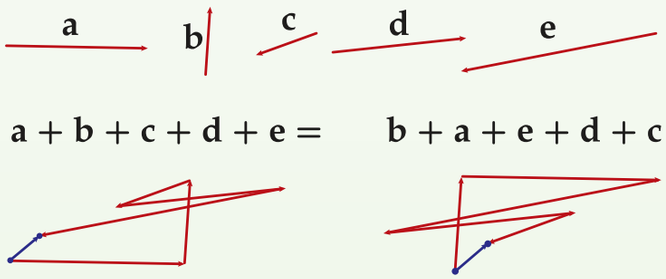
يعتبر وزن الجسم من القوى التي يسهل قياسها، وتؤثر لأسفل. اطلب إلى الطلاب إيجاد وزن جسم من داخل الصف، ثم اطرح السؤال الآتي: ما دور الجاذبية الأرضية في تحديد الوزن؟ **إجابة ممكنة: يُعَرّف الوزن على أنه القوة المؤثرة لأسفل بسبب الجاذبية الأرضية.** اطلب إلى الطلاب البحث في الإنترنت حول أثر الجاذبية في القمر أو الكواكب الأخرى. واستعمال ما توصلوا إليه لحساب أوزانهم على هذه الكواكب.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى مجموعات الطلاب اختيار مقياس رسم، ورسم خمسة متجهات مختلفة وتسميتها بالحروف من **a** إلى **e**، ثم يقوم كل فرد في المجموعة بجمع المتجهات بترتيب يختلف عن ترتيب زميله، وتمثيل الجمع بالرسم مُستعمِلين قاعدة وضع نقطة بداية المتجه الثاني على نقطة نهاية المتجه الأول (قاعدة المثلث).

اطلب إلى الطلاب استعمال منقلة ومسطرة ومقياس الرسم؛ لإيجاد مقدار واتجاه المحصلة، ثم يقارن الطلاب النتائج التي حصلوا عليها، ثم اطلب إلى مجموعات الطلاب كتابة تقريرٍ عن ذلك فمثلًا:

المقياس 1 cm : 3 km



سيتوصل الطلاب إلى أن الترتيب غير مهم عند جمع المتجهات؛ أي أن محصلة جمع المتجهات تكون هي نفسها، بغضّ النظر عن الترتيب الذي جمعت فيه هذه المتجهات.

الفصل 5 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 5

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال قانون الجيوب لحل المثلثات.
- جمع، وطرح، وضرب المصفوفات، وضرب المصفوفة في عدد ثابتٍ.
- إيجاد محددات المصفوفات من الرتبة 2×2 ، ومن الرتبة 3×3.

الفصل 5

- إجراء العمليات على المتجهات، وتمثيلها هندسيًّا وجبريًّا.
- تحليل المتجهات إلى مركبتيها المتعامدتين.
- كتابة المتجه في صورة توافق خطّي باستعمال متجهي الوحدة.
- إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين واستعماله؛ لإيجاد الزاوية بينهما.
- إيجاد مسقط متجه على متجه آخر.
- إجراء العمليات على المتجهات وتمثيلها في الفضاء .
- إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين، واستعماله في إيجاد الزاوية بينهما في الفضاء.
- إيجاد الضرب الإتجاهي واستعماله في إيجاد مساحة متوازي الأضلاع، وحجم متوازي السطوح في الفضاء.

ما بعد الفصل 5

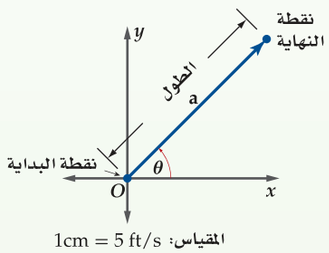
الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- التعبير عن الأعداد المركبة بالصورة الديكارتية، وتمثيلها بيانيًّا في مستوى آرجاند.
- يتعرف مفهومَي متوسط السرعة المتجهة، والسرعة المتجهة اللحظية، ويجدهما.

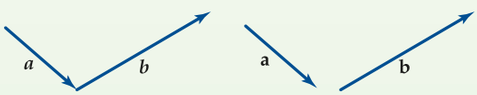
نظرة على الدروس

5-1 مقدمة في المتجهات

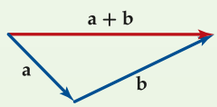
- يمكنك تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعة مستقيمة متجهة لها نقطة بداية ونقطة نهاية.
- يكون المتجه في الوضع القياسي، إذا كانت نقطة بدايته هي نقطة الأصل كما في الشكل أدناه.



- يمكنك جمع متجهَين أو أكثر معًا؛ لتكوين متجه واحد يُسمى المحصلة.
- المتجهات التي محصلتها المتجه **r** تسمى مركبات **r**.
- لإيجاد محصلة المتجهَين **a** و **b** ، ارسم المتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a**.



- فتكون المحصلة هي المتجه ذا اللون الأحمر **a** + **b**.

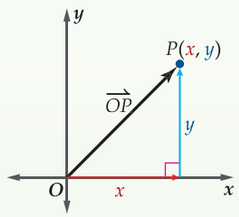


- كذلك يمكنك ضرب المتجه في عدد حقيقي، فمثلًا لتمثيل المتجه 3**a**، ارسم متجهًا طوله 3 أمثال طول المتجه **a** وفي نفس اتجاهه. أما لتمثيل المتجه −3**a** ، فارسم متجهًا طوله 3 أمثال طول المتجه **a** وبعكس اتجاهه.

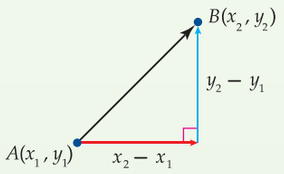
المتجهات

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

- الصورة الإحداثية لمتجه أو المتجه الجبري $\langle x, y \rangle$، هي طريقة أخرى للتعبير عن المتجه الهندسي $\overrightarrow{OP}$، عندما يكون في وضع قياسي.
- الزاوية θ المحصورة بين المحور x الموجب والمتجه تسمى الزاوية المتجهة، وهي التي تحدد اتجاه المتجه.



- لإيجاد الصورة الإحداثية للمتجه AB عندما لا يكون في الوضع القياسي، استعمل إحداثيَّي نقطتَي نهايته وبدايته:
$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.
- طول $\overrightarrow{AB}$ هو $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



- إن عمليات الجمع، والطرح، والضرب في عدد ثابت على المتجهات، تشبه العمليات المقابلة لها على المصفوفات، ويكون ناتج كلٍّ منها متجهًا.
- ناتج الجمع $ai + bj$ هو توافق خطّي باستعمال متجهَي الوحدة i, j.

5-3 الضرب الداخلي

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهَين $a = \langle a_1, a_2 \rangle, b = \langle b_1, b_2 \rangle$ على الصورة $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.
- ناتج الضرب الداخلي لمتجهَين هو عدد وليس متجهًا.
- إذا كان ناتج الضرب الداخلي لمتجهَين هو 0، فإن المتجهَين متعامدان.
- يمكن استعمال تحليل المتجهات لإيجاد قوةٍ، وحساب الشغل الناتج عن قوة.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد يتكون ممّا يأتي:

- المحاور x, y, z.
- ثماني مناطق تُسمى أثمانًا.

تُمثَّل النقطة في الفضاء بثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية (x, y, z).
إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين في الفضاء، فإن:

- المسافة بين النقطتين A, B تُعطى بالقانون:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي النقطة
$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$، حيث (x_1, y_1, z_1) نقطة نهايته.
الصورة الإحداثية للمتجه AB في الوضع غير القياسي الذي نقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ ونقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ هي
$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$.

5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهَين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء على الصورة $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
- إذا كان الضرب الداخلي لمتجهَين يساوي 0، فإن المتجهَين متعامدان.
- الضرب الاتجاهي للمتجهَين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء هو:
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$،
حيث $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.
- مقدار الضرب الاتجاهي لمتجهَين في الفضاء يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي يمثل المتجهان ضلعين متجاورين فيه.
- إذا التقت نقاط بداية ثلاثة متجهات في نقطة واحدة، وكانت المتجهات تقع في مستوياتٍ مختلفةٍ، فإنها تشكل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي سطوح، والقيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي للمتجهات الثلاثة تمثل حجم متوازي السطوح.

الفصل 5 المتجهات Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية، الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهَي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا؟

رياضة: تستعمل المتجهات لنمذجة مواقف حياتية، فمثلًا يمكن استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما ستتعلَّمه في هذا الفصل .

مشروع الفصل

رمي الرمح

- اطلب إلى كل طالب تحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية قياسها 20° مع الأفقي.
- اطلب إلى الطلاب كتابة تخميناتهم حول محصلة سرعة واتجاه حركة الرمح، إذا زاد قياس الزاوية.
- اطلب إليهم التحقق من صحة تخميناتهم باستعمال الزوايا: 30°, 40°, 50°, 60°, 70° .

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

التعريف: الثُّمُن هو أحد ثمانية مناطق في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.

مثال: إذا نظرت إلى أحد أركان غرفةٍ، فإن الأرض تمثل المستوى xy في الثُّمُن الأول.

سؤال: لماذا تعتقد أن أرض الغرفة تقع في المستوى xy؟ لأن المحورين اللذين يشكلان ضلعين متجاورين لأرض الغرفة هما المحوران x ، y.

قراءة سابقة

شَجِّع الطلاب على الإعداد المُسبق لكل درسٍ بطريقةٍ جيدةٍ، تتم من خلال قراءته قراءةً سريعةً مرة، وقراءةً متأنية مرةً أخرى، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، ثم اطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعُب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 5

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّ نقطةٍ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. **1–4)** انظر الهامش

1) $(1, 4), (-2, 4)$

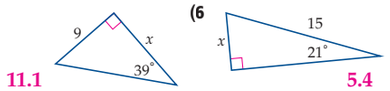
2) $(-5, 3), (-5, 8)$

3) $(2, -9), (-3, -7)$

4) $(-4, -1), (-6, -8)$

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

5)

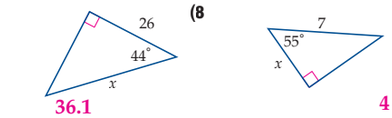


5.4

6)

11.1

7)



4

8)

36.1

9) بالون: أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض 40°، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة. 22.8 ft

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب "لا يوجد حَلّ" مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. **10–12)** انظر الهامش

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$

11) $a = 15, b = 16, A = 127°$

12) $a = 15, b = 18, A = 52°$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي (Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي (Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

إذا كان $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$، فإن إحداثيَّي نقطة منتصف $\overline{AB}$:

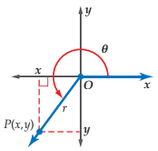
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

النسبة المثلثية (Trigonometric Ratio)

نسبة تقارن بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (Trigonometric Functions of Angels)

لتكن θ زاويةً مرسومةً في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:



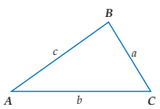
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

قانون جيوب التمام (Law of Cosines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



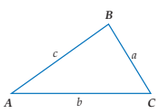
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

قانون الجيوب (Law of Sines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كلٍّ منها في أثناء دراستهم الفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا... فقم" التي في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بمراجعة الطلاب في: إيجاد طول قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي وتحديد إحداثيات منتصفها، والدوال المثلثية في المثلث القائم الزاوية، وحل المثلث.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

1) $3, \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

2) $5, \left(-5, \frac{11}{2}\right)$

3) $\sqrt{29}, \left(-\frac{1}{2}, -8\right)$

4) $\sqrt{53}, \left(-5, -\frac{9}{2}\right)$

10) $B \approx 33°, C \approx 19°, c \approx 4$

11) لا يوجد حل.

12) يوجد حلّان

$B \approx 71°, C \approx 57°, c \approx 16$

$B \approx 109°, C \approx 19°, c \approx 6.2$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

حل المثلث باستعمال حساب المثلثات.

الدرس 5-1

- إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وتمثيلها هندسيًّا.
- تحليل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- حل مسائل تطبيقية على المتجهات.

ما بعد الدرس 5-1

تمثيل المتجهات و إجراء العمليات الجبرية عليها.

كتابة المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إذا تم ركل كرة، فما الشيئآن اللذان تحتاجهما لتحديد موقع الكرة؟ سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها.
- ارسم مستطيلًا. وتخيّل أنك تركل كرة قدم من الزاوية السفلى اليسرى للمستطيل. ارسم سهمًا من الزاوية إلى الموقع الذي ستقف عنده الكرة.

- إذا ضُربت الكرة بقوة أكبر، فكيف سترسم السهم؟ إجابة ممكنة : أرسم سهمًا أطول .

مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

فيما سبق:
درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثّلها هندسيًّا .
- أحلل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- أحلُّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية) solar quantity
متجه vector
الكمية المتجهة vector quantity
نقطة البداية initial point
نقطة النهاية terminal point
قطعة مستقيمة متجهة directed line segment
الوضع القياسي standard position
اتجاه المتجه direction
طول المتجه (المقدار) magnitude
الاتجاه الربعي quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي true bearing
المتجهات المتوازية parallel vectors
المتجهات المتساوية equal vectors
المتجهان المتعاكسان opposite vectors
المحصلة resultant
قاعدة المثلث triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع parallelogram method
المتجه الصفري zero vector
المركبات components
المركبات المتعامدة rectangular components

www.obeikaneducation.com

لماذا ؟

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كميةً متجهةً**.

مثال 1 تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.
بما أن لهذه الكمية اتجاهًا، إذن هي كميةٌ متجهةٌ.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.
بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min ، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .
بما أن لهذه الكمية قيمة وهي 20 km ، وليس لها اتجاه؛ إذن هذه المسافة كمية قياسية.

تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

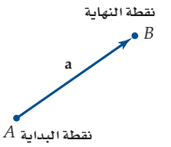
1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي. كمية متجهة

1B) هبوط مظلّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h . كمية متجهة

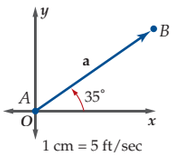
1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm . كمية قياسية

المتجهات:

يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه **(قطعة مستقيمة متجهة)**، أو سهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز |**a**| ، يساوي 5 × 2.6 أو 13 ft/s .



يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو 35° .

مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (14)	• تنويع التعليم ص (14)	• تنويع التعليم ص (17)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 7) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

المتجهات

المثال 1 يُبيّن كيفية تمييز الكميات المتجهة.

المثال 2 يُبيّن كيفية تمثيل المتجه هندسيًّا.

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًّا.

المثال 4 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يركل لاعب كرة قدم بسرعة 60 mi/h في اتجاه شمال غرب. متجهة

b) يحمل محمد حقيبة كتلتها 20 kg. قياسية

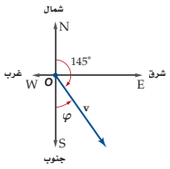
c) يركض لاعب مسافة 100 m شمالًا. متجهة

2 استعمل مسطرةً ومنقلةً، لرسم متجهٍ لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة: للفروع **a-c** انظر الهامش

a) $\mathbf{v} = 10\,\text{N}$ بزاويةٍ قياسها $30°$ مع المستوى الأفقي.

b) $\mathbf{z} = 25\,\text{m/s}$ باتجاه S70° W

c) $\mathbf{t} = 10\,\text{mi/h}$ باتجاه $025°$.



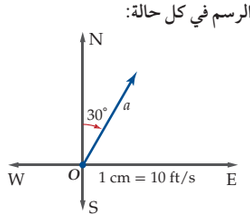
ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي 35° جنوب شرق، وتُكتب S 35° E .

كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة 025° .

مثال 2 تمثيل المتجه هندسيًّا

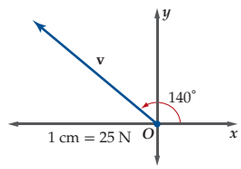
استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

a) $\mathbf{a} = 20\,\text{ft/s}$ باتجاه 030° .



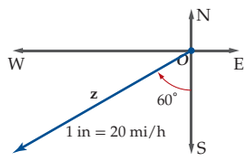
استعمل مقياس الرسم $1\,\text{cm} = 10\,\text{ft/s}$ ، وارسم سهمًا طوله $20 \div 10$ ، أو 2 cm بزاوية قياسها 30° من الشمال، وفي اتجاه عقارب الساعة.

b) $\mathbf{v} = 75\,\text{N}$ ، بزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الأفقي.



استعمل مقياس الرسم $1\,\text{cm} = 25\,\text{N}$ ، وارسم سهمًا طوله $75 \div 25$ ، أو 3 cm في الوضع القياسي، وبزاويةٍ قياسها 140° مع الاتجاه الموجب للمحور x .

c) $\mathbf{z} = 30\,\text{mi/h}$ ، باتجاه S 60° W .



استعمل مقياس الرسم $1\,\text{in} = 20\,\text{mi}$ / h ، وارسم سهمًا طوله $20 \div 30 = 1.5\,\text{in}$ ، بزاوية قياسها 60° في اتجاه جنوب غرب .

تحقق من فهمك

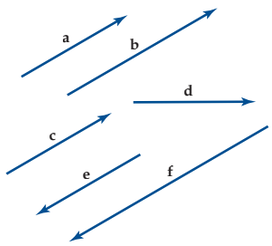
استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20\,\text{ft/s}$ ، باتجاه 065° . **2A–C** انظر ملحق الإجابات

2B) $\mathbf{u} = 15\,\text{mi/h}$ ، باتجاه S 25° E .

2C) $\mathbf{m} = 60\,\text{N}$ ، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي.

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور . $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاههما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه **a** على الصورة $-\mathbf{a}$ ، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي

إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي 145° .

إرشادات للدراسة

النيوتن

وحدةُ لقياس القوّة، ويرمز له بالحرف N، وهو عبارة عن القوّة التي تؤثر في جسم كتلته 1 kg؛ لتكسبه تسارعًا مقداره $1\,\text{m/s}^2$.

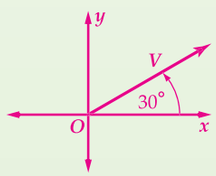
تنبيه!

الطول

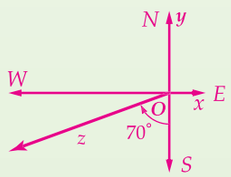
يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثل المسافة المقطوعة .

إجابة (المثال الإضافي 2):

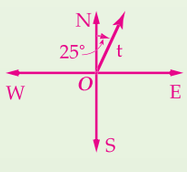
2a) 1 cm : 5 N



2b) 1 cm = 10 m/s



2c) 1 cm = 10 mi/h

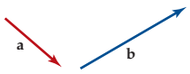


عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، ويسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

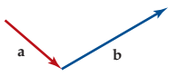
مفهوم أساسي إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث

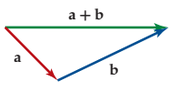
لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b** ، اتّبع الخطوتين الآتيتين:



الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a** .

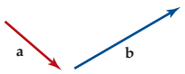


الخطوة 2 محصلة المتجهين **a , b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b** .



قاعدة متوازي الأضلاع

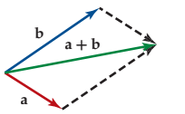
لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b** ، اتّبع الخطوات الآتية :



الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a** .

الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a , b** .

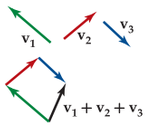
الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثله قطر متوازي الأضلاع .



إرشادات للدراسة

المحصلة

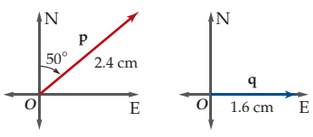
لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.



مثال 3 من واقع الحياة إيجاد محصلة متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة **120 m** باتجاه **N 50° E** ، ثم مسافة **80 m** في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

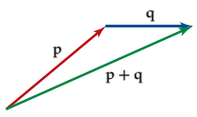
افترض أن المتجه **p** يمثّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E ، وأن المتجه **q** يمثّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثّل **p , q** باستعمال مقياس الرسم 1 cm = 50 m .



استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله 120 ÷ 50 = 2.4 cm ؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شمال شرق؛ ليُمثّل المتجه **p** ، وارسم سهمًا آخر طوله 80 ÷ 50 = 1.6 cm في اتجاه الشرق؛ ليُمثّل المتجه **q**.

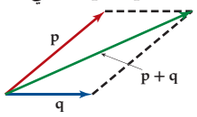
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p** ، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.

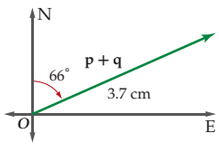


الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثّل المحصلة **p + q** ، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي كما في الشكل المجاور.



تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثّل 3.7 × 50 = 185 m . وعليه يكون عبد الله على بعد 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E .

مثال إضافي

3 **نزهة:** قام فيصل بنزهة مشيًا على الأقدام خارج مخيمه الكشفي، فسار مسافة 2 km من المخيم باتجاه N 30° W ، ثم سار مسافة 2 km باتجاه الشرق. كم يبعد فيصلٌ عن مخيمه الكشفي، وفي أي اتجاهٍ يكون؟ 2 km, N 30° E

إرشادات للمعلم الجديد

أشكال عند حل الأمثلة، من المهم أن يبدأ الطلاب برسم أشكال دقيقة. شجع الطلاب على استعمال ورق الرسم البياني، والتحقق من معقولية إجاباتهم من خلال الأشكال.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية؛ لعمل مدونة عن الطرائق التي يستعملونها في إيجاد محصلة متجهين. ثم اطلب إليهم أن يراجع بعضهم أوراق بعض، وأن يعدّلوها في أثناء بناء المدونة.

المحتوى الرياضي

جمع المتجهات وطرحها

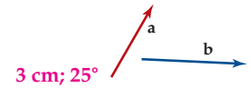
لاحظ أن قاعدة متوازي الأضلاع تستعمل كذلك لطرح المتجهات، فعند جمع متجهين، يكون ناتج الجمع هو قطر متوازي الأضلاع المرتبط بالمتجهين، أما عند طرح متجهَين، فإن ناتج الطرح هو القطر الآخر لمتوازي الأضلاع هذا.

تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(3A)

(3B)



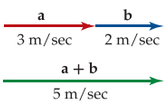
(3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة 7 in/s، باتجاه 310°، فارتدت باتجاه 055°، وبسرعة 4 in/s. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.

(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة) **7 in/s; 343°**

إرشادات للدراسة

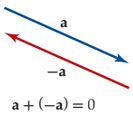
المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$، وطوله صفر، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.

و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.



مفهوم أساسي — ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

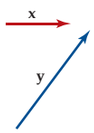
قراءة الرياضيات

$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

$|v|$ تمثل طول المتجه v.

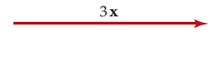
مـثال 4 — العمليات على المتجهات

ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$، حيث $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.



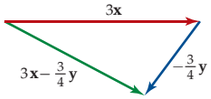
أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$، ثم مثّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل 5.1.1 .

ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل 5.1.2، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل 5.1.3 .



الشكل 5.1.1

الشكل 5.1.2

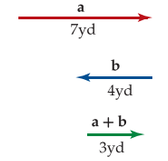


الشكل 5.1.3

إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان

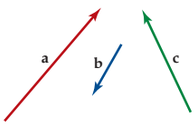
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.



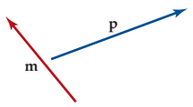
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي : **(4A–B) انظر الهامش**

(4A) $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$

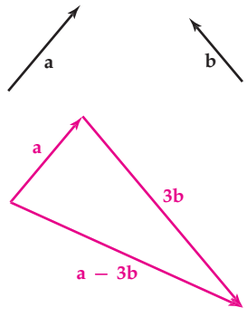


(4B) $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



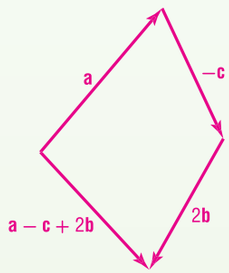
مثال إضافي

4 ارسم المتجه $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$، حيث $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ متجهان كما في الشكل أدناه.

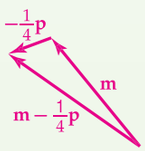


إجابة (تحقق من فهمك):

(4A)



(4B)



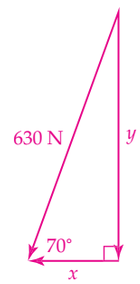
تطبيقات المتجهات

المثال 5 يُبيّن كيفية تحليل قوةٍ إلى مركبتين متعامدتين.

مثال إضافي

5 حدائق: يدفع عبد الله مجرفةً في أرض حديقته المنزلية بقوةٍ مقدارها 630 N وبزاويةٍ قياسها 70° مع الأرض.

a) ارسم شكلًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها عبد الله إلى مركبتين متعامدتين.

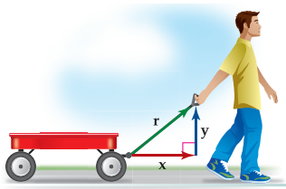


b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

المركبة الأفقية تساوي 215.47 N تقريبًا.

المركبة الرأسية تساوي 592.01 N تقريبًا.

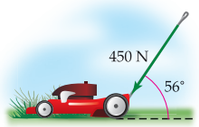
تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه r ، **مركبتي** r . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين**، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.



مثال 5 من واقع الحياة

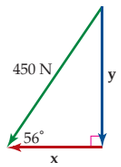
تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها 56° مع سطح الأرض.



a) ارسم شكلًا يوضّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين؛ أفقية x إلى الأمام ورأسية y إلى أسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

تكوّن كلٌّ من القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{|x|}{450}$ تعريف الجيب، وجيب التمام $\sin 56° = \frac{|y|}{450}$

$|x| = 450 \cos 56°$ حُل بالنسبة إلى x ، y $|y| = 450 \sin 56°$

$|x| \approx 252$ استعمل الآلة الحاسبة $|y| \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

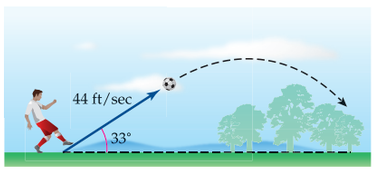
الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N . والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .

المصدر: Contemporary College Physics

تحقق من فهمك

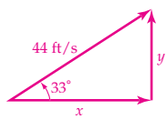
5) كرة قدم: يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

(5A)



(5B) المركبة الأفقية تساوي 36.90 ft/s تقريبًا؛ المركبة الرأسية تساوي 23.96 ft/s تقريبًا

تنويع التعليم

دون ضمن

المواد لعبة على شكل قارب صغير له شراع متحرك، بركة ماء، مروحة مكتب.

المتعلّمون الحركيون تستعمل المتجهات في الغالب لوصف القوى، وإيجاد المحصلة في مواقف من واقع الحياة. اطلب إلى الطلاب توقع أثر الرياح في قارب، وذلك بوضع لعبة القارب الصغير في حوض ماء، واستعمال مروحة مكتب مصدرًا للرياح. حافظ على سرعة الرياح والمسافة بين المروحة والقارب ليظلّا ثابتين. ضع القارب بحيث يكون في وضع يعامد حركة الرياح، واطلب إلى الطلاب وضع عدة توقعات واختبارها؛ بناءً على موقع القارب وأثر قوة الرياح في القارب.

تدرب وحل المسائل

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي: (مثال 1)

1) طول محمد 125 cm . قياسية

2) مساحة مربع $20\ m^2$. قياسية

3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب. متجهة

4) المسافة التي قطعتها كرة قدم 5 m . قياسية

5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل. متجهة

6) رمي حجر رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 50 ft/s . متجهة

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. (مثال 2)

7) $\mathbf{h} = 13$ in/s ، باتجاه 205°

8) $\mathbf{g} = 6$ km/h ، باتجاه N 70° W

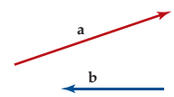
9) $\mathbf{j} = 5$ ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 300° مع الأفقي.

10) $\mathbf{d} = 28$ km ، وبزاويةٍ قياسها 35° مع الأفقي.

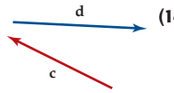
11) $\mathbf{R} = 40$ m ، باتجاه S 55° E

12) $\mathbf{n} = 32$ m/s ، باتجاه 030°

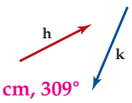
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة: (مثال 3)

13) 

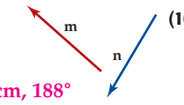
1.4 cm, 45°

14) 

1 cm ، 60° تقريبًا

15) 

1.1 cm, 309°

16) 

2.3 cm, 188°

17) **ركوب الزوارق:** غادر زورق أحد الموانئ باتجاه N 60° W ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًّا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى N 25° E ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًّا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. (مثال 3)

20 ميلًا بحريًّا، N 12° W تقريبًا

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

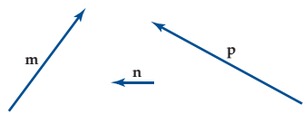
18) 18 N للأمام، ثم 20 N للخلف. 2N للخلف

19) 100 m للشمال، ثم 350 m للجنوب . 250 m للجنوب

20) 17 mi شرقًا، ثم 16 mi جنوبًا. 23 mi تقريبًا باتجاه S 47° E

21) $15\ m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها 60° مع الأفقي، ثم $9.8\ m/s^2$ إلى الأسفل. $8\ m/s^2$ تقريبًا، 23° مع الأفقي

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل عبارة مما يأتي: (مثال 4) 22-25) انظر ملحق الإجابات



22) $\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$

23) $4\mathbf{n} + \frac{4}{5}\mathbf{p}$

24) $\mathbf{p} + 2\mathbf{n} - 2\mathbf{m}$

25) $\mathbf{m} - 3\mathbf{n} + \frac{1}{4}\mathbf{p}$

ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتَيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. (مثال 5) 26-28) انظر الهامش

26) $2\frac{1}{8}$ in/s ، باتجاه 310° مع الأفقي.

27) 1.5 cm ، باتجاه N 49° E.

28) $\frac{3}{4}$ in/min ، باتجاه 255° .

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–29، 42–44، 46–52
ضمن ضمن المتوسط	1–41 (فردي)، 42–44، 46–52
فوق فوق المتوسط	30–52

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-29؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

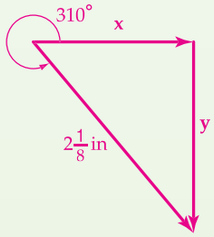
المسطرة والمنقلة يحتاج الطلاب إلى المسطرة والمنقلة في كثيرٍ من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

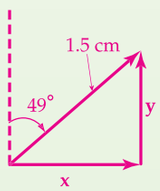
أخطاء شائعة قد لا يستعمل الطلاب الزاوية الصحيحة عندما يُعطى الاتجاه الحقيقي للمتجه؛ لذا ذكّر الطلاب بأن الاتجاه الحقيقي يُعبَّر عنه بزوايا مَقِيسة مع عقارب الساعة من الشمال.

إجابات:

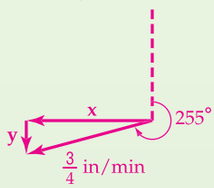
26) مقدار المركبة الرأسية 1.63 in/s تقريبًا
مقدار المركبة الرأسية 1.37 in/s تقريبًا



27) 1.13 cm, 0.98 cm



28) 0.72 in/min, 0.19 in/min



تمثيلات متعددة

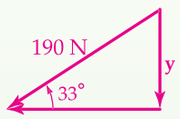
في السؤال 31 يستعمل الطلاب التمثيل البياني والجداول؛ لاستقصاء ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ.

تنبيه!

أخطاء شائعة في السؤال 29 قد لا يستعمل الطلاب خاصيتي نسب الجيب وجيب التمام؛ لذا راجع تعريف كل نسبةٍ منهما في المثلث القائم الزاوية.

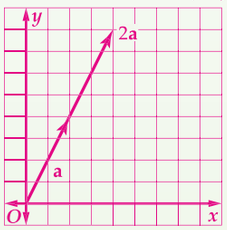
إجابات:

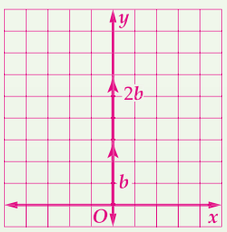
29a)

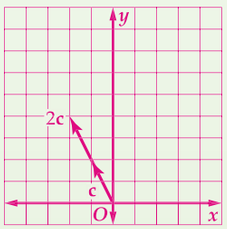


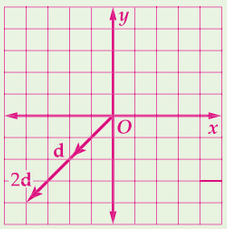
1 cm = 50 N

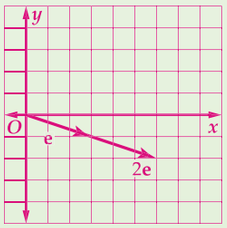
31a) إجابة ممكنة:











29) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 5)**

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين. **انظر الهامش**

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.
مقدار المركبة الأفقية: 159.3 N؛ مقدار المركبة الرأسية: 103.5 N

30) **لعب أطفال:** يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N، وباتجاه 31° مع الأفقي، أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح. **52 N تقريبًا**

31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي ضرب متجه في عدد حقيقي.

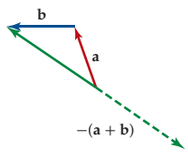
a) **بيانيًا:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لِـ k ، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية مع أربعة متجهات أخرى **b, c, d, e** ، واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة. **انظر الهامش.**

b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا في العدد k
a	(2, 4)	(4, 8)
b	(0, 3)	(0, 6)
c	(−1, 2)	(−2, 4)
d	(−2, −2)	(−4, −4)
e	(3, −1)	(6, −2)

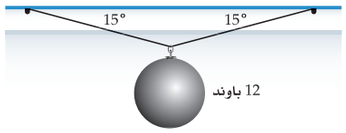
c) **تحليليًّا:** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a** ، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه k**a**؟ (ka, kb)

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري، والمتجه الموازن للمتجه **a + b** هو **−(a + b)**



32) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:
$\mathbf{a} = 15$ mi/h ، باتجاه 125°
$\mathbf{b} = 12$ mi/h ، باتجاه 045° **20.77 mi / h باتجاه 270°**

33) **كرة حديدية:** عُلِّقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه. **33a, b) انظر ملحق الإجابات**



a) إذا كانت $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ تُمثّلان قوتَي الشدِّ في الحبلين، وكانت $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2}$ ، فارسم شكلًا يُمثّل وضع التوازن للكرة.

b) أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$

c) استعمل الشكل في الفقرة **b** وحقيقة أن محصلة $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$
$\mathbf{T_1} \approx 23.18$ lb, $\mathbf{T_2} \approx 23.18$ lb

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتَيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كلٍّ منها:

34) الأفقية 0.32 in ، الرأسية 2.28 in ، $90° < \theta < 180°$.
2.3 in.; 98° تقريبًا

35) الأفقية 3.1 ft ، الرأسية 4.2 ft ، $0° < \theta < 90°$.
5.3 ft; 54° تقريبًا

36) الأفقية 2.6 cm ، الرأسية 9.7 cm ، $270° < \theta < 360°$.
10 cm; 285° تقريبًا

ارسم ثلاثة متجهات a, b, c ؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًّا: **37-39) انظر ملحق الإجابات**

37) الخاصية الإبدالية $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

38) الخاصية التجميعية $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

39) الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ ، حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **مسألة مفتوحة:** لديك متجه مقداره 5 وحدات بالاتجاه الموجب لمحور x، حلّل المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيٌّ منهما أفقية أو رأسية. انظر ملحق الإجابات

41) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا، وبرّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع". انظر الهامش

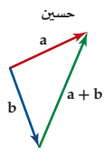
42) **تبرير:** بفرض أن: $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

a) عبّر عن هذه العبارة بالكلمات. **a-b)** انظر الهامش

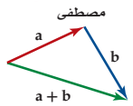
b) هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ برّر إجابتك.

43) **اكتشف الخطأ:** حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.
انظر ملحق الإجابات

حسين



مصطفى



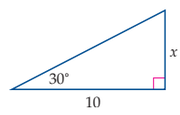
44) **تبرير:** هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساويًا لأحدهما؟ برّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

45) **اكتب:** قارن بين قاعدتَي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

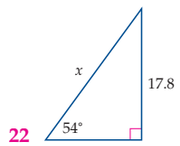
أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك. (مهارة سابقة)

46)



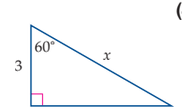
5.8

47)



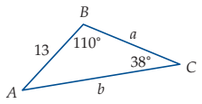
22

48)



6

49) حُلّ المثلث الآتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك.
(مهارة سابقة) **49, 50)** انظر ملحق الإجابات

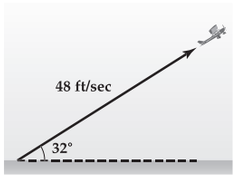


50) حُلّ المعادلة: $\sin 2x - \cos x = 0$ لجميع قيم x. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

51) **نزهة:** قام حسان بنزهة خارج مخيمه الكشفي، فقطع مسافة 3.75 km في اتجاه الشرق من المخيم حتى وصل أحد المساجد، ثم سار شمالًا قاصدًا حديقةً عامةً، فقطع مسافة 5.6 km، حدّد موقع الحديقة بالنسبة للمخيم؟ 6.74 km باتجاه 56.2° تقريبًا مع الأفقي

52) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟ B



A 25.4 ft/s, 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s, 25.4 ft/s

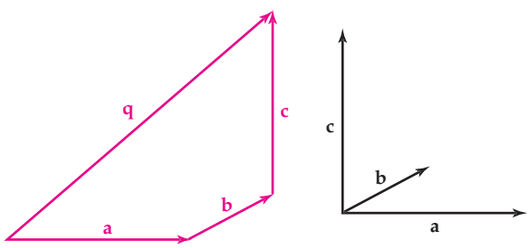
C 56.6 ft/s, 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s, 56.6 ft/s

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب حل المسألة الآتية:
إذا كان لديك ثلاث قوى متجهة a, b , c تؤثر في نقطة. فطوّر استراتيجية؛ لإيجاد المتجه q الذي يمثل محصلة هذه القوى.



تنبيه!

اكتشف الخطأ في السؤال 43، ذكّر الطلاب بدراسة الرسوم بدقةٍ، عند اختيار قاعدة إيجاد محصلة متجهَين (المثلث أو متوازي الأضلاع)، إذ من المهم أن توضع نقاط البداية والنهاية بشكلٍ صحيحٍ.

4 التقويم

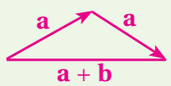
فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب شرح طريقة جمع وطرح متجهين موضحة بالأشكال.

إجابات:

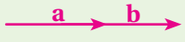
41) ليست صحيحة أبدًا، إجابة ممكنة: إذا توازى متجهان، فإنهما يكونان في الاتجاه نفسه أو في اتجاهين متعاكسين. أمّا إذا وُضع المتجهان بحيث تتطابق نقطتا بدايتيهما، فعندها لا توجد زاوية بين المتجهين تسمح بتكوين متوازي أضلاع.

42a) مجموع طولَي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ أكبر من أو يساوي طول محصلة المتجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

42b) صحيحة، إجابة ممكنة:
يوجد ثلاث حالات
الحالة الأولى: المتجهان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ليسا على استقامة واحدة، وبذلك يكون متجه المحصلة $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ضلعًا ثالثًا في مثلث ضلعاه المتجهان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ كما هو مبين بالشكل



ومن المعروف أن طول أي ضلع في المثلث أصغر من مجموع طولَي الضلعين الآخرين إذن:
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
الحالة الثانية: المتجهان على استقامة واحدة وفي اتجاهٍ واحدٍ.



إذن يكون: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
الحالة الثالثة: المتجهان على استقامة واحدة وفي اتجاهين متعاكسين

وفي هذه الحالة يكون:
$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
إذن في جميع الحالات:
$|a| + |b| \geq |a + b|$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 5

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-1 تدريبات إعادة التعليم

مقدمة في المتجهات

تمثيل المتجهات: المتجه هو كمية لها مقدار واتجاه، ومقدار المتجه هو طول القطعة المستقيمة المتجهة، واتجاهه هو قياس الزاوية المتجهة بين الاتجاه الموجب للمحور x والمتجه، ويمكن استعمال **قاعدة متوازي الأضلاع** أو **قاعدة المثلث** لجمع المتجهات أو طرحها.

مثال استعمل المسطرة والمنقلة، لرسم متجه لكلٍّ من الكميتين الآتيتين، واكتب عليه مقياس الرسم.

a) قوة مقدارها $F = 60\ N$ بزاوية قياسها $125°$ مع الاتجاه الأفقي.

استعمل مقياس رسم 1 cm : 20 N، وارسم سهمًا طوله $60 \div 20 = 3\ cm$، في وضع قياسي ويصنع زاوية قياسها $125°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x.

b) سرعة مقدارها $V = 55\ mi/h$، باتجاه $S45°E$.

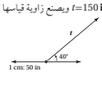
استعمل مقياس رسم 1 cm: 20 mi/h، وارسم سهمًا طوله $55 \div 20 = 2.75\ cm$ ويصنع زاوية قياسها $45°$ في اتجاه جنوب شرق.

تمارين

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميتين الآتيتين، واكتب عليه مقياس الرسم.

1) $r = 30\ m$ باتجاه $45°\ W\ N$.

2) $t = 150\ in$ ويصنع زاوية قياسها $40°$ مع الأفقي.

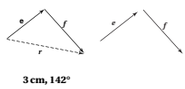


أوجد محصلة كل زوج من المتجهات في السؤالين 3,4، مستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، واكتب مقدار المحصلة بالسنتمترات، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

3)

2 cm, 140°

4)



3 cm, 142°

تدريبات إعادة التعليم (7) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

مقدمة في المتجهات

تطبيقات المتجهات: يمكن تحليل أيّ متجه إلى مركبتين أفقية ورأسية.

مثال يسحب جمال زورقًا صغيرًا مثبتًا بحبل بقوة مقدارها $50\ N$، ويصنع زاوية قياسها $60°$ مع المحور الأفقي.

a) ارسم شكلًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها جمال إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل القوة التي يسحب بها جمال القارب إلى قوة أفقية x إلى الأمام، ورأسية y إلى أعلى، كما في الشكل المجاور.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركّبتين الأفقية والرأسية للقوة.

تكوّن القوة ومركباتها الأفقية والرأسية مثلثًا قائم الزاوية.

استعمل تعريف الجيب وجيب التمام؛ لإيجاد مقدار كلٍّ من المركبتين.

$\sin 60° = \frac{|y|}{50}$ تعريف الجيب وجيب التمام $\cos 60° = \frac{|x|}{50}$

$|y| = 50 \sin 60°$ حُل بالنسبة لـ x و y $|x| = 50 \cos 60°$

$|y| \approx 43.3$ استعمل الآلة الحاسبة $|x| = 25$

مقدار المركبة الأفقية 25 N، ومقدار المركبة الرأسية 43 N تقريبًا.

تمارين

ارسم شكلًا يوضح تحليل كلٍّ من المتجهين إلى مركبتين أفقية ورأسية، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما.

1) $7\ in$ باتجاه $120°$ مع الأفقي.

3.5, 6.1

2) $2.5\ cm/h$ باتجاه $50°\ W\ N$.

1.9, 1.6

3) **شغل**، يسحب علي عربة على سطح مائل يصنع مع الأرض زاوية قياسها $50°$، بقوة مقدارها 25 N، أوجد المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

16.08 N ؛ 19.15 N

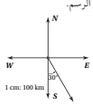
تدريبات حل المسألة (8) — دون | ضمن | فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-1 تدريبات حل المسألة

مقدمة في المتجهات

1) **إبحار**، سار قارب 200 كلم باتجاه $S30°E$، ارسم متجهًا يصف هذه الكمية باستعمال المسطرة والمنقلة، وحدّد مقياس الرسم.



2) **زراعة**، يقوم جرّاران زراعيان بإزالة جذع شجرة على نحو ما هو موضح في الشكل، فيسحب الأول الجذع بقوة مقدارها 2000 N، والثاني بقوة مقدارها 1500 N، وقياس الزاوية بين الجرّارين يساوي $40°$.

a) ما مقدار محصلة جمع المركّبتين الأفقيتين لقوتي الجرارين؟ وما مقدار محصلة جمع المركبتين الرأسيتين لقوتي الجرارين؟

3288.9N ؛171N

b) ما مقدار محصلة القوة المؤثرة في جذع الشجرة؟

3293N

c) إذا بقي قياس الزاوية بين الجرّارين $40°$، فهل سيؤثر تغير قياسي زاويتي الجرّارين مع الأفقي في القوة المحصلة؟ وضح إجابتك.

لا يؤثر؛ إجابة ممكنة؛ إذا استعملت قاعدة المثلث لإيجاد المجموع، فستكون المحصلة في الموقع نفسه، ولا يوجد تأثير لكل من زاويتي اتجاه الجرارين.

3) **سفر**، يسحب سائح حقيبة سفره على أرض المطار بقوة مقدارها 22 N على مقبض الحقيبة التي تصنع زاوية قياسها $72°$ مع الأرض، فما مقدار القوة التي تحرك الحقيبة إلى الأمام؟ إذا قصّر سائح طول المقبض حتى أصبح أقرب إلى الأرض، فما أثر نقصان قياس الزاوية في الحركة؟

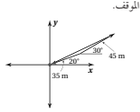
6.8 N؛ تزداد القوة اللازمة مع نقصان الزاوية.

4) **رياضة المشي**، في مسافة المشي على الأقدام، سار سعيد 200 m باتجاه $N\ 70°\ W$، ثم سار 90 m في اتجاه الشرق. فكم مترًا يبعد سعيد عن نقطة البداية؟ وما اتجاهه؟

N55.1° W؛119.5 m

5) **تزلج**، قطع متزلج مسافة 35 مترًا بزاوية قياسها $20°$ مع المحور الأفقي، ثم غير مساره باتجاه $30°$ مع المحور الأفقي فقطع 45 m.

a) ارسم متجهًا باستعمال المسطرة والمنقلة يمثل الموقف.



b) أوجد محصلة المسافة والاتجاه الحركة.

79.7 m بزاوية قياسها $25.6°$ مع المحور الأفقي.

التدريبات الإثرائية (9) — فوق

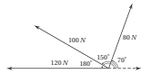
الاسم: _____ التاريخ: _____

5-1 التدريبات الإثرائية

تأثير أكثر من قوتين في جسم

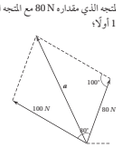
قد تؤثر في جسم ثلاث قوى أو أكثر في وقت واحد، ويمكن تمثيل كل قوة من هذه القوى بمتجه. ولإيجاد متجه المحصلة الذي يؤثر في الجسم، يمكنك جمع كل متجهين معًا.

مثال بناء: يسحب عامل صندوقًا يحتوي على مواد بناء بقوة مقدارها 80 N بزاوية قياسها $70°$ مع الأرض. وفي الوقت نفسه، يسحب عامل آخر الصندوق بقوة 100 N بزاوية قياسها $150°$ مع الأرض، وتؤثر في الصندوق قوة ثالثة مقدارها 120 N بزاوية قياسها $180°$، أوجد مقدار محصلة القوى المؤثرة في الصندوق واتجاهها.



أولًا، اجمع أيّ متجهين من المتجهات، وتذكّر أن ترتيب الاختيار غير مهم عندما تجمع المتجهات.

اجمع المتجه الذي مقداره 80 N مع المتجه الذي مقداره 100 N أولًا؛



والآن، أضف ناتج جمع المتجهين إلى المتجه 120 N؛

فتكون القوة المحصلة 219 N وبزاوية قياسها $145°$ مع الأرض

تمارين

أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها التي تؤثر في كل جسم في السؤالين الآتيين:

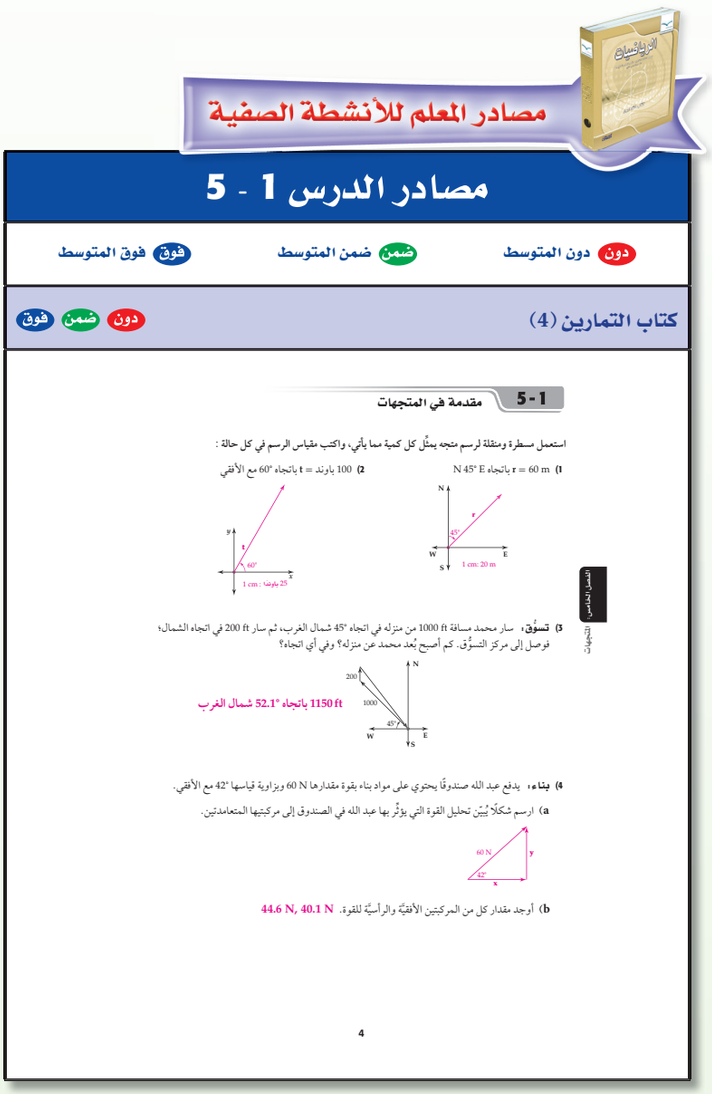
6) **حيوان**، تجر ثلاثة حيوان عربة، يؤثر أحدها في العربة بقوة 40 N بزاوية $50°$ مع الخط الأفقي، ويؤثر الثاني بقوة مقدارها 100 N وبزاوية $110°$ مع الخط الأفقي، والثالث بقوة 10 N وبزاوية $150°$ مع الخط الأفقي، أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها.

98° ؛131 N

7) **إزاحة**، يحاول ثلاثة رجال تحريك أريكة، فيقوم أحدهم بدفعها بقوة 40 N بزاوية $50°$ مع الأرض، ويؤثر فيها الثاني بقوة 100 N بزاوية $110°$، والثالث بقوة 10 N بزاوية $150°$، أوجد مقدار القوة المحصلة واتجاهها.

130.7 N ، قياس الزاوية $97.7°$ مع الأرض

ملحوظات المعلم



ملحوظات المعلم

5-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-2

إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم .

الدرس 5-2

إجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وتمثيلها بيانيًّا. كتابة المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

ما بعد الدرس 5-2

إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين، واستعماله في إيجاد الزاوية بين هذين المتجهين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- كيف تؤثر الرياح العكسية على سرعة الطائرة؟ تعمل الرياح العكسية على تخفيض سرعة الطائرة الفعلية.
- كيف تؤثر الرياح في اتجاه الطائرة وسرعتها؟ تزيد من سرعة الطائرة.
- ما نوع الرياح التي تؤثر في اتجاه حركة الطائرة؟ أيُّ اتجاهٍ للرياح غير اتجاه حركة الطائرة أو عكسه.
- إذا هبَّت رياح جانبيه بزاوية قياسها 90° على اتجاه سير الطائرة، فهل تُخرج هذه الرياح الطائرة عن مسارها بزاوية قياسها 90°؟

لا ؛ لأنه في الوقت الذي تسير فيه الطائرة للأمام، تُدفع إلى اتجاه حركة الرياح، فيصبح خط سيرها، في اتجاه محصلة حركتي الطائرة والرياح، لذلك يتغير مسار الطائرة بزاويةٍ أقل من 90°.

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

Vectors in the Coordinate Plane

فيما سبق:

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم . (الدرس 1–5)

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

المفردات:

الصورة الإحداثية
component form

متجه الوحدة
unit vector

متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors

توافق خطي
linear combination

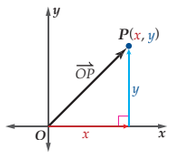
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

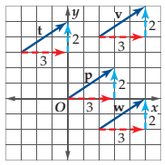
تؤثّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-5 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 5.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y \rangle$ ، حيث إن x , y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y \rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



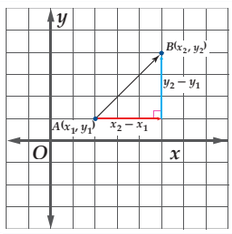
الشكل 5.2.1



الشكل 5.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلًا المتجهات **p, t, v, w** في الشكل 5.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2 \rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسومٍ في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيَي نقطتَي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

مثال 1 التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7 \rangle$ بسّط

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\langle 8, 8 \rangle$ **1B** $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\langle -9, -11 \rangle$

مصادر الدرس 5-2

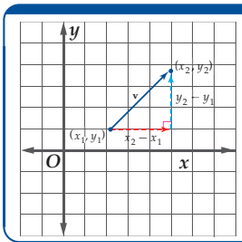
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (19)	• تنويع التعليم ص (19، 22)	• تنويع التعليم ص (22، 24)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10, 11) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

قراءة الرياضيات

المعيار
يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

مفهوم أساسي طول المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 2 إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$$= \sqrt{98} \approx 9.9$$ بسّط

التحقق علمت من المثال 1 أن: $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7 \rangle$ ؛ وعليه فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✓

تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

(2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\sqrt{128} \approx 11.3$ **(2B)** $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\sqrt{202} \approx 14.2$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

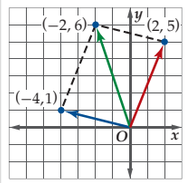
جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًّا
يمكن التحقق بيانيًّا من إجابة مثال 3 الفرع a ، استعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع كما في الشكل أدناه .



مثال 3 العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

(a $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

$$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$$ عوّض

$$= \langle -4 + 2, 1 + 5 \rangle = \langle -2, 6 \rangle$$ اجمع المتجهين

(b $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

$$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$$ أعد كتابة الطرح كعملية جمع

$$= \langle -3, 0 \rangle + (-2)\langle 2, 5 \rangle$$ عوّض

$$= \langle -3, 0 \rangle + \langle -4, -10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$$ اضرب متجهًا في عددٍ حقيقي، واجمع متجهين

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

(3A) $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ $\langle -19, 4 \rangle$ **(3B)** $-3\mathbf{c}$ $\langle 12, -3 \rangle$ **(3C)** $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ $\langle 3, 22 \rangle$

المتجهات في المستوى الإحداثي

المثال 1 يُبيّن كيفية التعبير عن المتجه على الصورة الإحداثية، إذا أُعطي الزوجان المرتبان اللذان يمثلان نقطتَي بدايته ونهايته.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد طول المتجه باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

المثال 3 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات، وإيجاد ناتج الجمع والطرح والضرب في عددٍ حقيقيٍّ للمتجهات جبريًّا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -3)$ ، ونقطة نهايته $B(1, 3)$. $\langle 0, 6 \rangle$

2 أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A $(1, -3)$، ونقطة نهايته $B(1, 3)$. 6

3 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 2, 0 \rangle$ ، $\mathbf{w} = \langle 2, -5 \rangle$ ، $\mathbf{z} = \langle -1, -4 \rangle$.

(a $2\mathbf{w} + \mathbf{y}$ $\langle 6, -10 \rangle$

(b $3\mathbf{y} - 2\mathbf{z}$ $\langle 8, 8 \rangle$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة؛ لإيجاد ناتج جمع وطرح متجهين، وضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ. ثم اطلب إليهم استعمال ورق رسم بياني؛ للتحقق من صحة إجاباتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

ضرب المتجه في عدد حقيقي ذكّر الطلاب بأن العدد الذي يُضرب فيه المتجه هو عدد حقيقي.

المحتوى الرياضي

الضرب في عدد حقيقي يمكن اعتبار الضرب في عدد حقيقي للمتجه على أنه تمدد للمتجه الأصلي، وينعكس اتجاه المتجه إذا كان العدد سالبًا، وعليه فإنه لا يحصل تمدد فقط للمتجه، بل يحصل انعكاس أيضًا حول المحور العمودي على المتجه والمار بنقطة بدايته. لاحظ أنه إذا كانت القيمة المطلقة للعدد أقل من 1، فإنه يحدث تصغير للمتجه.

متجهات الوحدة

المثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعطى.

المثال 5 يُبيّن كيفية كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة.

المثال 6 يُبيّن كيفية إيجاد الصورة الإحداثية لمتجه أُعطي طوله وزاوية اتجاهه.

المثال 7 يُبيّن كيفية إيجاد زاوية اتجاه متجه باستعمال الدالة العكسية لدالة الظل.

المثال 8 يُبيّن كيفية استخدام المتجهات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال إضافي

4 أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle 4, -2 \rangle$.

$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي قسّم طلاب الصف مجموعات، وحدّد لكل مجموعة متجهًا، واطلب إليهم إيجاد متجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المُعطَى، وصوّر عملهم بالفيديو.

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عددٍ حقيقيٍّ.

تاريخ الرياضيات

ويليام روان هاميلتون
(1805–1865)
طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظريةً في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات يعتمد على هذه النظرية.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطًى

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ — متجه وحدة باتجاه $\mathbf{v}$

$= \frac{1}{|\langle -2, 3 \rangle|}\langle -2, 3 \rangle$ — عوّض

$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3 \rangle$ — $|\langle a, b \rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3 \rangle$ — بسّط

$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$ — اضرب متجه في عدد حقيقي

$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$ — أنطق المقام

التحقق بما أن $\mathbf{u}$ تمثل حاصل ضرب $\mathbf{v}$ في عدد موجب فإن له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه. تحقَّق من أن طول $\mathbf{u}$ هو 1.

$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$ — قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}}$ — بسّط

$= \sqrt{1} = 1$ ✓ — بسّط

تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

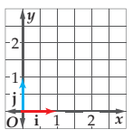
(4A) $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$ $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

(4B) $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$ $\left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

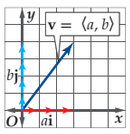
تنبيه!

متجه الوحدة i
لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$، والعدد التخيلي i، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍ داكن غير مائل $\mathbf{i}$، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍ غير داكن مائل i.

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 5.2.3. كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 5.2.3



الشكل 5.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 5.2.4؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ — الصورة الإحداثية

$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$ — أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين

$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$ — اضرب متجه في عدد حقيقي

$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ — $\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$, $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$

إرشادات للمعلم الجديد

رمز المتجه يمكن التعبير عن المتجهات بأزواجٍ مرتبةٍ مثل النقاط في المستوى الإحداثي، لكن الأقواس في المتجهات تختلف عنها في النقاط، فالنقطة (x, y) تدل على موقع واحدٍ في المستوى البياني، بينما المتجه $\langle x, y \rangle$ يشير إلى متجه (له طول واتجاه) في الوضع القياسي، وينتهي بالنقطة (x, y).

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

مثال 5 كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-2, 3)$, $(x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \langle 6, 2 \rangle$ بسّط

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

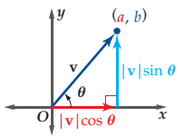
(5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$ $8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **(5B)** $D(-3, -8), E(7, 1)$ $10\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 5.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$ عوّض

$= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j}$ توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$



الشكل 5.2.5

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة

تستنتج من الصورة
$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$
أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة
$\mathbf{u} = \langle 1 \cos\theta, 1 \sin\theta \rangle$
$= \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$

مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة $|\mathbf{v}|, \theta$

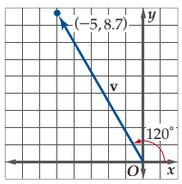
$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle$ $|\mathbf{v}| = 10 , \theta = 120°$

$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$ $\cos 120° = -\frac{1}{2}, \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ بسّط

التحقق مثّل بيانيًّا: $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$ ، تجد أن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x هي $120°$ كما في الشكل المجاور،

$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$ ✔



تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

(6A) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$ $\langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle$ **(6B)** $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$ $\langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$

مثالان إضافيان

5 إذا كانت نقطة بداية المتجه DE هي $D(-3, -3)$، ونقطة نهايته $E(2, 6)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. $5\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

6 أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 7، وزاوية اتجاهه $60°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \left\langle \frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

21 الدرس 2-5 المتجهات في المستوى الإحداثي

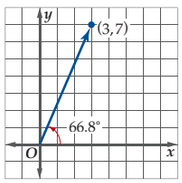
من الشكل (5.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

(a $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$	معادلة زاوية الاتجاه
$\tan\theta = \frac{7}{3}$	$a = 3, b = 7$
$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$	حُل بالنسبة إلى θ



الشكل 5.2.6

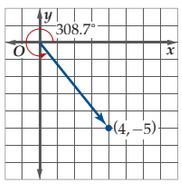
من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$، $y = 7$، فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

$\theta \approx 66.8°$	استعمل الآلة الحاسبة

أي أن زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل 5.2.6.

(b $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$	معادلة زاوية الاتجاه
$\tan\theta = \frac{-5}{4}$	$a = 4, b = -5$
$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$	حُل بالنسبة إلى θ



الشكل 5.2.7

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 4 > 0$، $y = -5 < 0$، فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

$\theta \approx -51.3°$	استعمل الآلة الحاسبة

بما أن $\mathbf{r}$ يقع في الربع الرابع، كما في الشكل 5.2.7، فإن: $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$

تنبيه!

لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:
$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$
فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبة فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبة، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

تحقق من فهمك

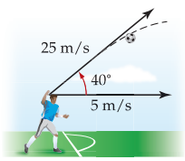
أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

(7A $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **161.6° تقريبًا**

(7B $\langle -3, -8 \rangle$ **249.4° تقريبًا**

مثال 8 من واقع الحياة تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s، بزاوية $40°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0 \rangle$، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

$\mathbf{v}_2 = \langle \lvert\mathbf{v}_2\rvert\cos\theta, \lvert\mathbf{v}_2\rvert\sin\theta \rangle$	الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}_2$
$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40° \rangle$	$\lvert\mathbf{v}_2\rvert = 25, \theta = 40°$
$\approx \langle 19.2, 16.1 \rangle$	بسّط

مثالان إضافيان

7 أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتيين مع المحور x الموجب:

(a $\mathbf{p} = \langle 2, 9 \rangle$ $77.5°$ تقريبًا

(b $\mathbf{r} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $164.1°$ تقريبًا

8 كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 7 m/s؛ ليرمي الكرة للأمام بسرعة 30 m/s بزاوية $10°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة؟ 36.9 m/s, $8.1°$ تقريبًا

تنويع التعليم

ضمن فوق

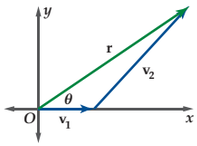
المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلاب تعليق جسم بحبلين بين مقعدين، واطلب إلى كل واحد منهم رسم شكل يمثل هذا الوضع وتوضيح طريقة إيجاد القوة على كلا الحبلين.

اجمع المتجهين $\mathbf{v_1}$ ، $\mathbf{v_2}$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.

$\mathbf{r} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ متجه المحصلة

$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle$ عوّض

$= \langle 24.2, 16.1\rangle$ اجمع



طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$ $\tan\theta = \frac{b}{a}$ ، حيث $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$

$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$ حُل بالنسبة إلى θ

أي أن محصلة سرعة الكرة هي 29.1 m/s تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها 33.6° مع الأفقي تقريبًا.

تحقق من فهمك

8) كرة قدم: أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/s

30.75m/s وتصنع زاوية قياسها 31.6° تقريبًا مع الأفقي

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (المثالان 1, 2) **1–6) انظر الهامش**

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

3) $A(10, -2), B(3, -5)$

4) $A(-2, 6), B(1, 10)$

5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$

6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

إذا كان: $\mathbf{h} = \langle -6, 2\rangle$, $\mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle$, $\mathbf{f} = \langle 8, 0\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$ $\langle -21, 13\rangle$

8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$ $\langle -4, 4\rangle$

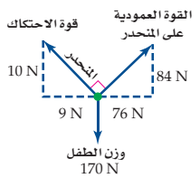
9) $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$ $\langle 31, -11\rangle$

10) $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$ $\langle 26, 6\rangle$

11) $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$ $\langle -53, -23\rangle$

12) $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$ $\langle -42, -18\rangle$

13) فيزياء: يُستعمل مخطط القوى؛ لتوضيح أثر القوى المختلفة في جسم، والمخطط أدناه يمثل القوى التي تؤثر في طفل ينزلق على منحدرٍ أسفل. (مثال 3)



a) اعتبر أن النقطة الخضراء التي تُمثّل الطفل هي نقطة الأصل، واكتب كل متجه على الصورة الإحداثية. **a,b) انظر الهامش**

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة الذي يمثل القوة التي تسبب انزلاق الطفل إلى أسفل.

14-19) انظر الهامش

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 4)

14) $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$

15) $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$

16) $\mathbf{v} = \langle -8, -5\rangle$

17) $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$

18) $\mathbf{v} = \langle -1, -5\rangle$

19) $\mathbf{v} = \langle 1, 7\rangle$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-35 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $\langle 7, 4\rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$

2) $\langle -8, 16\rangle, \sqrt{320} \approx 17.9$

3) $\langle -7, -3\rangle, \sqrt{58} \approx 7.6$

4) $\langle 3, 4\rangle, 5$

5) $\langle -6.5, 4.5\rangle, \sqrt{62.5} \approx 7.9$

6) $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2}\right\rangle, \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$

13a) $n = <76, 84>$, $f = <-9, 10>$, $w = <0, -170>$

13b) مجموع مركبات القوى في الاتجاه الأفقي:

$76\,N - 9\,N = 67\,N$

مجموع مركبات القوى في الاتجاه الرأسي:

$48\,N + 10\,N - 170\,N = -67\,N$

إذن الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة $<67, -76>$

14) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53}\right\rangle$

15) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$

16) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, -\frac{5\sqrt{89}}{89}\right\rangle$

17) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

18) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26}\right\rangle$

19) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right\rangle$

تنبيه!

أخطاء شائعة في السؤال 36، لاحظ الطلاب الذين لا يرسمون رسمًا صحيحًا يعبّر عن الموقف. واقترح عليهم كتابة الاتجاهات الشمال، الجنوب، الشرق، الغرب على رسومهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–35، 44، 45، 47–57
ضمن ضمن المتوسط	1–36 فردي، 43، 44، 47–57
فوق فوق المتوسط	36–57

4 التقويم

تعلّم سابق اطلب إلى الطلاب توضيح الربط بين التمثيل الهندسي للمتجهات في درس اليوم، والتعبير عن المتجهات بالصورة الجبرية.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 2-5 ,1-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11)

إجابات:

20) $\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

21) $-16\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

22) $-5\mathbf{i} - 19\mathbf{j}$

23) $-9.5\mathbf{i} - 8.3\mathbf{j}$

24) $13\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

25) $-\frac{33}{8}\mathbf{i} - \frac{19}{7}\mathbf{j}$

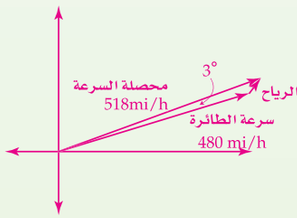
26) $\langle 6, 6\sqrt{3} \rangle$

27) $\langle 8\sqrt{3}, -8 \rangle$

28) $\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle$

29) $\langle -8.6, 12.3 \rangle$

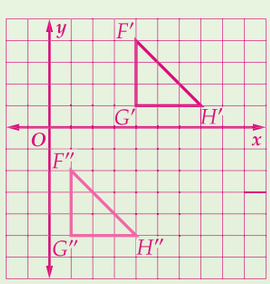
36a)



37) إجابة ممكنة: يختلف المقدار والاتجاه في كلٍّ من المتجهين؛ لذا فالمتجهان غير متكافئين.

38) نعم؛ إجابة ممكنة : للمتجهين كلٌّ من المقدار والاتجاه نفسه؛ لذا فهما متكافئان.

39b)



تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب حل المسألة الآتية: تعاون مزارع وجاره على إزالة صخرة كبيرة من الحقل. وذلك بسحب الصخرة بواسطة حبلين مثبَّتين بها، الزاوية بينهما 35°. إذا كان المزارع يسحب الحبل بقوةٍ مقدارها 105 N، وجاره يسحب الحبل الآخر بقوةٍ مقدارها 95 N، فأوجد مقدار القوة المحصلة المؤثرة في الصخرة واتجاهها (بإهمال قوة الاحتكاك). 190.8 N بزاوية قياسها 16.6° مع القوة 105 N.

اكتب $\overrightarrow{DE}$، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي على صورة توافقٍ خطّي لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5) **20-25)** انظر الهامش

20) $D(4, -1), E(5, -7)$

21) $D(9, -6), E(-7, 2)$

22) $D(3, 11), E(-2, -8)$

23) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$

24) $D(-4, -6), E(9, 5)$

25) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 6) **26-29)** انظر الهامش

26) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

27) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$

28) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$

29) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (مثال 7)

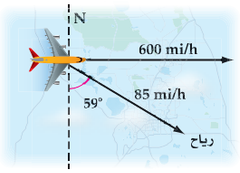
30) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ **63.4° تقريبًا**

31) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **111.8° تقريبًا**

32) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **216.9° تقريبًا**

33) $\langle -5, 9 \rangle$ **119.1° تقريبًا**

34) ملاحة جوية: تطير طائرة جهة الشرق بسرعةٍ مقدارها 600 mi/h، وتهب الرياح بسرعةٍ مقدارها 85 mi/h باتجاه S59°E. (مثال 8)



a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة. **674 mi/h**

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة. **S86°E**

35) تجديف: يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h، ويؤثِّر فيه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h.

a) أوجد السرعة التي يتحرك بها القارب إلى أقرب جزء من عشرة. **5.8 mi/h تقريبًا**

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة. **59° تقريبًا**

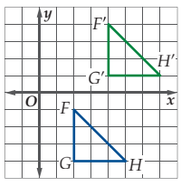
36) ملاحة جوية: تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N82°E، وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N79°E. ارسم شكلًا يُمثِّل هذا الموقف. انظر الهامش

بيّن ما إذا كان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب. **37, 38)** انظر الهامش

37) A(3, 5), B(6, 9), C(−4, −4), D(−2, 0)

38) A(1, −3), B(0, −10), C(11, 8), D(10, 1)

39) انسحاب: يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x، وإضافة b إلى الإحداثي y.



a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور. $\langle 2, 5 \rangle$

b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$، فمثّل بيانيًّا كلًّا من $\triangle F'G'H'$، وصورته $\triangle F''G''H''$. انظر الهامش

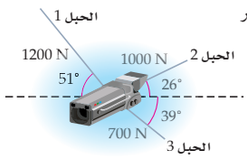
c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle F''G''H''$ إلى $\triangle FGH$. $\langle -1, -1 \rangle$

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا عُلِمتْ طوله ونقطة بدايته:

40) $\sqrt{37}, (-1, 4)$ إجابة ممكنة: **(0, −2)**

41) $10, (-3, -7)$ إجابة ممكنة : **(5, −1)**

42) آلة تصوير: عُلِّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثِّل متجهًا، فأجب عما يأتي:

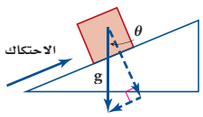


a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه لأقرب عدد صحيح. ⟨−755, 933⟩; ⟨899, 438⟩; ⟨544, −441⟩

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير. ⟨688, 930⟩

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى. 1157 N; 54°

43) قوة: تؤثِّر قوة الجاذبية g وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟



يجب أن تكون قوة الاحتكاك مساوية لمركبة الجاذبية الموازية للسطح المائل.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) تبرير: إذا كان **a** , **b** متجهين متوازيين، فعبِّر عن كلٍّ من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيِّنًا العلاقة بين **a** , **b**. انظر الهامش

45) تبرير: إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثِّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيَّنًا). انظر الهامش

46) تحدَّ: إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y \rangle$ هي $(4y)°$، فأوجد قيمة x بدلالة y. $x = \frac{y}{\tan 4y}$

برهان: إذا كان: $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1 \rangle, \mathbf{b} = \langle x_2, y_2 \rangle, \mathbf{c} = \langle x_3, y_3 \rangle$، فأثبت الخصائص الآتية: **47-50)** انظر ملحق الإجابات

47) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

48) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

49) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث k عدد حقيقي.

50) $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$، حيث k عدد حقيقي.

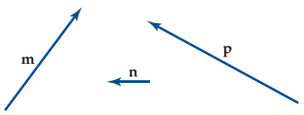
مراجعة تراكمية

51) دُمى أطفال: يقوم محمد بسحب دميته بقوة مقدارها 1.5 N بواسطة نابض مثبَّت بها. (الدرس 1-5)

a) إذا كان النابض يصنع زاوية 52° مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الرأسية والأفقية للقوة. ≈0.92 N, ≈1.18 N

b) إذا رفع محمد النابض، وأصبح يصنع زاوية قياسها 78° مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. ≈0.31 N, ≈1.47 N

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثِّل كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-5) **52-55)** انظر ملحق الإجابات



52) $\mathbf{n} - \frac{3}{4}\mathbf{m}$

53) $\frac{1}{2}\mathbf{p} + 3\mathbf{n}$

54) $\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$

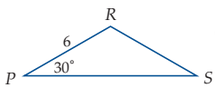
55) $\mathbf{p} + 2\mathbf{n} - \mathbf{m}$

تدريب على اختبار

56) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته (2, 5)، ونقطة نهايته (−4, −3)؟ **D**

A $\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{26}$ **C** $\sqrt{82}$ **D** $\sqrt{106}$

57) ما مساحة المثلث المجاور، إذا علمت أن $PR = RS$؟ **B**



A $9\sqrt{2}$ **B** $9\sqrt{3}$ **C** $18\sqrt{2}$ **D** $18\sqrt{3}$

إجابة:

44) إجابة ممكنة:
$\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$،
$\mathbf{b} = kx\,\mathbf{i} + ky\,\mathbf{j}$، حيث k عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

45) إجابة ممكنة: إذا كانت نقطة بداية المتجه هي (a, b)، وطول المتجه هو m، فإن أي نقطة (x, y) تحقق المعادلة:
$m = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$،
يمكن أن تكون نقطة نهايةٍ للمتجه. وهي دائرة مركزها النقطة (a, b)، وطول نصف قطرها m.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 5

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (10) — دون

الاسم: التاريخ:

5-2 تدريبات إعادة التعليم

المتجهات في المستوى الاحداثي

المتجهات في المستوى الاحداثي: تُستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد طول متجه.

مثال 1 أوجد طول $\overrightarrow{XY}$ الذي نقطة بدايته $X(2, -3)$، ونقطة نهايته $Y(-4, 2)$، ثم اكتبه على الصورة الإحداثية.

أوجد طول $\overrightarrow{XY}$ باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين.

$$|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة بين نقطتين}$$
$$= \sqrt{(-4-2)^2 + [2-(-3)]^2} \quad (x_1, y_1) = (2, -3), (x_2, y_2) = (-4, 2)$$
$$= \sqrt{(-6)^2 + 5^2} = \sqrt{61} \quad \text{بسّط}$$

اكتب $\overrightarrow{XY}$ على الصورة الإحداثية.

$$\overrightarrow{XY} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$
$$= \langle -4 - 2, 2 - (-3) \rangle \quad (x_1, y_1) = (2, -3), (x_2, y_2) = (-4, 2)$$
$$= \langle -6, 5 \rangle \quad \text{بسّط}$$

مثال 2 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{s} = \langle 4, 2 \rangle$ ، $\mathbf{t} = \langle -1, 3 \rangle$

a $\mathbf{s} + \mathbf{t}$

$$\mathbf{s} + \mathbf{t} = \langle 4, 2 \rangle + \langle -1, 3 \rangle \quad \text{عوّض}$$
$$= \langle 4 + (-1), 2 + 3 \rangle \quad \text{جمع المتجهات}$$
$$= \langle 3, 5 \rangle$$

b $3\mathbf{s} + \mathbf{t}$

$$3\mathbf{s} + \mathbf{t} = 3\langle 4, 2 \rangle + \langle -1, 3 \rangle \quad \text{عوّض}$$
$$= \langle 12, 6 \rangle + \langle -1, 3 \rangle \quad \text{ضرب متجه في عدد حقيقي}$$
$$= \langle 11, 9 \rangle \quad \text{جمع المتجهات}$$

تمارين

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A ونقطة نهايته B في السؤالين 1 , 2، ثم أوجد طوله:

1) $A(12, 41), B(52, 33)$ — $\langle 40, -8 \rangle, 8\sqrt{26}$
2) $A(-15, 0), B(7, -19)$ — $\langle 22, -19 \rangle, 13\sqrt{5}$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -1, -3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle 24, 21 \rangle$، $\mathbf{c} = \langle -1, -3 \rangle$ فأوجد كلًّا مما يأتي:

3) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ — $\langle -20, -23 \rangle$
4) $8\mathbf{b} - 2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ — $\langle 181, 163 \rangle$
5) $2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ — $\langle 47, 39 \rangle$
6) $\mathbf{a} - 2(\mathbf{b} + 2\mathbf{c})$ — $\langle -40, -32 \rangle$

تدريبات إعادة التعليم (11) — دون

الاسم: التاريخ:

5-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتجهات في المستوى الاحداثي

متجهات الوحدة، يُسمى المتجه الذي طوله 1 متجه وحدة، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$، نستخدم العلاقة $\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$.

وكحالة خاصة من متجهات الوحدة، متجه الوحدة باتجاه المحور X الموجب بالرمز $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$، ويرمز إلى متجه الوحدة باتجاه محور Y الموجب بالرمز $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$، ويمكن كتابة أي متجه بدلالة متجهَي الوحدة في صورة توافق خطّيّ لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$.

مثال 3 أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -4, -1 \rangle$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} \quad \text{متجه وحدة باتجاه } \mathbf{v}$$
$$= \frac{1}{|\langle -4, -1 \rangle|}\langle -4, -1 \rangle \quad \text{عوّض}$$
$$|\langle a, b \rangle| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}}\langle -4, -1 \rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{17}}\langle -4, -1 \rangle \quad \text{بسّط}$$
$$= \left\langle \frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{-1}{\sqrt{17}} \right\rangle = \left\langle \frac{-4\sqrt{17}}{17}, \frac{-\sqrt{17}}{17} \right\rangle \quad \text{أنطق المقام}$$

مثال 4 إذا كان $\overrightarrow{MP}$ متجهًا، نقطة بدايته $M(2, 2)$ ونقطة نهايته $P(5, 4)$، فاكتب $\overrightarrow{MP}$ على صورة توافق خطّيّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{MP}$ أولًا.

$$\overrightarrow{MP} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$
$$= \langle 5 - 2, 4 - 2 \rangle = \langle 3, 2 \rangle \quad (x_1, y_1) = (2, 2), (x_2, y_2) = (5, 4)$$

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافق خطّيّ لمتجهَي الوحدة.

$$\overrightarrow{MP} = \langle 3, 2 \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}\mathbf{i} + \mathbf{b}\mathbf{j} \quad = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

تمارين

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$، له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في السؤالين 1, 2:

1) $\mathbf{p} = \langle 4, -3 \rangle$ — $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{-3}{5} \right\rangle$
2) $\mathbf{v} = \langle 10, 25 \rangle$ — $\left\langle \frac{2\sqrt{29}}{29}, \frac{5\sqrt{29}}{29} \right\rangle$

اكتب $\overrightarrow{MN}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، على صورة توافق خطّيّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في السؤالين 3 , 4:

3) $M(0, 6), N(18, 4)$ — $18\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
4) $M(2, 8), N(-5, -3)$ — $-7\mathbf{i} - 11\mathbf{j}$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب للمحور x في السؤالين 5, 6:

5) $|\mathbf{v}| = 5, \theta = 95°$ — $\langle -0.4, 5.0 \rangle$
6) $|\mathbf{v}| = 18, \theta = 240°$ — $\langle -9, -9\sqrt{3} \rangle$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين في السؤالين 7, 8:

7) $-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ — $153.4°$
8) $\langle 2, 17 \rangle$ — $83.3°$

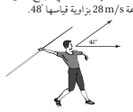
تدريبات حل المسألة (12) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

5-2 تدريبات حل المسألة

المتجهات في المستوى الاحداثي

1) **العاب قوى،** في مسابقة رمي الرمح، رمى لاعب الرمح بسرعة 28 m/s بزاوية قياسها 48°.



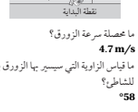
a) ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الرمح؟
18.7 m/s

b) ما مقدار المركبة العمودية لسرعة الرمح؟
20.8 m/s

2) **مواصلات،** تحركت حافلة 4.5 mi إلى الشمال، ثم 2 mi إلى الشرق، ثم 1.5 mi شمال شرق بزاوية 30°. اكتب محصلة سير الحافلة على صورة توافق خطّيّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.
3.3i+5.25j

3) **مسافات،** سار سلطان من منزله 2 mi باتجاه الغرب، ثم سار 3.4 mi إلى الشمال فوصل إلى المسجد. إذا سار سلطان من منزله إلى المسجد في خط مستقيم، فكم ميلًا يختصر من المسافة التي قطعها؟
1.5 mi

4) **زورق،** يُبحر شخص في نهر سرعة التيار فيه 2.5 m/s. فإذا كان الشخص يجدف بسرعة 4 m/s باتجاه عمودي على الشاطئ، فأجب عمّا يأتي:



a) ما محصلة سرعة الزورق؟
4.7 m/s

b) ما قياس الزاوية التي سيسير بها الزورق بالنسبة للشاطئ؟
58°

التدريبات الإثرائية (13) — فوق

الاسم: التاريخ:

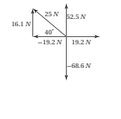
5-2 التدريبات الإثرائية

الاحتكاك والقوة العمودية

بناءً على قانون نيوتن الأول في الحركة، إذا تحرك جسم بسرعة ثابتة، فإن القوى المؤثرة فيه جميعها تكون متزنة، وإذا لم يتحرك الجسم بسرعة ثابتة، فإن القوة المؤثرة تكون غير متزنة؛ لذا إذا دفع شخص جسمًا وتحرك بسرعة ثابتة، فإن قوة دفع الشخص للجسم توازن قوة الاحتكاك.

معامل الاحتكاك μ (ويقرأ mu) هو النسبة بين قوة الاحتكاك بين سطحين وقوة الدفع المؤثرة في السطحين معًا. إذا ارتكز جسم على سطح الأرض، فإنه يمكن حساب قوة الدفع المؤثرة في السطحين معًا، بضرب الكتلة (بالكيلو جرام) في تسارع الجاذبية الأرضية $-9.8\,\mathrm{m/s^2}$، والقوة العمودية n هي قوة دفع الأرض للجسم إلى أعلى.

مثال يسحب شخص عربة كتلتها 7 kg بسرعة ثابتة كما في الشكل. فإذا كان الشخص يسحب العربة بقوة مقدارها 25 N وكان مقبض العربة يصنع 40° مع المحور الأفقي، فأوجد معامل الاحتكاك في هذا الوضع.



يمكن استعمال مخطط القوى لتوضيح المسألة. احسب المركّبة الأفقية والمركّبة الرأسية للقوة 25 N، لما كانت العربة تتحرك بسرعة ثابتة، فإن قوة الاحتكاك تساوي المركبة الأفقية ولكن باتجاه معاكس. وتعادل قوة الجاذبية مجموع القوتين؛ المركبة الرأسية والقوة العمودية.

$x = 25\cos 40° \approx 19.2$ — المركبة الأفقية
$y = 25\sin 40° \approx 16.1$ — المركبة الرأسية

قوة الجاذبية بالنسبة للأرض = الكتلة × تسارع الجاذبية الأرضية
$7(-9.8) = -68.6$

$n = 68.6 - 16.1 = 52.6$ — القوة العمودية
$\mu = \frac{19.2}{52.5} \approx 0.37$ — معامل الاحتكاك

لذا، فإن معامل الاحتكاك هو 0.37

تمارين

1) يسحب شخص عربة طفل كتلتها 41 kg بقوة 50 N، فإذا كان الحبل يصنع زاوية قياسها 45° مع الأرض، فأوجد معامل الاحتكاك بين العربة والأرض.
0.10

2) يدفع شخص صندوقًا كتلته 25 kg على سجادة بقوة 75 N، فإذا كانت قوة الدفع تصنع زاوية 25° مع الأرض، فأوجد معامل الاحتكاك بين السجادة والصندوق.
0.32

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 5

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (5) — دون ضمن فوق

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُمطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

1) $A(2, 4), B(-1, 3)$ $\langle -3, -1 \rangle, \sqrt{10}$

2) $A(4, -2), B(5, -5)$ $\langle 1, -3 \rangle, \sqrt{10}$

3) $A(-3, -6), B(8, -1)$ $\langle 11, 5 \rangle, \sqrt{146}$

إذا كان $\mathbf{w} = \langle -3, 5 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

4) $3\mathbf{v}$ $\langle 6, -3 \rangle$

5) $\mathbf{w} - 2\mathbf{v}$ $\langle -7, 7 \rangle$

6) $4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ $\langle -1, 11 \rangle$

7) $5\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$ $\langle -21, 28 \rangle$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{v} = \langle -3, 6 \rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

9) $\mathbf{v} = \langle -8, -2 \rangle$ $\left\langle -\frac{4\sqrt{17}}{17}, -\frac{\sqrt{17}}{17} \right\rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المُمطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ في كلٍّ مما يأتي:

10) $D(4, -5), E(6, -7)$ $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

11) $D(-4, 3), E(5, -2)$ $9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

12) $D(4, 6), E(-5, -2)$ $-9\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

13) $D(2, 1), E(3, 7)$ $\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور الأفقي في كلٍّ مما يأتي:

14) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 42°$ $\langle 8.9, 8.0 \rangle$

15) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 132°$ $\langle -5.4, 5.9 \rangle$

16) **بستنة:** يقوم علي ومحمد بدفع حجر من حديقتهم. إذا كان علي يدفع الحجر بقوة مقدارها 120 N بزاوية تميل 60° عن المحور الأفقي، في حين يدفع محمد الحجر بقوة مقدارها 180 N بزاوية تميل 40° عن المحور الأفقي، فأوجد مقدار محصلة القوى الناتجة عن تأثير قوتي الدفع معًا. 295.6 N

5

الفصل الخامس المتجهات

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3

إيجاد مقادير المتجهات وإجراء العمليات عليها جبريًّا.

الدرس 5-3

إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين، واستعماله في إيجاد الزاوية بينهما.

ما بعد الدرس 5-3

استعمال المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- انظر إلى الصورة، وبيّن كيف يعرف الأشخاص الذين يدفعون السيارة أنهم يبذلون شغلًا؟ إذا تحركت السيارة.
- لماذا يُعدُّ الشغل تحويلًا للطاقة؟ عند بذل شغلٍ على جسمٍ ما، يحدث تحويل للطاقة على الجسم مما يسبب حركته.
- إذا حاولت المجموعة نفسها دفع السيارة بقوة أكبر، وتحركت السيارة مسافة أكبر، فهل بذل الأشخاص شغلًا أكبر أم أصغر؟ بذلوا شغلًا أكبر.
- هل وضع كتاب على ذراع شخص من دون حركة يُعطِي شغلًا؟ لا ؛ لأن الكتاب لم يتحرك.

5-3 الضرب الداخلي
Dot Product

فيما سبق:
درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًّا وجبريًّا. (الدرس 2–5)

والآن:
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات:

الضرب الداخلي
dot product

المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors

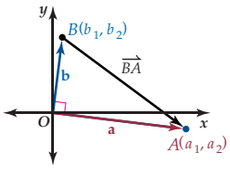
الشغل
work

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-5 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.



وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

تعريف طول متجه
$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

ربّع الطرفين
$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

فُك الأقواس
$$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$$

جمّع الحدود المربعة
$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$,
$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a , b ، أو يُقرأ اختصارًا $\mathbf{a}$ dot $\mathbf{b}$.

قراءة الرياضيات
الضرب القياسي
يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

مفهوم أساسي الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن : $\langle a_1, a_2 \rangle \bullet \langle 0, 0 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

مصادر الدرس 5-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (29)	• تنويع التعليم ص (31)	
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14, 15) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

الضرب الداخلي

المثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين، والتحقق من كونهما متعامدين.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد طول متجه باستعمال الضرب الداخلي.

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الزاوية بين متجهين باستعمال الضرب الداخلي.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$.

15، غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -14, 4\rangle$.

0، متعامدين.

2 استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -6, 5\rangle$.

$\sqrt{61} \approx 7.81$

مثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$

$= 0$

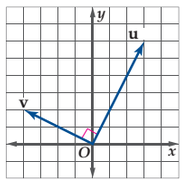
بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضَّح في الشكل 5.3.1 .

b) $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

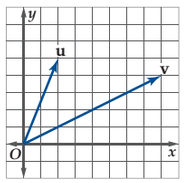
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$

$= 36$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل 5.3.2 .



الشكل 5.3.1



الشكل 5.3.2

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$ ؛ ليسا متعامدين -17

1B) $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$ ؛ متعامدان 0

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

نظريَّة خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ الضرب الداخلي

$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$ اكتب على صورة مربع جذر ($u_1^2 + u_2^2$)

$= |\mathbf{u}|^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 37–35

مثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

بما أن: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$|\langle -5, 12\rangle| = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$

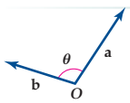
$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بسّط

تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$ 20

2B) $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$ $5\sqrt{2} \approx 7.07$



الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث إن: $0 \le \theta \le \pi$ ، أو $0° \le \theta \le 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.

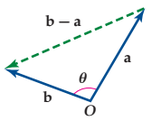
إرشادات للمعلم الجديد

الضرب الداخلي أعطِ مثالًا على كلٍّ من جمع متجهين، وضرب متجه في عدد والضرب الداخلي لمتجهين، ثم اسأل الطلاب عن الفرق بين إجابة الضرب الداخلي والإجابات الأخرى، وعليهم ملاحظة أن ناتج الضرب الداخلي عدد، وليس متجهًا.

مفهوم أساسي الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



البرهان

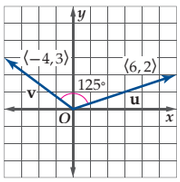
إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}-\mathbf{a}\rvert^2$	قانون جيوب التمام
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$\lvert\mathbf{u}\rvert^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{a}\rvert^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$
$-2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	بطرح $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ من الطرفين
$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	بقسمة الطرفين على $-2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert$

مثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

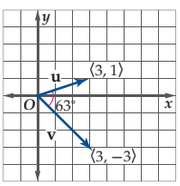
a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$



$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 6,2\rangle\cdot\langle -4,3\rangle}{\lvert\langle 6,2\rangle\rvert\,\lvert\langle -4,3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$
$\cos\theta = \frac{-24+6}{\sqrt{40}\sqrt{25}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta = \frac{-18}{10\sqrt{10}}$	بسّط
$\theta = \cos^{-1}\frac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$	معكوس جيب التمام

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$



$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 3,1\rangle\cdot\langle 3,-3\rangle}{\lvert\langle 3,1\rangle\rvert\,\lvert\langle 3,-3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$
$\cos\theta = \frac{9+(-3)}{\sqrt{10}\sqrt{18}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$	بسّط
$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 63°$	معكوس جيب التمام

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $63°$ تقريبًا، كما في الشكل المجاور.

إرشادات للدراسة

المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية

يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مثال إضافي

3 أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, -5\rangle$,
$\mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle$ $64.7°$ تقريبًا

b) $\mathbf{u} = \langle 1, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$
$147.5°$ تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر مجموعة من الطلاب لحل بعض المسائل، وشرح طريقة استعمال معكوس دالة جيب التمام؛ لإيجاد الزاوية بين متجهين، ووثّق هذا الشرح باستعمال الكاميرا.

المحتوى الرياضي

المتجه الصفري:

- ناتج الضرب الداخلي للمتجه الصفري $\langle 0, 0\rangle$، وأيِّ متجهٍ آخر يساوي 0.
- ناتج جمع أيِّ متجهٍ مع المتجه الصفري يُعطي المتجه نفسه.
- المتجه الصفري هو العنصر المحايد لعملية جمع المتجهات.

إرشادات للمعلم الجديد

صورة أخرى للضرب الداخلي تقود قاعدة الزاوية بين متجهين إلى صورةٍ بديلةٍ للضرب الداخلي لمتجهين .

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

ويمكن استعمال هذه الصورة؛ لحساب الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، عند معرفة طول كلٍّ من المتجهين والزاوية بينهما.

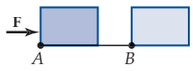
تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

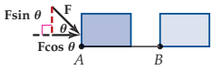
3A) $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$ $156.8°$

3B) $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$ $101.5°$

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت $\mathbf{F}$ قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت $\mathbf{F}$ موازيةً لـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن $\mathbf{F}$ يساوي مقدار القوة $\mathbf{F}$ مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة $\mathbf{F}$ ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

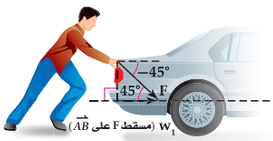


$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة $\mathbf{F}$ ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

مثال 4 من واقع الحياة — حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية $45°$ كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة $\mathbf{F}$ بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي :

$\langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0 \rangle$.

$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ — قاعدة الضرب الداخلي للشغل

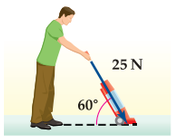
$= \langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle \cdot \langle 10, 0 \rangle$ — عوّض

$= [120 \cos(-45°)](10) \approx 848.5$ — الضرب الداخلي

أي أن الشخص يبذل 848.5 J من الشغل؛ لدفع السيارة.

تحقق من فهمك

4) تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض $60°$ ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟ 75 جولًا



إرشادات للدراسة

وحدات الشغل

وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

المثال 4 يُبيّن كيفية استعمال الضرب الداخلي للمتجهات في حساب الشغل.

مثال إضافي

4 **حركة:** يدفع شخص آلة قص العشب بقوةٍ مقدارها 40 N بزاويةٍ مقدارها $45°$، أوجد الشغل المبذول بالجول واللازم لتحريك آلة قص العشب 12 m (بإهمال قوة الاحتكاك). 339.4 J

تنبيه!

في مثال 4 والأسئلة المشابهة، نلاحظ أننا نهتم بالمركبة الأفقية لمتجه القوة والتي توازي متجه المسافة.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون السمعيون قسّم طلاب الصف مجموعاتٍ صغيرةً من ذوي قدرات لغوية متفاوتة، ثم اطلب إليهم توضيح كيفية حل مسائل من واقع الحياة شبيهة بالمثال 4، باستعمال خطة التفكير بصوتٍ مسموع، وذلك من خلال شرح خطوات حل المسألة، وتفسير دور كل معلومةٍ من معطيات المسألة في وضع مخططٍ للحل.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-16 ؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

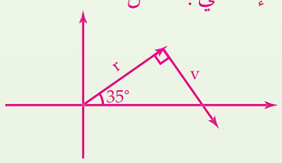
تنبيه!

أخطاء شائعة قد يقع الطلاب في أخطاء بسيطة عند حساب قياس الزاوية بين متجهين في المسائل 11–14؛ لذا اقترح عليهم رسم المتجهات في المستوى الإحداثي؛ لتحديد ما إذا كانت زاوية المتجه حادةً أم منفرجةً، ومقارنتها بالزاوية التي يحصلون عليها في الحل الجبري.

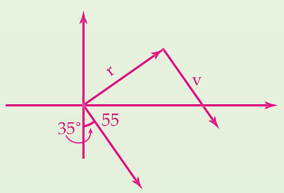
اكتشف الخطأ في السؤال 33، اقترح على الطلاب الرجوع إلى خصائص الضرب الداخلي صفحة 27، وشجِّع الطلاب على اختبار متجهاتٍ ذات قيمٍ حقيقيةٍ لكلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ للتحقق من إجاباتهم.

إجابة:

a21) يمكن تمثيل متجهَي نصف القطر، والسرعة المماسية في المستوى الإحداثي بالشكل:



فتكون مركبة r الأفقية $20\cos 35°$
وتكون مركبة r الرأسية $20\sin 35°$
إذن الزوج المرتب للمتجه r
$\langle 20\cos 35°, 20\sin 35° \rangle$،
أو $\langle 16.38, 11.47 \rangle$
أما بالنسبة للمتجه v فنضعه في الوضع القياسي كما هو مبين بالشكل:



فتكون مركبة v الأفقية $40\cos 55$
وتكون مركبة v الرأسية $-40\sin 55$
إذن الزوج المرتب للمتجهة v
$\langle 40\cos 55, -40\sin 55 \rangle$،
أو $\langle 22.94, -32.77 \rangle$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–16، 31–32، 33، 35–46
ضمن ضمن المتوسط	1–37 فردي، 32، 36–46
فوق فوق المتوسط	18–46

تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$ 8؛ غير متعامدين

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$ 0؛ متعامدان

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5 \rangle$ 8؛ غير متعامدين

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ 0؛ متعامدان

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2 \rangle$ 8؛ غير متعامدين

6) زيت الزيتون: يمثِّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297 \rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجرٍ، ويمثِّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15 \rangle$ سعر العلبة من كلا النوعين على الترتيب (مثال 1)

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. 15620 ثمن العلب جميعها هو 15620 ريالًا

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

7) $\sqrt{130} \approx 11.4$

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$ **8)** $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$ $\sqrt{97} \approx 9.8$

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18 \rangle$ $5\sqrt{13} \approx 18.0$ **10)** $\mathbf{t} = \langle 23, -16 \rangle$ $\sqrt{785} \approx 28.0$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle$ 14.0°

12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4 \rangle$ 100.0°

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10 \rangle$ 164.7°

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 82.9°

15) مخيم كشفي: غادر يوسف ويحيى مخيَّمهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6 \rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3) 161.6°

16) فيزياء: يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوةٍ مقدارها 534 N؛ بزاوية 25°، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيحٍ. (مثال 4) 726 J

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

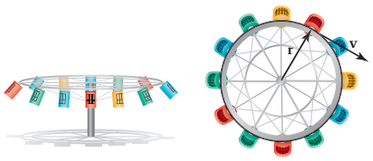
17) $\langle -8, -2 \rangle$ إجابة ممكنة: $\langle -12, 3 \rangle$

18) $\langle 3, 5 \rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 10, -6 \rangle$

19) $\langle 7, -4 \rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 8, 14 \rangle$

20) $\langle -1, 6 \rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 6, 1 \rangle$

21) عجلة دوّارة: يعامد المتجه r في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية v عند أيِّ نقطةٍ من نقاط الدائرة.



منظر علوي منظر أمامي

a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/s، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجه r في الوضع القياسي، إذا كان يصنع زاويةً قياسها 35° مع الأفقي، فاكتب الصورة الإحداثية لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ. انظر الهامش

b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه r، ومتجه السرعة باستعمال الصورتين الإحداثيتين اللتين أوجدتهما في الفرع a؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

21b) الضرب الداخلي؛
$\mathbf{r}.\mathbf{v} = (20\cos 35°)(40\cos 55°) + (20\sin 35°)(-40\sin 55°) = 0$
بما أن $\mathbf{r}.\mathbf{v} = 0$ إذن المتجهان متعامدان.

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}$، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه u في كلٍّ مما يأتي:

22) $\mathbf{v} = \langle 3, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$ إجابة ممكنة: $\mathbf{u} = \langle 5, -3 \rangle$

23) $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$ إجابة ممكنة: $\mathbf{u} = \langle -1, 7 \rangle$

24) مدرسة: يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها 100 N، إذا بذل الطالب شغلًا مقداره 1747 J، لسحب حقيبته مسافة 31 m، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟ 55.7° تقريبًا

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي، من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غير ذلك. **(25, 26)** انظر الهامش

(25) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$ متعامدان

(26) $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$ غير ذلك

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

(27) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ 29.7°

(28) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 164.9°

(29) النقاط: (8, 1), (2, 3), (4, 7), تُمثِّل رؤوس مثلثٍ، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات. انظر الهامش

إذا علمت كلًّا من $|\mathbf{v}|$,$\mathbf{u}$ والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{v}$ ، قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

(30) $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, \theta = 45°$ $\langle 3.16, -9.49 \rangle$

(31) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, \theta = 121°$ $\langle -5.36, 0.55 \rangle$

مسائل مهارات التفكير العليا

(32) تبرير: اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية: خطأ؛ انظر الهامش

إذا كانت $|\mathbf{d}|, |\mathbf{e}|, |\mathbf{f}|$ تُمثِّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين $\mathbf{d}, \mathbf{e}$ وبين $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ حادتين، فإن الزاوية بين $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ يجب أن تكون قائمة. فسّر تبريرك.

(33) اكتشف الخطأ: يدرس كلٌّ من فهدٍ وفيصلٍ خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن:
$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضّح إجابتك. فيصل؛ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ عدد ثابت، وعليه فإن $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ ليس معرفًا؛ لأنه لا يمكن إجراء الضرب الداخلي بين مقدارٍ ثابتٍ ومتجه.

(34) اكتب: وضّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين. انظر الهامش

برهان: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية: **(35-37)** انظر ملحق الإجابات

(35) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(36) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(37) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

(38) برهان: إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي 90°، فأثبت أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين. انظر ملحق الاجابات

مراجعة تراكمية

إذا علمت: أن $\mathbf{a} = \langle 10, 1 \rangle, \mathbf{b} = \langle -5, 2.8 \rangle, \mathbf{c} = \langle \frac{3}{4}, -9 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-5)

(39) $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ $\langle -12, -34.2 \rangle$

(40) $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\left\langle -\frac{137}{4}, -9.2 \right\rangle$

(41) $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$ $\left\langle \frac{163}{4}, -18.2 \right\rangle$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (الدرس 2-5)

(42) $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ 251.6°

(43) $\langle -9, 5 \rangle$ 150.95°

(44) $\langle -7, 7 \rangle$ 135°

تدريب على اختبار

(45) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1 \rangle, \langle -9, 0 \rangle$ ؟ **B**

A 0° **B** 45° **C** 90° **D** 135°

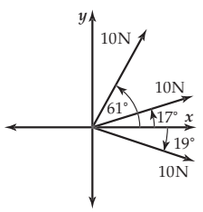
(46) إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle, \mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل r، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟ **C**

A $\langle 14, 8 \rangle$ **B** $\langle 14, 6 \rangle$ **C** $\langle -14, 8 \rangle$ **D** $\langle -14, -8 \rangle$

تنويع التعليم

ضمن

توسع في الشكل المجاور، أوجد R مقدار محصلة القوى.
(إرشاد: أوجد الصورة الإحداثية لكل قوةٍ).
$\langle 23.9, 8.4 \rangle$ ومقدارها 25.3N تقريبًا.



4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة متجه وتوضيح طريقة إيجاد طوله باستعمال الضرب الداخلي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 3-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

إجابات:

(25) بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان .

(26) ليسا متعامدين، ولا متوازيين، حيث إن الزاوية بين المتجهين $\theta = 167°$. وقياس الزاوية بين المتجهين المتوازيين إما 0 أو 180°، وبين المتجهين المتعامدين 90°

(29) المتجهات التي تشكل المثلث:
$A\langle 2, 4 \rangle, B\langle 4, -6 \rangle, C\langle 6, -2 \rangle$

$$\cos A = \frac{b.c}{|b| .|c|} = \frac{36}{\sqrt{52}. \sqrt{40}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$A = \cos^{-1} \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$\cos B = \frac{a.b}{|a| .|c|} = \frac{2}{5\sqrt{2}}$$

$$B = \cos^{-1} = \frac{2}{5\sqrt{2}} \approx$$

$$C = 180° - (A+B) \approx$$

إذن قياسات زوايا المثلث

(32) العبارة خاطئة؛ إذ قد تكون نقطة بداية للمتجهات الثلاثة واحدة ولا تشكل هذه المتجهات مثلثًا مطلقًا، إذا كان الأمر كذلك، فإن الزاوية بين المتجهين $\mathbf{d}$ و $\mathbf{f}$ تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

(34) إجابة ممكنة: لأي متجهين غير صفريين $\langle a, d \rangle$ ، $\langle c, b \rangle$ يكون الضرب الداخلي لهما يساوي مجموع حاصل ضرب الاحداثيين x والإحداثيين y أو $ac + bd$.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (14) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 تدريبات إعادة التعليم

الضرب الداخلي

الضرب الداخلي، يُعرف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ بالقاعدة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

مثال أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

a) $\mathbf{u} = \langle 5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 15 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5(-3) + 1(15)$

$= 0$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متعامدان.

b) $\mathbf{u} = \langle 4, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, -6 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4(8) + 5(-6)$

$= 2$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ غير متعامدين.

تمارين

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

1) $\mathbf{u} = \langle 2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -12, 6 \rangle$
صفر؛ متعامدان

2) $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$
−54؛ غير متعامدين

3) $\mathbf{u} = \langle 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -12, 5 \rangle$
−29؛ غير متعامدان

4) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{j}$
30؛ غير متعامدين

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه المعطى في السؤالين 5, 6:

5) $\mathbf{a} = \langle 9, 3 \rangle$
$3\sqrt{10}$

6) $\mathbf{c} = \langle -12, 4 \rangle$
$4\sqrt{10}$

الصف، الثالث الثانوي 14 الفصل 5، المتجهات

تدريبات إعادة التعليم (15) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الضرب الداخلي

الزاوية بين متجهين، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

مثال أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ إذا كان $\mathbf{u} = \langle 5, 1 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

الزاوية بين متجهين $\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u} = \langle 5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$ $\cos\theta = \frac{\langle 5, 1 \rangle \cdot \langle -2, 3 \rangle}{|\langle 5, 1 \rangle||\langle -2, 3 \rangle|}$

الضرب الداخلي لمتجهين، طول متجه $\cos\theta = \frac{-10 + 3}{\sqrt{26}\sqrt{13}}$

ممكوس جيب التمام $\theta = \cos^{-1}\frac{-7}{\sqrt{26}\sqrt{13}} \approx 112°$

أيْ أن قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ يساوي 112° تقريبًا.

تمارين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{u} = \langle -3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 12 \rangle$
179.3°

2) $\mathbf{u} = 13\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
39.5°

3) $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 2 \rangle$
26.57° تقريبا

4) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i}$
45°

5) $\mathbf{u} = \langle -1, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -1 \rangle$
180°

6) $\mathbf{u} = \langle -2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5 \rangle$
45°

الصف، الثالث الثانوي 15 الفصل 5، المتجهات

تدريبات حل المسألة (16) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 تدريبات حل المسألة

الضرب الداخلي

1) **غواصات،** يمثل المتجه $\mathbf{v} = \langle 8, 3 \rangle$ مسار غواصة، فإذا غيّرت الغواصة اتجاه حركتها ليصبح باتجاه $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle$، فأوجد المسافة التي تحركتها الغواصة.
13.9 وحدة تقريبا

2) **العاب أطفال،** تم تشغيل لعبتين كهربائيتين للأطفال في وقت واحد، فإذا مثّل المتجهان $\mathbf{u} = \langle 42, 58 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 59, 73 \rangle$ مساري اللعبتين، فما قياس الزاوية بين مساريهما؟
3°

3) **صيد طيور،** خلال رحلة لصيد الطيور، سار أحمد وهابل في اتجاهين مختلفين، فإذا مثّل المتجه $\langle 9, 18 \rangle$ مسار أحمد، ومثّل المتجه $\langle 12, -15 \rangle$ مسار هابل، فأيهما سار مسافة أطول؟
سار أحمد مسافة أطول.

4) **مرتبات،** يمثل المتجه $\mathbf{u} = \langle 20, 15 \rangle$ أعداد العاملين والسائقين في شركة، والمتجه $\mathbf{v} = \langle 2500, 3000 \rangle$ يمثل مرتب العامل والسائق في الشركة نفسها.

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
95000

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.
إجمالي مرتبات العمال والسائقين في الشركة.

5) **هواية،** سحب شخص قاربًا مسافة 10 m على طول رصيف الميناء بواسطة حبلٍ، وبقوةٍ مقدارها 200 N.

a) أوجد مقدار الشغل المبذول، إذا كان قياس الزاوية التي يصنعها الحبل مع الأفقي 40°، ثم إذا كان قياس الزاوية 90°.
1532J, 0J

b) وضّح سبب نقصان الشغل، إذا زاد قياس الزاوية التي يصنعها الحبل مع الأفقي، اعتمادًا على النتائج التي حصلت عليها في فرع a.
إجابة ممكنة: كلما زادت الزاوية نقصت مركبة القوة في اتجاه الحركة، لذا يتقص الشغل.

الصف، الثالث الثانوي 16 الفصل 5، المتجهات

التدريبات الإثرائية (17) فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

5-3 التدريبات الإثرائية

المعادلات المتجهة

إذا كانت $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ثلاثة متجهات محددة، فإن المعادلة $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a} - 2x\,\mathbf{b} + x^2\mathbf{c}$ تعتبر مثالًا لدالة متجهة في x. والجدول الآتي يبيّن المتجهات المرتبطة ببعض قيم x.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	$\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$	$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$	$\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

إذا كانت: $\mathbf{a} = \langle 0, 1 \rangle, \mathbf{b} = \langle 1, 1 \rangle, \mathbf{c} = \langle 2, -2 \rangle$، فإن المتجهات المرتبطة بقيم x تظهر كما في الجدول الآتي.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	$\langle 12, -3 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, -3 \rangle$	$\langle 4, -11 \rangle$

أكمل الجدول لكلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{f}(x) = x^3\mathbf{a} - 2x^2\mathbf{b} + 3x\mathbf{c}$
$\mathbf{a} = \langle 1, 1 \rangle \quad \mathbf{b} = \langle 2, 3 \rangle \quad c = \langle 3, -1 \rangle$

x	−1	0	1	2
$f(x)$	$\langle -14, -4 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 6, -8 \rangle$	$\langle 10, -22 \rangle$

2) $\mathbf{f}(x) = 2x^2\mathbf{a} + 3x\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$
$\mathbf{a} = \langle 0, 1 \rangle \quad \mathbf{b} = \langle 1, 0 \rangle \quad \mathbf{c} = \langle 1, 1 \rangle$

x	−2	−1	0	1
$f(x)$	$\langle -11, 3 \rangle$	$\langle -8, -3 \rangle$	$\langle -5, -5 \rangle$	$\langle -2, -3 \rangle$

3) $\mathbf{f}(x) = x^2\mathbf{c} + 3x\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$
$\mathbf{a} = \langle 1, 1 \rangle \quad \mathbf{b} = \langle 3, 2 \rangle \quad \mathbf{c} = \langle 0, 1 \rangle$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\langle -12, -8 \rangle$	$\langle -9, -4 \rangle$	$\langle -6, 2 \rangle$	$\langle -3, 10 \rangle$

4) $\mathbf{f}(x) = x^3\mathbf{a} - x\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$
$\mathbf{a} = \langle 0, 1 \rangle \quad \mathbf{b} = \langle 1, -2 \rangle \quad \mathbf{c} = \langle -2, 0 \rangle$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\langle -6, 0 \rangle$	$\langle -7, 3 \rangle$	$\langle -8, 12 \rangle$	$\langle -9, 33 \rangle$

الصف، الثالث الثانوي 17 الفصل 5، المتجهات

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (6)

دون ضمن فوق

5-3 الضرب الداخلي

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين في كلٍّ مما يأتي :

1) $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ — 0 ، متعامدان

2) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ — 11− ، غير متعامدين

3) $\mathbf{u} = \langle 2, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1 \rangle$ — 2− ، غير متعامدين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle -1, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 12 \rangle$ — $20.4°$

5) $\mathbf{u} = \langle -6, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 12 \rangle$ — $117.9°$

6) $\mathbf{u} = 27\mathbf{i} + 14\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ — $109.3°$

7) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ — $65.2°$

الفصل الخامس المتجهات

8) **مواصلات،** انطلق القطاران A, B من نقطة واحدة. إذا كان $\langle 33, 12 \rangle$ يُمثّل مسار القطار A ، و $\langle 55, 4 \rangle$ يُمثّل مسار القطار B ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. $15.8°$

9) **فيزياء،** يدفع شخص عربة على أرض مستوية بقوة مقدارها 100 N، بزاوية لأسفل قياسها $30°$ عن الأفقي. أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله الشخص إذا حرّك العربة مسافة 6 m، وقرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (إرشاد: استعمل الصيغة $W = F \cdot d$ ، حيث W الشغل بالجول، وَ F القوة بالنيوتن، وَ d المسافة بالأمتار). 520 J

6

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

الدروس من 1-5 إلى 3-5

التقويم التكويني

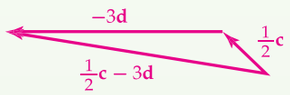
استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب. للأسئلة التي لم يُجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (13)

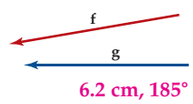
إجابة:

(4



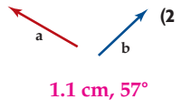
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، وقرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة. (الدرس 5-1)

(1



6.2 cm, 185°

(2

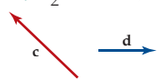


1.1 cm, 57°

(3 التزلُّج: يسحب شخص مزلجةً على الجليد بقوةٍ مقدارها 50 N بزاوية 35° مع الأفقي، أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة، وقرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 5-1)

40.96 N; 28.68 N

(4 ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$ (الدرس 5-1) انظر الهامش



اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ ممَّا يأتي بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. (الدرس 5-2)

(5 $B(3,-1), C(4,-7)$ $\mathbf{i} + -6\mathbf{j}$

(6 $B(10,-6), C(-8,2)$ $-18\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

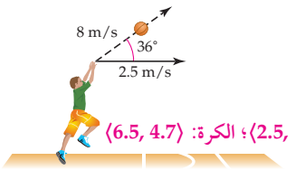
(7 $B(1,12), C(-2,-9)$ $-3\mathbf{i} + -21\mathbf{j}$

(8 $B(4,-10), C(14, 10)$ $10\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$

(9 اختيار من متعدد: أيٌّ مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$، حيث $A(-5, 3)$ نقطة بدايته، و $B(2, -1)$ نقطة نهايته؟ B (الدرس 5-2)

A $\langle 4, -1 \rangle$
B $\langle 7, -4 \rangle$
C $\langle -4, 7 \rangle$
D $\langle -6, 4 \rangle$

(10 كرة سلة: ركض راشد في اتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة 2.5 m/s، ومن منتصف الملعب صوَّب كرةً بسرعة 8 m/s بزاويةٍ قياسها 36° مع الأفقي. (الدرس 5-2)



a) راشد: $\langle 2.5, 0 \rangle$؛ الكرة: $\langle 6.5, 4.7 \rangle$

a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللّذين يُمثِّلان سرعة راشد، وسرعة الكرة، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

10.2 m/s بزاوية قياسها 28° مع الأفقي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على الترتيب في كلٍّ مما يأتي، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-2)

(11 $A(-4, 2), B(3,6)$ $\langle 7, 4 \rangle$; $\sqrt{65} \approx 8.1$

(12 $Q(1, -5), R(-7, 8)$ $\langle -8, 13 \rangle$; $\sqrt{233} \approx 15.3$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، وقرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 5-3)

(13 $\mathbf{u} = \langle 9, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -2 \rangle$ 93°

(14 $\mathbf{u} = \langle 8, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 4 \rangle$ 90°

(15 $\mathbf{u} = \langle 2, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 8 \rangle$ 114°

(16 اختيار من متعدد: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 4 \rangle, \mathbf{w} = \langle 8, -5 \rangle$، فما ناتج $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$؟ B (الدرس 5-3)

A −2
B −18
C 15
D 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 5-3)

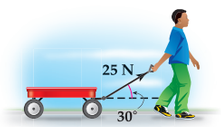
(17 $\langle 2, -5 \rangle \cdot \langle 4, 2 \rangle$ −2؛ غير متعامدين

(18 $\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 7, 4 \rangle$ 16؛ غير متعامدين

(19 $\langle 1, -6 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle$ −43؛ غير متعامدين

(20 $\langle 3, -6 \rangle \cdot \langle 10, 5 \rangle$ 0؛ متعامدان

(21 عربة: يسحب أحمد عربةً بقوةٍ مقدارها 25 N، وبزاوية 30° مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 5-3)



a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. 3247.6 جولًا

b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي 40°، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أم أقل؟ فسّر إجابتك. أقل؛ سيبذل 2872.7 جولًا

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 5-1, 5-2, 5-3	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
Vectors in Three-Dimensional Space

فيما سبق:
درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا. الدرس (1–5)

والآن:
- أعيّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبّرُ عن المتجهات جبريًا، وأجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

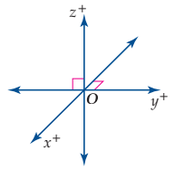
المفردات:
نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system
المحور z
z-axis
الثُمن
octant
الثلاثي المرتب
ordered triple

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

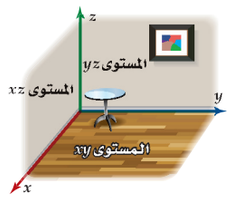
لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 5.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y كما في الشكل 5.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُمن**، ويمكن تمثيل الثُمن الأول بجزء الحجرة في الشكل 5.4.3.



الشكل 5.4.1

الشكل 5.4.2



الشكل 5.4.3

تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى xy، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z.

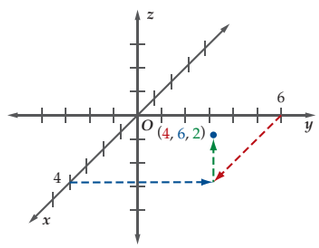
مثال 1 تعيين نقطة في الفضاء

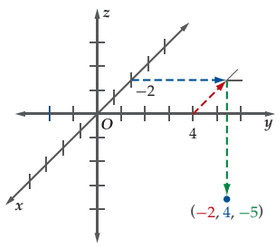
عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

a) $(4, 6, 2)$ **b)** $(-2, 4, -5)$

عيّن $(6, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.

عيّن $(4, -2)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد 5 وحداتٍ أسفل الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.





تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: انظر ملحق الإجابات

1A) $(-3, -4, 2)$ **1B)** $(3, 2, -3)$ **1C)** $(5, -4, -1)$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-5
تمثيل المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا.

الدرس 4-5
تعيين النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
التعبير عن المتجهات جبريًا، وإجراء العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

ما بعد الدرس 4-5
إيجاد الضرب الداخلي والزاوية بين متجهَين في الفضاء.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما عدد أجزاء المستوى الإحداثي؟ وماذا يسمى كلُّ جزءٍ منها؟ أربعة، رُبُع.
- ما الإشارات الممكنة للأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي الثنائي الأبعاد؟ $(+, +), (-, +), (-, -), (+, -)$

- ما عدد أجزاء نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد؟ وماذا يُسمى كل جزء منها؟ ثمانية، ثُمُن.
- ما الإشارات الممكنة للثلاثيات المرتبة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد.

$(+, +, +), (-, -, -), (-, -, +),$
$(+, -, -), (+, -, +), (-, +, -),$
$(+, +, -), (-, +, +)$

مصادر الدرس 5-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (36)	• تنويع التعليم ص (36)	• تنويع التعليم ص (35، 38)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18, 19) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

المثال 1 يُبيّن كيفية تعيين نقطة في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد.

a) $(1, 5, 3)$.

b) $(-1, -5, 2)$.

للفرعين **a, b** انظر الهامش

2 **هندسة معمارية:** صمّم مهندس معماري غرفة خشبيةً على سطح أحد المنازل، واستعمل قطعة خشب طويلة؛ لتثبيت السقف بحيث ينتهي طرفاها بنقطتين إحداثياتهما هي: $(30, 40, 10)$, $(70, 80, 20)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالقدم، فأجب عمَّا يأتي:

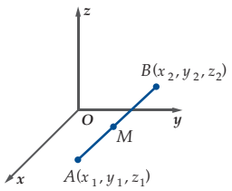
a) أوجد طول قطعة الخشب.

57.45ft

b) يرغب صاحب المنزل في تثبيت مصباح كهربائي في منتصف قطعة الخشب، أوجد إحداثيات موقع المصباح. $(50, 60, 15)$

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي: صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء



تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

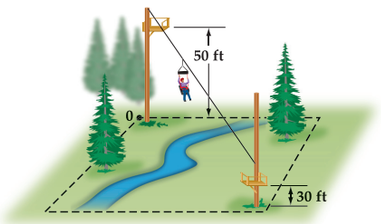
وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ.

مثال 2 من واقع الحياة: المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء



رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.

صيغة المسافة $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$, $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ $= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2}$

بسّط ≈ 101.98

أي أننا نحتاج إلى حبلٍ طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصَّتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

استعمل صيغة نقطة المنتصف في الفضاء.

صيغة المنتصف $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$, $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ $= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right)$

$= (40, 52, 40)$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي $(40, 52, 40)$

تحقق من فهمك

2A) نعم؛ تبعد الطائرتان عن بعضهما حوالي 2045 قدمًا، وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها، وهي نصف ميل تقريبًا. (2640 قدم)

2) **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألَّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(450, -250, 28000)$, $(300, 150, 30000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

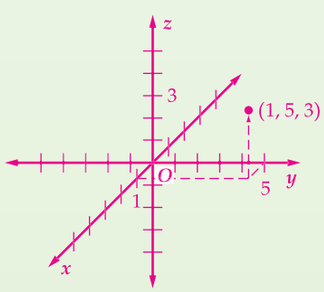
A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟ $(375, -50, 29000)$

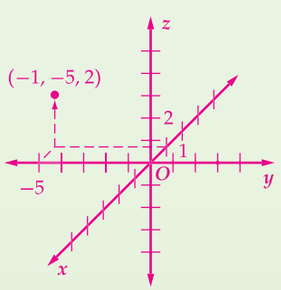
إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا

إجابات (مثال إضافي):

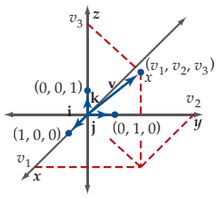
(1a)



(1b)



المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الثلاثية $\langle 0, 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في الشكل 5.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ بالآتي:
$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



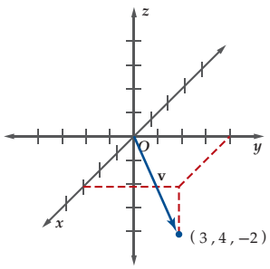
الشكل 5.4.4

مثال 3 تعيين متجه في الفضاء

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

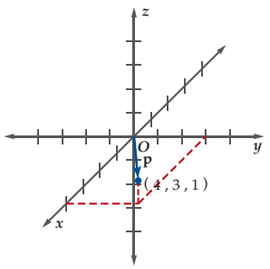
a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{v}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{p}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.



تحقق من فهمك 3A, B انظر ملحق الإجابات

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

المتجهات في الفضاء

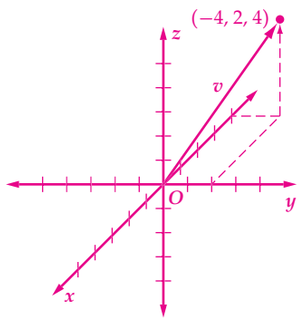
المثال 3 يُبيّن كيفية تعيين متجه في الفضاء.

المثال 4 يُبيّن كيفية إجراء العمليات على المتجهات في الفضاء.

المثال 5 يُبيّن كيفية التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا.

مثالان إضافيان

3 مثِّل بيانيًّا المتجه $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 4 \rangle$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد.



4 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات:
$\mathbf{v} = \langle 1, 5, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -6, 3, -2 \rangle,$
$\mathbf{z} = \langle 0, 5, -1 \rangle$:

a) $3\mathbf{v} - \mathbf{w} - \mathbf{z}$ $\langle 9, 7, 9 \rangle$

b) $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w} + 3\mathbf{z}$
$\langle -13, 16, -9 \rangle$

تنويع التعليم

فوق

توسع ما الشكل الثلاثي الأبعاد الذي رؤوسه:
$A(2, 6, 6), B(2, 6, 0), C(5, 6, 6), D(5, 6, 0), E(2, 1, 6), F(2, 1, 0), G(5, 1, 6), H(5, 1, 0)$
متوازي مستطيلات

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض نموذجًا للنظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد على السبورة، ثم عيِّن عليه نقطة، واطلب إلى أحد الطلاب إيجاد إحداثياتها. اسحب النقطة إلى أعلى أو إلى أسفل باتجاه المحور z، وإلى الأمام أو إلى الخلف باتجاه المحور x، وإلى اليسار أو إلى اليمين باتجاه المحور y، واطلب إلى الطلاب إيجاد إحداثيات النقطة على صورة ثلاثيٍّ مرتبٍ بعد كل مرةٍ تسحب فيها النقطة. ناقش أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزوج المرتب والثلاثي المرتب.

مثال إضافي

5 أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2, -1)$، ونقطة نهايته $B(1, 5, -3)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\langle -2, 7, -2 \rangle$, $\sqrt{57}$,

$\left\langle -\frac{2\sqrt{57}}{57}, \frac{7\sqrt{57}}{57}, -\frac{2\sqrt{57}}{57} \right\rangle$

إرشادات للمعلم الجديد

ترتيب الإحداثيات في المثال 5، ذكّر الطلاب بأن عكس ترتيب نقطتَي البداية والنهاية يُغيِّر المتجه من $\overrightarrow{AB}$ إلى $\overrightarrow{BA}$، وهما متجهان لهما الطول نفسه، ولكن في اتجاهين متعاكسين.

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات
خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

مثال 4 العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$

a $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$ عوّض

$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$ اضرب متجهًا في عدد حقيقي

$= \langle 8, -24, 18 \rangle$ اجمع المتجهين

b $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$ عوّض

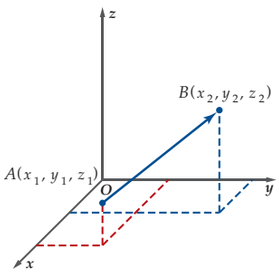
$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$ اضرب متجه في عددٍ حقيقي

$= \langle 9, -10, -7 \rangle$ اجمع المتجهات

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$

4A $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ $\langle 12, 16, -56 \rangle$ **4B** $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$ $\langle 9, -42, 45 \rangle$



وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

مثال 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -2, -4)$، ونقطة نهايته $B(6, 6, 3)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ الصورة الإحداثية لمتجه

$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$ $(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1), (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

$= 9\sqrt{2}$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$, $|\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5A $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$ **5B** $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

5A $\langle 1, 9, 3 \rangle$; $\sqrt{91}$; $\left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle$

5B $\langle 4, -1, 2 \rangle$; $\sqrt{21}$; $\left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب، بناءً نظام إحداثيات ثلاثي الأبعاد باستعمال أعوادٍ من الخشب، ثم اطلب إليهم تدريج محاوره وتلوين الجزء السالب منها، وفي الوقت الذي يرفع فيه أحد الطلاب النموذج، اطلب إلى طلابٍ آخرين تعيين نقاطٍ وتحديد إحداثيَّاتها.

تدرب وحل المسائل

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1)

1) $(1, -2, -4)$

2) $(3, 2, 1)$

3) $(-5, -4, -2)$

4) $(-2, -5, 3)$

5) $(2, -2, 3)$

6) $(-16, 12, -13)$

1-6) انظر ملحق الإجابات

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$

10) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

7-10) انظر ملحق الإجابات

11) **طيَّارون:** في لحظةٍ ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(19300, -121, 675)$، وإحداثيات موقع طائرةٍ أخرى $(-289, 715, 16100)$ ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم. **3445 ft**

b) عيّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة. **(193, 297, 17700)**

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3)

12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$

13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$

14) $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4 \rangle$

15) $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3 \rangle$

16) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

17) $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

18) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

19) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

12-19) انظر ملحق الإجابات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات : $\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$. (مثال 4)

20) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ $\langle -88, 6, 99 \rangle$

21) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ $\langle -65, -18, 56 \rangle$

22) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$ $\langle 38, -36, -65 \rangle$

23) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$ $\langle 48, 12, -38 \rangle$

24) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$ $\langle -68, -24, 55 \rangle$

25) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ $\langle 22, 36, 3 \rangle$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات : $\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (مثال 4)

26) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$ $-27\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$

27) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$ $-63\mathbf{i} + 28\mathbf{j} + 56\mathbf{k}$

28) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ $-22\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - \mathbf{k}$

29) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$ $50\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

30) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$ $-18\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

31) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ $-13\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

34) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$

35) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$

36) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$

37) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$

38) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$

39) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

32-39) انظر ملحق الإجابات

المحتوى الرياضي

خصائص المتجهات في الفضاء

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء تشبه مثيلاتها في المستوى. ويمكن تعريف عمليات الجمع والطرح والضرب في عددٍ ثابتٍ، وإيجاد طول المتجه، كما يمكن كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، فإذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$، وكان $\mathbf{n}$ أيَّ عددٍ حقيقيٍّ، فإن:

- $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ إذا وفقط إذا كانت: $a_1 = b_1$ ، $a_2 = b_2$ ، $a_3 = b_3$.
- $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \langle a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3 \rangle$
- $n\mathbf{a} = \langle na_1, na_2, na_3 \rangle$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-39 ؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–39، 54–61
ضمن ضمن المتوسط	1–39 فردي ، 40–51، 54–61
فوق فوق المتوسط	40–61

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$ ، فأوجد إحداثيات النقطة P في كلٍّ ممَّا يأتي:

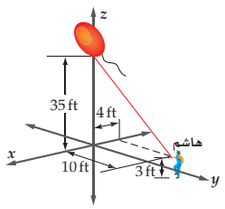
40) $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$ **(4, −2, −1)**

41) $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$ **(−3, 6, −1)**

42) $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$ **(3, −2, 7)**

43) $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ $\left(-\frac{11}{2}, -8, 2\right)$

44) تطوُّع: تَطَوَّع هاشم لحمل بالونٍ كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدمٍ. **34 ft**



حدّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع): **45–47)** **انظر ملحق الإجابات**

45) $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

46) $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

47) $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

48) كرات: استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء؛ لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r .
"إرشاد: الكرة هي مجموعة نقاط في الفضاء تبعد بعدًا ثابتًا (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز)". **انظر ملحق الإجابات**

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي: **49-52)** **انظر الهامش**

49) مركزها $(3, -2, -4)$ ، طول نصف قطرها 4

50) مركزها $(6, 0, -1)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

51) مركزها $(4, -3, 5)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

52) مركزها $(0, 7, -1)$ ، طول نصف قطرها 12

مسائل مهارات التفكير العليا

53) تحدٍّ: إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M . **(0, 3.5, −4)**

54) اكتب: اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر معقولية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: **(الدرس 2-5)**

55) $A(6, -4), B(-7, -7)$ $\langle -13, -3\rangle, \sqrt{178} \approx 13.3$

56) $A(-4, -8), B(1, 6)$ $\langle 5, 14\rangle, \sqrt{221} \approx 14.9$

57) $A(-5, -12), B(1, 6)$ $\langle 6, 18\rangle, 6\sqrt{10} \approx 19$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطِّيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي: **(الدرس 2-5)**

58) $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ $\frac{21}{5}\mathbf{i} + -\frac{2}{3}\mathbf{j}$

59) $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$ $-\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{7}\mathbf{j}$

60) $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$ $-15.8\,\mathbf{i} + -6.1\,\mathbf{j}$

تدريب على اختبار

61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5), B(1, 0, 2), C(0, -3, 5)$ ؟ **B**

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

تنبيه!

أخطاء شائعة قد يجد بعض الطلاب صعوبة في البدء بحل التمارين 47–45؛ لذا ذكِّرهم بأن المثلث القائم الزاوية فيه زاوية قياسها 90° وضلعان متعامدان، وأن المثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان لهما الطول نفسه، وأن أطوال أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع متساوية في الطول، وأنه لا يوجد ضلعان لهما الطول نفسه في المثلث المختلف الأضلاع.

4 التقويم

تعلُّم لاحق اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة حول ما تعلَّموه في هذا الدرس، وكيف سيساعدهم في الدرس القادم المتعلق بإيجاد الزاوية بين متجهَين.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 4-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (12)

إجابات:

49) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$

50) $(x - 6)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{1}{4}$

51) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 3$

52) $x^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 144$

تنويع التعليم

فوق

توسع يكون الجسم في وضع اتزان، إذا كانت محصلة القوى المؤثرة فيه صفرًا، اسأل الطلاب إذا أثرت ثلاث قوى في جسم ومُثلت بالمتجهات $\langle -1, 2, -6\rangle, \langle 5, 2, 3\rangle, \langle 4, -1, 3\rangle$، فما المتجه الرابع الذي يؤثر في الجسم ويجعله في حالة اتزان. $\langle -8, -3, 0\rangle$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 5

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (18) دون

الاسم: التاريخ:

5-4 تدريبات إعادة التعليم

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

الاحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد، يمكن استعمال ثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية؛ لتمثيل المتجهات كما هو الحال في الأزواج المرتبة، ويمكن إجراء العمليات التي سبق لك إجراؤها على المتجهات الممثلة بالأزواج المرتبة على المتجهات الممثلة بالثلاثيات المرتبة.

مثال **طيور،** إذا كان موقعا طائرين يُمثَّلان بالنقطتين $A(10, 2, -5)$ ، $B(7, -9, 3)$؛ حيث يُعبِّر عن الإحداثيات بالكيلومترات، فأجب عما يأتي:

a) كم المسافة بين الطائرين؟

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين في الفضاء.

صيغة المسافة $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$= \sqrt{(7 - 10)^2 + ((-9) - 2)^2 + (3 - (-5))^2}$

$(x_1, y_1, z_1) = (10, 2, -5)$

$(x_2, y_2, z_2) = (7, -9, 3)$

≈ 13.93

أي أن المسافة بين الطائرين هي 14 km تقريبًا.

b) إذا التقى الطائران في نقطة منتصف المسافة بينهما، فأوجد إحداثيات هذه النقطة.

صيغة نقطة المنتصف $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{10 + 7}{2}, \frac{2 + (-9)}{2}, \frac{-5 + 3}{2}\right)$

$(x_1, y_1, z_1) = (10, 2, -5)$

$(x_2, y_2, z_2) = (7, -9, 3)$

$\approx (8.5, -3.5, -1)$

فعندئذٍ تكون إحداثيات نقطة المنتصف هي: $(8.5, -3.5, -1)$.

تمارين

عيّن كل نقطة من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1) $(3, 2, 1)$ 2) $(4, -2, -1)$.

أوجد طول القطعة المستقيمة الممثلة نقطتا بدايتها ونهايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي:

3) $(8, -3, 9), (2, 8, -4)$ **18.06; $\left(5, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$**

4) $(-6, -12, -8), (7, -2, -11)$ **16.67; $\left(\frac{1}{2}, -7, -\frac{19}{2}\right)$**

تدريبات إعادة التعليم (19) دون

الاسم: التاريخ:

5-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

المتجهات في الفضاء، العمليات على المتجهات في الفضاء تُشبه العمليات على المتجهات في المستوى، فيمكن جمع، أو طرح متجهين في الفضاء، أو ضربه في عدد ثابت، كما هو الحال في المتجهات في المستوى.

إذا كانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهاية متجه $\mathbf{v}$ في الفضاء في وضع قياسي، فإننا نعبر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. كما نعبر عن المتجه الصفري بالصورة $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$، ومتجهات الوحدة القياسية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$، $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$. ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v}$ بالصورة الإحداثية على صورة توافق خطّي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ بالآتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال **أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-3, 5, 1)$، ونقطة نهايته $B(3, 2, -4)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.**

الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$

$= \langle 3 - (-3), 2 - 5, -4 - 1 \rangle = \langle 6, -3, -5 \rangle$

$(x_1, y_1, z_1) = (-3, 5, 1)$ ، $(x_2, y_2, z_2) = (3, 2, -4)$

وباستعمال الصورة الإحداثية فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{70}$

$\overrightarrow{AB} = \langle 6, -3, -5 \rangle$

استعمل طول المتجة $\overrightarrow{AB}$ والصورة الإحداثية لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

$= \frac{\langle 6, -3, -5 \rangle}{\sqrt{70}} = \left\langle \frac{3\sqrt{70}}{35}, -\frac{3\sqrt{70}}{70}, -\frac{\sqrt{70}}{14} \right\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 6, -3, -5 \rangle$ ، $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{70}$

تمارين

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A ونقطة نهايته B، ثم أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

1) $A(-10, 3, 9), B(8, -7, 3)$ $\langle 18, -10, -6 \rangle, 2\sqrt{115}$;

2) $A(-1, -4, -7), B(8, 4, 10)$ $\langle 9, 8, 17 \rangle, \sqrt{434}$;

$\left\langle \frac{9\sqrt{434}}{434}, \frac{4\sqrt{434}}{217}, \frac{17\sqrt{434}}{434} \right\rangle$

$\left\langle \frac{9\sqrt{115}}{115}, \frac{\sqrt{115}}{23}, \frac{3\sqrt{115}}{115} \right\rangle$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $X = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $Y = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $Z = -2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$:

3) $3X + 2Y - 4Z$ $\langle 19, -52, -17 \rangle$

4) $-6Y + 2Z$ $\langle -10, 54, -34 \rangle$

تدريبات حل المسألة (20) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

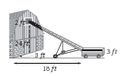
5-4 تدريبات حل المسألة

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

1) **طائر،** طار طائر من النقطة $(600, 46.43, 24.38)$، إلى النقطة $(0, 39.09, 21.40)$ في مسار مستقيم، أوجد إحداثيات منتصف مساره.

$(300, 42.76, 22.89)$

2) **رافعة،** يستعمل مزارع رافعةً لرفع حزم من القش إلى نافذة في الجزء العلوي لحظيرة ماشية، تعلو النافذة 24 ft عن سطح الأرض، وتبعد 18 ft عن مكان تحميل القش و3 ft إلى اليمين من مكان التحميل؛ حيث تمثل النافذة بالنقطة $(3, 18, 24)$، وسيتم رفع حزم القش ابتداءً من 3 ft فوق سطح الأرض، وهذا يُمثَّل بالنقطة $(0, 0, 3)$.



a) أوجد طول الرافعة إلى أقرب قدم لتصل إلى النافذة.

28 ft

b) إذا احتاج المزارع إلى إدخال الرافعة قدمين داخل النافذة، فكم سيكون طول الرافعة؟

30 ft

3) **طيران،** تنصُّ قوانين السلامة على أن تكون المسافة بين طائرتين في الهواء نصف ميل على الأقل، فإذا كانت النقطتان: $(-250, 400, 5000)$ ، $(300, 455, 2800)$ تمثلان موقعَي طائرتين على مقربة من المطار، حيث يُعبِّر عن الإحداثيات بالأقدام.

a) **كم قدمًا المسافة بين الطائرتين؟**

2268 ft

b) **وهل خالفت الطائرتان قوانين السلامة؟**

نعم

4) **تنزُّه،** توجد مجموعة من خطوط السير التي يمكن أن يسلكها الشخص في أحد أماكن التنزه المشجرة. فإذا كانت النقطة $(1.5, 0.5, 0.4)$ تمثل منصة انطلاق خط السير الأول، والنقطة $(1.8, 1, 0.2)$ تمثل المنصة الثانية لهذا الخط، وإذا مثّلت كلُّ وحدة إحداثيات ميلًا واحدًا، فما طول هذا الخط؟

0.62 ميل

5) **دراجات هوائية،** نظَّمت مجموعة من الشباب سباقًا للدراجات الهوائية، على أن يتكون فريق التنافس من شخصين، وأن يُبدِّل أعضاء الفريق بعد قطع نصف مسافة السباق، فإذا مثّلت النقطة $(0, 0, 3)$ بداية السباق والنقطة $(2, -1, 9)$ نهايته، فما النقطة التي سيتبدل عندها أعضاء الفريق؟

$\left(1, -\frac{1}{2}, 6\right)$

التدريبات الإثرائية (21) فوق

الاسم: التاريخ:

5-4 التدريبات الإثرائية

متجهات أساسية في الفضاء الثلاثي الأبعاد

العبارة $\mathbf{v} = r\mathbf{u} + s\mathbf{w} + t\mathbf{z}$ تمثِّل جمع ثلاثة متجهات، ضُرب كلٌّ منها في عدد، وتسمى العبارة توافقًا خطيًّا من المتجهات $\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$.

يمكن التعبير عن أي متجه في الفضاء $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطّي من ثلاثة متجهات غير متوازية مثنى مثنى.

مثال **مثال: اكتب المتجه $\mathbf{v} = \langle -1, -4, 3 \rangle$ على صورة توافق خطّي من المتجهات: $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, -2, 1 \rangle$, $\mathbf{z} = \langle -1, -1, 1 \rangle$.**

$\langle -1, -4, 3 \rangle = r\langle 1, 3, 1 \rangle + s\langle 1, -2, 1 \rangle + t\langle -1, -1, 1 \rangle = \langle r + s - t, 3r - 2s - t, r + s + t \rangle$

بمساواة الإحداثيات المتناظرة:

$-1 = r + s - t$

$-4 = 3r - 2s - t$

$3 = r + s + t$

بحل نظام المعادلات ينتج أن $r = 0$ ، $s = 1$ ، $t = 2$؛

لذا فإن $v = w + 2z$.

اكتب المتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطّي من المتجهات $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $\mathbf{v} = \langle -6, -2, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, 1, 0 \rangle, \mathbf{w} = \langle 1, 0, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 0, 1, 1 \rangle$

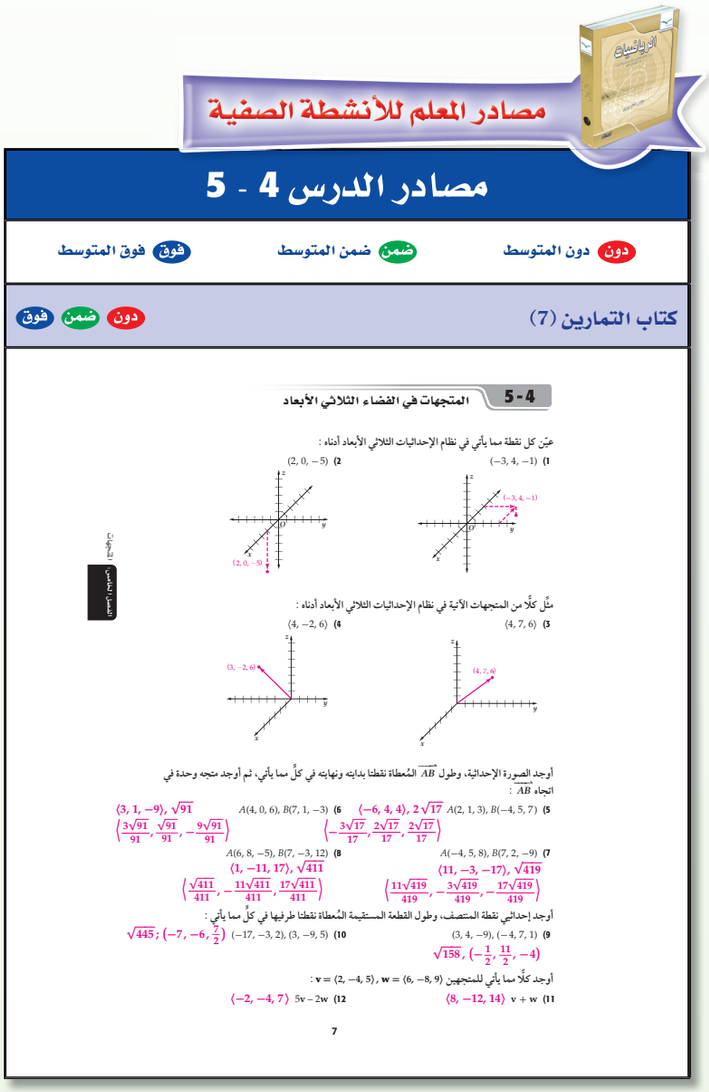
$\mathbf{v} = -5\mathbf{u} - \mathbf{w} + 3\mathbf{z}$

2) $\mathbf{v} = \langle 5, -2, 0 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, -2, 3 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 0, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 4, 2, -1 \rangle$

$\mathbf{v} = +\frac{8}{7}\mathbf{u} - \frac{23}{7}\mathbf{w} + \frac{1}{7}\mathbf{z}$

3) $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 1, 2, -1 \rangle, \mathbf{w} = \langle 2, 2, 1 \rangle, \mathbf{z} = \langle 1, 0, 1 \rangle$

$\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{3}{2}\mathbf{z}$



ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء
Dot and Cross Products of Vectors in Space

لماذا ؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطًّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطَتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

فيما سبق:
درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى .
الدرس (3–5)

والآن:
- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء .
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:
الضرب الاتجاهي
cross product
متوازي السطوح
parallelepiped
الضرب القياسي الثلاثي
triple scalar product

www.obeikaneducation.com

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعَرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال 1 — إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$
$= -35 + 51 + (-15) = 1$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$
$= 12 + (-21) + 9 = 0$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.

تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

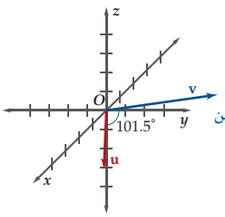
1A) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$ غير متعامدين؛ 4

1B) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$ متعامدان؛ 0

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

مثال 2 — الزاوية بين متجهين في الفضاء

أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرة.



الزاوية بين متجهين $\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ $\cos\theta = \frac{\langle 3, 2, -1 \rangle \cdot \langle -4, 3, -2 \rangle}{|\langle 3, 2, -1 \rangle|\,|\langle -4, 3, -2 \rangle|}$

أوجد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين $\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$

بسّط وحُل بالنسبة إلى θ $\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $101.5°$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشريةٍ. 124.6°

مصادر الدرس 5-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (41)	• تنويع التعليم ص (41)	• تنويع التعليم ص (41, 43)
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	• ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22, 23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-5
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين في المستوى الإحداثي.

الدرس 5-5
إيجاد الضرب الداخلي لمتجهَين والزاوية بينهما في الفضاء.
إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهات واستعماله في إيجاد المساحات والحجوم.

ما بعد الدرس 5-5
إيجاد متوسط السرعة المتجهة، والسرعة المتجهة اللحظية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- كيف تجد المتجه الذي يمثل مسار كلٍّ من الطائرتين؟ بطرح إحداثيات نقطة الإقلاع من إحداثيات النقطة التي تصل إليها الطائرة بعد الفترة الزمنية المحددة.
- كيف تتحقق من توازي خطَّي سيرهما؟ إذا كانت الزاوية بين المتجهين (المسارين) 0° أو 180°، أو إذا كانت النسبة بين الإحداثيات المتناظرة ثابتةً.

الضرب الداخلي في الفضاء

المثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء؛ للتحقق من كونهما متعامدين.

المثال 2 يُبيّن كيفية إيجاد الزاوية بين متجهَين في الفضاء.

مثالان إضافيان

1 أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين:

(a) $\mathbf{u} = \langle -1, 6, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -1, -3 \rangle$.

0، متعامدان

(b) $\mathbf{u} = \langle 2, 4, -6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2, 4 \rangle$.

-22، غير متعامدين

2 أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ إذا كان: $\mathbf{u} = \langle -4, -1, -3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 3, 4 \rangle$ إلى أقرب منزلةٍ عشريةٍ. $168.6°$ تقريبًا

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

إرشادات للمعلم الجديد

محددة المصفوفة من الرتبة 3 × 3

يمكن أن يستعمل الطلاب قاعدة الأقطار؛ لحساب قيمة محددة المصفوفة من الرتبة 3×3.

الضرب الاتجاهي

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهَين في الفضاء.

المثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد مساحة متوازي أضلاع في الفضاء.

المثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد حجم متوازي سطوح.

مثالان إضافيان

4 أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

34.89 وحدةً مربعةً تقريبًا.

5 أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه:

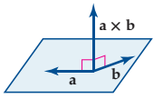
$\mathbf{t} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

$\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

$\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

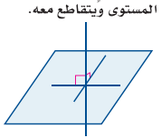
49 وحدةً مكعبةً.

الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ $\mathbf{a}$ cross $\mathbf{b}$ ، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.



إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًا على مستوى، إذا كان عموديًا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.



مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1
بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2
بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

تنبيه!

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

مثال 3 — إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

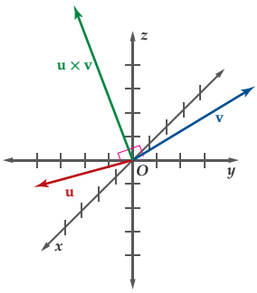
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$ قاعدة إيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة

$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$ أوجد قيمة محدّدة الدرجة الثانية

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$ بسّط

$$= \langle -5, -6, 3 \rangle$$ الصورة الإحداثية



ولإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$

$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle 3, -2, 1 \rangle$

$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$

$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✓

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle -3, 3, 1 \rangle$

$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$

$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✓

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

تحقق من فهمك **3A, B** للإثبات انظر ملحق الإجابات

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3A $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$ $\langle 9, -21, -6 \rangle$

3B $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$ $\langle -1, -7, 3 \rangle$

مثال إضافي

3 أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -1, -4, 2 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يُعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. $\langle -10, -10, -25 \rangle$،

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle -10, -10, -25 \rangle \cdot \langle 6, -1, -2 \rangle$

$= -60 + 10 + 50 = 0$

أي أن: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد $\mathbf{u}$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle -10, -10, -25 \rangle \cdot \langle -1, -4, 2 \rangle$

$= 10 + 40 - 50 = 0$

أي أن: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد $\mathbf{v}$

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل 5.5.1 .

مـثال 4 مساحة متوازي أضلاعٍ في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة

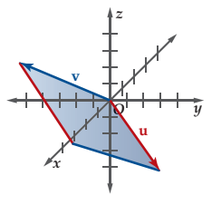
$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثانية

الخطوة 2 أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ طول متجه في الفضاء

$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$ بسّط

أي أن مساحة متوازي الأضلاع في الشكل 5.5.1 ، تساوي 16.91 وحدةً مربعةً تقريبًا.



الشكل 5.5.1

تحقق من فهمك $\sqrt{545}$ أو حوالي 23.35 وحدةً مربعةً.

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 5.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة للضرب القياسيِّ الثلاثي لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.

مفهوم أساسي الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات t, u, v يُعرف كالآتي $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

مـثال 5 حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

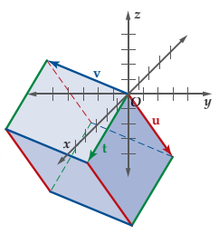
$\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$ أوجد قيمة محدّدة المصفوفة من الرتبة 3 × 3

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$ بسّط

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل 5.5.2 هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ ، ويساوي 34 وحدةً مكعبةً.



الشكل 5.5.2

تحقق من فهمك

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة. 86 وحدةً مكعبةً.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلاب إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ، بوضع العدد المناسب في الفراغات في المعادلة الآتية:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \boxed{\mathbf{j}} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & -2 & \boxed{-5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \boxed{-2} & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \boxed{} \begin{vmatrix} \boxed{2} & 4 \\ \boxed{3} & -5 \end{vmatrix}\boxed{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & \boxed{-2} \end{vmatrix}\mathbf{k} = \boxed{23}\,\mathbf{i} - \boxed{-22}\,\mathbf{j} + \boxed{5}\,\mathbf{k}$$

إرشادات للمعلم الجديد

الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي

لاحظ أن عملية الضرب الداخلي إبدالية بخلاف عملية الضرب الاتجاهي.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة الطالب زوّد الطلاب بعدد من الأمثلة على مصفوفات من الرتبة 2 × 2 مثل:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

واسأل الطلاب أن يحددوا ما إذا كانت قيمة محددة كل من المصفوفات أعلاه موجبة أو سالبة. واختيار الرمز إشارة معينة مثل وضع كف اليد بشكل أفقي إذا كانت سالبة إشارة أخرى مثل وضع كف اليد بشكل عمودي إذا كانت موجبة.

المحتوى الرياضي

متوازي السطوح هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء، له ستة أوجه، كل منها على شكل متوازي أضلاع، وإذا التقت ثلاثة متجهات من الأحرف الاثني عشر في مستويات مختلفة في نقطة واحدة، فإنها تشكل أحرفًا متجاورة لمتوازي السطوح.

وحجم متوازي السطوح يساوي ناتج ضرب مساحة سطح القاعدة في الارتفاع، كما يساوي الضرب القياسي لثلاثيات المتجهات.

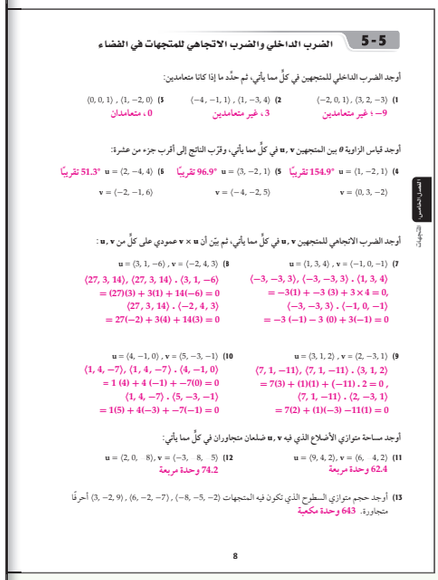
وهناك حالات خاصة من متوازي السطوح منها:

المكعب (جميع أوجهه مربعات).

متوازي المستطيلات (جميع أوجهه مستطيلات).

إرشادات للمعلم الجديد

نبه الطلاب إلى أن اختلاف الترتيب للمتجهات الثلاثة في الضرب القياسي الثلاثي لا يؤثر على القيمة المطلقة للناتج.



5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

1) $\langle -2, 0, 1\rangle \cdot \langle 3, 2, -3\rangle$ ؛ غير متعامدين
2) $\langle -4, -1, 1\rangle \cdot \langle 1, -3, 4\rangle$ ؛ غير متعامدين
3) $\langle 0, 0, 1\rangle \cdot \langle 1, -2, 0\rangle$ ؛ متعامدان

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, -2\rangle$ ؛ 154.9° تقريبًا
5) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, -2, 5\rangle$ ؛ 96.9° تقريبًا
6) $\mathbf{u} = \langle 2, -4, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 6\rangle$ ؛ 51.3° تقريبًا

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$:

7) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 0, -1\rangle$
$\langle -3, -3, 3\rangle$, $\langle -3, -3, 3\rangle \cdot \langle 1, 3, 4\rangle$
$= -3(1) + -3(3) + 3 \times 4 = 0$,
$\langle -3, -3, 3\rangle \cdot \langle -1, 0, -1\rangle$
$= -3(-1) - 3(0) + 3(-1) = 0$

8) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 4, 3\rangle$
$\langle 27, 3, 14\rangle$, $\langle 27, 3, 14\rangle \cdot \langle 3, 1, -6\rangle$
$= (27)(3) + 3(1) + 14(-6) = 0$
$\langle 27, 3, 14\rangle \cdot \langle -2, 4, 3\rangle$
$= 27(-2) + 3(4) + 14(3) = 0$

9) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -3, 1\rangle$
$\langle 7, 1, -11\rangle$, $\langle 7, 1, -11\rangle \cdot \langle 3, 1, 2\rangle$
$= 7(3) + (1)(1) + (-11)\, 2 = 0$,
$\langle 7, 1, -11\rangle \cdot \langle 2, -3, 1\rangle$
$= 7(2) + (1)(-3) - 11(1) = 0$

10) $\mathbf{u} = \langle 4, -1, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, -3, -1\rangle$
$\langle 1, 4, -7\rangle$, $\langle 1, 4, -7\rangle \cdot \langle 4, -1, 0\rangle$
$= 1(4) + 4(-1) + -7(0) = 0$
$\langle 1, 4, -7\rangle \cdot \langle 5, -3, -1\rangle$
$= 1(5) + 4(-3) + -7(-1) = 0$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

11) $\mathbf{u} = \langle 9, 4, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 6, -4, 2\rangle$ ؛ 62.4 وحدة مربعة
12) $\mathbf{u} = \langle 2, 0, -8\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, -8, 5\rangle$ ؛ 74.2 وحدة مربعة

13) أوجد حجم متوازي السطوح الذي تكون فيه المتجهات $\langle 2, -8, -5\rangle$, $\langle 6, -2, -7\rangle$, $\langle 3, -2, 9\rangle$ أحرفًا متجاورة. 643 وحدة مكعبة

8

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-23 ؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء شائعة في الأسئلة 20–23، قد يعتبر بعض الطلاب أن قيمة حجم متوازي السطوح، يمكن أن تكون سالبة عند تطبيق الضرب القياسي لثلاثيات المتجهات؛ لذا ذكرهم بأن الحجم هو قياس والقياس موجب، لذلك فالحجم هو القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات.

إجابات:

16) $13\sqrt{19}$ أو 56.7 وحدة مربعة تقريبًا.
17) $\sqrt{186}$ أو 13.6 وحدة مربعة تقريبًا.
18) $\sqrt{6821}$ أو 82.6 وحدة مربعة تقريبًا.
19) $3\sqrt{74}$ أو 25.8 وحدة مربعة تقريبًا.

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$ ؛ 0؛ متعامدان
2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$ ؛ 14؛ غير متعامدين
3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$ ؛ 0؛ متعامدان
4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$ ؛ −15؛ غير متعامدين
5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ؛ −8؛ غير متعامدين
6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ؛ 0؛ متعامدان

7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتَي الهيدروجين في جُزيءِ الماء عند $\langle -55.5, 55.5, 55.5\rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5\rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرَّبة إلى أقرب جزءٍ من عشرة. (مثال 2) 109.5°

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرة: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$ ؛ 88.9°
9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$ ؛ 45.4°
10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$ ؛ 37.5°
11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ ؛ 152.3°

12-15) انظر ملحق الإجابات

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (مثال 3)

12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$ ؛ $\langle 21, 7, 0\rangle$
13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$ ؛ $\langle 25, 6, 71\rangle$
14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$ ؛ $\langle 38, 26, 21\rangle$
15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ؛ $\langle 7, 23, 12\rangle$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4) 16-19) انظر الهامش

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 6, -5, 3\rangle$
17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 7, 2, -2\rangle$
18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
19) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 5)

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle$, $\mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$ ؛ 429 وحدة مكعبة
21) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle$, $\mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$ ؛ 85 وحدة مكعبة
22) $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ ؛ 40 وحدة مكعبة
23) $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ؛ 69 وحدة مكعبة

24-27) إجابات ممكنة

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

24) $\langle 3, -8, 4\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 4, 3, 3\rangle$
25) $\langle -1, -2, 5\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 5, 5, 3\rangle$
26) $\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle 1, 9, 1\rangle$
27) $\langle 7, 0, 8\rangle$ إجابة ممكنة: $\langle -8, 0, 7\rangle$

إذا عُلم كلٌّ من $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{u}$ ، فأوجد حالةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

28) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$ إجابة ممكنة: $\langle 3, 4, 2\rangle$
29) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4\right\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$ إجابة ممكنة: $\langle -1, -3, 4\rangle$
30) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$ إجابة ممكنة: $\langle -3, 1, -7\rangle$

حدّد ما إذا كانت النقاط المعطاة واقعةً على استقامةٍ واحدةٍ أم لا؟

31) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$ ليست على استقامة واحدة.
32) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$ ليست على استقامة واحدة.

حدّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

33) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6\rangle$, $\mathbf{n} = \langle 3, -15, 9\rangle$ متوازيان.
34) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, -2, 3\rangle$ غير متوازيين.
35) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{u}$ الذي يقع في المستوى yz، وطوله 8، ويصنع زاويةً قياسها 60° فوق الاتجاه الموجب للمحور y. $\langle 0, 4, 4\sqrt{3}\rangle$

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المُعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع أم لا، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحته، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا:

36) $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$ ليس متوازي أضلاع
37) $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$ متوازي أضلاع ؛ 9.4 وحداتٍ مربعة تقريبًا، مستطيل

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون	دون المتوسط	1–27، 42، 44–55
ضمن	ضمن المتوسط	1–39 فردي، 42، 44–55
فوق	فوق المتوسط	28–55

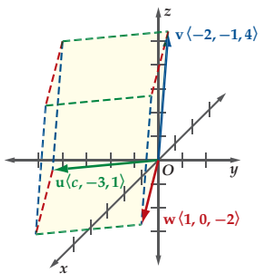
38) **عرض جوي:** أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فأقلعت الأولى من موقع إحداثياته (0, −2, 0)، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته (15, −10, 6)، في حين أقلعت الثانية من موقع إحداثياته (0, 2, 0)، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته (15, 10, 6). هل يتوازى خطًّا سير الطائرتين؟ وضِّح إجابتك. انظر الهامش

إذا كان: $\mathbf{u}=\langle 3,2,-2\rangle$ ، $\mathbf{v}=\langle -4,4,5\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

39) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ 0

40) $\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ انظر الهامش

41) إذا كانت $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداتٍ مكعبةٍ، فما قيمة $\mathbf{c}$؟ انظر الهامش



مسائل مهارات التفكير العليا

42) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، برِّر إجابتك.

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين». انظر الهامش

43) **تحدٍّ:** إذا كان: $\mathbf{u}=\langle 4,6,c\rangle$ ، $\mathbf{v}=\langle -3,-2,5\rangle$ ، فأوجد قيمة c التي تجعل: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=34\mathbf{i}-26\mathbf{j}+10\mathbf{k}$. 2

44) **تبرير:** فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى. انظر الهامش

45) **اكتب:** بيِّن طرق الكشف عن توازي متجهَين أو تعامدهما. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعةٍ مستقيمةٍ مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 4-5)

46) (1, 10, 13), (−2, 22, −6) $22.67;\ \left(-\frac{1}{2}, 16, \frac{7}{2}\right)$

47) (12, −1, −14), (21, 19, −23) $23.71;\ \left(\frac{33}{2}, 9, -\frac{37}{2}\right)$

48) (−22, 24, −9), (10, 10, 2) $36.62;\ \left(-6, 17, -\frac{7}{2}\right)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 3-5)

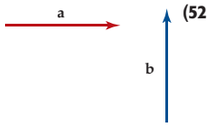
49) $\langle 1,2\rangle\cdot\langle -8,-7\rangle$ −22؛ ليسا متعامدين

50) $\langle 7,5\rangle\cdot\langle -4,-6\rangle$ −58؛ ليسا متعامدين

51) $\langle -3,5\rangle\cdot\langle 6,-3\rangle$ −33؛ ليسا متعامدين

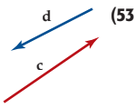
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مُستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي. (الدرس 1-5)

52)



3cm, 45° تقريبًا

53)



0.5cm, 60°

تدريب على اختبار

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟ D

A $\langle 1,0,0\rangle$, $\langle 1,2,3\rangle$

B $\langle 1,-2,3\rangle$, $\langle 2,-4,6\rangle$

C $\langle 3,4,6\rangle$, $\langle 6,4,3\rangle$

D $\langle 3,-5,4\rangle$, $\langle 6,2,-2\rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u}=\langle 3,8,0\rangle$ ، $\mathbf{v}=\langle -4,2,6\rangle$ ؟ A

A $48\mathbf{i}-18\mathbf{j}+38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i}-22\mathbf{j}+38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i}-22\mathbf{j}+38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i}-18\mathbf{j}+38\mathbf{k}$

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب تحديد أيٍّ ممَّا يأتي (قانون المسافة، الضرب في عدد حقيقي، المتجه، المحددة) ترتبط بالضرب الاتجاهي؟ **المحددة، المتجه.**

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 5-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12)

إجابات:

38) إجابة ممكنة: لا؛ لأن الزاوية بين المتجهين لا تساوي 0° ولا 180°، وعليه فالمتجهان غير متوازيين.

40) ليس ممكنًا؛ لأن $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ كمية قياسية وليست متجهًا، والضرب الاتجاهي يكون لمتجهين.

41) حجم متوازي السطوح يساوي $|\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-2&-1&4\\1&0&-2\end{vmatrix}=2\mathbf{i}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\langle c,-3,1\rangle.\langle 2,0,1\rangle$$
$$=2c+1$$
$$|2c+1|=7$$

إذن $c=3$ أو $c=-4$

42) صحيحة دائمًا، إجابة ممكنة: الضرب الاتجاهي في الفضاء يُعطِي متجهًا يعامد كلًّا من المتجهين الأصليين.

44) إجابة ممكنة: إن تعريف الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه عمودي على المستوى الذي يحوي كلًّا من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، وللحصول على متجهٍ عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد تحتاج لبُعدٍ ثالثٍ.

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب استعمال ما تعلَّموه حول إيجاد مساحة متوازي الأضلاع؛ لإثبات أن مساحة المثلث الذي ضلعاه المتجهان: $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+7\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{v}=3\mathbf{i}-2\mathbf{k}$ هي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو 12.63 وحدةً مربعةً تقريبًا.

إجابة ممكنة: مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي: $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+7\mathbf{j}-\mathbf{k}, \mathbf{v}=3\mathbf{i}-2\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران فيه تساوي $\sqrt{638}$ وحدةً مربعةً، ومساحة المثلث الذي يشكّل ضلعان منه ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع، وهي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو 12.63 وحدةً مربعةً تقريبًا.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 5

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (22) دون

الاسم: التاريخ:

5-5 تدريبات إعادة التعليم

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الضرب الداخلي في الفضاء الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى، ونتائج الضرب الداخلي لمتجهين يعطي عددًا.

ويُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ على النحو الآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{a}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

وكما هو الحال في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{a}$ في الفضاء، فإن $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

مثال 1 أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

a) $\mathbf{u} = \langle -3, 1, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, 4 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
$= -3(2) + 1(6) + 0(4)$
$= -6 + 6 + 0 = 0$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متعامدان.

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 5, -1 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
$= 3(4) + (-2)(5) + 1(-1)$
$= 12 + (-10) - 1 = 1$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ غير متعامدين.

مثال 2 أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهَين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 8, -3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 9, -3, 0 \rangle$.

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \dfrac{\langle 4, 8, -3 \rangle \cdot \langle 9, -3, 0 \rangle}{|\langle 4, 8, -3 \rangle||\langle 9, -3, 0 \rangle|}$

$\cos\theta = \dfrac{12}{\sqrt{89}\sqrt{90}}$ أوجد الضرب الداخلي وطول كلٍّ من المتجهين

$\theta = \cos^{-1}\dfrac{12}{89.5} \approx 82.3°$

أي أن قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ يساوي $82.3°$ تقريبًا.

تمارين

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 2, 4 \rangle$
35، غير متعامدين

2) $\mathbf{u} = \langle -2, -4, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 7, -4 \rangle$
2، غير متعامدين

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -2, -3 \rangle$
10−، غير متعامدين

4) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$
0 متعامدان

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ لكلٍّ مما يأتي:

5) $\mathbf{u} = \langle 5, -22, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 14, 2, 4 \rangle$
80.0°

6) $\mathbf{u} = \langle 4, -5, 7 \rangle, \mathbf{v} = \langle 11, -8, 2 \rangle$
41.3°

7) $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$
90.5°

8) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
36.8°

تدريبات إعادة التعليم (23) دون

الاسم: التاريخ:

5-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الضرب الاتجاهي، يختلف عن الضرب الداخلي، إذ إن **الضرب الاتجاهي** لمتجهَين هو متجه لا يقع في مستوى هذين المتجهين، ولكنه عمودي عليه.

الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء
إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو المتجه: $(a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$.

إذا كان لمتجهين نقطة البداية نفسها، وشكّلا ضلعين متجاورين لمتوازي أضلاع، فإن القيمة المطلقة للضرب الاتجاهي للمتجهين تُعطي مساحة متوازي الأضلاع.

إذا كان لثلاثة متجهات نقطة البداية نفسها، وشكّلت أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح، فإن القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي تعطي حجم متوازي السطوح. لإيجاد الضرب القياسي الثلاثي، استعمل المصفوفة نفسها المستعملة للضرب الاتجاهي، على أن توضع إحداثيات المتجه الثالث مكان $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

مثال أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 0, 1, 3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 0, 4, 1 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$\mathbf{u} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$ قاعدة من الدرجة الثالثة

$= (12 - 1)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (0 - 0)\mathbf{k}$ محددات مصفوفات من الدرجة الثانية

$= 11\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ بسّط

$= 11\mathbf{i} = \langle 11, 0, 0 \rangle$ الصورة الإحداثية

لإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 11, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1, 3 \rangle$	$= \langle 11, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 4, 1 \rangle$
$= 11(0) + 0(1) + 0(3)$	$= 11(0) + 0(4) + 0(1)$
$= 0 + 0 + 0$	$= 0 + 0 + 0$
$= 0$ ✓	$= 0$ ✓

بما أن حاصل الضرب الداخلي صفر في الحالتين، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

تمارين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في السؤالين الآتيين، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

1) $\mathbf{u} = \langle 2, 3, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -2, -4 \rangle$
$-14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 22\mathbf{k}; \langle -14, 2, -22 \rangle \cdot \langle 2, 3, -1 \rangle = -14(2) + 2(3) + (-22)(-1) = 0;$
$\langle -14, 2, -22 \rangle \cdot \langle 6, -2, -4 \rangle = -14(6) + 2(-2) + (-22)(-4) = 0$

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 2, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 2, 4 \rangle$
$-8\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 12\mathbf{k}; \langle -8, -28, 12 \rangle \cdot \langle 5, 2, 8 \rangle = -8(5) + (-28)(2) + 12(8) = 0;$
$\langle -8, -28, 12 \rangle \cdot \langle -1, 2, 4 \rangle = -8(-1) + (-28)(2) + 12(4) = 0$

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

5-5 تدريبات حل المسألة

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

1) **مزرعة،** إذا كان المتجهان $\langle -4, 4, 3 \rangle$، $\langle 3, 4, 2 \rangle$ يمثلان ضلعين متجاورين لمرآة في غرفة قياس ملابس، فأوجد مساحة المرآة.
33 وحدة مربعة

2) **بناء،** شُيّد بناء مزخرف على شكل متوازي سطوح، فإذا كانت المتجهات: $t = \langle 15, 12, 10 \rangle$ ، $\mathbf{u} = \langle 13, -8, -5 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -9, 13, 12 \rangle$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة للبناء، فأوجد مساحة سطحه.
1805 وحدات مربعة

3) **إنتاج،** إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 150, 100, 500 \rangle$ ، يمثل أعداد 3 أنواع من المنتجات، وكان المتجه $\mathbf{v} = \langle 5, 7, 2 \rangle$ يمثل تكلفة وحدة واحدة من كل منتج.

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
2450

b) ماذا يمثل ناتج $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$؟
تكلفة إنتاج المنتجات الثلاثة.

4) **صواريخ،** أُطلق صاروخان في آنٍ واحد، حيث انطلق الصاروخ الأول من النقطة $(0, 1, 0)$، وبعد ثانية واحدة كان عند النقطة $(12, 7, 12)$، في حين أُطلق الصاروخ الثاني من النقطة $(0, -1, 0)$، ووصل إلى النقطة $(10, -8, 3)$ بعد ثانية واحدة.

a) أوجد المتجه الذي يمثل مسار الصاروخ الأول.
$\langle 3, 6, 12 \rangle$

b) أوجد المتجه الذي يمثل مسار الصاروخ الثاني.
$\langle 3, -7, 10 \rangle$

c) أوجد قياس الزاوية بين مساري الصاروخين.
59.8°

d) إذا بقيت سرعتا الصاروخين ثابتين، فما المتجهان اللذان يمثلان الصاروخين بعد 3 ثوانٍ؟
$\langle 9, 18, 36 \rangle$ ، $\langle 9, -21, 30 \rangle$

التدريبات الإثرائية (25) فوق

الاسم: التاريخ:

5-5 التدريبات الإثرائية

بعض خصائص ضرب المتجهات

بعض خصائص ضرب المتجهات، إذا كانت $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ، $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، فأجب عن الأسئلة الآتية لاستنتاج بعض خصائص ضرب المتجهات.

1) أوجد $\mathbf{b} + \mathbf{c}$
$\langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle$

2) أوجد $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
$a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$
$a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$

3) أوجد $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$

4) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.
تلاحظ أن، $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$، النتيجة صحيحة دائمًا.

5) أوجد $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$

6) أوجد $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (b_2 a_3 - b_3 a_2)\mathbf{i} - (b_1 a_3 - b_3 a_1)\mathbf{j} + (b_1 a_2 - b_2 a_1)\mathbf{k}$

7) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.
تلاحظ أن، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$، النتيجة صحيحة دائمًا.

8) أوجد $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a}$
0

9) ماذا تلاحظ؟ وهل هذه النتيجة صحيحة دائمًا.
حاصل الضرب الداخلي لأي متجه مع المتجه الصفري يساوي صفرًا. نعم صحيحة دائمًا.

10) استعمل النتائج التي توصّلت إليها أعلاه لإيجاد:
$((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
0

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 5

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (8)　　دون ضمن فوق

5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

1) $\langle -2, 0, 1\rangle, \langle 3, 2, -3\rangle$ — -9 ؛ غير متعامدين

2) $\langle -4, -1, 1\rangle, \langle 1, -3, 4\rangle$ — 3، غير متعامدين

3) $\langle 0, 0, 1\rangle, \langle 1, -2, 0\rangle$ — 0، متعامدان

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, -2\rangle$ — $154.9°$ تقريبًا

5) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, -2, 5\rangle$ — $96.9°$ تقريبًا

6) $\mathbf{u} = \langle 2, -4, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 6\rangle$ — $51.3°$ تقريبًا

الفصل الخامس المتجهات

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

7) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 0, -1\rangle$

$\langle -3, -3, 3\rangle \cdot \langle 1, 3, 4\rangle = -3(1) + -3(3) + 3 \times 4 = 0$,
$\langle -3, -3, 3\rangle \cdot \langle -1, 0, -1\rangle = -3(-1) - 3(0) + 3(-1) = 0$

8) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 4, 3\rangle$

$\langle 27, 3, 14\rangle, \langle 27, 3, 14\rangle \cdot \langle 3, 1, -6\rangle = (27)(3) + 3(1) + 14(-6) = 0$
$\langle 27, 3, 14\rangle \cdot \langle -2, 4, 3\rangle = 27(-2) + 3(4) + 14(3) = 0$

9) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -3, 1\rangle$

$\langle 7, 1, -11\rangle, \langle 7, 1, -11\rangle \cdot \langle 3, 1, 2\rangle = 7(3) + (1)(1) + (-11) \cdot 2 = 0$,
$\langle 7, 1, -11\rangle \cdot \langle 2, -3, 1\rangle = 7(2) + (1)(-3) - 11(1) = 0$

10) $\mathbf{u} = \langle 4, -1, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, -3, -1\rangle$

$\langle 1, 4, -7\rangle, \langle 1, 4, -7\rangle \cdot \langle 4, -1, 0\rangle = 1(4) + 4(-1) + -7(0) = 0$
$\langle 1, 4, -7\rangle \cdot \langle 5, -3, -1\rangle = 1(5) + 4(-3) + -7(-1) = 0$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

11) $\mathbf{u} = \langle 9, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -4, 2\rangle$ — 62.4 وحدة مربعة

12) $\mathbf{u} = \langle 2, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, -8, -5\rangle$ — 74.2 وحدة مربعة

13) أوجد حجم متوازي السطوح الذي تكون فيه المتجهات $\langle -2, -5, -8\rangle$, $\langle -7, -2, 6\rangle$, $\langle 9, -2, 3\rangle$ أحرفًا متجاورة. 643 وحدة مكعبة

8

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

التقويم التكويني

المفردات

رقم الصفحة بعد كل مفردة يُشير إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة، فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكَّروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

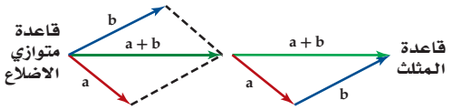
اختبار المفردات للفصل 5، ص (14)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 1-5)

- يُعبَّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصِّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 2-5)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y \rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$
- يمكن استعمال متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 3-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، فإن: $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 4-5)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالصيغة: $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 5-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. ويساوي $(a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$

المفردات

كمية قياسية عددية ص 10
المتجه ص 10
كمية متجهة ص 10
نقطة البداية ص 10
نقطة النهاية ص 10
قطعة مستقيمة متجهة ص 10
طول المتجه ص 10
الوضع القياسي ص 10
اتجاه المتجه ص 10
الاتجاه الربعي ص 11
الاتجاه الحقيقي ص 11
المتجهات المتوازية ص 11
المتجهات المتساوية ص 11
المتجهان المتعاكسان ص 11
المحصلة ص 12
قاعدة المثلث ص 12
قاعدة متوازي الأضلاع ص 12
المتجه الصفري ص 13
المركبات ص 14
المركبات المتعامدة ص 14
الصورة الإحداثية ص 18
متجه الوحدة ص 20
متجها الوحدة القياسيَّان ص 20
توافق خطِّيٌّ ص 21
الضرب الداخلي ص 26
المتجهان المتعامدان ص 26
الشغل ص 29
نظام الإحداثيات الثلاثي
الأبعاد ص 33
المحور z ص 33
الثُّمن ص 33
الثلاثي المرتب ص 33
الضرب الاتجاهي ص 40
متوازي السطوح ص 41
الضرب القياسي الثلاثي ص 41

اختبر مفرداتك

حدِّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه. خطأ؛ ينتهي عنده

2) إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 2 \rangle$، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$. خطأ؛ $1(2) + -4(3)$

3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$. صحيحة

4) طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6 \rangle$. خطأ؛ الصورة الإحداثية للمتجه

5) يتساوَى متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه. صحيحة

6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$. خطأ؛ $90°$

7) لتجد متجهًا يعامد أي متجهين على الأقل في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين. صحيحة

8) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه. صحيحة

9) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \dfrac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$. خطأ؛ $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

مراجعة الدروس

5-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 17 - 10)

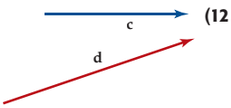
حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق. كمية متجهة

11) شجرة طولها 20 ft. كمية قياسية

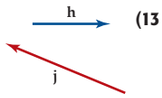
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

12)



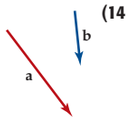
6.3 cm, 11°

13)



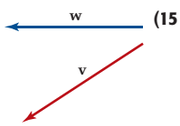
1.2 cm, 130°

14)



2.8, 297° تقريبًا

15)



4.8, 195° تقريبًا

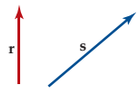
أوجد طول المحصِّلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

16) 70 m جهة الغرب، ثم 150 m جهة الشرق. 80 m للشرق

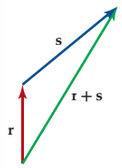
17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف. 20 N للخلف

مثال 1

أوجد محصلة المتجهين r, s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

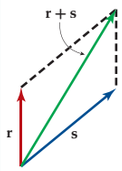


قاعدة المثلث



اسحب r ، بحيث تلتقي نقطة نهاية r مع نقطة بداية s ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية r ، وينتهي عند نقطة نهاية s.

قاعدة متوازي الأضلاع



اسحب s ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية r ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه r, s ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.

فيكون طول المحصلة 3.4 cm ، وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة 45

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على أين يراجعون تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 5 ص (8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

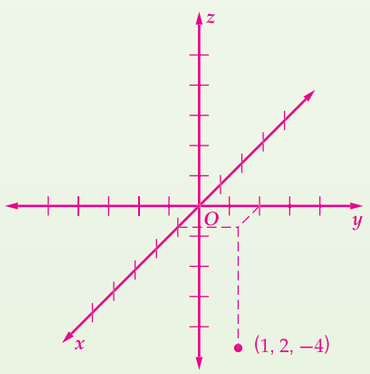
(26) $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

(27) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

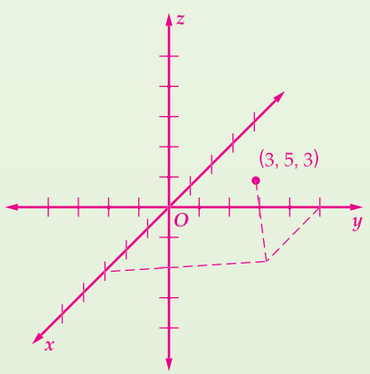
(28) $\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, -\frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle$

(29) $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

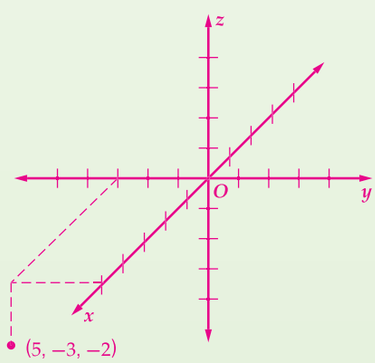
(36)



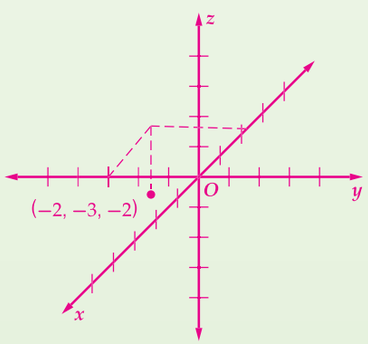
(37)



(38)



(39)



5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 25 - 18)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

(18) $A(-1, 3), B(5, 4)$ $\langle 6, 1\rangle$; $\sqrt{37} \approx 6.1$

(19) $A(7, -2), B(-9, 6)$ $\langle -16, 8\rangle$; $\sqrt{320} = 8\sqrt{5} \approx 17.9$

(20) $A(-8, -4), B(6, 1)$ $\langle 14, 5\rangle$; $\sqrt{221} \approx 14.9$

(21) $A(2, -10), B(3, -5)$ $\langle 1, 5\rangle$; $\sqrt{26} \approx 5.1$

إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -4, 2\rangle$, $\mathbf{q} = \langle -2, -3\rangle$, $\mathbf{p} = \langle 4, 0\rangle$، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

(22) $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$ $\langle -8, -6\rangle$

(23) $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$ $\langle -4, 4\rangle$

(24) $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$ $\langle -18, -1\rangle$

(25) $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$ $\langle 10, 11\rangle$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي: **(26-29)** انظر الهامش

(26) $\mathbf{v} = \langle -7, 2\rangle$

(27) $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

(28) $\mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

(29) $\mathbf{v} = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

الصورة الإحداثية $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$

عوّض $= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$

اطرح $= \langle 1, 1\rangle$

أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

قانون المسافة $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

عوّض $= \sqrt{1^2 + 1^2}$

بسّط $= \sqrt{2} \approx 1.4$

5-3 الضرب الداخلي (الصفحات 31 - 26)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم تحقَّق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا:

(30) $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$ -1؛ غير متعامدين

(31) $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7\rangle$ 48؛ غير متعامدين

(32) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2\rangle$ 0؛ متعامدان

(33) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ 7؛ غير متعامدين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

(34) $\mathbf{u} = \langle 5, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$ $135°$

(35) $\mathbf{u} = \langle -1, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$ $70.6°$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{x} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{y} = \langle -4, 7\rangle$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

الضرب الداخلي $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

عوّض $= 2(-4) + (-5)(7)$

بسّط $= -8 + (-35) = -43$

بما أن $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$، فإن المتجهين $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ غير متعامدين.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 38 - 33)

عيِّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

36) $(1, 2, -4)$ **39-36)** انظر الهامش

37) $(3, 5, 3)$

38) $(5, -3, -2)$

39) $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفَيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها. **43-40)** انظر الهامش

40) $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

41) $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

42) $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

43) $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء: **47-44)** انظر الهامش

44) $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4 \rangle$

45) $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

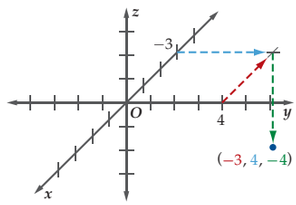
46) $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

47) $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3 \rangle$

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطةً تبعد 4 وحداتٍ أسفل هذه النقطة، وباتجاه موازٍ للمحور z.



5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 43 - 39)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا.

48) $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13 \rangle$ 0؛ متعامدان

49) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3 \rangle$ **48-**؛ غير متعامدين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: **50, 51)** انظر الهامش

50) $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3 \rangle$

51) $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1 \rangle$

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle$$

$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

إجابات:

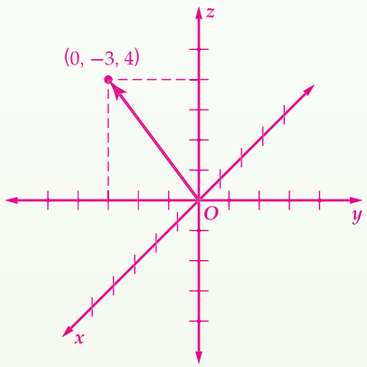
40) 12.33; $(-1, 5, 6)$

41) 10.77; $(-7, 2, 1)$

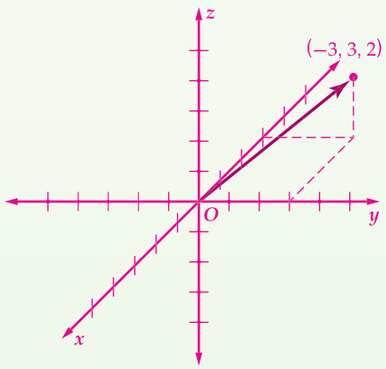
42) 17.44; $(-3, -4, 2)$

43) 15.52; $(2, -1.5, 4)$

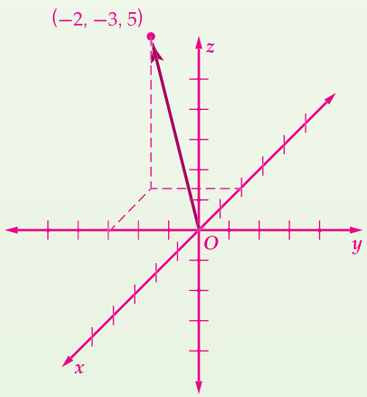
44)



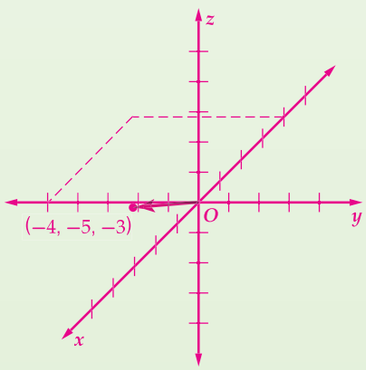
45)



46)



47)



50) $\langle 17, -1, 10 \rangle, \langle 17, -1, 10 \rangle \cdot \langle 1, -3, -2 \rangle = 0, \langle 17, -1, 10 \rangle \cdot \langle 2, 4, -3 \rangle = 0$

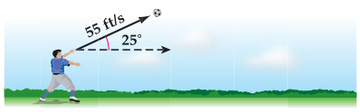
51) $\langle -9, -6, -21 \rangle, \langle -9, -6, -21 \rangle \cdot \langle 4, 1, -2 \rangle = 0, \langle -9, -6, -21 \rangle \cdot \langle 5, -4, -1 \rangle = 0$

إجابة:

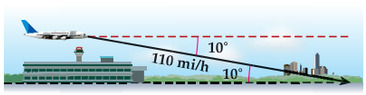
55c) إجابة ممكنة : لا يمكن وجود قمر ثالث؛ لأن إحداثياته ستكون داخل الأرض؛ وذلك لأن القيمة المطلقة لجميع إحداثيات موقع القمر الثالث أقل من نصف قطر الأرض.

تطبيقات ومسائل

52) كرة قدم: تلقّى لاعب كرة قدم الكرة برأسه، فارتدّت بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 55 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °25 فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 1-5) **49.8 ft/s تقريبًا، 23.2ft/s تقريبًا**

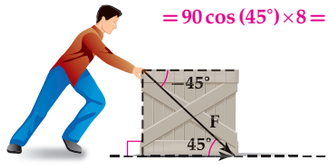


53) طيران: تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h ، وبزاوية قياسها °10 تحت الأفقي، أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثّل سرعة الطائرة. (الدرس 2-5) **⟨108.3, −19.1⟩**



54) صناديق: يدفع عامل صندوقًا بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 90 N بزاوية °45 في الشكل أدناه. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الصندوق 8 m (مع إهمال قوة الاحتكاك). (الدرس 3-5)

$$w=\langle 90\cos 45^\circ, 90\sin 45^\circ\rangle \langle 8, 0\rangle$$
$$=90\cos(45^\circ)\times 8=509\text{J}$$



55) أقمار اصطناعية: إذا مُثِّلت النقطتان: (38426− ,32461 ,28625)، (29218− ,43015 ,31613−) موقِعَي قمرين اصطناعيين، ومُثِّلَتِ النقطة (0, 0, 0) مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل، وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عمَّا يأتي: (الدرس 4 - 5)

a) أوجد المسافة بين القمرين. **118598 mi تقريبًا**

b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟ **(1494−, 1621.5, 2294.5)**

c) اشرح إمكانية وضع قمر ثالث في الإحداثيات التي أوجدتها في الفرع **b** . **انظر الهامش**

56) استعمل الضرب القياسي الثلاثي لحساب حجم غرفةٍ أبعادها 3 m, 4 m, 5 m

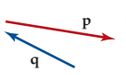
"إرشاد: اعتبر متوازي المستطيلات حالةً خاصةً من متوازي السطوح". (الدرس 5-5)

$$\langle 3, 0, 0\rangle\cdot(\langle 0, 4, 0\rangle\times\langle 0, 0, 5\rangle)=60\,\text{m}^3$$

اختبار الفصل

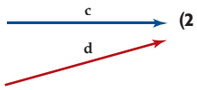
أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

1)



0.8 cm, 25°

2)



4.6 cm, 8° تقريبًا

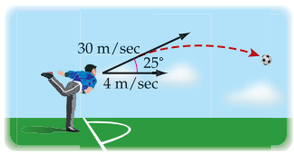
أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

3) $A(1, -3), B(-5, 1)$ $\langle -6, 4\rangle, \sqrt{52} \approx 7.2$

4) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$ $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right\rangle, \sqrt{32.5} \approx 5.7$

5) كرة قدم: ركض لاعب بسرعة 4 m/s؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s، وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي، فما محصّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟

33.7 m/s; 22° تقريبًا



أوجد متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

6) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right\rangle$

7) $\mathbf{u} = \langle 6, -3\rangle$ $\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أم لا:

8) $\mathbf{u} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ -16؛ غير متعامدين

9) $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8\rangle$ 0؛ متعامدان

10) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ -14؛ غير متعامدين

11) اختبار من متعدد: إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يُمثّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$؟ D

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right\rangle$

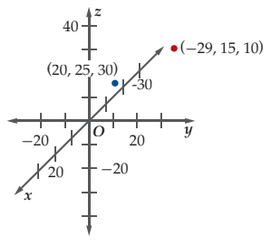
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle, \mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle, \mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

12) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ $\langle -45, -42, 26\rangle$

13) $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ $\langle -1, -21, 1\rangle$

14) بالونات الهواء الساخن: أُطلق 12 بالونًا تحوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: $(-29, 15, 10)$ ، $(20, 25, 30)$ كما في الشكل أدناه ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة. 53.9 ft تقريبًا

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته. $\left(-\frac{9}{2}, 20, 20\right)$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12\rangle$ 27.9° تقريبًا

16) $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ 110.8° تقريبًا

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: **17-18)** انظر الهامش

17) $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11\rangle$

18) $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (22–15) .

إجابات:

17) $\langle 65, 16, -59\rangle$,

$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 1, 7, 3\rangle$
$= 65(1) + 16(7) + (-59)(3)$
$= 0$

$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 9, 4, 11\rangle$
$= 65(9) + 16(4) + (-59)(11)$
$= 0$

المتجه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلًّا من المتجهين $\mathbf{v}, \mathbf{u}$

18) $-7\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,

$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle -6, 2, -1\rangle$
$= (-7)(-6) + (-17)(2) + 8(-1)$
$= 0$

$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle 5, -3, -2\rangle$
$= (-7)(5) + (-17)(-3) + 8(-2)$
$= 0$

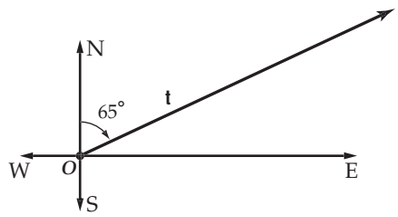
المتجه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يعامد كلًّا من المتجهين $\mathbf{v}, \mathbf{u}$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس: 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5		
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

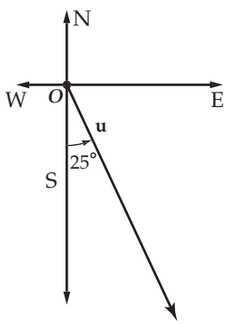
الدرس 1-5 (تحقق من فهمك)، ص (11)

(2A)



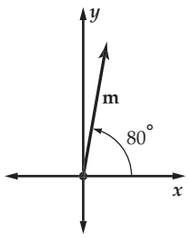
1 in = 10 ft/s

(2B)



1 in = 10 mi/h

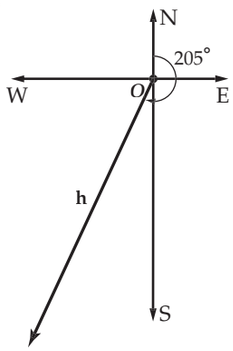
(2C)



1 cm = 30 N

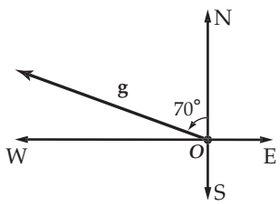
الدرس 1-5، ص (15–17)

(7)



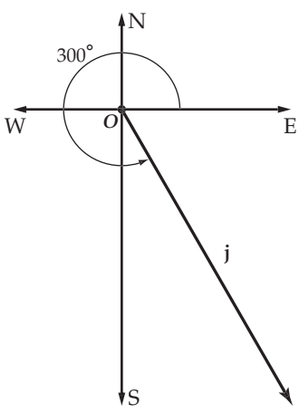
1 cm : 3 in/s

(8)



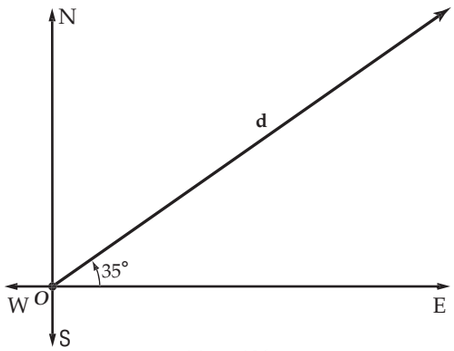
1 cm : 2 km/h

(9)



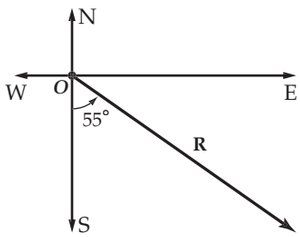
1 cm : 1 ft/s

(10)



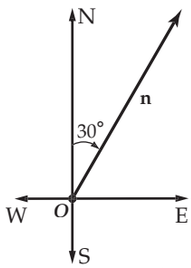
1 in = 10 km

(11)



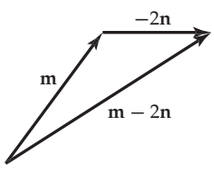
1 cm = 10 m

(12)

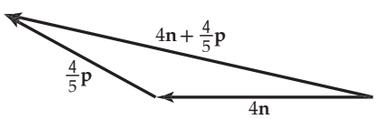


1 cm = 10 m/s

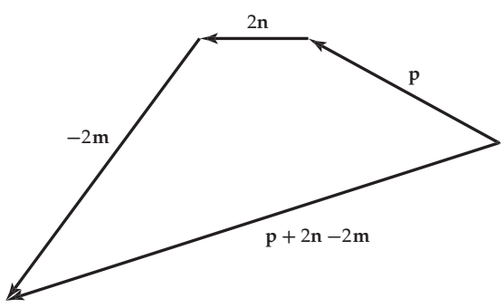
(22)



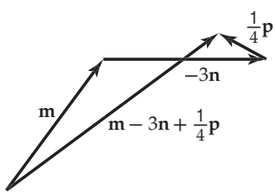
(23)



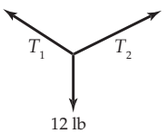
(24)



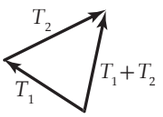
(25)



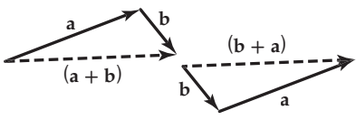
(33a)



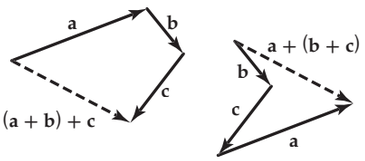
(33b)



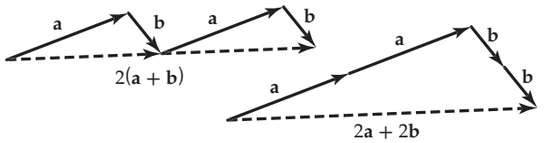
(37)



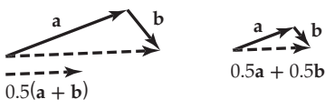
(38)



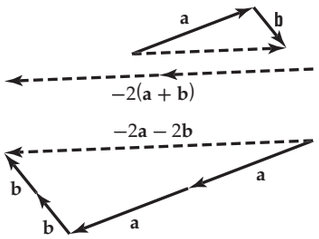
(39) $k = 2$



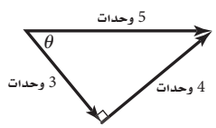
$k = 0.5$



$k = -2$



(40) إجابة ممكنة:



(43) مصطفى، إجابة ممكنة: وضع مصطفى نقطة بداية المتجه الثاني عند نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستعمال قاعدة المثلث. أما حسين فقد وضع نقطتَي بداية المتجهين معًا، وهي الخطوة الأولى لاستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، لكنه لم يُكمل متوازي الأضلاع.

(44) نعم، إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون حاصل جمع متجهين يساوي أحد المتجهين، ويحدث ذلك عندما يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري.

(45) إجابة ممكنة: عند استعمال قاعدة المثلث، تضع نقطة بداية المتجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه، وهكذا مع باقي المتجهات، ثم ترسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير. أما عند استعمال طريقة متوازي الأضلاع، فتضع نقطة بداية المتجهين عند نقطةٍ واحدةٍ، ثم تُكمل متوازي الأضلاع، وترسم المحصلة من نقطة البداية المشتركة للمتجهين إلى الرأس المقابل لمتوازي الأضلاع، يمكن استعمال كلتا القاعدتين، المثلث ومتوازي الأضلاع لإيجاد المحصلة لمتجهين أو أكثر.

(49) $b = 19.9 \text{ ، } a = 11.2 \text{ ، } A = 32°$

(50)
$$\sin 2x - \cos x = 0$$
$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{أو} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$
$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$$

حيث n عدد صحيح

الدرس 2-5، ص (25)

(47)
$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_2 + x_1, y_2 + y_1\rangle \\ &= \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_1\rangle \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a}\end{aligned}$$

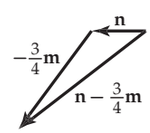
(48)
$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= (\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) + \langle x_3, y_3\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle \\ &= \langle x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2 + x_3, y_2 + y_3\rangle \\ &= \langle x_1, y_1\rangle + (\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle) \\ &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})\end{aligned}$$

(49)
$$\begin{aligned}k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= k(\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) \\ &= k\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle k(x_1 + x_2), k(y_1 + y_2)\rangle \\ &= \langle kx_1 + kx_2, ky_1 + ky_2\rangle \\ &= \langle kx_1, ky_1\rangle + \langle kx_2, ky_2\rangle \\ &= k\langle x_1, y_1\rangle + k\langle x_2, y_2\rangle \\ &= k\mathbf{a} + k\mathbf{b}\end{aligned}$$

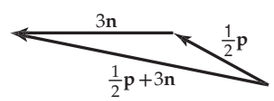
(50

$$\begin{aligned}|k\mathbf{a}| &= |k\langle x_1, y_1\rangle| \\ &= |\langle kx_1, ky_1\rangle| \\ &= \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2} \\ &= \sqrt{k^2{x_1}^2 + k^2{y_1}^2} \\ &= \sqrt{k^2({x_1}^2 + {y_1}^2)} \\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \\ &= |k|\,|\langle x_1, y_1\rangle| \\ &= |k|\,|\mathbf{a}|\end{aligned}$$

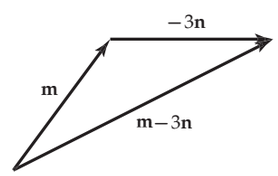
(52



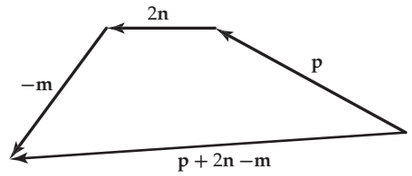
(53



(54



(55



الدرس 5-3، ص (31)

(35

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$
$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle$$
$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 \stackrel{?}{=} \mathbf{v}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$$

(36

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot (\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle) \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2\rangle \stackrel{?}{=} (\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2) + (\mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2)$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) + \mathbf{u}_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2) \stackrel{?}{=} \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2\mathbf{w}_2$$

(37 $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

$$k(\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle) \stackrel{?}{=} k\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot k\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$$
$$k(\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2) \stackrel{?}{=} \langle k\mathbf{u}_1, k\mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \stackrel{?}{=} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \cdot \langle k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2\rangle$$
$$k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = k\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + k\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$$

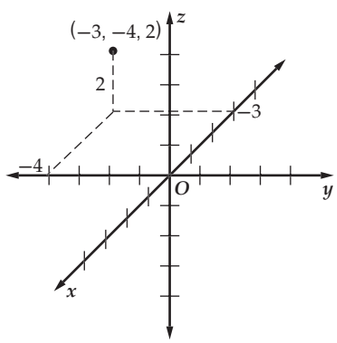
(38 الزاوية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ هي $\theta = 90°$ $\quad \cos 90° = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$

$\cos 90° = 0 \quad 0 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$

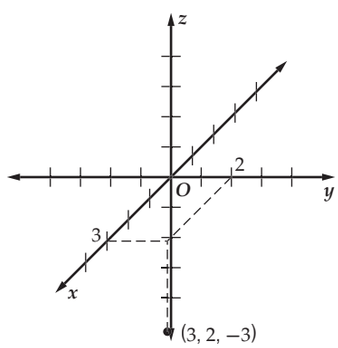
بضرب الطرفين في $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$

الدرس 5-4، تحقق من فهمك، ص (33, 35)

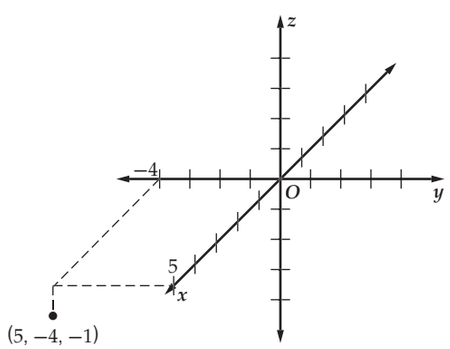
(1A



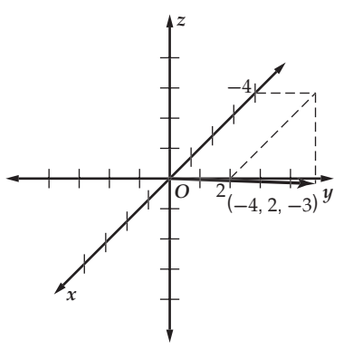
(1B



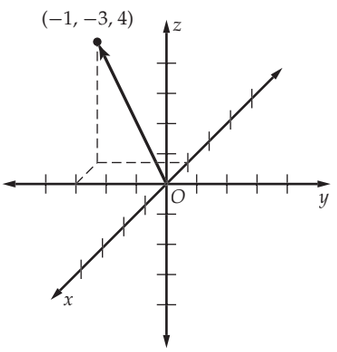
(1C



(3A

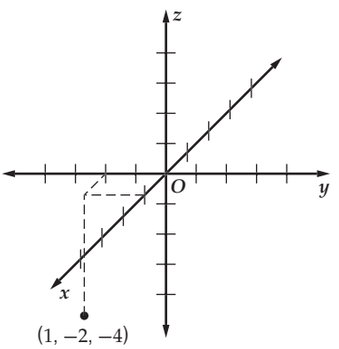


(3B

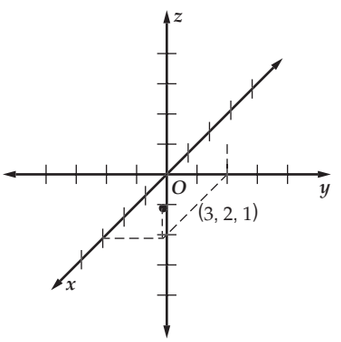


الدرس 4-5، ص (37, 38)

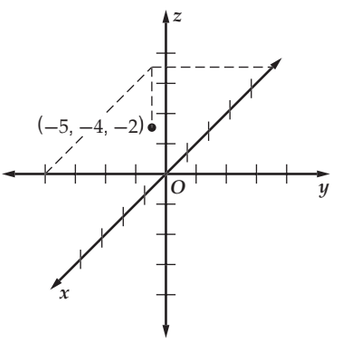
(1



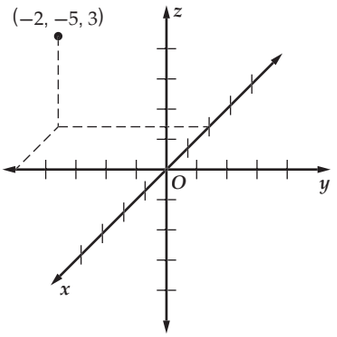
(2



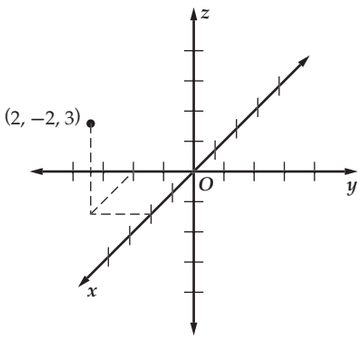
(3



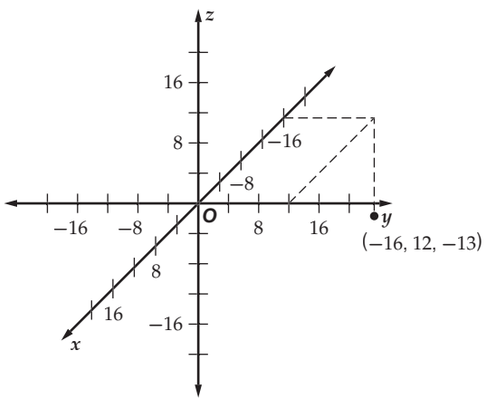
(4



(5



(6



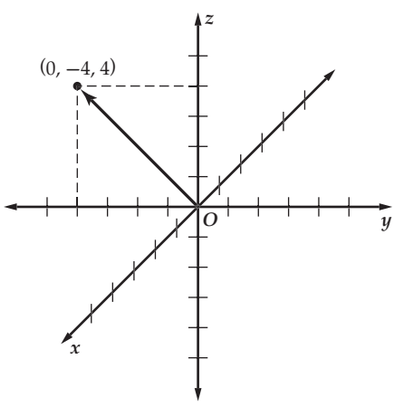
(7 $12.25, \left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$

(8 $9.90, \left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

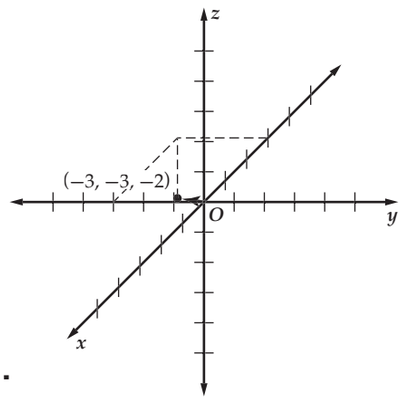
(9 $15.65, \left(2, -2, \frac{9}{2}\right)$

(10 $9.11, \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

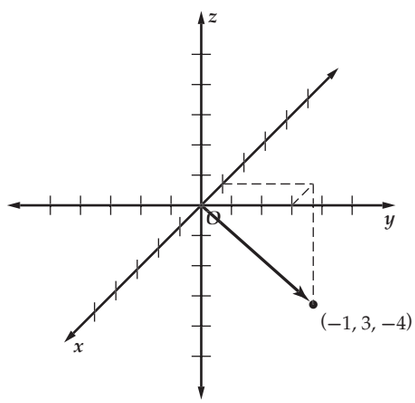
(12



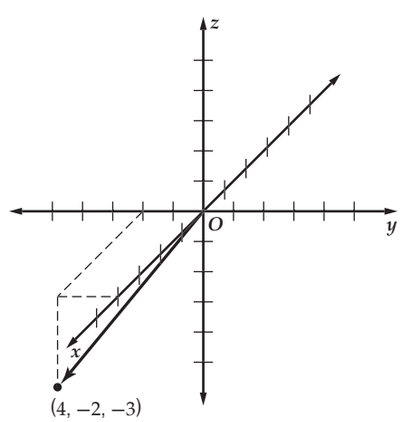
(13



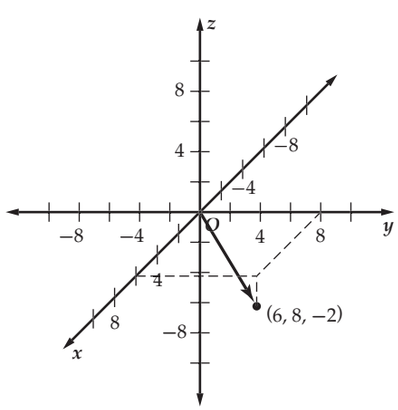
(14



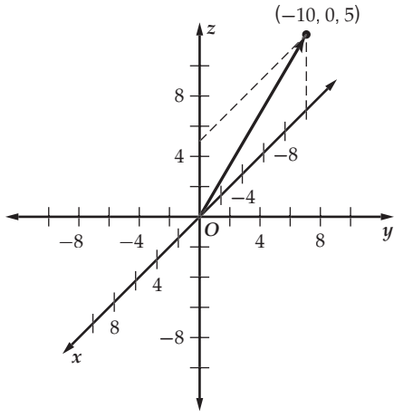
(15



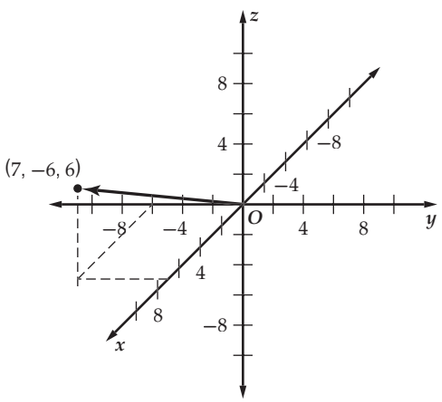
(16



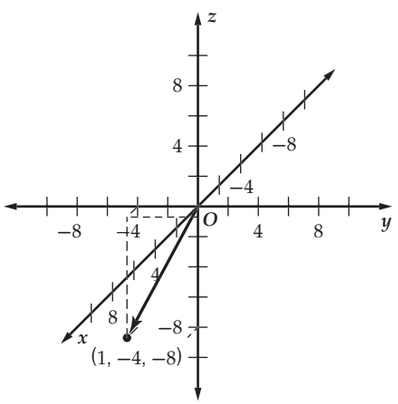
(17



(18



(19



(32 $\langle 16, 2, 8\rangle, 18, \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$

(33 $\langle 0, -8, 12\rangle, \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

(34 $\langle -3, -5, -10\rangle, \sqrt{134}, \left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$

(35 $\langle -4, 8, 20\rangle, 4\sqrt{30}, \left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$

(36 $\langle -1, 8, -10\rangle, \sqrt{165}, \left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle$

37) $\langle -6, -15, 4\rangle, \sqrt{277}$,

$$\left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277} \right\rangle$$

38) $\langle 4, -15, 5\rangle, \sqrt{266}$,

$$\left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266} \right\rangle$$

39) $\langle 20, 32, 42\rangle, 2\sqrt{797}$,

$$\left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797} \right\rangle$$

45) $AB = \sqrt{(5-3)^2+(-1-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$Bc = \sqrt{(1-5)^2+(3+1)^2+(1-1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$AB = \sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

بما أن: $AB = Ac \neq Bc$ فالمثلث متطابق الضلعين.

46) $AB = \sqrt{(4-4)^2+(6-3)^2+(4-4)^2} = 3$

$Ac = \sqrt{(4-4)^2+(3-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$Ac = \sqrt{(4-4)^2+(3-3)^2+(6-4)^2} = 2$

بما أن: $\left(\sqrt{13}\right)^2 = (2)^2 + (3)^2$

إذن المثلث القائم الزاوية، وبما أن أطوال أضلاعه مختلفة، إذن فهو مختلف الأضلاع.

47) $AB = \sqrt{(2+1)^2+(5-4)^2+(1-3)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$Ac = \sqrt{(0-2)^2+(-6-5)^2+(6-1)^2} = \sqrt{4+121+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

$Ac = \sqrt{(0+1)^2+(-6-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{1+100+9} = \sqrt{110}$

بما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن المثلث مختلف الأضلاع.

الكرة هي مجموعة النقاط في الفضاء التي تبعد عن مركز الكرة بُعدًا ثابتًا (نصف القطر) إذن إذا كانت النقطة (x ,y ,z) نقطة تقع على الكرة التي مركزها m(h ,k ,y)، فإنه يجب أن تكون المسافة بين A وَ M تساوي r

نفترض أن النقطة $A(x, y, z)$ نقطة تقع على الكرة التي مركزها $m(h, k, l)$ نستخدم صيغة المسافة بين نقطتين.

48) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

لإيجاد معادلة الكرة

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2}$$

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2$$

54) إجابة ممكنة: يكون استعمال بُعدين أكثر منطقيةً، عند وصف موقع على الخريطة؛ لأن الخريطة نفسها مرسومة ببعدين. ويكون استعمال ثلاثة أبعاد أكثر منطقيةً، عند وصف موقع على الكرة الأرضية؛ لأن للكرة الأرضية أبعادًا ثلاثة.

الدرس 5-5 ، تحقق من فهمك ، ص (40)

3A)

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 4, 2, -1\rangle$
$= 9(4) + (-21)(2) + (-6)(-1)$
$= 36 + (-42) + 6$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$
$= 9(5) +$
$(-21)(1) + (-6)(4)$
$= 45 + (-21) + (-24)$
$= 0$

3B)

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle -2, -1, -3\rangle$
$= (-1)(-2) + (-7)(-1) + 3(-3)$
$= 2 + 7 + (-9)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$
$= (-1)(5) + (-7)(1) + 3(4)$
$= -5 + (-7) + 12$
$= 0$

الدرس 5-5 ، ص (42, 43)

12) $\langle 21, 7, 0\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle -1, 3, 5\rangle$
$= 21(-1) + 7(3) + 0(5)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle 2, -6, -3\rangle$
$= 21(2) + 7(-6) + 0(-3)$
$= 0$

13) $\langle 25, 6, 71\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle 4, 7, -2\rangle$
$= 25(4) + 6(7) + 71(-2)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle -5, 9, 1\rangle$
$= 25(-5) + 6(9) + 71(1)$
$= 0$

14) $\langle 38, 26, 21\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 38, 26, 21\rangle \cdot \langle 3, -6, 2\rangle$
$= 38(3) + 26(-6) + 21(2)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 38, 26, 21\rangle \cdot \langle 1, 5, -8\rangle$
$= 38(1) + 26(5) + 21(-8)$
$= 0$

15) $\langle 7, 23, 12\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$
$= \langle 7, 23, 12\rangle \cdot \langle -2, -2, 5\rangle$
$= 7(-2) + 23(-2) + 12(5)$
$= 0$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 7, 23, 12\rangle \cdot \langle 7, 1, -6\rangle$
$= 7(7) + 23(1) + 12(-6)$
$= 0$

45) إجابة ممكنة: للتحقق من توازي أو تعامد متجهين، يمكنك استعمال قاعدة حساب الزاوية بين متجهين، إذا كان قياس الزاوية °0 أو °180 ، يكونان متوازيين، وإذا كان قياسها °90 يكونان متعامدين. يمكنك كذلك إيجاد الصورة الإحداثية للمتجهين، واستعمال النسب بين الإحداثيات المتناظرة للتحقق مما إذا كان المتجهان متوازيين، إذا كانت النسب بين الإحداثيات الثلاثة المتناظرة في الصيغة المركبة نفسها، يكون المتجهان متوازيين، ولا يمكن استعمال هذه الطريقة إذا كان المتجهان متعامدين. وللتحقق من تعامد متجهين، يمكنك إيجاد الضرب الداخلي بينهما، فإذا كان الناتج صفرًا يكون المتجهان متعامدين، ولا يمكن استعمال طريقة الضرب الداخلي هذه للتحقق من التوازي.

مخطط الفصل

الفصل 6

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص(51)

	الدرس 1-6 (4) حصص
العنوان	**الإحداثيات القطبية**
الأهداف	• تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية. • تمثيل معادلات قطبية بسيطة بيانيًا.
المفردات الأساسية	نظام الإحداثيات القطبية، القطب، المحور القطبي، الإحداثيات القطبية، المعادلة القطبية، التمثيل القطبي.
تمثيلات متعددة	ص (57)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص(6) دون • تدريبات حل المسألة، ص(8) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(9) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (9) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• الكاميرا التوثيقية
تنويع التعليم	ص (15, 55, 58)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(12) حصة	(3) حصص	(15) حصة

الدرس 6-2 (4) حصص	الدرس 6-3 (4) حصص
الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات	**الأعداد المركبة ونظرية ديموافر**
• التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية. • تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.	• تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس. • إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها بالصورة القطبية.
	المستوى المركب، المحور الحقيقي، المحور التخيُّلي، القيمة المطلقة لعدد مركب، الصورة القطبية، الصورة المثلثية، المقياس، السعة، الجذور النونية للعدد واحد.
ص (66)	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص(10) دون • تدريبات حل المسألة، ص(12) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(13) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (10) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص(14) دون • تدريبات حل المسألة، ص(16) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(17) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (11) دون ضمن فوق
• السبورة التفاعلية	• مدونة
ص (61, 67)	ص (71, 78)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (79–82)
- اختبار الفصل، ص (83)

الفصل 6 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 6**	
	التهيئة للفصل 6 ، ص (51)	مخطط المعالجة، ص (51)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (30, 31)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (32)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص(82–79)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6
	اختبار الفصل، ص(49)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 6**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (34, 36, 38)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 6
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (40)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص(33)	
	اختبار الفصل ذو الإجابات المطولة ، ص (42)	
	اختبار تراكمي ، ص (43)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

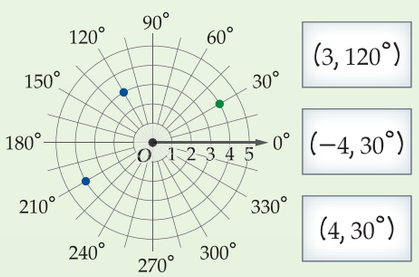
المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى مجموعات من الطلاب استعمال فرجار وخريطة لإحدى مدن المملكة العربية السعودية؛ لتعيين بعض المواقع باستعمال الإحداثيات القطبية والديكارتية، وذلك بعد تحديد نقطة الأصل أو القطب على الخريطة. فمثلًا، تقع مكتبة المدينة عند النقطة $(2, 45°)$ أو $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب تعيين بعض النقاط على منحنًى قطبي، ثم تحويل كل نقطة إلى الإحداثيات الديكارتية، وتمثيلها على المستوى الديكارتي، ثم اطلب إليهم أن يلاحظوا أنهم حصلوا على المنحنى القطبي نفسه.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

المتعلمون الحركيون: دع الطلاب يلعبوا لعبة «الصيد القطبي» في مجموعات ثنائية، وزوّد كل مجموعة بشبكة قطبية كبيرة، ونوعين مختلفين من حبوب البقوليات الجافة كالفاصوليا والفول، ويكتب كل طالب 10 نقاط قطبية في بطاقات ويضعونها على طاولة، اطلب إلى أحد طلاب كل مجموعة أن يسحب بطاقة عشوائيًّا، وأن يُعيّن النقطة على الشبكة القطبية بوضع نوع من حبوب البقوليات الخاص به ثم يتبادل الدور مع زميله. وفي هذه الأثناء، إذا اكتشف أحد الطلاب خطأً في تمثيل زميله، فإنه يصحح الموقع ويضع حبةً من حباته عندها، وحال الانتهاء من تمثيل النقاط جميعها بصورة صحيحة، يفوز الطالب الذي له أكبر عدد من الحبوب على الشبكة.



الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 6

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال صيغة المسافة؛ لإيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي (نظام الإحداثيات الديكارتية).
- تعريف الأعداد التخيُّلية وتبسيطها، وجمعها وضربها، وحل معادلات ذات حلول تخيُّلية.
- جمع الأعداد المركبة وطرحها.
- إيجاد مرافق العدد المركب.
- إيجاد الجذر النوني للأعداد والعبارات الجبرية.

الفصل 6

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية.
- تمثيل المعادلات القطبية البسيطة بيانيًا.
- التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية.
- التحويل بين المعادلات الديكارتية والقطبية.
- تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية، والعكس.
- إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها بالصورة القطبية.

ما بعد الفصل 6

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بمنحنًى معادلته معطاة على الصورة القطبية.
- إيجاد الطول التقريبي لقوسٍ من مُنحنًى.
- إيجاد ميل المماس لمنحنًى معادلته معطاة على الصورة القطبية.
- حل نظام معادلات قطبية.

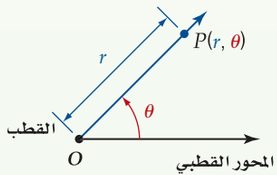
نظرة على الدروس

6-1 الإحداثيات القطبية

يتكون نظام الإحداثيات القطبية ممَّا يأتي:

- نقطة الأصل، نقطة ثابتة يُرمز لها بالرمز O وتُسمَّى القطب.
- المحور القطبي، وهو نصف مستقيم يمتد أفقيًّا من القطب، ويكون متجهًا إلى اليمين.
- الإحداثيات القطبية لنقطة هي $P(r, \theta)$ ، حيث r المسافة المتجهة من O إلى النقطة، و θ الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$

نظام الإحداثيات القطبية



في نظام الإحداثيات القطبية، لكل نقطة إحداثيات قطبية هي (r, θ)، ولها الإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r , \theta + (2n + 1)180°)$، أيضًا حيث n عددٌ صحيحٌ.

المعادلة القطبية هي معادلة معطاة بدلالة الإحداثيات القطبية، ويمكن تمثيلها بيانيًّا بتعيين جميع النقاط (r, θ) التي تحققها.

أسهل معادلة يمكن تمثيلها في نظام الإحداثيات القطبية هي المعادلة $r = k$ (وهي دائرة مركزها القطب)، والمعادلة $\theta = k$ (وهي معادلة مستقيم يمر بالقطب)، حيث k ثابت.

ويمكن إيجاد المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$ ، $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي باستعمال الصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} .$$

6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

لتحويل الإحداثيات القطبية (r, θ) إلى الإحداثيات الديكارتية (x, y)، استعمل صيغتَي التحويل الآتيتين:

- $x = r \cos \theta$
- $y = r \sin \theta$

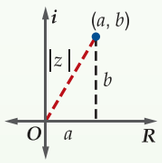
لتحويل الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ)، استعمل صيغتَي التحويل الآتيتين:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ عندما $x > 0$ ، أو $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.
- وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$
أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$
- لتحويل معادلة من الصورة الديكارتية إلى القطبية، عوِّض مباشرة عن x بـ $r \cos \theta$ وعن y بـ $r \sin \theta$، ثم بسِّط المعادلة الناتجة.
- إن تحويل المعادلات القطبية إلى ديكارتية لا يتم بشكل مباشر مثل التحويل من المعادلات الديكارتية إلى القطبية، ففي التحويل الثاني، تلزمنا جميع العلاقات الآتية:
$r^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x}, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

6-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الجزء الحقيقي للعدد المركب z، والمُعطَى بالصورة الديكارتية $a + bi$ هو a، والجزء التخيُّلي b. يمكن تمثيل العدد المركب في المستوى بالنقطة (a, b). حيث يُعيَّن الجزء الحقيقي على المحور الأفقي، والجزء التخيلي على المحور الرأسي، والذي يسمى المحور التخيلي. القيمة المطلقة للعدد المركّب $z = a + bi$ هي المسافة بين العدد ونقطة الأصل في المستوى المركّب، وتساوي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



الصورة القطبية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث r تمثل القيمة المطلقة أو المقياس، والزاوية θ تمثل سعة العدد المركّب.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta,$$

$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$، $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$.

تُسهِّل الصورة القطبية للعدد المركب عملية ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وصيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية هي:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

أما صيغة قسمتها فهي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$ ، حيث $z_2 \neq 0$، $r_2 \neq 0_1$

اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي ديموافر نمطًا في ضرب العدد المركب في نفسه عدة مرات، وقاده ذلك النمط إلى وضع نظرية سُمِّيت باسمه. وتنصُّ نظريته على أنه إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ويمكن استعمال نظرية ديموافر؛ لإيجاد جذور الأعداد المركبة.

الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة
Polar Coordinates and Complex Numbers

فيما سبق:
درست القطوع المخروطية ومعادلاتها وتمثيلها بيانيًا.

والآن:
- أُمثِّلُ الإحداثيات القطبية بيانيًا.
- أحوِّلُ بين الإحداثيات والمعادلات الديكارتية والقطبية.
- أكتب الأعداد المركبة على الصورة القطبية والصورة الديكارتية وأحول بينهما.

لماذا؟

تصاميم هندسية: يمكن استعمال المعادلات القطبية في عمل تصاميم هندسية فمثلًا لوحة سهام تظهر عليها المواقع بوصفها أعدادًا مركبة على الصورتين القطبية والديكارتية. كما يمكن استعمالها لنمذجة أنماط الصوت التي تساعد على تحديد وضعية تجهيزات المسرح، مثل: السماعات ومكبرات الصوت، وتحديد قوة الصوت ومستوى التسجيل.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل؛ لتساعدك على التنبؤ بالأفكار التي ستتعلمها في هذا الفصل.

مشروع الفصل

تصميم لوحة سهام

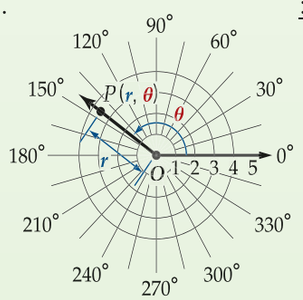
يستعمل الطلاب التمثيل القطبي لعمل تصاميم هندسية مثل لوحة السهام؛ لذا اطلب إليهم:

- تصميم لوحة سهام في مستوى قطبي، تتكون من 5 دوائر متحدة المركز، بحيث يكون للحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية، ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 5 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب.
- تحديد أنصاف أقطار الحلقات.
- تحديد ثلاثة مواقع (نقاط مكتوبة بالإحداثيات القطبية) أصابها لاعب أطلق ثلاثة أسهم على اللوحة.
- إيجاد مجموع النقاط التي حصل عليها اللاعب.
- تحويل إحداثيات كل نقطة منها إلى الإحداثيات الديكارتية.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

التعريف: نظام الإحداثيات القطبية هو نظام يستعمل الإحداثيات القطبية (r, θ)، حيث r المسافة المتجهة من القطب إلى النقطة P، وθ الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

مثال:



سؤال: إلامَ يُشير الزوج المرتب (r, θ)؟
إجابة ممكنة: تقع النقطة على بُعد r وحدة من القطب، وعلى نصف المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها θ مع المحور القطبي.

قراءة سابقة

شجع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعُب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 6

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي: **6-1)** انظر ملحق الإجابات.

اختبار سريع

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

1) $200°$

2) $-45°$

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية، ومثِّلهما في الوضع القياسي:

3) $165°$

4) $-10°$

5) $\frac{4\pi}{3}$

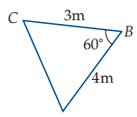
6) $-\frac{\pi}{4}$

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

7) $-60°$ $-\frac{\pi}{3}$ **8)** $\frac{3\pi}{2}$ $270°$

9) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15$ باستعمال متطابقة الفرق بين زاويتين. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

10) أوجد طول الضلع AC في المثلث المرسوم أدناه (قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة).



3.6 m تقريبًا

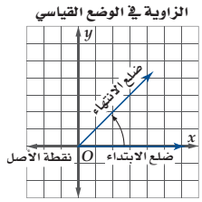
البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

ضلع الابتداء للزاوية (Initial Side of an Angle)
الضلع المنطبق على المحور x عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

ضلع الانتهاء للزاوية (Terminal Side of an Angle)
الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.



قياس الزاوية (Measure of an Angle)
يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

متطابقات المجموع والفرق (Sum and Difference Identities)

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

تنويع التعليم

دون ضمن

لوحة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كلٍّ منها في أثناء دراستهم الفصل 6، ويمكن استعمال هذه القائمة وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه، لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، والعبارة "إذا... فقم" في المخطط تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% من الأسئلة تقريبًا.
فقم	بمراجعة الطلاب في: موضوع الزوايا وأنظمة قياسها، ومتطابقات جيب وجيب تمام مجموع زاويتين والفرق بينهما.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

6-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-1

رسم زوايا موجبة وسالبة معطاة بالدرجات والراديان في الوضع القياسي.

الدرس 6-1

تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية.

تمثيل معادلات قطبية بسيطة بيانيًّا.

ما بعد الدرس 6-1

تحويل الإحداثيات القطبية إلى ديكارتية والعكس.

2 التدريس

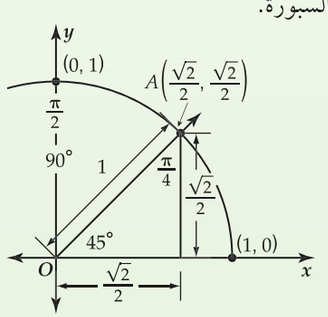
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إلامَ يُشير الإحداثيان في الزوج المرتب (x, y)؟ يشيران إلى المسافة الأفقية والمسافة الرأسية عن نقطة الأصل.
- ما قياس الزاوية الناتجة عن المستقيم الواصل بين نقطة الأصل والنقطة $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$؟ $45°$

ارسم الجزء الآتي من دائرة الوحدة على السبورة.



- إلامَ يُشير الزوج المرتب $(1, 45°)$؟ إجابة ممكنة: تقع النقطة على بُعد وحدة واحدة من نقطة الأصل، وعلى نصف المستقيم الذي يصنع زاويةً قياسها $45°$ مع المحور x.

6-1 الإحداثيات القطبية
Polar Coordinates

لماذا؟

يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى، والتضاريس الأرضية. ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.

فيما سبق:

درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها في الوضع القياسي. (مهارة سابقة)

والآن:

- أُمثّل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أُمثّل بيانيًّا معادلات قطبية بسيطة.

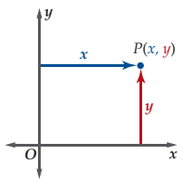
المفردات:

نظام الإحداثيات القطبية
polar coordinate system
القطب
pole
المحور القطبي
polar axis
الإحداثيات القطبية
polar coordinates
المعادلة القطبية
polar equation
التمثيل القطبي
polar graph

www.obeikaneducation.com

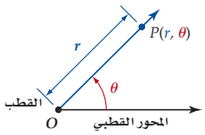
تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). وعندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x, y هما المحوران الأفقي والرأسي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما نقطة الأصل، ويرمز لها بالحرف O. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x, y)، حيث x, y المسافتان المتّجهتان الأفقية، والرأسية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(1, \sqrt{3})$ على بُعد وحدة وحدة إلى يمين المحور y، وعلى بُعد $\sqrt{3}$ وحدة إلى أعلى المحور x.

نظام الإحداثيات القطبية



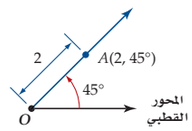
في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**. و**المحور القطبي** هو نصف مستقيم يمتد أفقيًّا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات** (r, θ)، حيث r المسافة المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا، فمن الممكن أن تكون r سالبة) من القطب إلى النقطة P، و θ الزاوية المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا) من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، ولتمثيل النقطة P بالإحداثيات القطبيّة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ إذا كانت r موجبة. أما إذا كانت سالبة، فإن P تقع على نصف المستقيم المقابل (الامتداد) لضلع الانتهاء للزاوية θ.

مثال 1 تمثيل الإحداثيات القطبية

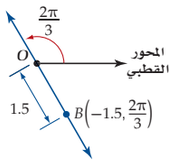
مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

a $A(2, 45°)$



بما أن $\theta = 45°$، فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $45°$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 2$، لذا عيِّن نقطةً A تبعُد وحدتين عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية $45°$، كما في الشكل المجاور.

b $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$



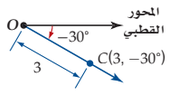
بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{2\pi}{3}$، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً B تبعُد 1.5 وحدة عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء، كما في الشكل المجاور.

مصادر الدرس 6-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (51, 55)	• تنويع التعليم ص (51, 55)	• تنويع التعليم ص (58)
كتاب التمارين	• ص (9)	• ص (9)	• ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

c) $C(3, -30°)$

بما أن $\theta = -30°$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $-30°$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، لذا عيِّن نقطةً C تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك 1C–1A) انظر ملحق الإجابات.

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

1A) $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ **1B)** $E(2.5, 240°)$ **1C)** $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

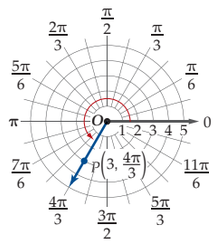
تُعيَّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًّا، كما تُعيَّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.

مثال 2 تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

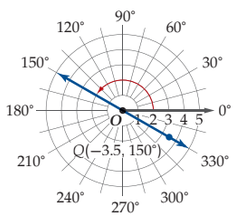
a) $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، لذا عيِّن نقطةً P تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



b) $Q(-3.5, 150°)$

بما أن $\theta = 150°$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $150°$ ، بحيث يكون المحور القطبي ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً Q تبعد 3.5 وحدات عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي: **2A, 2B)** انظر ملحق الإجابات.

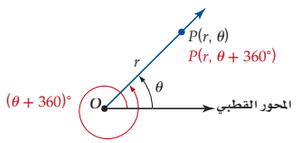
2A) $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **2B)** $S(-2, -135°)$

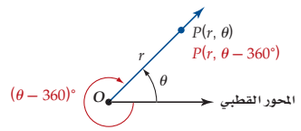
إرشادات للدراسة

القطب

يمكن تمثيل القطب بالنقطة $(0, \theta)$ ، حيث θ أي زاوية.

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.





تمثيل الإحداثيات القطبية

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية تمثيل الإحداثيات القطبية على الصورة (r, θ)، عندما تُعطى θ بالدرجات أو الراديان في نظام الإحداثيات القطبية.

المثال 3 يبيّن كيفية إيجاد إحداثيات قطبية متعددة تمثل نقطةً واحدةً.

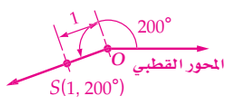
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

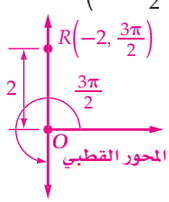
مثال إضافي

1 مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

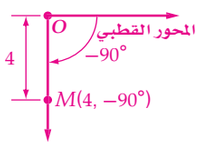
a) $S(1, 200°)$



b) $R\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$

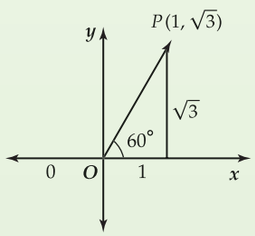


c) $M(4, -90°)$



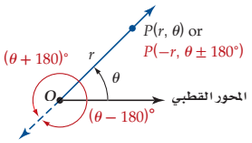
إرشادات للمعلم الجديد

فكرة الإحداثيات القطبية



في المستوى الإحداثي، يمكن التعبير عن موقع النقطة $P(1, \sqrt{3})$ (الواردة في فقرة تمثيل الإحداثيات القطبية في الصفحة 52) بالمتجه $\overrightarrow{OP}$ ، والذي طوله وحدتان، وزاويته مع الأفقي $60°$، الأمر الذي دعا إلى التفكير في إمكانية التعبير عن موقع النقطة P مباشرةً، بدلالة طول هذا المتجه والزاوية θ بالصورة $P(2, 60°)$، ومن هنا ظهرت فكرة إنشاء نظام الإحداثيات القطبية؛ لتحديد موقع النقطة P بدلالة الإحداثيين (المسافة المتجهة، والزاوية المتجهة).

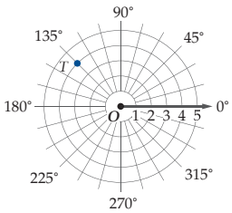
وكذلك لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثِّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.



وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

مثال 3 تمثيلات قطبية متعددة

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



أحد الأزواج القطبية التي تمثِّل النقطة T هو $(4, 135°)$.
وفيما يأتي الأزواج الثلاثة الأخرى:

$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$ — اطرح $360°$ من θ
$= (4, -225°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$ — ضع $-r$ بدلًا من r، وأضف $180°$ إلى θ
$= (-4, 315°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$ — ضع $-r$ بدلًا من r، واطرح $180°$ من θ
$= (-4, -45°)$

(3A) $(5, -120°), (-5, 60°), (-5, -300°)$

تحقق من فهمك

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \le \theta \le 360°$، أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(3A) $(5, 240°)$ **(3B)** $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

(3B) $\left(-2, -\frac{11\pi}{6}\right), \left(+2, \frac{7\pi}{6}\right), \left(+2, -\frac{5\pi}{6}\right)$

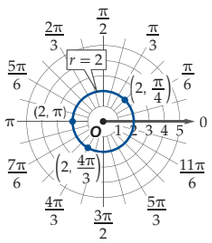
التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلةً قطبيةً**. فمثلًا: $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = a$، و $y = b$ أساسيًّا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$، و $\theta = h$، حيث k, h عددان حقيقيان، يُعَدُّ أساسيًّا في نظام الإحداثيات القطبية.

مثال 4 التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

(a) $r = 2$



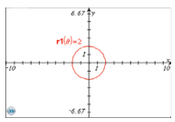
تتكون حلول المعادلة $r = 2$ من جميع النقاط على الصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي فمثلًا تعد النقاط $(2, \frac{4\pi}{3})$ ، $(2, \pi)$ ، $(2, \frac{\pi}{4})$ حلولًا لها.

يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعُد 2 وحدة عن القطب. وعليه فإن المنحنى هو دائرة مركزها نقطة الأصل (القطب)، وطول نصف قطرها 2 كما في الشكل المجاور.

إرشاد تقني

تمثيل المعادلات القطبية

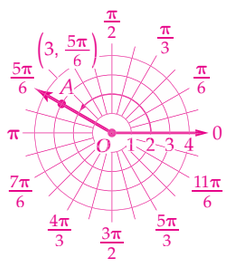
لتمثيل المعادلة القطبية $r = 2$ على الحاسبة البيانية TI-nspire، اضغط على أولًا ثم menu و وغيِّر وضع الرسم إلى 4: قطبي. لاحظ أن المتغيِّر التابع تغيَّر من $f(x)$ إلى r، والمتغيِّر المستقل من x إلى θ. مثِّل $r = 2$.



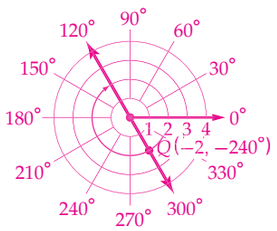
مثالان إضافيان

2 مثل كلًّا من النقطتين الآتيتين في المستوى القطبي:

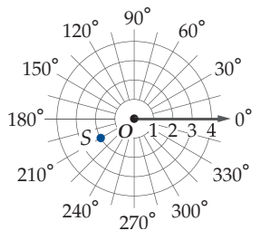
(a) $A\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$



(b) $Q(-2, -240°)$



3 أوجد أربعة أزواج مختلفة، كلٌّ منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة S، إذا كانت $-360° < \theta < 360°$



$(2, -150°), (2, 210°), (-2, 30°), (-2, -330°)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية

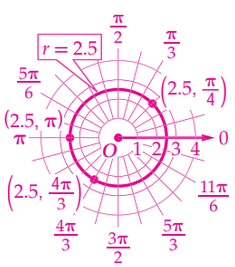
المثال 4 يُبيّن كيفية تمثيل معادلات قطبية بسيطة مثل الدوائر والمستقيمات.

المثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد المسافة بين نقطتين مُعطاتين بالإحداثيات القطبية، وذلك باستعمال الصيغة القطبية للمسافة.

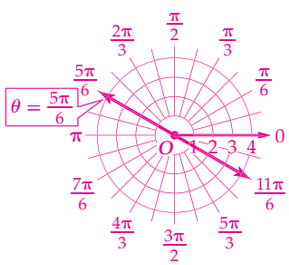
مثال إضافي

4 مثّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

(a) $r = 2.5$

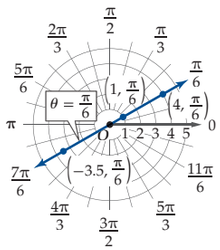


(b) $\theta = \frac{5\pi}{6}$



b) $\theta = \frac{\pi}{6}$

تتكوّن حلول المعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$ من جميع النقاط $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r أي عدد حقيقي مثل النقاط $\left(-3.5, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$؛ وعليه فإن التمثيل البياني عبارة عن جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي.



تحقق من فهمك **(4A, 4B)** انظر ملحق الإجابات

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

(4A) $r = 3$

(4B) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

تنبيه!

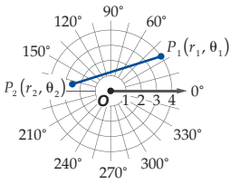
تهيئة الحاسبة البيانية

عند استعمال صيغة المسافة القطبية، تأكد من ضبط الحاسبة البيانية على وضعية الدرجات، أو الراديان بحسب قياسات الزوايا المعطاة.

مفهوم أساسي **المسافة بالصيغة القطبية**

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



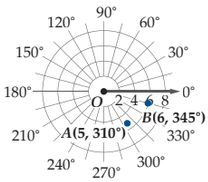
سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال 56

مثال 5 من واقع الحياة **إيجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية**

حركة جوية: يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°)$, $B(6, 345°)$، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

تقع الطائرة A على بُعد 5 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها $310°$، في حين تقع الطائرة B على بُعد 6 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها $345°$، كما في الشكل المجاور.



b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

باستعمال الصيغة القطبية للمسافة، فإن.

المسافة بالصيغة القطبية

$$AB = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$(r_1, \theta_1) = (5, 310°)$, $(r_2, \theta_2) = (6, 345°)$

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345° - 310°)} \approx 3.44$$

أي أن المسافة بين الطائرتين 3.44 mi تقريبًا؛ وعليه فإنهما لا تخالفان تعليمات الطيران.

الربط مع الحياة

لقد طوّرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 يستطيع رصد الطائرات ضمن دائرة نصف قطرها 80 mi.

المصدر: A History of the World Semiconductor Industry

تحقق من فهمك

5) قوارب: يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°)$, $(8, 150°)$، حيث r بالأميال.

A) انظر ملحق الإجابات.

5A) فمثّل هذا الموقف في المستوى القطبي. **5B)** ما المسافة بين القاربين؟ 8.3 mi

المحتوى الرياضي

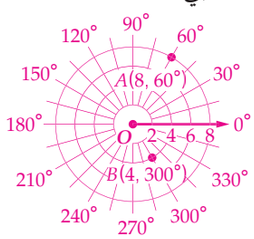
المسافة في المستوى القطبي

انظر إلى المسافة بين النقطتين في المستوى القطبي على أنها ضلع ثالث لمثلث، ضلعاه الآخران هما نصفا مستقيمٍ، ينطلقان من القطب ويمرَّان بالنقطتين. لاحظ أن صيغة المسافة في المستوى القطبي هي إحدى صيغ قانون جيب التمام المُستعملة في إيجاد طول ضلع ثالث في مثلث بمعلومية كلٍّ من الزاوية المقابلة له وطولَي الضلعين الآخرين.

مثال إضافي

5 **حركة جويَّة** يتابع مراقب الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعَي الطائرتين هما $A(8, 60°)$, $B(4, 300°)$، وتُقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.



b) استعمل الصيغة القطبية للمسافة، لتجد المسافة بين الطائرتين؟ 10.6 mi تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر طالبًا وأعطه مجموعة نقاط في المستوى القطبي، ثم اطلب إليه استعمال الكاميرا التوثيقية؛ لتوضيح كيفية تمثيلها في مستوى قطبي بيانيًّا، وإيجاد المسافة بين كل نقطتين منها.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون: ارسم مستوى قطبيًّا مكبرًا بمقياس رسم معلوم على سطح الأرض مستعملًا قلمًا قابلًا للمسح. ثم قسِّم الطلاب مجموعات ثلاثية، وأعطِ كل مجموعة شريط قياس، واطلب إلى أحد طلاب المجموعة الوقوف عند القطب، ويقف الطالبان الآخران عند نقطتين مختلفتين في المستوى القطبي، واطلب إليهم حساب المسافة بين الطالبين باستعمال شريط القياس ومقياس الرسم، وقارن النتيجة بنتيجة استعمال الصيغة القطبية للمسافة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-37؛ للتأكد من مدى فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة!

المستوى القطبي في كثيرٍ من أسئلة هذا الدرس، يحتاج الطلاب إلى ورقة فيها المستوى القطبي.

تنبيه!

خطأ شائع في الأسئلة 36–25، قد يحسبُ الطلاب المسافة بين نقطتين قطبيتين خطأً؛ لذا اقترح عليهم التأكد مرتين من الإجابة، وذلك عند تعويض قيم سالبةٍ لـ θ في معادلة المسافة القطبية، وكذلك التأكد من ضبط الآلة الحاسبة على وضعية الدرجات أو الراديان بحسب المسألة.

إجابات:

12) $(-1, 330°), (1, -210°), (-1, -30°)$

13) $(2, 120°), (2, -240°), (-2, -60°)$

14) $(4, \frac{5\pi}{6}), (-4, \frac{11\pi}{6}), (-4, \frac{-\pi}{6})$

15) $(3, \frac{5\pi}{3}), (3, \frac{-\pi}{3}), (-3, \frac{-4\pi}{3})$

16) $(5, \frac{-\pi}{6}), (-5, \frac{5\pi}{6}), (-5, \frac{-7\pi}{6})$

17) $(5, \frac{5\pi}{3}), (5, \frac{-\pi}{3}), (-5, \frac{2\pi}{3})$

18) $(2, 330°), (-2, 150°), (-2, -210°)$

19) $(1, 300°), (1, -60°), (-1, 120°)$

تدرب وحل المسائل

1–10) انظر ملحق الإجابات.

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (المثالان 2 , 1)

1) $R(1, 120°)$ **2)** $T(-2.5, 330°)$

3) $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$ **4)** $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$

5) $B(5, -60°)$ **6)** $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$

7) $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$ **8)** $C(-4, \pi)$

9) $M(0.5, 270°)$ **10)** $W(-1.5, 150°)$

11) رماية: يتكون هدف في منافسة للرماية من 10 دوائر متحدة المركز. ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 10 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب. افترض أن راميًا يستعمل هدفًا نصف قطره 120 cm، وأنه قد أطلق ثلاثة أسهم، فأصابت الهدف عند النقاط $(30, 240°), (82, 315°), (114, 45°)$. إذا كان لجميع الحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية. (المثالان 2 , 1)

a) انظر ملحق الإجابات.

a) فمثِّل النقاط التي أصابها الرَّامي في المستوى القطبي.

b) ما مجموع النقاط التي حصل عليها الرَّامي؟ 13 نقطة

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثِّل إحداثيين قطبيين للنقطة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3) **12–19)** انظر الهامش.

12) $(1, 150°)$ **13)** $(-2, 300°)$

14) $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **15)** $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$

16) $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$ **17)** $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

18) $(2, -30°)$ **19)** $(-1, -240°)$

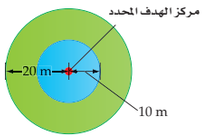
مثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: (مثال 4)

20) $r = 1.5$ **21)** $\theta = 225°$

22) $\theta = -\frac{7\pi}{6}$ **23)** $r = -3.5$

20–23) انظر ملحق الإجابات.

24) القفز بالمظلات: في مسابقة لتحديد دقة موقع الهبوط، يحاول مظلي الوصول إلى «مركز الهدف المحدد»؛ ومركز الهدف عبارة عن دائرة حمراء طول قطرها 2 m. كما يشمل الهدف دائرتين طولا نصفي قطريهما 10 m و 20 m. (مثال 4)



a) اكتب 3 معادلات قطبية تمثِّل حدود المناطق الثلاث للهدف. $r = 1, r = 10, r = 20$

b) مَثِّل هذه المعادلات في المستوى القطبي. انظر ملحق الإجابات.

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي. (مثال 5)

25) $(2, 30°), (5, 120°)$ ≈ 5.39

26) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$ ≈ 10.70

27) $(6, 45°), (-3, 300°)$ 8

28) $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ ≈ 5.97

29) $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ 1

30) $(4, -315°), (1, 60°)$ ≈ 3.05

31) $(-2, -30°), (8, 210°)$ 5

32) $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$ ≈ 7.21

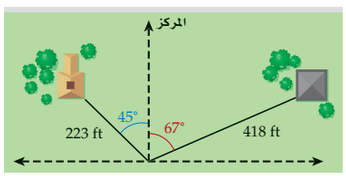
33) $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$ ≈ 6.08

34) $(7, -90°), (-4, -330°)$ ≈ 4.84

35) $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$ ≈ 5.35

36) $(-5, 135°), (-1, 240°)$ ≈ 4.26

37) مسّاحون: أراد مسّاح تحديد حدود قطعة أرض، فحدّد أثرًا يبعُد 223 ft، بزاوية 45° إلى يسار المركز، وأثرًا آخر على بُعد 418 ft، بزاوية 67° إلى يمين المركز، كما في الشكل أدناه، أوجد المسافة بين الأثرين. (مثال 5) ≈ 542.5 ft



38) مراقبة: تراقب آلة تصوير مثبتة منطقة جبلية تمثِّل جزءًا من دائرة، وتُحدَّدُ بالمتباينتين $0 \le r \le 40, -60° \le \theta \le 150°$، حيث r بالأمتار.

a) مثِّل في المستوى القطبي المنطقة التي يمكن لآلة التصوير مراقبتها. انظر ملحق الإجابات.

b) أوجد مساحة المنطقة (مساحة القطاع الدائري تساوي: $\frac{\text{قياس زاوية القطاع بالدرجات}}{360°} \times$ مساحة الدائرة). حوالي $2932.2\ m^2$

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	37–1، 54، 56–72
ضمن ضمن المتوسط	45–1، (فردي)، 46، 48، 50، 51، 53، 54، 56–72
فوق فوق المتوسط	38–72

إذا كانت $180° \le \theta \le 0$، فأوجد زوجًا آخر من الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي:

39) $(5, 960°)$ $(-5, 60°)$

40) $\left(-2.5, \frac{15\pi}{6}\right)$ $\left(-2.5, \frac{\pi}{2}\right)$

41) $\left(4, \frac{33\pi}{12}\right)$ $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$

42) $(1.25, -920°)$ $(1.25, 160°)$

43) $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$ $\left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$

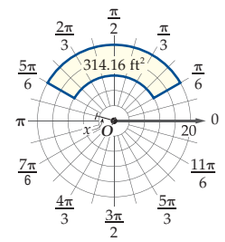
44) $(-6, -1460°)$ $(6, 160°)$

45) مسرح: يلقي شاعر قصيدة في مسرح. ويمكنُ وصف المسرح بمستوى قطبي، بحيث يقف الشاعر في القطب باتجاه المحور القطبي. افترض أن الجمهور يجلس في المنطقة المحددة بالمتباينتين $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 30 \le r \le 240$، حيث r بالأقدام.

a) مثِّل المنطقة التي يجلس بها الجمهور في المستوى القطبي.
a) انظر ملحق الإجابات.

b) إذا كان كل شخص بحاجة إلى $5\,\text{ft}^2$، فكم مقعدًا يتسع المسرح؟ **8906 مقاعد تقريبًا**

46) أمن: يضيء مصباح مراقبة مثبت على سطح أحد المنازل منطقة على شكل جزء من قطاع دائري محدَّد بالمتباينتين $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$، $20 \le r \le x$، حيث r بالأقدام. إذا كانت مساحة المنطقة $314.16\,\text{ft}^2$، كما هو مبين في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x.
10 ft تقريبًا



أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقِّق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

47) $P_1 = (3, 35°), P_2 = (r, 75°), P_1P_2 = 4.174$
$r = -1.40$ أو $r = 6$

48) $P_1 = (5, 125°), P_2 = (2, \theta), P_1P_2 = 4, 0 \le \theta \le 180°$
$\theta \approx 75.5°$ أو $\theta \approx 174.46°$

49) $P_1 = (3, \theta), P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right), P_1P_2 = 5, 0 \le \theta \le \pi$
$\theta \approx \frac{5\pi}{18}$

50) $P_1 = (r, 120°), P_2 = (4, 160°), P_1P_2 = 3.297$
$r \approx 5.13$ أو $r \approx 1$

51) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، سوف تستقصي العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.
a–e) انظر ملحق الإجابات.

a) بيانيًّا: عيِّن $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، وارسم نظام الإحداثيات الديكارتية فوق المستوى القطبي بحيث تنطبق نقطة الأصل على القطب، والجزء الموجب من المحور x على المحور القطبي. وبالتالي سينطبق المحور y على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ارسم مثلثًا قائمًا بوصل A مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x.

b) عدديًّا: احسب طولي ضلعي الزاوية القائمة باستعمال طول الوتر والمتطابقات المثلثية.

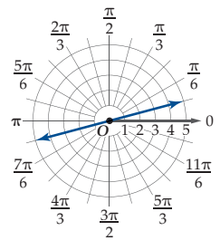
c) بيانيًّا: عيِّن $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على المستوى القطبي نفسه، وارسم مثلثًا قائمًا بوصل B مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x، واحسب طولي ضلعي الزاوية القائمة.

d) تحليليًّا: كيف ترتبط أطوال أضلاع المثلث بالإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

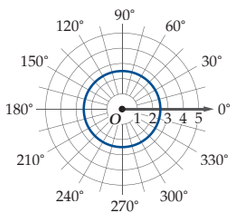
e) تحليليًّا: اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ)، والإحداثيات الديكارتية (x, y).

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

52) **إجابة ممكنة: $\theta = \frac{\pi}{12}$**



53) **$r = 2.5$ أو $r = -2.5$**



تمثيلات متعددة

في السؤال 51، يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والتحليل؛ لاستقصاء العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة بعض الجمل؛ للمقارنة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية، وإبراز التباينِ بينهما.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 1-6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

مسائل مهارات التفكير العليا

54) تبرير: وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًّا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1 ، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟ انظر ملحق الإجابات.

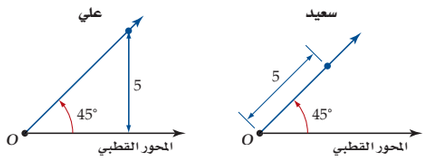
55) تحدٍّ: أوجد زوجًا مُرَتَّبًا من الإحداثيات القطبية ؛ لتمثيل النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-3, -4)$. إجابة ممكنة: $(5, 233°)$ تقريبًا

56) برهان: أثبت أن المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

(إرشاد: استعمل قانون جيوب التمام). انظر ملحق الإجابات.

57) تبرير: وضّح ماذا يحدث لمعادلة المسافة المعطاة بالصيغة القطبية عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. فسّر هذا التغيّر. انظر ملحق الإجابات.

58) اكتشف الخطأ: قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات.



59) اكتب: خمِّن سبب عدم كفاية الإحداثيات القطبية لتحديد موقع طائرة بشكل دقيق. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدين أولًا: (الدرس 5-5)

60) $\mathbf{u} = \langle 4, 10, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1, 7\rangle$ **−3، ليسا متعامدين**

61) $\mathbf{u} = \langle -5, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -9, 8\rangle$ **0، متعامدان**

62) $\mathbf{u} = \langle -8, -3, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -6, 0\rangle$ **−14، ليسا متعامدين**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 3, -2\rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 5, 1\rangle, \mathbf{c} = \langle 3, -6, 5\rangle$. فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 4-5)

63) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ $\langle 16, -29, 36\rangle$

64) $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$ $\langle 1, 44, -17\rangle$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ لكل مما يأتي: (الدرس 5-5)

65) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, -8\rangle$ **133.9°**

66) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$ **144.3°**

67) $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, -6, 9\rangle$ **61.45°**

أوجد إحداثيات مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية: (مهارة سابقة)

68) $x^2 + (y-1)^2 = 9$ **المركز (0, 1) ، ونصف القطر 3**

69) $(x+1)^2 + y^2 = 16$ **المركز (−1, 0) ، ونصف القطر 4**

70) $x^2 + y^2 = 1$ **المركز (0, 0) ، ونصف القطر 1**

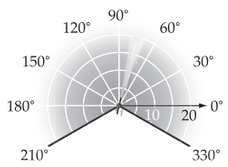
تدريب على اختبار

71) أيُّ المتجهات الآتية يمثِّل $\overrightarrow{RS}$، حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$ ، ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟ **A**

A $\langle 7, -10\rangle$ **C** $\langle -7, 10\rangle$

B $\langle -3, 10\rangle$ **D** $\langle -3, -10\rangle$

72) يستطيع رشاش ماء رشّ منطقة على شكل قطاع دائري يمكن تحديدها بالمتباينتين $0 \le r \le 20, -30° \le \theta \le 210°$ ، حيث r بالأقدام. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟ **B**



A $821\,ft^2$ **C** $852\,ft^2$

B $838\,ft^2$ **D** $866\,ft^2$

تنويع التعليم

فوق

توسع: اكتب الإحداثيات الديكارتية لكل نقطةٍ ممّا يأتي:

- $A\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ $A(0, 4)$ $C(3, \pi)$ $C(-3, 0)$
- $B(2, 270°)$ $B(0, -2)$ $D(1, 360°)$ $D(1, 0)$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 6

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6)

دون

الاسم: التاريخ:

6-1 تدريبات إعادة التعليم

الإحداثيات القطبية

تمثيل الإحداثيات القطبية، في نظام الإحداثيات القطبية، تعيّن مواقع النقاط باستعمال الطول والزاوية؛ إذ يمكن تعيين موقع النقطة P بالإحداثيات القطبية بالزوج المرتب (r, θ)، حيث r المسافة من القطب، أو نقطة الأصل، إلى النقطة P، و θ قياس الزاوية المتجهة المحصورة بين نصف المستقيم الواصل من القطب إلى النقطة P والمحور القطبي.

مثال مثّل كلًّا من النقطتين الآتيتين:

a) $P\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$

ارسم ضلع انتهاء الزاوية $\frac{\pi}{4}$ في وضعها القياسي.
لمّا كانت r موجبة ($r=3$)، فإنه يمكن تعيين نقطة على ضلع الانتهاء على بُعْد 3 وحدات من القطب، لاحظ أن النقطة P تقع على الدائرة الثالثة حول القطب.

b) $Q\left(-2.5, -120°\right)$

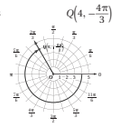
يكون قياس الزاوية باتجاه عقارب الساعة سالبًا، ارسم ضلع انتهاء الزاوية $-120°$ في وضعها القياسي.
لمّا كانت r سالبة، فإنه يمكن مدّ ضلع انتهاء الزاوية في الاتجاه المعاكس، ثم تعيين النقطة Q على هذا الضلع، على أن تبعد 2.5 وحدة عن القطب.

تمارين

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

1) $R(3, 60°)$

2) $Q\left(4, -\frac{4\pi}{3}\right)$



3) $A(-2.5, -150°)$

تدريبات إعادة التعليم (7)

دون

الاسم: التاريخ:

6-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الإحداثيات القطبية

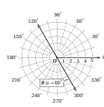
تمثيل المعادلات القطبية بيانيًّا، المعادلة المكتوبة بدلالة الإحداثيات القطبية تسمى معادلة "قطبية"، فالتمثيل القطبي هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق المعادلة القطبية المعطاة، والتمثيلات البيانية لمعادلات على الصورة $r=k$، $r=k\cos\theta$، $\theta=k$، حيث k ثابت، تُعدّ أساسية في نظام الإحداثيات القطبية. حلول المعادلة $r=k$ هي (k, θ)، حيث θ أي زاوية، وحلول المعادلات $\theta=k$ هي (r, θ) حيث r أي قيمة حقيقية.

مثال مثّل كلًّا من المعادلتين القطبيتين الآتيتين بيانيًّا:

a) $r=3$

حلول المعادلة $r=3$، هي نقاط على الصورة $(3, \theta)$، حيث θ أي زاوية مثل: $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$، $\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$، $(3, \pi)$، $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right)$؛ إذن يتكون التمثيل البياني لهذه المعادلة من جميع النقاط التي تبعد 3 وحدات عن القطب؛ لذا فإن التمثيل البياني هو دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها 3

b) $\theta=-60°$



حلول المعادلة $\theta=-60°$ هي نقاط على الصورة $(r, -60°)$، حيث r أي عدد حقيقي. يتكون التمثيل البياني لهذه المعادلة من جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $-60°$ مع المحور القطبي الموجب.

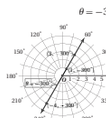
تمارين

مثّل كل معادلة قطبية فيما يأتي بيانيًّا:

1) $r=4$

2) $\theta=\frac{3\pi}{4}$

3) $\theta=-300°$



تدريبات حل المسألة (8)

دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

6-1 تدريبات حل المسألة

الإحداثيات القطبية

1) **طيران**، عند الساعة $1{:}00\,pm$ تطير طائرة باتجاه $30°$ غرب الشمال من نقطة الأصل بسرعة قدرها 300 ميل في الساعة.

a) عيّن موقع الطائرة باستعمال المستوى القطبي بعد ساعتين.

b) إذا علمت أن المطار يقع عند النقطة $(150°, 800)$، فعيّن موقع المطار على المستوى نفسه.

c) كم ميلًا تبعد الطائرة عن المطار بعد ساعتين؟

411 ميلًا تقريبًا

d) بعد ساعتين، غيّرت الطائرة اتجاه حركتها باتجاه المطار مباشرة، بسرعة متوسطة مقدارها 250 ميلًا في الساعة. يخطط مسافر في الطائرة للّحاق بطائرة أخرى تُقلع عند الساعة 3:55 بعد الظهر، فإذا أقلعت الطائرة الأخرى في الموعد المحدد، فهل سيصل المسافر في الوقت المناسب؟ وضح إجابتك.

لا؛ تصل الطائرة إلى المطار الساعة $4{:}39\,pm$ تقريبًا، أو بعد 44 دقيقة من إقلاع الطائرة الثانية.

2) **حدائق**، ثُبّت مرشٌّ في حديقة لريّها، على أن يصل الماء إلى المنطقة: $0 \le r \le 6$ ، $-\frac{7\pi}{12} \le \theta \le \frac{17\pi}{12}$، حيث r بالأقدام، أوجد مساحة المنطقة التي يصلها الماء.

47 قدمًا مربعة تقريبًا.

3) **مركبة دوارة**، يركب عليّ مركبة دوارة في مدينة الألعاب.

a) إذا كان بُعد علي 3 أمتار من مركز المركبة، فاكتب معادلة تمثل موقعه في أثناء دوران المركبة.

$r=3$

b) تصنع المركبة $\frac{5}{19}$ دورة في الثانية، فإذا كان موقع علي الحالي يصنع زاوية قياسها $165°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة مع موقعه الأصلي، فأوجد موقعه بعد 1.9 ثانية بالنسبة لموقعه الأصلي.

$(3, -15°)$

4) **آثار**، وجد عالِم آثار إناءً مصنوعًا من السراميك البيروني، يعود إلى عام 400 قبل الميلاد، إذ يحوي هذا الإناء، الذي يبلغ طول قطر فتحته الدائرية 25 سنتمترًا، نقوشًا على أبعاد متساوية. نُقش أحدها عند النقطة $\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$، أوجد ثلاثة أزواج مختلفة، كلٌّ منها يمثل إحداثيين قطبيَّين لهذه النقطة.

إجابة ممكنة:

$\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$, $\left(1.5, \frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(-1.5, -\frac{\pi}{3}\right)$

التدريبات الإثرائية (9)

فوق

الاسم: التاريخ:

6-1 التدريبات الإثرائية

المسافة على سطح الأرض

تتقاطع خطوط الطول على سطح الأرض عند القطبين الشمالي والجنوبي، وخط الطول الذي يمر حول الأرض ويمر بالقطبين يسمى **الدائرة العظمى**. الدوائر العظمى جميعها لها المحيط نفسه، وتساوي محيط الدائرة التي طول نصف قطرها يساوي طول نصف قطر الكرة الأرضية 3963.2 ميلًا. (تذكّر أن الأرض ليست كروية تمامًا، إلّا أنه يمكننا إهمال الفرق).

1) أوجد محيط الدائرة العظمى.

24901.5 ميل

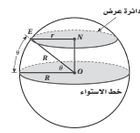
تُقاس المواقع على الدائرة العظمى بالدرجات شمال أو جنوب خط الاستواء. تقع المدينة A عند $40°\,26'N$، وهذا يعني أن نصفي القطرين من مركز الأرض إلى كلٍّ من المدينة A، ونقطة تقاطع خط الاستواء مع الدائرة العظمى التي تمر في المدينة A يشكّلان زاويةً قياسها $40°\,26'$ (انظر الشكل المجاور).

2) أوجد طول القوس على الدائرة العُظمى الذي يقابل زاويةً قياسها درجة واحدة.

69.2 ميلًا تقريبًا

3) تقع المدينة ب $(32°\,46'N)$، والمدينة جـ $(2°\,9'S)$ على الدائرة العظمى نفسها التي تمر في المدينة A، أوجد المسافة بين المدينة A، وكلٍّ من المدينتين ب، جـ.

2945.5 ميلًا، 530.3 ميلًا



لمّا كانت دوائر العرض موازيةً لخط الاستواء، فإن أنصاف أقطارها ومحيطاتها تصغُر كلما اقتربنا من أحد القطبين، ويعتمد طول القوس الذي يقابل زاوية قياسها درجة واحدة على بُعْد دوائر العرض شمال خط الاستواء أو جنوبه، والشكل المجاور يبين دائرة عرض طول نصف قطرها r، وتقع شمال خط الاستواء بزاوية قياسها θ، ولمّا كان نصفا قطرَي دائرة خط الاستواء ودائرة العرض متوازيين، فإن $m\angle NEO = \theta$، و $\cos\theta = \frac{r}{R}$؛ لذا يكون $r = R\cos\theta$، حيث R طول نصف قطر الكرة الأرضية.

4) أوجد طول نصف قطر دائرة عرض $70°$ شمال خط الاستواء ومحيطها.

8516.8 ميلًا، 1355.5 ميلًا

5) أوجد طول القوس من دائرة العرض في السؤال 4، والذي يقابل زاوية قياسها درجة واحدة.

23.7 ميلًا

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 6

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (9)

دون | ضمن | فوق

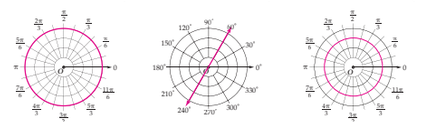
6-1 الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي أدناه:

1) $(2.5, 0°)$ 2) $(-2, \frac{\pi}{4})$ 3) $(-1, -30°)$

مثّل كل معادلة قطبية مما يأتي بيانيًا في المستوى القطبي أدناه:

4) $r = 3$ 5) $\theta = 60°$ 6) $r = 4$



7) **منظر طبيعي:** صمَّم أحد المعماريين حديقة في مبنى جديد.

a) إذا وضع المصمّم نخلة عند النقطة $(3, -135°)$، فمثّل موقع النخلة في المستوى القطبي أدناه.

b) إذا أراد المصمم وضع مقعد عند $(4, -85°)$، وإنشاء بركة عند $(1, 105°)$ فأوجد المسافة بين المقعد والبركة، مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر. **4.95 وحدات**

9

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات
Polar and Rectangular Forms of Equations

فيما سبق:
درستُ تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية.
(الدرس 1–6)

والآن:
- أحوّلُ بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- أحوّلُ المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يبعث مِجَس مُثبت إلى رجل آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة المتجهة r، والزاوية المتجهة θ. ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.

الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$؛ لأن

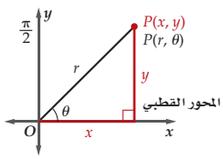
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة r, θ على النحو الآتي:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$
اضرب في r
$$r\cos\theta = x \quad , \quad r\sin\theta = y$$

وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيّات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.

مفهوم أساسي: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية



إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ)، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

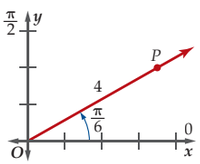
$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

مثال 1: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلِّ نقطة مما يأتي:

a) $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$



بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، فإن $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$.

$x = r\cos\theta$	صيغ التحويل	$y = r\sin\theta$
$= 4\cos\frac{\pi}{6}$	$r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4\sin\frac{\pi}{6}$
$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	بسّط	$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$
$= 2\sqrt{3}$		$= 2$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو $(3.46, 2)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

مصادر الدرس 2-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (61)	• تنويع التعليم ص (61)	• تنويع التعليم ص (67)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-6
استعمال نظام الإحداثيات القطبية؛ لتمثيل النقاط وبعض المعادلات البسيطة.

الدرس 2-6
التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

ما بعد الدرس 2-6
تحويل الأعداد المركبة من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- إذا وُضع نظام الإحداثيات الديكارتية منطبقًا على نظام الإحداثيات القطبية، فأيُّ النقاط القطبية ستنطبق على نقطة الأصل؟
(0, 0°) أو (0, 0).
- أيُّ النقاط القطبية ستنطبق على النقطة الديكارتية (4, 0)؟
(4, 0°) أو (4, 0).
- أيُّ النقاط القطبية ستنطبق على النقطة الديكارتية (0, 4)؟
$\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ أو (4, 90°)
- أيُّ النقاط الديكارتية ستنطبق على النقطة القطبية $(4, \pi)$؟ (−4, 0)
- أيُّ النقاط الديكارتية ستنطبق على النقطة القطبية (4, 270°)؟ (0, −4)

الإحداثيات القطبية والديكارتية

المثال 1 يُبيّن كيفية تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية.

المثال 2 يُبيّن كيفية تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية.

المثال 3 يُبيّن كيفية التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي :

(a) $D\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ $D\left(1, \sqrt{3}\right)$
أو تقريبًا $D(1, 1.37)$

(b) $F(-5, 45°)$
$F\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$ أو
تقريبًا $F(-3.54, -3.54)$

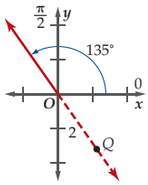
(c) $H(4, -240°)$ $H\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$
أو تقريبًا $H(-2, 3.46)$

إرشادات للمعلم الجديد

ضبط الوضعية ذكِّر الطلاب بأن عليهم ضبط وضعية الآلة الحاسبة في المثال 1a؛ لتكون RADIAN (راديان)، وذلك بالضغط على ON ثم 5 الإعدادات ثم الاختيار. أما في المثالين lb, lc ، فإن عليهم ضبط الوضعية لتكون DEGREE (درجة) بنفس الطريقة.

(b) $Q(-2, 135°)$

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (-2, 135°)$ ، فإن $r = -2, \theta = 135°$.

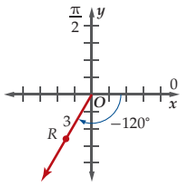


	صيغ التحويل	
$y = r \sin \theta$		$x = r \cos \theta$
$= -2 \sin 135°$	$r = -2, \theta = 135°$	$= -2 \cos 135°$
$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$	بسّط	$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو $(1.41, -1.41)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

(c) $V(3, -120°)$

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (3, -120°)$ ، فإن $r = 3, \theta = -120°$.



	صيغ التحويل	
$y = r \sin \theta$		$x = r \cos \theta$
$= 3 \sin(-120°)$	$r = 3, \theta = -120°$	$= 3 (\cos -120°)$
$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	بسّط	$= 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $(-2.6, -1.5)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي: انظر الهامش.

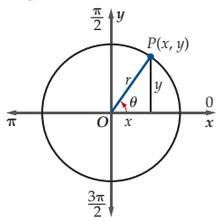
(1A) $R(-6, -120°)$ **(1B)** $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ **(1C)** $T(-3, 45°)$

إرشادات للدراسة

تحويل الإحداثيات
إن العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتُها العملية المتبعة في إيجاد طول المتجه واتجاهه.

ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة المتجهة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية المتجهة التي يصنعها r مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.

استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.



$r^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

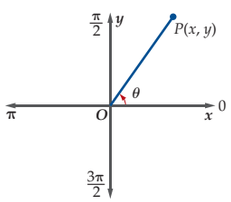
ترتبط الزاوية θ بكل من x, y من خلال دالة الظل، ولإيجاد الزاوية θ:

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ تعريف الظل

$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ دالة معكوس الظل

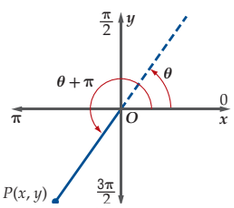
تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ أو $(-90°, 90°)$ في نظام الإحداثيات الديكارتية.

وتُعطى قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أي عندما تكون $x > 0$ ، كما في الشكل 6.2.1 . وإذا كانت $x < 0$ ، فإن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث، لذا عليك إضافة π أو $180°$ (طول الدورة للدالة $y = \tan x$) إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل 6.2.2 .



$x > 0$ عندما $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$

الشكل 6.2.1



$x < 0$ عندما $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + 180°$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$

الشكل 6.2.2

إجابات (تحقق من فهمك):

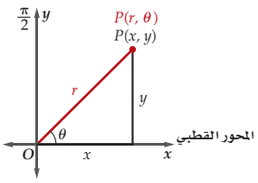
(1A) $(3, 3\sqrt{3})$ أو $(3, 5.20)$ تقريبًا

(1B) $(2.5, 2.5\sqrt{3})$ أو $(2.5, 4.33)$ تقريبًا

(1C) $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(-2.1, -2.1)$ تقريبًا

مفهوم أساسي

تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية



إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

وعندما $x < 0$ فإن:

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$

أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$.

وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$

تذكَّر أن هناك عددًا لانهائيًّا من أزواج الإحداثيات القطبية للنقطة، والتحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية يعطي أحدها.

مـثال 2

تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

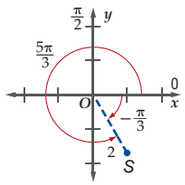
أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

a $S(1, -\sqrt{3})$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (1, -\sqrt{3})$، فإن $x = 1, y = -\sqrt{3}$.

ولأن $x > 0$، لذا استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ؛ لإيجاد الزاوية θ .

صيغ التحويل		
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$		$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$	$x = 1, y = -\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$
$= \sqrt{4} = 2$	بسّط	$= -\frac{\pi}{3}$



أي أن $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة S.

ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة موجبة لـ θ ، وذلك بإضافة 2π .

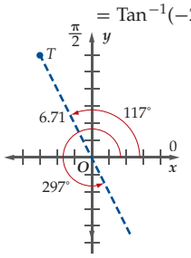
فيكون $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$، كما في الشكل المجاور.

b $T(-3, 6)$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (-3, 6)$، فإن $x = -3, y = 6$.

ولأن $x < 0$، لذا استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ ؛ لإيجاد الزاوية θ

صيغ التحويل		
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$		$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$
$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$	$y = 6, x = -3$	$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + 180°$
$= \sqrt{45} \approx 6.71$	بسّط	$= \text{Tan}^{-1}(-2) + 180° \approx 117°$



أي أن $(6.71, 117°)$ تقريبًا هو زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة T، ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة سالبة لـ r، فنحصل على $(-6.71, 297°)$ أو $(-6.71, 117° + 180°)$، كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2A $V(8, 10)$ تقريبًا $(12.8, 4.04)$ ، تقريبًا $(-12.8, 0.90)$

2B $W(-9, -4)$ تقريبًا $(-9.85, 6.70)$ ، تقريبًا $(9.85, 3.56)$

مثال إضافي

2 أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كلٍّ مما يأتي:

a $E(2, -4)$ تقريبًا $E(4.47, -1.11)$ أو $E(4.47, 5.17)$

b $G(-2, -4)$ تقريبًا $G(4.47, 4.25)$ أو $G(-4.47, 7.39)$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حُلَّ عدة أمثلة على التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية، ثمّ خَزِّن حلولك في ملفٍّ وأرسله إلى الطلاب؛ لاتخاذه مرجعًا إضافيًّا.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون: قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثلاثية. واطلب إلى أحد طلاب كل مجموعة تسمية إحداثيات قطبية لنقطة ما. ثم يقوم طالب آخر بتحويل إحداثيات النقطة إلى إحداثيات ديكارتية ويُمرِّرُها إلى الطالب الثالث الذي يعيد تحويلها إلى إحداثيات قطبية. اطلب إليهم المقارنة بين الصورتين القطبيتين للنقطة. إذا لم تكونا متساويتين، فاسأل الطلاب عن الخطأ الذي أدى إلى ذلك. كرر النشاط مبتدئًا بإحداثيات ديكارتية.

مثال إضافي

3 **رجل آلي** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس ومثال 3. افترض أن الرجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسّ قد رصد جسمًا عند النقطة $(3, 280°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟
$(0.52, -2.95)$

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(4, 9)$، فما المسافة وما قياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟
تقريبًا $(9.85, 66.0°)$

في بعض ظواهر الحياة الطبيعية، قد يكون من المفيد أن تحوّل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

مثال 3 من واقع الحياة — التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟»، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسَّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

	صيغ التحويل	
$x = r\cos\theta$		$y = r\sin\theta$
$= 5\cos 295°$	$r = 5, \theta = 295°$	$= 5\sin 295°$
≈ 2.11	بسّط	≈ -4.53

أي أن الإحداثيات الديكارتية لموقع الجسم هي $(2.11, -4.53)$ تقريبًا.

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3, 7)$، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

	صيغ التحويل	
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$		$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{3^2 + 7^2}$	$x = 3, y = 7$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{7}{3}$
≈ 7.62	بسّط	$\approx 66.8°$

الإحداثيات القطبية لموقع الجسم هي $(7.62, 66.8°)$ تقريبًا؛ أي أن المسافة بين الجسم والرجل الآلي 7.62، وقياس الزاوية بينهما $66.8°$

الربط مع الحياة

صممت وكالة ناسا رجلًا آليًا وزنه 3400 باوند، وطوله 12 ft، وطول ذراعه 11 ft؛ لأداء بعض المهام في الفضاء الخارجي.

المصدر: The New York Times

تحقق من فهمك

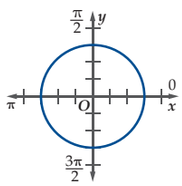
3) **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟ **تقريبًا $(-3.44, 4.91)$**

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2, 6)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟ **تقريبًا $(6.32, 108°)$**

المعادلات القطبية والديكارتية قد تحتاج في دراستك المستقبلية إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس؛ وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية المعقَّدة صورتها القطبية أسهل كثيرًا. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

المعادلة على الصورة الديكارتية
$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية
$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقَّدة صورتها الديكارتية أسهل كثيرًا، فالمعادلة القطبية $r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$ صورتها الديكارتية هي $2x - 3y = 6$

62 الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن x بـ $r\cos\theta$، وعن y بـ $r\sin\theta$ ، ثم نبسّط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

مـثال 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $(x-4)^2+y^2=16$

لإيجاد الصورة القطبيّة للمعادلة، عوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$. ثم بَسِّط المعادلة.

$(x-4)^2+y^2=16$	المعادلة الأصلية
$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$	$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$	اضرب
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$	اطرح 16 من الطرفين
$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$	ضع الحدود المربعة في طرف واحد
$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$	حلّل
$r^2(1)=8r\cos\theta$	متطابقة فيثاغورس
$r=8\cos\theta$	اقسم الطرفين على r حيث $r\neq 0$

b) $y=x^2$

$y=x^2$	المعادلة الأصلية
$r\sin\theta=(r\cos\theta)^2$	$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$
$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$	اضرب
$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=r$	اقسم الطرفين على $r\cos^2\theta$
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=r$	$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$
$\tan\theta\sec\theta=r$	المتطابقات النسبية ومتطابقات المقلوب

إرشادات للدراسة

المتطابقات المثلثية

من المفيد أن تراجع المتطابقات المثلثية التي تعلمتها سابقًا؛ لمساعدتك على تبسيط الصورة القطبية للمعادلات الديكارتية.

تحقق من فهمك

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A) $x^2+(y-3)^2=9$

4B) $x^2-y^2=1$

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$r^2=x^2+y^2, \tan\theta=\frac{y}{x}, x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.

المعادلات القطبية والديكارتية

المثال 4 يُبيّن كيفية تحويل المعادلات من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية.

المثال 5 يُبيّن كيفية تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية.

مثال إضافي

4 اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $(x+2)^2+y^2=4$

$r=-4\cos\theta$

b) $x^2-y^2=4$

$r^2=4\sec 2\theta$

4A) $r=6\sin\theta$

4B) $r^2=\sec 2\theta$

مثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

a $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$	المعادلة الأصلية
$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$	خُذ tan الطرفين
$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	اضرب الطرفين في x

b $r = 7$

$r = 7$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 49$	ربّع الطرفين
$x^2 + y^2 = 49$	$r^2 = x^2 + y^2$

c $r = -5\sin\theta$

$r = -5\sin\theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = -5r\sin\theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = -5y$	$r^2 = x^2 + y^2,\ y = r\sin\theta$
$x^2 + y^2 + 5y = 0$	أضف $5y$ إلى الطرفين

تحقق من فهمك (5A-5C) انظر الهامش.

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

5A $r = -3$ **5B** $\theta = \frac{\pi}{3}$ **5C** $r = 3\cos\theta$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

النقطتان $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ تقعان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$.

والإحداثيات الديكارتية لهما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$،

فتكون معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين هي:

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

مثال إضافي

5 اكتب كلّ معادلة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

a $\theta = \frac{\pi}{4}$ $y = x$.

b $r = 5$ $x^2 + y^2 = 25$.

c $r = 2\sin\theta$ $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

إجابات (تحقق من فهمك):

5A $x^2 + y^2 = 9$

5B $y = \sqrt{3}x$

5C $x^2 + y^2 - 3x = 0$

تدرب وحل المسائل

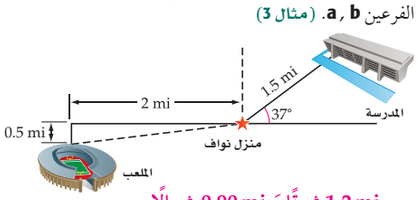
حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلٍّ نقطة مما يأتي: (مثال 1)

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
3) $(5, 240°)$ $(-2.5, -2.5\sqrt{3})$
4) $(2.5, 250°)$ تقريبًا $(-0.86, -2.35)$
5) $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ $\left(1, \sqrt{3}\right)$
6) $(-13, -70°)$ تقريبًا $(-4.45, 12.22)$
7) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
8) $(-2, 270°)$ $(0, 2)$
9) $(4, 210°)$ $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$
10) $(-1, -\frac{\pi}{6})$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2) **11-22** انظر الهامش.

11) $(7, 10)$
12) $(-13, 4)$
13) $(-6, -12)$
14) $(4, -12)$
15) $(2, -3)$
16) $(0, -173)$
17) $(1, 3)$
18) $(-14, 14)$
19) $(52, -31)$
20) $(3, -4)$
21) $(1, -1)$
22) $(2, \sqrt{2})$

23) **مسافات:** إذا كانت مدرسة نواف تبعُد 1.5 mi عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها 53° شمال الشرق كما في الشكل أدناه، فأجب عن الفرعين **a**, **b**. (مثال 3)



1.2 mi شرقًا وَ 0.90 mi شمالًا

a إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال؛ كي يصل إلى المدرسة، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟

b إذا كان الملعب على بُعد 2 mi غربًا، و 0.5 mi جنوبًا، ومنزل نواف يمثِّل القطب، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟ **(2.06, 194.04°)**

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (مثال 4) **24-31** انظر ملحق الإجابات.

24) $x = -2$
25) $(x + 5)^2 + y^2 = 25$
26) $y = -3$
27) $x = 5$
28) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
29) $x^2 + (y + 3)^2 = 9$
30) $y = \sqrt{3}x$
31) $x^2 + (y + 1)^2 = 1$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية: (مثال 5) **32-41** انظر ملحق الإجابات.

32) $r = 3 \sin \theta$
33) $\theta = -\frac{\pi}{3}$
34) $r = 10$
35) $r = 4 \cos \theta$
36) $\tan \theta = 4$
37) $r = 8 \csc \theta$
38) $r = -4$
39) $\cot \theta = -7$
40) $\theta = \frac{3\pi}{4}$
41) $r = \sec \theta$

42) **زلازل:** تُنمذَج حركة أمواج الزلازل بالمعادلة $r = 12.6 \sin \theta$، حيث r مقاسه بالأميال. اكتب معادلة أمواج الزلازل على الصورة الديكارتية. (مثال 5)

$x^2 + y^2 - 12.6y = 0$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

43) $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$ **43-50** انظر ملحق الإجابات.
44) $r = 10 \csc \left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$
45) $r = 3 \csc \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
46) $r = -2 \sec \left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$
47) $r = 4 \sec \left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$
48) $r = \frac{5 \cos \theta + 5 \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$
49) $r = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$
50) $r = 4 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

51) $6x - 3y = 4$ **51-54** انظر ملحق الإجابات.
52) $2x + 5y = 12$
53) $(x-6)^2 + (y - 8)^2 = 100$
54) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 42-1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

المستوى القطبي يحتاج الطلاب إلى ورقة المستوى القطبي في كثيرٍ من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة راقب الطلاب الذين يخطئون في التعويض عن x, y, r, θ بما يكافئها عند التحويل بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية. واطلب إليهم كتابة صيغ التحويل بين x, y, r, θ على بطاقة والاحتفاظ بها.

إجابات:

11) $\approx (12.21, 0.96), \approx (-12.21, 4.1)$
أو $\approx (12.21, 55°), \approx (-12.21, 235°)$
12) $\approx (13.6, 2.84), \approx (-13.6, 5.98)$
أو $\approx (13.6, 163°), \approx (-13.6, 343°)$
13) $\approx (13.42, 4.25), \approx (-13.42, 1.11)$
أو $\approx (13.42, 244°), \approx (-13.42, 64°)$
14) $\approx (12.65, -1.25), \approx (-12.65, 1.89)$
أو $\approx (12.65, 288°), \approx (-12.65, 108°)$
15) $\approx (3.61, -0.98), \approx (-3.61, 2.16)$
أو $\approx (3.61, -72°), \approx (-3.61, 124°)$
16) $\left(173, \frac{3\pi}{2}\right), \left(-173, \frac{\pi}{2}\right)$
أو $\approx (173, 270°), \approx (-173, 90°)$
17) $\approx (3.16, 1.25), \approx (-3.16, 4.39)$
أو $\approx (3.16, 72°), \approx (-3.16, 252°)$
18) $\approx (19.8, 0.75\pi), \approx (-19.8, 1.75\pi)$
أو $\approx (19.8, 135°), \approx (-19.8, 315°)$
19) $\approx (60.54, 0.54), \approx (-60.54, 2.61)$
أو $\approx (60.54, 31°), \approx (-60.54, 150°)$
20) $\approx (5, -0.93), \approx (-5, 2.21)$
أو $\approx (5, 53°), \approx (-5, 127°)$
21) $\approx \left(1.41, -\frac{\pi}{4}\right), \approx \left(-1.41, \frac{3\pi}{4}\right)$
أو $\approx (1.41, -45°), \approx (-1.41, 135°)$
22) $(2.45, 0.62), (-2.45, 3.76)$
أو $\approx (2.45, 36°), \approx (-2.45, 216°)$

تنويع الوجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–42، 58، 61، 60، 63–78
ضمن ضمن المتوسط	1–63 فردي، 61، 64–78
فوق فوق المتوسط	43–78

تمثيلات متعددة

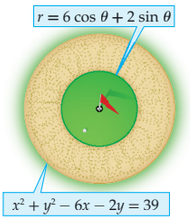
في السؤال 57 يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والتحليل، لاستقصاء العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

تنبيه!

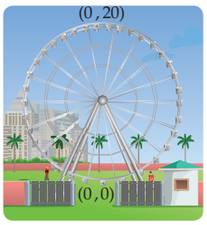
اكتشف الخطأ

في السؤال 58، اقترح على الطلاب البدء بتمثيل كلٍّ من المعادلة الأصلية، وإجابتَي باسل وتوفيق باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم كتابة المعادلة $r = \sin\theta$ في الصورة الديكارتية.

55) جولف: في أحد ملاعب الجولف، يحيط بثقب الهدف منطقة خضراء محاطة بمنطقة رملية، كما في الشكل أدناه. أوجد مساحة المنطقة الرملية على فرض أن الثقب يمثِّل القطب لكلتا المعادلتين، وأن المسافات تُقاس بوحدة اليارد. $39\pi \text{ yd}^2 \approx 122.52 \text{ yd}^2$



56) عجلة دوّارة: إذا كانت إحداثيات أدنى نقطة في عجلة دوّارة $(0, 0)$، وأعلى نقطة فيها $(0, 20)$.



a) فاكتب معادلة العجلة الدوّارة الموضحة بالشكل المجاور على الصورة الديكارتية.
$x^2 + (y - 10)^2 = 100$

b) اكتب المعادلة في الفرع **a** بالصيغة القطبية.
$r = 20\sin\theta$

57) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة سوف تكتشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية. **a-f) انظر ملحق الإجابات.**

a) بيانيًّا: يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ في المستوى الديكارتي بالنقطة (a, b). مَثِّل العدد المركب $8i + 6$ في المستوى الديكارتي.

b) عدديًّا: أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **a** .

c) بيانيًّا: عزِّز إجابتك في الفرع **b** بتمثيل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

d) بيانيًّا: مَثِّل بيانيًّا العدد المركب $-3 + 3i$ في المستوى الديكارتي.

e) بيانيًّا: أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **d**. ومَثِّل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

f) تحليليًّا: أوجد العبارات الجبرية التي تبيّن كيفية كتابة العدد المركب $a + bi$ بالإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا

58) اكتشف الخطأ: يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin\theta$ على الصورة الديكارتية، فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$، في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.
انظر ملحق الإجابات.

59) تحدٍّ: اكتب معادلة الدائرة $r = 2a\cos\theta$ بالصورة الديكارتية، وأوجد مركزها وطول نصف قطرها.
$(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ، المركز $(a, 0)$ ، طول نصف القطر a

60) اكتب: اكتب تخمينًا يبيِّن متى يكون تمثيل المعادلة على الصورة القطبيّة أسهل من تمثيلها على الصورة الديكارتية، ومتى يكون العكس صحيحًا. **انظر ملحق الإجابات.**

61) برهان: استعمل $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ؛ لإثبات أن $r = x\sec\theta, r = y\csc\theta$ ، حيث $\cos\theta \neq 0, \sin\theta \neq 0$.
انظر ملحق الإجابات.

62) تحدٍّ: اكتب المعادلة:

$$r^2(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) + r(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

على الصورة الديكارتية. (**إرشاد:** فك الأقواس قبل تعويض قيم r^2، r . تمثّل المعادلة الديكارتية قطعًا مخروطيًّا). **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

مَثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (الدرس 1-6)

63) $A(-2, 45°)$ **64)** $D(1, 315°)$ **65)** $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

66-68) انظر ملحق الإجابات.

أوجد الزاوية بين المتّجهين u , v في كل مما يأتي: (الدرس 3-5)

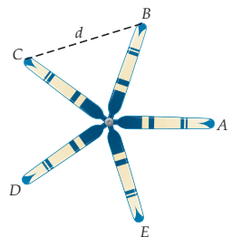
66) $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7\rangle$ $91.8°$

67) $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6\rangle$ $90°$

إجابات:

62)
$$r^2(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) + r(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta - 8ar\cos\theta + 6br\sin\theta = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4(r\cos\theta)^2 + 3(r\sin\theta)^2 - 8a(r\cos\theta) + 6b(r\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4x^2 + 3y^2 - 8ax + 6by = 12 - 4a^2 - 3b^2$$
$$4x^2 - 8ax + 4a^2 + 3y^2 + 6by + 3b^2 = 12$$
$$4(x^2 - 2ax + a^2) + 3(y^2 + 2by + b^2) = 12$$
$$4(x - a)^2 + 3(y + b)^2 = 12$$
$$\frac{(x - a)^2}{3} + \frac{(y + b)^2}{4} = 1$$

68) طائرات: تتكون مروحة طائرة من 5 ريش، المسافة بين أطرافها المتتالية متساوية. ويبلغ طول كل ريشة منها 11.5 ft . (الدرس 1-6)



A(11.5, 3°), B(11.5, 75°), C(11.5, 147°), D(11.5, 219°), E(11.5, 291°)

a) إذا كانت الزاوية التي تصنعها الريشة A مع المحور القطبي 3°، فاكتب زوجًا يمثِّل الإحداثيات القطبية لطرف كل ريشة، بفرض أن مركز المروحة ينطبق على القطب.

b) ما المسافة d بين رأسي ريشتين متتاليتين؟ **13.5 ft**

حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام. (مهارة سابقة)

69) $x^2 - 7x = -15$ $\frac{7 \pm i\sqrt{11}}{2}$

70) $x^2 + 2x + 4 = 0$ $-1 \pm i\sqrt{3}$

71) $12x^2 + 9x + 15 = 0$ $\frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي، وأوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 4-5)

72) $(2, -15, 12), (1, -11, 15)$ **5.1; (1.5, −13, 13.5)**

73) $(-4, 2, 8), (9, 6, 0)$ **15.78; (2.5, 4, 4)**

74) $(7, 1, 5), (-2, -5, -11)$ **19.31; (2.5, −2, −3)**

تدريب على اختبار

75) أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $(-2, \frac{7\pi}{6})$ في المستوى القطبي؟ **A**

A $(2, \frac{\pi}{6})$

B $(-2, \frac{\pi}{6})$

C $(2, \frac{-11\pi}{6})$

D $(-2, \frac{11\pi}{6})$

76) إذا كان $\mathbf{n} = \langle -7, 3\rangle$ ، $\mathbf{m} = \langle 5, -4\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل $\mathbf{k}$ ، حيث $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 2\mathbf{m}$ ؟ **A**

A $\langle -17, 11\rangle$

B $\langle -17, -5\rangle$

C $\langle 17, -11\rangle$

D $\langle -17, 5\rangle$

77) ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ؟ **C**

A $r = \sin\theta$

B $r = 2\sin\theta$

C $r = 4\sin\theta$

D $r = 8\sin\theta$

78) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$ ؟ **C**

A $\langle -10, 10, 25\rangle$

B $\langle -10, -10, 25\rangle$

C $\langle -10, -10, -25\rangle$

D $\langle -10, 10, -25\rangle$

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى كل طالب كتابة فقرة يوضح فيها كيف يساعد موضوع هذا الدرس على فهم موضوع الدرس التالي حول كتابة العدد المركب بالصورة القطبية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 2-6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب إثبات أن المعادلة $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ هي معادلة دائرة، وذلك بتحويلها إلى الصورة الديكارتية، ثم اطلب إليهم إيجاد مركزها وطول نصف قطرها.

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta$$
$$r^2 = ra\cos\theta + rb\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

المركز $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ، طول نصف القطر $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 6

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (10) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-2 تدريبات إعادة التعليم

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

الإحداثيات القطبية والديكارتية، إذا كانت إحداثيات النقطة P القطبية هي (r, θ)، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، وإذا كانت إحداثيات النقطة P الديكارتية هي (x, y)، فإن إحداثياتها القطبية هي: $r = \sqrt{x^2+y^2}$، $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x < 0$ و $\theta + \pi$ عندما $x > 0$.

مثال 1 أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة P التي إحداثياتها القطبية $(3, \frac{3\pi}{4})$.

لما كانت إحداثيات النقطة P هي $(3, \frac{3\pi}{4})$، فإن $r = 3$، $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

معادلات التحويل

$x = r\cos\theta$	$y = r\sin\theta$
$= 3\cos\frac{3\pi}{4}$	$= 3\sin\frac{3\pi}{4}$
$= 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

أيْ أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$، أو $(-2.12, 2.12)$ إلى أقرب جزء من مئة.

مثال 2 أوجد زوجين مختلفين، كلٌّ منهما يمثل إحداثيَّين قطبيين للنقطة R التي إحداثياها الديكارتية $(-9, 5)$.

لما كانت إحداثيات النقطة R هي $(-9, 5)$، فإن: $x = -9$ و $y = 5$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
$= \sqrt{5^2+(-9)^2}$	$= \tan^{-1}\frac{-9}{5}$
$= \sqrt{106} \approx 10.30$	≈ -1.06

أيْ أن أحد الزوجين بالإحداثيات القطبية للنقطة R هو $(10.30, -1.06)$، ولإيجاد تمثيل آخر بالإحداثيات القطبية للنقطة R، اجمع 2π للزاوية -1.06 لتحصل على $(10.30, -1.06+2\pi)$، أو $(10.30, 5.22)$.

تمارين

أوجد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة إحداثياها القطبية معطاة فيما يأتي:

1) $(20, -60°)$ **$(10, -10\sqrt{3})$**
2) $\left(-1, \frac{5\pi}{6}\right)$ **$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$**
3) $(6, -30°)$ **$(3\sqrt{3}, -3)$**
4) $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ **$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$**

أوجد زوجين بالإحداثيات القطبية لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية، على أن تكون $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

5) $(2, -2)$. **$\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right), \left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$**
6) $(3, 5)$. **$(5.8, 1.0), (-5.8, 4.2)$**

تدريبات إعادة التعليم (11) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

المعادلات القطبية والديكارتية، يمكنك استعمال العلاقات: $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$، $\tan\theta = \frac{y}{x}$، $r^2 = x^2 + y^2$ للتحويل بين المعادلات الديكارتية والمعادلات القطبية.

مثال 1 اكتب المعادلة الديكارتية $y = -3x^2$، على الصورة القطبية.

المعادلة الأصلية	$y = -3x^2$
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$	$r\sin\theta = -3(r\cos\theta)^2$
اضرب	$r\sin\theta = -3r^2\cos^2\theta$
اقسم على $-3r\cos^2\theta$	$\frac{\sin\theta}{-3\cos^2\theta} = r$
متطابقة القسمة والمقلوب	$r = -\frac{1}{3}\tan\theta\sec\theta$

مثال 2 اكتب المعادلة $r = 5\cos\theta$ على الصورة الديكارتية.

المعادلة الأصلية	$r = 5\cos\theta$
اضرب الطرفين في r	$r^2 = 5r\cos\theta$
$r^2 = x^2+y^2, x = r\cos\theta$	$x^2+y^2 = 5x$
اطرح $5x$ من الطرفين	$x^2-5x+y^2 = 0$

تمارين

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القطبية:

1) $x = 5$ **$r = 5\sec\theta$**
2) $y = -x$ **$\theta = \frac{3\pi}{4}$**

3) اكتب المعادلة $r = 2\sin\theta$ على الصورة الديكارتية. **$x^2+y^2-2y = 0$**

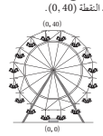
تدريبات حل المسألة (12) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-2 تدريبات حل المسألة

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

1) **العجلة الدوارة،** العجلة الدوّارة في مدينة ألعاب تصل إلى أدنى ارتفاع لها عند النقطة $(0, 0)$، وأقصى ارتفاع عند النقطة $(0, 40)$.



a) اكتب معادلة تمثل العجلة الدوارة على الصورة الديكارتية. **$x^2+(y-20)^2 = 400$**

b) حدد نوع التمثيل البياني للمعادلة التي أوجدتها في a. **دائرة مركزها $(0, 20)$، وطول نصف قطرها 20**

c) اكتب المعادلة في a على الصورة القطبية. **$r = 40\sin\theta$**

2) **احتفال،** تم تسيير مركبتين مُضاءتين في مسارين بحسب المعادلتين: $r = 4\sin\theta$ و $r = 4\cos\theta$.

a) اكتب المعادلة الديكارتية لكلٍّ من هاتين المعادلتين القطبيتين. **$x^2+(y-2)^2 = 4$; $(x-2)^2+y^2 = 4$**

3) **زلازل،** تستعمل المعادلة $r = 17\cos\theta$ لنمذجة أمواج زلزالية، حيث r بالأميال.

a) اكتب معادلة تمثل الزلزال على الصورة الديكارتية. **$(x-8.5)^2+y^2 = 72.25$**

b) أوجد مركز الزلزال، والمساحة التي تتأثر به. **226.98 ميلًا مربعًا؛ $(8.5, 0)$**

4) **عمارة،** صمَّم أحد مهندسي العمارة مترلًا فيه نافذة على شكل مثلث متطابق الأضلاع.

a) اكتب معادلة على الصورة الديكارتية تمثل مساحة النافذة، إذا كان طول ضلعها x. **$y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$**

b) اكتب الصيغة القطبية للمعادلة التي أوجدتها في الفرع a. **$r = \frac{4\sqrt{3}}{3}\tan\theta\sec\theta$**

التدريبات الإثرائية (13) — فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

6-2 التدريبات الإثرائية

حل نظام من معادلتين على الصورة القطبية

تعلمت سابقًا فكرة حل نظام من المعادلات، ويمكن تطبيق الفكرة ذاتها على نظام من المعادلات القطبية. افرض أنك مهتم بحل النظام الآتي على الفترة $[0, 2\pi]$:

$$r = \cos\theta$$
$$r = 1$$

لما كان الطرف الأيسر في كلٍّ من المعادلتين هو r، فإنه من الممكن مساواة الطرف الأيمن في كلٍّ منها معًا للحصول على المعادلة $\cos\theta = 1$، وبحل هذه المعادلة نحصل على $\theta = 0$ لذا تكون النقطة $(1, 0)$ هي حل النظام.

في العادة، يكون لنظام المعادلات القطبية أكثر من حل واحد، فمثلًا، لحل النظام

$$r = \sin\theta$$
$$r = \frac{1}{2}$$

في الفترة $[0, 2\pi]$، فإننا نُساوي الطرف الأيمن في كلٍّ منهما معًا للحصول على المعادلة

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

أيْ أن نقاط الحل في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

تمارين

حل كل نظام مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi]$:

1) $r = \sqrt{2}, r = 2\sin\theta$ **$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$**
2) $r = 3, r = \cos\theta + 3$ **$\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$**
3) $r = \sqrt{3}, r = 2\cos\theta$ **$\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}\right)$**
4) $r = 1, r = \sin\theta + 1$ **$(1, 0), (1, \pi)$**

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 6

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (10) — دون ضمن فوق

6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

1) $(6, 120°)$ $(-3, 3\sqrt{3})$ 2) $(-4, 45°)$ $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 3) $(4, \frac{\pi}{6})$ $(2\sqrt{3}, 2)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيات قطبية لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية.

في كلٍّ مما يأتي:

4) $(2, 2)$ $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}), (-2\sqrt{2}, 5\frac{\pi}{4})$ 5) $(2, -3)$ $(3.61, 5.30), (-3.61, 2.16)$ 6) $(-3, \sqrt{3})$ $(2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}), (-2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6})$

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القطبية:

7) $x^2 + y^2 = 9$ $r = \pm 3$ 8) $y = 3$ $r = 3 \csc \theta$

اكتب كلًّا من المعادلتين القطبيتين الآتيتين على الصورة الديكارتية:

9) $r = 4$ $x^2 + y^2 = 16$ 10) $r \cos \theta = 5$ $x = 5$

11) **مساحة:** وجد مسّاح حدًّا لأرض عند نقطة إحداثياها القطبيين $(40, 62°)$. ما الإحداثيات الديكارتية لهذه النقطة؟ $(18.78, 35.32)$

10

الفصل السادس الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-3

إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.

الدرس 6-3

تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس. إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها على الصورة القطبية.

ما بعد الدرس 6-3

إثبات نظرية ديموافر وتطبيقاتها في الدراسة الجامعية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

ارسم خمسة صناديق متداخلة على السبورة.

واسأل:

- استعمل شكل ڤن؛ لتوضيح العلاقة بين الأعداد المركبة، والحقيقية، والنسبيَّة، والصحيحة، والكلية. انظر الشكل أعلاه.
- هل يمكن كتابة أي عدد حقيقي على صورة عدد مركب؟ نعم، يمكن كتابة أي عدد حقيقي a على الصورة $a + 0i$.
- بما أن مجموعة الأعداد المركبة تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية، فهل تعتقد أنه بإمكاننا جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها؟ نعم

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر
Complex Numbers and De Moivre's Theorem

فيما سبق:

درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحوِّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أجدُ حاصلَ ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجدُ جذورها وقواها في الصورة القطبية.

المفردات:

المستوى المركب
complex plane
المحور الحقيقي
real axis
المحور التخيلي
imaginary axis
القيمة المطلقة لعدد مركب
absolute value of a complex number
الصورة القطبية
polar form
الصورة المثلثية
trigonometric form
المقياس
modulus
السعة
argument
الجذور النونية للعدد واحد
nth roots of unity

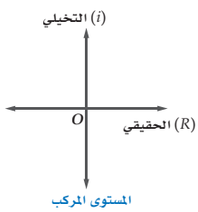
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

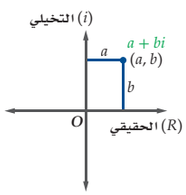
يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

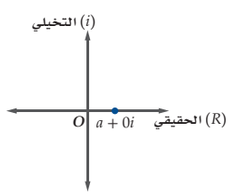
إرشاد: استعملت كلمة المعاوقة بدلًا من كلمة المقاومة؛ لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي bi. ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيَّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي** ويرمز له بالرمز R، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي** ويرمز له بالرمز i.



في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.



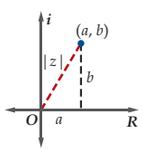


تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب. وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

مفهوم أساسي القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مصادر الدرس 6-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (71)	• تنويع التعليم ص (71, 78)	• تنويع التعليم ص (78)
كتاب التمارين	• ص (11)	• ص (11)	• ص (11)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

الصورة القطبية للأعداد المركبة

المثال 1 يُبيّن كيفية تمثيل عدد مركب في المستوى المركب، وإيجاد قيمته المطلقة.

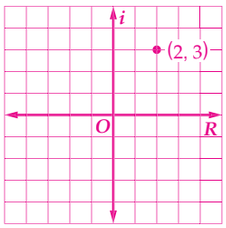
المثال 2 يُبيّن كيفية كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

المثال 3 يُبيّن كيفية تمثيل العدد المركب بيانيًّا في المستوى القطبي، ثم تحويله إلى الصورة الديكارتية.

مثال إضافي

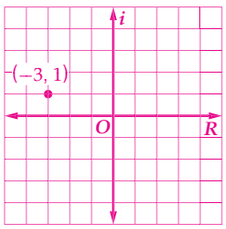
1 مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

(a $z = 2 + 3i$



$\sqrt{13} \approx 3.61$

(b $z = -3 + i$



$\sqrt{10} \approx 3.16$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية؛ لكتابة مدوَّنة تصف كيفية التعبير عن العدد المركب على الصورة القطبية، وتأكد من أنهم ضمَّنوا وصفهم إيجاد المقياس والسعة.

إرشادات للمعلم الجديد

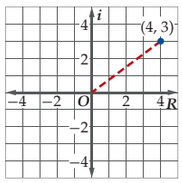
مستوى آرجاند يُسمى المستوى المركب أيضًا بمستوى آرجاند، نسبةً إلى العالم روبرت آرجاند (1768 – 1822).

مثال 1 تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

(a $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



تعريف القيمة المطلقة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

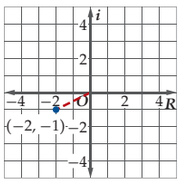
$a = 4, b = 3$ $= \sqrt{4^2 + 3^2}$

بسّط $= \sqrt{25} = 5$

القيمة المطلقة للعدد $3i + 4$ تساوي 5.

(b $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



تعريف القيمة المطلقة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = -2, b = -1$ $= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$

بسّط $= \sqrt{5} \approx 2.24$

القيمة المطلقة للعدد $i - 2$ تساوي 2.24 تقريبًا.

تحقق من فهمك (1A,1B) انظر الهامش

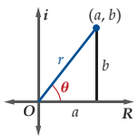
مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

(1A $5 + 2i$ **(1B** $-3 + 4i$

تنبيه!

الصورة القطبية: يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x, y لإيجاد قيم a, b.



$\cos\theta = \frac{a}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{b}{r}$

اضرب كل طرف في r $r\cos\theta = a$ ، $r\sin\theta = b$

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a، b، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

العدد المركب الأصلي $z = a + bi$

$b = r\sin\theta$ ، $a = r\cos\theta$ $= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$

خُذ العامل المشترك $= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

في حالة العدد المركب z، فإن r تمثِّل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

إرشادات للدراسة

السعة: كما في الإحداثيات القطبية، فإن θ ليست وحيدة، مع أنها تُعطى عادةً في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب

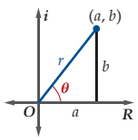
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$،

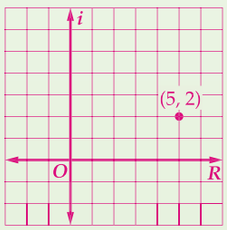
$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



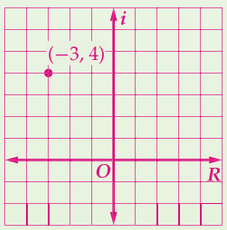
إجابة (تحقق من فهمك):

(1A



$\sqrt{29} \approx 5.39$

(1B



5

مثال 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a $-6+8i$

أوجد المقياس r والسعة θ.

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ صيغ التحويل، $a<0$

$=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$ $a=-6, b=8$

$\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}+\pi$

$=\text{Tan}^{-1}(-\frac{8}{6})+\pi\approx 2.21$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6+8i$ هي $10(\cos 2.21+i\sin 2.21)$ تقريبًا.

b $4+\sqrt{3}i$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ صيغ التحويل، $a>0$

$=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}$ $a=4, b=\sqrt{3}$

$=\sqrt{19}\approx 4.36$ بسّط

$\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$

$=\text{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

≈ 0.41

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $4+\sqrt{3}i$ هي $4.36(\cos 0.41+i\sin 0.41)$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

(2A $9+7i$ $11.4(\cos 0.66+i\sin 0.66)$ **(2B** $-2-2i$ $2.83(\cos 3.93+i\sin 3.93)$

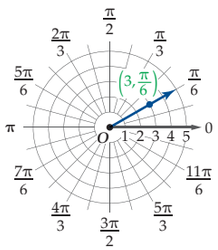
ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال (r,θ) كإحداثيات قطبية للعدد المركب. كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثّل العدد $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.

عيّن الإحداثيات القطبية $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$.



ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بسّط.

الصورة القطبية $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام $=3\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

خاصية التوزيع $=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

تحقق من فهمك **(3A, 3B** انظر الهامش.

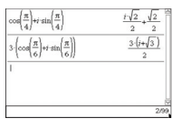
مثّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

(3A $5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **(3B** $4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

إرشاد تقني

تحويل الأعداد المركبة:

يمكن تحويل عدد مركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية باستعمال الحاسبة البيانية من تطبيق الحاسبة، بفتح صفحة تطبيق الحاسبة وإدخال العبارة على الصورة القطبية، ثم اختيار enter. مع مراعاة إعدادات الآلة الحاسبة بحيث تُعطى الصورة القطبية



مثالان إضافيان

2 عبّر عن كل عدد مركب مما يأتي على الصورة القطبية:

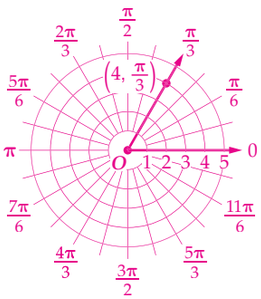
a $-2+5i$

$5.39(\cos 1.95+i\sin 1.95)$ تقريبًا

b $6+2i$

$6.32(\cos 0.32+i\sin 0.32)$ تقريبًا

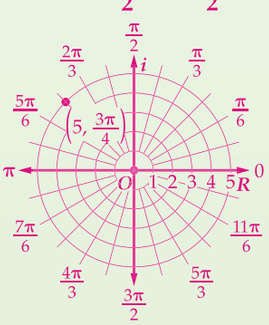
3 مثّل العدد $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.



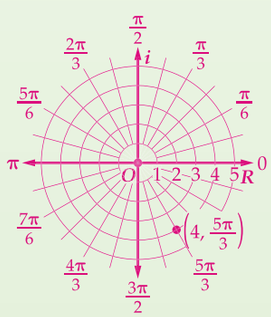
$2+2\sqrt{3}i$

إجابات:

(3A $-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$



(3B $2-2\sqrt{3}i$



ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ الصورة القطبيّة للعددين المركبين z_1 ، z_2

$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$ فك الأقواس

$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$ جمّع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدل i^2 بـ -1

$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$ أخرج i عاملًا مشتركًا

$= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$ متطابقتا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع

مفهوم أساسي **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها**

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

سوف تبرهن صيغة القسمة في التمرين 51

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقياسين وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقياسين وتطرح السعتين.

مثال 4 **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية**

أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ العبارة المعطاة

$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ صيغة الضرب

$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ بسّط

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

$8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ الصورة القطبية

$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$ أوجد قيم الجيب وجيب التمام

$= 4\sqrt{3} - 4i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$، والصورة الديكارتية $4\sqrt{3} - 4i$.

تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A) $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ تقريبًا $15\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, تقريبًا $-3.88 + 14.49i$

(4B) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ تقريبًا $15\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$, تقريبًا $-3.11 - 11.59i$

كما تقدم في فقرة "لماذا؟"، فإنه يمكن استعمال قسمة الأعداد المركبة للتعبير عن العلاقات في الكهرباء.

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها

المثال 4 يُبيّن كيفية إيجاد حاصل ضرب الأعداد المركبة بالصورة القطبية.

المثال 5 يُبيّن كيفية إيجاد حاصل قسمة عددين مركبين بالصورة القطبية.

المثال 6 يُبيّن كيفية استعمال نظرية ديموافر؛ لإيجاد قوى الأعداد المركبة.

المثال 7 يُبيّن كيفية إيجاد جذور الأعداد المركبة.

المثال 8 يُبيّن كيفية إيجاد الجذور النونية للعدد 1.

مثال إضافي

4 أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

$10(\cos\pi + i\sin\pi)$, -10

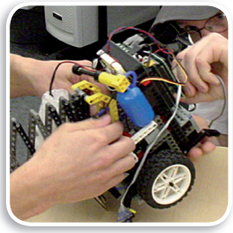
تنويع التعليم دون ضمن

المتعلمون المنطقيون: اطلب إلى مجموعاتٍ من الطلاب كتابة أدلة مفصَّلة لحل مسائل معينة، تشبه المثال 4. واطلب إليهم تضمينها كل التفاصيل على اعتبار أن الشخص الذي سيقرأ الدليل لديه معرفة قليلة بالموضوع، ثم اطلب إلى مجموعات أخرى التحقق من منطقية تتابع خطوات الحل في الأدلة ومنطقيتها.

مثال إضافي

5 **كهرباء** إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي 100 V، وكانت معاوقتها Z تساوي $5(\cos 37^\circ + j \sin 37^\circ)\ \Omega$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

$20\,[\cos(-37^\circ) + j \sin(-37^\circ)]$ أمبير تقريبًا



الربط مع الحياة

مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغّل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.

مثال 5 من واقع الحياة — قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي 150 V، وكانت معاوقتها Z تساوي $3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]\ \Omega$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

اكتب العدد 150 على الصورة القطبية.

$150 = 150\ (\cos 0 + j \sin 0)$ $\quad r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{150} = 0$

حُلّ $V = Z \cdot I$ بالنسبة لـ I.

المعادلة الأصلية $\quad I \cdot Z = V$

اقسم كل طرف على Z $\quad I = \frac{V}{Z}$

$V = 150(\cos 0 + j \sin 0)$, $Z = 3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$ $\quad I = \frac{150\ (\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$

صيغة القسمة $\quad I = \frac{150}{3\sqrt{5}}\ \{\cos[0 - (-0.46)] + j \sin[0 - (-0.46)]\}$

بسّط $\quad I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$

أي أن شدة التيار تساوي $10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ أمبير تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية 120 V، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية. $(9.6 - 7.2j)\ \Omega$ تقريبًا

يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

اضرب $\quad z \cdot z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$

صيغة الضرب $\quad z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)]$

بسّط $\quad z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

اضرب $\quad z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$

صيغة الضرب $\quad z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)]$

بسّط $\quad z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n.

72 الفصل 6 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر
(1667 م – 1754 م)
رياضي فرنسي عُرف بالنظرية المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات هو *Doctrine of Chances*. ويُعدّ ديموافر من الرياضيين الروّاد في الهندسة التحليلية والاحتمالات.

ويمكن تلخيص ذلك على النحو الآتي:

نـظـريـة **نظرية ديموافر**

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن: $z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

مـثال 6 **نظرية ديموافر**

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

أولًا: اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$	$a = 4, b = 4\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{16 + 48}$	بسّط	$= \text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$
$= 8$	بسّط	$= \frac{\pi}{3}$

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6$	الصورة القطبيّة
$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	نظرية ديموافر
$= 262144(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$	بسّط
$= 262144(1 + 0i)$	أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام
$= 262144$	بسّط

أي أن $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262144$.

تحقق من فهمك

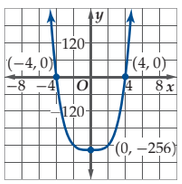
أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية:

(6A) $(1 + \sqrt{3}i)^4$ $-8 - 8\sqrt{3}i$ **(6B)** $(2\sqrt{3} - 2i)^8$ $-32768 + 32768\sqrt{3}i$

مراجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر
كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما $4, -4$. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4, -4$، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.



درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$.
وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

مثال إضافي

6 أوجد $(3 + 3\sqrt{3}i)^4$، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية.
$-648 - 648\sqrt{3}i$

إرشادات للمعلم الجديد

نظرية ديموافر يمكن للطلاب استعمال مبدأ الاستقراء الرياضي الذي درسوه سابقًا؛ لإثبات صحة نظرية ديموافر لجميع القوى الصحيحة الموجبة n.

ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n-1$، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$\frac{\theta+2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$ وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$

مثال 7 **جذور العدد المركب**

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4-4i$.

أولًا: اكتب $-4-4i$ على الصورة القطبية.

$-4-4i = \sqrt{32}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ $r = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{32}$, $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{-4}{-4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

والآن اكتب الصيغة للجذور الرباعية.

$(\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$ $\theta = \frac{5\pi}{4}, n = 4, r^{\frac{1}{n}} = (\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right]$ بسّط

ثانيًا: لإيجاد الجذور الرباعية، عوّض $k = 0, 1, 2, 3$.

$k = 0$ $\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) \approx 0.86 + 1.28i$ الجذر الأول

$k = 1$ $\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right) \approx -1.28 + 0.86i$ الجذر الثاني

$k = 2$ $\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) \approx -0.86 - 1.28i$ الجذر الثالث

$k = 3$ $\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right) \approx 1.28 - 0.86i$ الجذر الرابع

الجذور الرباعية للعدد $-4-4i$ هي $0.86 + 1.28i, -1.28 + 0.86i, -0.86 - 1.28i, 1.28 - 0.86i$

تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$ $\approx 1.37 + 0.37i, -1 + i, \approx -0.37 - 1.37i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8 $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

مثال إضافي

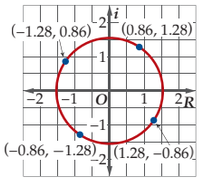
7 أوجد الجذور الخماسيَّة للعدد المركب $-2-2i$

$0.87 + 0.87i, -0.56 + 1.10i, -1.22 - 0.19i, -0.19 - 1.22i, 1.10 - 0.56i$

إرشادات للمعلم الجديد

معادلة الجذور المختلفة برهان معادلة الجذور المختلفة أعلى من مستوى هذا الكتاب.

لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته ($\sqrt[3]{32} \approx 1.54$)، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.



تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

مثال 8 الجذور النونية للعدد واحد

أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

أولًا: اكتب 1 على الصورة القطبية.

$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ $\quad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{1} = 0$

والآن اكتب الصيغة للجذور الثمانيَّة.

$1\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{8} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{8}\right)$ $\quad \theta = 0, n = 8, r^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$

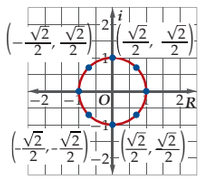
$= \cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}$ بسّط

ثانيًا: افترض أن $k = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1.

$k = 0$ $\quad \cos\frac{(0)\pi}{4} + i\sin\frac{(0)\pi}{4}$

$= \cos 0 + i\sin 0 = 1$ الجذر الأول

لاحظ أن مقياس كل جذر هو 1، ويمكن إيجاد سعة الجذر الحالية بإضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى سعة الجذر السابق.



الجذر الثاني $\quad \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

الجذر الثالث $\quad \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

الجذر الرابع $\quad \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

الجذر الخامس $\quad \cos\pi + i\sin\pi = -1$

الجذر السادس $\quad \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

الجذر السابع $\quad \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

الجذر الثامن $\quad \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

الجذور الثُّمانيَّة للعدد 1 هي $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ كما هو موضح في الشكل أعلاه.

تحقق من فهمك

8A أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

8B أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب

يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$. سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

8A $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

8B $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

مثال إضافي

8 أوجد الجذور الخماسية للعدد واحد.

$1,$
$0.3090 + 0.9511i,$
$-0.8090 + 0.5878i,$
$-0.8090 - 0.5878i,$
$0.3090 - 0.9511i$

إرشادات للمعلم الجديد

الجذور النونية للعدد واحد

التمثيل الهندسي للجذور النونية للعدد واحد، تقع دائمًا على دائرة الوحدة في المستوى المركب، حيث تمثل هذه النقاط رؤوس مضلع منتظم له n ضلعًا. لاحظ أن أحد جذور الواحد هو 1 دائمًا.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 39-1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل الأسئلة

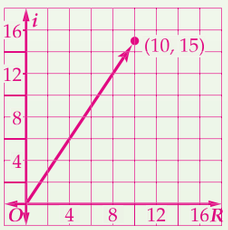
المستوى القطبي يحتاج الطلاب إلى ورقة فيها المستوى القطبي في كثير من أسئلة هذا الدرس.

تنبيه!

أخطاء شائعة عند حل السؤال 30، ذكِّر الطلاب أنه عند حل مسائل بقوى سالبة، فإننا لا نحسب القوى الموجبة، ثم نضرب النتيجة في سالب. فمثلًا: 2^{-5} لا تساوي $-(2^5)$، ولكن 2^{-5} تساوي $\frac{1}{2^5}$.

إجابات:

7a)



8) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

9) $\approx\sqrt{5}\,(\cos 2.68+i\sin 2.68)$

10) $\approx 3\sqrt{2}\left(\cos(-0.34)+i\sin-(0.34)\right)$

11) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

12) $\approx\sqrt{41}\ (\cos 0.90+i\sin 0.90)$

13) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

32) $1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -1,$
$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

تدرب وحل المسائل

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة: (مثال 1) **1-6)** انظر ملحق الإجابات للتمثيل البياني.

1) $z=4+4i$ ≈5.66

2) $z=-3+i$ ≈3.16

3) $z=-4-6i$ ≈7.21

4) $z=2-5i$ ≈5.39

5) $z=-7+5i$ ≈8.60

6) $z=8-2i$ ≈8.25

7) متجهات: تُعطى القوة المؤثرة على جسم بالعلاقة $z=10+15i$، حيث تُقاس كل مركبة للقوة بالنيوتن (N). (مثال 1)

a) مَثِّل z كمتجه في المستوى المركب. **a)** انظر الهامش.

b) أوجد طول المتجه واتجاهه. طوله 18.03 N، اتجاهه محدد بالزاوية $56.31°$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (مثال 2) **8-13)** انظر الهامش.

8) $4+4i$

9) $-2+i$

10) $4-\sqrt{2}i$

11) $2-2i$

12) $4+5i$

13) $-1-\sqrt{3}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3) **14-17)** انظر ملحق الإجابات.

14) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

15) $\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

16) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

17) $\frac{3}{2}(\cos 360°+i\sin 360°)$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 4, 5) **18-27)** انظر ملحق الإجابات.

18) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

19) $5(\cos 135°+i\sin 135°)\cdot 2(\cos 45°+i\sin 45°)$

20) $3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\div\frac{1}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)$

21) $2(\cos 90°+i\sin 90°)\cdot 2(\cos 270°+i\sin 270°)$

22) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\div 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

23) $4\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)\div 2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

24) $\frac{1}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)\cdot 6(\cos 150°+i\sin 150°)$

25) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\div 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

26) $5(\cos 180°+i\sin 180°)\cdot 2(\cos 135°+i\sin 135°)$

27) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\div 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

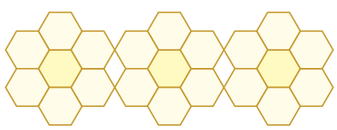
28) $(2+2\sqrt{3}i)^6$ 4096

29) $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$ 256

30) $(2+3i)^{-2}$ $-0.03-0.07i$

31) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$ -16

32) تصميم: يعمل سالم في وكالة للإعلانات. ويرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية منتظمة كما هو مبيّن أدناه. ويستطيع تعيين رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية بتمثيل حلول المعادلة $x^6-1=0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية. (مثال 7) انظر الهامش.



تنويع الوجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون	1–37، 39–41، 48، 51–64
ضمن	1–47 فردي، 48، 51–64
فوق	38–64

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:
(المثالان 7, 8) 33, 34) انظر ملحق الإجابات.

33) الجذور السداسية للعدد i

34) الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$

35) الجذور التربيعية للعدد $-3 - 4i$ $-1 + 2i, 1 - 2i$

36) كهرباء: تُعطَى معاوقة أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي بالعبارة $5(\cos 0.9 + j \sin 0.9)\Omega$، وتُعطَى في الجزء الآخر من الدائرة بالعبارة $8(\cos 0.4 + j \sin 0.4)\Omega$.
a-c) انظر الهامش.

a) حَوِّل كلًّا من العبارتين السابقتين إلى الصورة الديكارتية.

b) اجمع الناتجين في الفرع **a**؛ لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة.

c) حَوِّل المعاوقة الكلية إلى الصورة القطبية.

37) كسريات: الكسريات شكل هندسي يتكون من نمط مكرر بشكل مستمر، وتكون الكسريات ذاتية التشابه؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي، كما في الشكل أدناه. **انظر ملحق الإجابات.**

في هذا السؤال سوف تنتج كسريات من خلال تكرار $f(z) = z^2$، حيث $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a) احسب $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$، حيث $z_1 = f(z_0)$، $z_2 = f(z_1)$، وهكذا.

b) مَثِّل كل عدد في المستوى المركب.

c) صِف النمط الناتج.

38) أوجد العدد المركب z إذا علمت أن $(-1-i)$ هو أحد جذوره الرباعية، ثم أوجد جذوره الرباعية الأخرى. **انظر الهامش.**

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة:
39-41) انظر الهامش.

39) $x^3 = i$

40) $x^4 = 81i$

41) $x^3 + 1 = i$

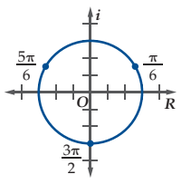
مسائل مهارات التفكير العليا

42) اكتشف الخطأ: يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمُ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك. **انظر الهامش.**

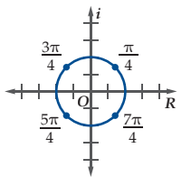
تحدٍّ: **أوجد الجذور المحدّدة على كل من المنحنيين أدناه على الصورة القطبية، ثم عيِّن العدد المركب الذي له هذه الجذور.**

43, 44) انظر ملحق الإجابات.

(43



(44



تنبيه!

اكتشف الخطأ

عند حل السؤال 42، ذكِّر الطلاب بأن عليهم البدء بكتابة العدد المركب $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ على الصورة القطبية، ثم إكمال الحل

إجابات:

36a) $3.11+3.92j, 7.37+3.12j$

36b) $(10.48+7.04j)\Omega$

36c) $\approx 12.63(\cos 0.59 + j \sin 0.59)\Omega$

38) إجابة ممكنة: أوجد الصورة القطبية للجذر $(-1-i)$ فستكون $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$، ثم أوجد $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^4$ تحصل على العدد المركب z، ثم أوجد جذوره الأخرى، وتكون الإجابة النهائية هي:
$-4; 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$

39) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$

40) $2.77 + 1.15i, -1.15 + 2.77i,$
$\approx -2.77 - 1.15i, 1.15 - 2.77i$

41) $0.79 + 0.79i, -1.08 + 0.29i,$
$0.29 - 1.08i$

42) باسم؛ إجابة ممكنة؛ لقد قام أحمد بتحويل العدد المركب إلى الصورة القطبية فقط؛ لذا عليه استعمال نظرية ديموافر لحساب القوة الخامسة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب إيجاد قيمة: $(1+i)^5$. $-4-4i$

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 3-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31)

وللتحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدروس 3-6، 2-6، 1-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32)

45) برهان: إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، حيث $r_2 \neq 0$، فأثبت أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$. انظر ملحق الإجابات.

46) تحدٍّ: اكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$ مستعملًا نظرية ديموافر. إرشاد: أوجد قيمة $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ مرة باستعمال نظرية ديموافر، ومرة باستعمال مفكوك نظرية ذات الحدين.

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

47) اكتب: وضِّح خطوات إيجاد الجذور النونية للعدد المركب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث n عدد صحيح موجب. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: (الدرس 1-6)

48) $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$ **49)** $P(4.5, -210°)$

54, 55) انظر ملحق الإجابات.

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (الدرس 2-6)

50) $(x-3)^2 + y^2 = 9$ **51)** $x^2 + y^2 = 2y$

56, 57) انظر ملحق الإجابات.

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي: (الدرس 1-6)

52) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\approx \sqrt{29}$

53) $(1, -45°), (-5, 210°)$ ≈ 4.84

حوّل الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي إلى إحداثيات ديكارتية: (الدرس 2-6)

54) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

55) $(4, 210°)$ $(-2\sqrt{3}, -2)$

تدريب على اختبار

56) أي مما يأتي يمثّل $\overrightarrow{AB}$ وطوله، إذا كان $A(3, 4, -2), B(-5, 2, 1)$؟ **A**

A $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

B $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

C $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

D $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

57) ما المسافة بين النقطة $\left(-3, \frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$؟ **C**

A 3.97

B 4.97

C 5.97

D 6.97

58) أي مما يأتي يمثّل تقريبًا الصورة القطبية للعدد المركب $21i - 20$؟ **A**

A $29(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

B $29(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

C $32(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$

D $32(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$

تنويع التعليم

ضمن فوق

أوجد الجذور التكعيبيّة للعدد -1.

$-1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

مصادر الدرس 3 - 6

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (14) — دون

الاسم: التاريخ:

6-3 تدريبات إعادة التعليم

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الصورة القطبية للعدد المركب: يمكنك تحويل العدد المركب $z=a+bi$ إلى الصورة القطبية أو المثلثية باستعمال المعادلة $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$، حيث $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$، و $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi$، عندما $a<0$، كما يمكنك تحويل العدد المركب من صورته القطبية إلى صورته الديكارتية باستعمال المعادلتين $a=r\cos\theta$ و $b=r\sin\theta$.

مثال 1 اكتب العدد $2\sqrt{3}-2i$ على الصورة القطبية

أولًا، أوجد مقياس العدد، ثم أوجد سعته.

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}$ $\quad=\tan^{-1}\frac{-2}{2\sqrt{3}}$

$=4$ $\quad=\frac{11\pi}{6}$

أيْ أن الصورة القطبية للعدد $2\sqrt{3}-2i$ هي: $4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$، أو $4(\cos 5.76+i\sin 5.76)$ تقريبًا.

مثال 2 اكتب العدد $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ على الصورة الديكارتية.

أوجد القيم المثلثية، ثم بسّط.

$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

فتكون الصورة الديكارتية للعدد z هي: $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

تمارين

اكتب كل عدد مما يأتي على الصورة القطبية:

1) $1-i$ $\quad\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

2) $3+2i$

3) $-1+\sqrt{3}\,i$ $\quad2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad\sqrt{13}\,(\cos 33.69°+i\sin 33.69°)$

اكتب كل عدد مما يأتي على الصورة الديكارتية:

4) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad2\sqrt{3}+2i$

5) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ $\quad-4-4i$

6) $6\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ $\quad3-3\sqrt{3}i$

تدريبات إعادة التعليم (15) — دون

الاسم: التاريخ:

6-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

ضرب الأعداد المركبة، وقسمتها، وقواها، وجذورها: استعمل المعادلتين الآتيتين لضرب عددين مركبين وقسمتهما.

إذا كان: $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ و $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$، فإن:

صيغة الضرب: $z_1\,z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$، حيث $r_2\neq0$ ، $z_2\neq0$

مثال أوجد ناتج $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية.

العبارة الأصلية	$3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
صيغة الضرب	$=3(4)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$
بسّط	$=12\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
احسب القيم	$=12\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
خاصية التوزيع	$=-6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}$

فتكون الصورة القطبية لناتج الضرب هي $12\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$، والصورة الديكارتية هي $-6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}$.

يمكنك استعمال نظرية ديموافر: $[r(\cos n\theta+i\sin n\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$؛ لإيجاد قوى الأعداد المركبة وجذورها وذلك عند كتابتها على الصورة القطبية.

تمارين

أوجد ناتج الضرب أو القسمة في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية:

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ $\quad9$

2) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\div2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

أوجد قوة العدد المركب في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتبها على الصورة الديكارتية:

3) $(2-2\sqrt{3}\,i)^3$ $\quad-64$

4) $(1-i)^5$ $\quad-4+4i$

تدريبات حل المسألة (16) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

6-3 تدريبات حل المسألة

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

1) **تصميم،** ترغب ليلى في رسم نموذج لطبق معدني لحامي منتظم، فترسم دائرة، وتدوّر نصف قطرها بمقدار 72° في كل مرة؛ لتحصل على الحوامي المنتظم، ثم تعين رؤوسه على الدائرة، كما في الشكل أدناه.

a) ما قياس زاوية الدوران في كل مرة بالراديان؟
$\frac{2\pi}{5}$

b) أوجد الرأسين الآخرين للحوامي على الصورة المثلثية.
$\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$
$\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$

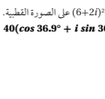
2) **هندسة كهربائية،** المعاوقة هي مقاومة سير التيار في دارة كهربائية ذات تيار متردد، حيث تعمل كثير من الأجهزة الكهربائية على فرق جهد 115 فولت، وتيار متردد، وتستعمل المعادلة $\frac{V}{I}=Z$ لوصف العلاقة بين فرق الجهد E، وشدة التيار I، والمعاوقة Z، أوجد كلًّا مما يأتي على الصورة الديكارتية:

a) أوجد فرق الجهد إذا كان
$I=10(\cos 35°+j\sin 35°)$
$Z=3(\cos 20°+j\sin 20°)$
$17.21+24.57j$

b) أوجد المعاوقة، إذا كان:
$I=8(\cos 5°+j\sin 5°)$
$V=115(\cos 45°+j\sin 45°)$
$11.01+9.24j$

3) **تصميم أثاث،** وُضع أحد أركان سطح طاولة عند نقطة الأصل لمستوى مركب، وركنان آخران عند $1+3i$ و $6+2i$، والركن الرابع عند $(1+3i)+(6+2i)$.

a) ارسم سطح الطاولة.



b) صف شكل سطح الطاولة.
متوازي أضلاع

c) اكتب $1+3i$ على الصورة القطبية.
$\sqrt{10}(\cos 71.6°+i\sin 71.6°)$

d) أوجد $(6+2i)^2$ على الصورة القطبية.
$40(\cos 36.9°+i\sin 36.9°)$

التدريبات الإثرائية (17) — فوق

الاسم: التاريخ:

6-3 التدريبات الإثرائية

البحث عن الكنز

أخفى شخص ينقّب عن الذهب قطعة ذهبية تحت التراب، وكان قد كتب إرشادات يخبر فيها عن مكانها.

1) ابدأ حيث توجد شجرة البلوط، ثم تحرك باتجاه نبع المياه المعدنية، وعُدّ خطواتك.

2) انعطف يمينًا بزاوية قياسها 90°، ثم تحرك عدد الخطوات نفسه في 1، ثم ضع عصًا في المكان الذي وصلت إليه.

3) ارجع إلى شجرة البلوط، ثم تحرك باتجاه الصخرة الحمراء، وعُدّ خطواتك.

4) انعطف يسارًا بزاوية قياسها 90°، ثم تحرك عدد الخطوات نفسه في 3، ثم ضع عصًا في المكان الذي وصلت إليه.

5) أوجد نقطةَ منتصف المسافة بين العصوَين، تجد القطعة الذهبية عند تلك النقطة.

وبعد سنوات، وجد حبير في الأعداد المركبة هذه التعليمات في عملية صَبْدَة، كما وجد تعليمات إضافية تدلُّه على مكان شجرة البلوط، والنبع، والصخرة الحمراء، ولكن لسوء حظّه، عندما ذهب إلى تلك المنطقة، وجد المئات من أشجار البلوط قد نبتت، إلّا أنه استطاع إيجاد قطعة الذهب، وذلك بعدما استعمل الأعداد المركبة بطريقة حكيمة.

- يمكن تمثيل المسافة بين عددين مركبين بالقيمة المطلقة لناتج طرحهما.
- ضرب العدد المركب في العدد i، يدوّر العدد الأصلي بزاوية 90° عكس اتجاه عقارب الساعة، وعند ضرب العدد في $-i$، فإنه يدوّره بزاوية 90° باتجاه حركة عقارب الساعة.
- رسم الخبير خريطةً على المستوى المركب، فوضع النبع عند النقطة $S(-1+0i)$، والصخرة عند $R(1+0i)$، ورمز إلى موقع شجرة البلوط بالنقطة $T(a+bi)$.

1) أوجد المسافة بين شجرة البلوط والنبع، وعبّر عن المسافة بعدد مركب. $|(a+1)+bi|$

2) اكتب عددًا مركبًا يمثل صورة العدد المركب في 1، بدوران مقداره 90° عكس اتجاه عقارب الساعة، فيمثل هذا العدد موقع العصا الأولى. $-b+(a+1)i$

3) أعد الخطوتين 1 و 2 للمسافة بين شجرة البلوط والصخرة، ما موقع العصا الثانية؟

4) يقع الكنز عند نقطة منتصف المسافة بين العصوين، أوجد إحداثيات الموقع. $b-(a-1)i$
(0+i)؛ الموقع على المحور التخيلي وعلى بعد وحدة واحدة من نقطة الأصل.

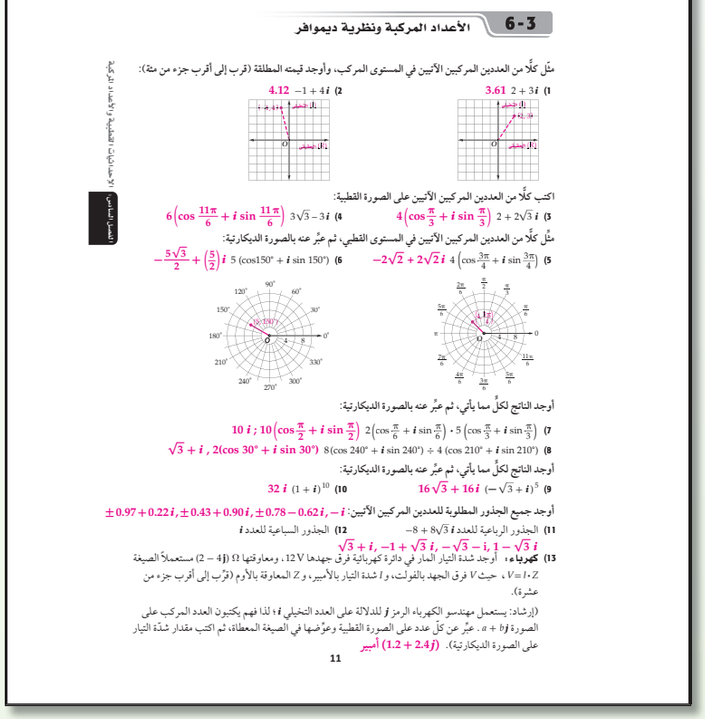
مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 6

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (11) — دون ضمن فوق



6-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثّل كلًّا من العددين المركبين الآتيين في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة (قرب إلى أقرب جزء من مئة):

1) $2+3i$ 3.61 2) $-1+4i$ 4.12

اكتب كلًّا من العددين المركبين الآتيين على الصورة القطبية:

3) $2+2\sqrt{3}i$ $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ 4) $3\sqrt{3}-3i$ $6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

مثّل كلًّا من العددين المركبين الآتيين في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

5) $4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ 6) $5(\cos150°+i\sin150°)$ $-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)i$

أوجد الناتج لكلٍّ مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

7) $5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $10\,i\,;\,10\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

8) $4(\cos210°+i\sin210°)\div8(\cos240°+i\sin240°)$ $\sqrt{3}+i\,,\,2(\cos30°+i\sin30°)$

أوجد الناتج لكلٍّ مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

9) $(-\sqrt{3}+i)^5$ $16\sqrt{3}+16i$ 10) $(1+i)^{10}$ $32\,i$

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعددين المركبين الآتيين: $-i$ $\pm0.78-0.62i,-i$

11) الجذور الرباعية للعدد $-8+8\sqrt{3}\,i$ 12) الجذور السباعية للعدد i $\pm0.97+0.22i,\pm0.43+0.90i,$

$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-i,\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

13) **كهرباء** أوجد شدة التيار المار في دائرة كهربائية فرق جهدها 12 V ، ومعاوقتها $\Omega\ (2-4j)$ مستعملاً الصيغة $V=I\cdot Z$ ، حيث V فرق الجهد بالفولت، و I شدة التيار بالأمبير، و Z المعاوقة بالأوم (قرّب إلى أقرب جزء من عشرة).

(إرشاد: يستعمل مهندسو الكهرباء الرمز j للدلالة على العدد التخيلي i؛ لذا فهم يكتبون العدد المركب على الصورة $a+bj$ ، عبّر عن كلّ عدد على الصورة القطبية وعوّضها في الصيغة المعطاة، ثم اكتب مقدار شدّة التيار على الصورة الديكارتية). $(1.2+2.4j)$ أمبير

11

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

الفصل 6 دليل الدراسة والمراجعة

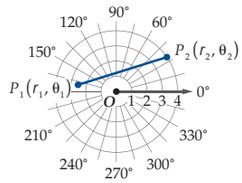
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 1-6)

- يُعيِّنُ موقع النقطة (r, θ) في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال المسافة المتجهة r والزاوية المتجهة θ.
- المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي هي:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الدرس 2-6)

- الإحداثيات الديكارتية للنقطة $P(r, \theta)$ هي $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
- لتحويل إحداثيات نقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية استعمل المعادلات $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$، عندما $x > 0$، أو $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الدرس 3-6)

- الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
- صيغة الضرب لعددين مركبين z_1، z_2 هي: $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة القسمة لعددين مركبين z_1، z_2 هي: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$, $r_2 \neq 0$
- تنص نظرية ديموافر على أنه إذا كانت $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ هي الصورة القطبية لعدد مركب، فإن: $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$، حيث n عدد صحيح موجب.

الجذور المختلفة:

لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r(\cos \theta + i \sin \theta)$، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

المفردات

نظام الإحداثيات القطبية ص 52
القطب ص 52
المحور القطبي ص 52
الإحداثيات القطبية ص 52
المعادلة القطبية ص 54
التمثيل القطبي ص 54
المستوى المركب ص 68
المحور الحقيقي ص 68
المحور التخيلي ص 68
القيمة المطلقة لعدد مركب ص 68
الصورة القطبية ص 69
الصورة المثلثية ص 69
المقياس ص 69
السعة ص 69
الجذور النونية للعدد واحد ص 75

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) _____ هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معطاة. التمثيل القطبي

2) المستوى الذي يحوي محورًا يمثِّل الجزء الحقيقي، وآخر يمثل الجزء التخيلي هو _____. المستوى المركب أو مستوى آرجاند

3) يُحدَّدُ موقع نقطة في _____ باستعمال المسافة المتجه من نقطة ثابتة إلى النقطة نفسها، وزاوية متجهة من محور ثابت. نظام الإحداثيات القطبية

4) _____ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب على الصورة: $r(\cos \theta + i \sin \theta)$. السعة

5) تُسمَّى نقطة الأصل في نظام الإحداثيات القطبية بـ _____. القطب

6) تُسمَّى القيمة المطلقة لعدد مركب بـ _____. المقياس

7) _____ هو اسم آخر للمستوى المركب. مستوى آرجاند

8) _____ هو نصف مستقيم ممتد من القطب، ويكون أفقيًّا باتجاه اليمين. المحور القطبي

التقويم التكويني

المفردات

يُشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة، فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا؛ ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (33)

مراجعة الدروس

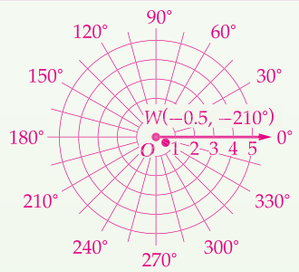
مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على مكان مراجعة تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

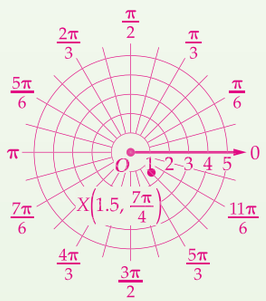
اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 6 ص (27)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

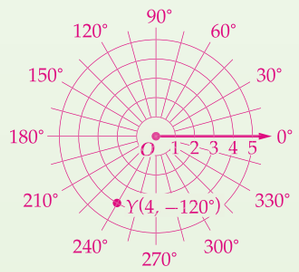
(9



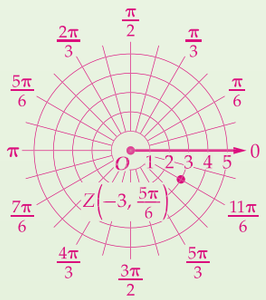
(10



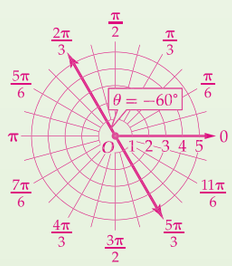
(11



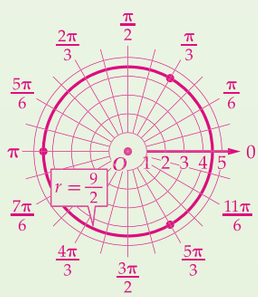
(12



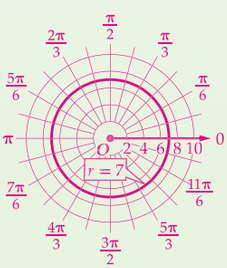
(13



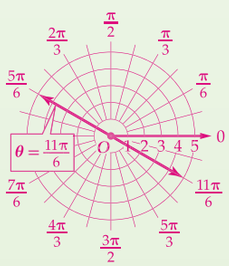
(14



(15



(16



مراجعة الدروس

6-1 الإحداثيات القطبية (الصفحات 58 - 52)

مَثِّل كلّ نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: **12-9) انظر الهامش.**

9) $W(-0.5, -210°)$ **10)** $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$

11) $Y(4, -120°)$ **12)** $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مَثِّل كلّ معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: **16-13) انظر الهامش.**

13) $\theta = -60°$ **14)** $r = \frac{9}{2}$

15) $r = 7$ **16)** $\theta = \frac{11\pi}{6}$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

17) $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **4.36**

18) $(-3, 60°), (4, 240°)$ **1**

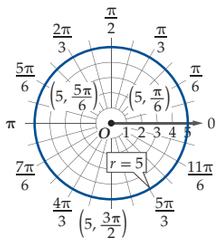
19) $(-1, -45°), (6, 270°)$ **6.74**

20) $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ **7.28**

مثال 1

مَثِّل المعادلة $r = 5$ بيانيًّا في المستوى القطبي.

حلول المعادلة $r = 5$ هي الأزواج المرتبة $(5, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي. ويتكون التمثيل من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب، لذا فإن التمثيل هو دائرة مركزها القطب، وطول نصف قطرها 5.



6-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الصفحات 67 - 59)

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

21) $(-1, 5)$ **(5.1, 1.77), (−5.10, 4.91)**

22) $(3, 7)$ **(7.62, 1.17) , (−7.62, 4.31)**

23) $(1, 2)$ **(2.24, 1.11) , (−2.24, 4.25)**

اكتب كلّ معادلة على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني: **27-24) انظر ملحق الإجابات.**

24) $r = 5$

25) $r = -4 \sin \theta$

26) $r = 6 \sec \theta$

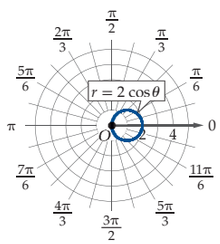
27) $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 2

اكتب المعادلة $r = 2 \cos \theta$ على الصورة الديكارتية، ثم حدِّد نوع تمثيلها البياني.

$r = 2 \cos \theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r \cos \theta$	اضرب الطرفين في r
$x = r \cos \theta$, $r^2 = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 2x$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	اطرح $2x$ من الطرفين

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-1)^2 + y^2 = 1$، وهي معادلة دائرة مركزها $(1, 0)$ وطول نصف قطرها 1.



6-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الصفحات 78 - 68)

28-31) انظر ملحق الإجابات.

مثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمتهُ المطلقة:

28) $z = 3 - i$ **29)** $z = 4i$

30) $z = -4 + 2i$ **31)** $z = 6 - 3i$

32-35) انظر الهامش.

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

32) $3 + \sqrt{2}i$ **33)** $-5 + 8i$

34) $-4 - \sqrt{3}i$ **35)** $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: **36-39)** انظر ملحق الإجابات.

36) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

37) $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

38) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

39) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: **40-43)** انظر الهامش.

40) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

41) $8(\cos 225° + i\sin 225°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120° + i\sin 120°)$

42) $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

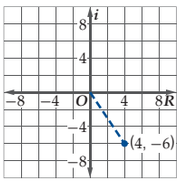
43) $6(\cos 210° + i\sin 210°) \div 3(\cos 150° + i\sin 150°)$

44) أوجد قيمة $(\sqrt{2} + 3i)^4$ بالصور القطبية، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية.
$-119 - 23i$ تقريبًا

45) أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $1 + i$. انظر الهامش.

مثال 3

مَثِّل $4 - 6i$ في المستوى المركب، ثم عبِّر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المقياس.

صيغة التحويل $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = 4, b = -6$ $= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$

أوجد السعة.

صيغة التحويل $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$

$a = 4, b = -6$ $= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$

بسّط ≈ -0.98

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 - 6i$ هي:
$2\sqrt{13}\,[(\cos(-0.98) + i\sin(-0.98)]$ تقريبًا.

مثال 4

أوجد ناتج $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم حوِّله إلى الصورة الديكارتية.

العبارة المعطاة $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

صيغة الضرب $= (3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$

بسّط $= 15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

الصورة القطبية $15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام $= 15[-0.26 + i(-0.966)]$

خاصية التوزيع $= -3.9 - 14.5i$

فتكون الصورة الديكارتية لناتج الضرب $-3.9 - 14.5i$ تقريبًا.

إجابات:

32) $\approx 3.317(\cos 0.441 + i\sin 0.441)$

33) $\approx 9.434[\cos(2.1294) + i\sin(2.1294)]$

34) $\approx 4.359(\cos 3.55 + i\sin 3.55)$

35) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

40) $8\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$
$-4\sqrt{3} - 4i$

41) $4\left[\cos(345°) + i\sin(345°)\right]$
$\approx 3.86 - 1.04i$

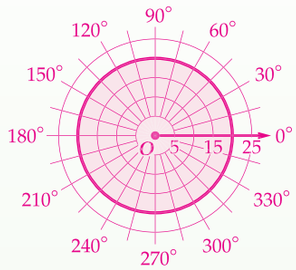
42) $15\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$\frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}i$

43) $2\left[\cos(60°) + i\sin(60°)\right]$
$1 + i\sqrt{3}$

45) $\approx 1.07 + 0.21i$,
$\approx -0.21 + 1.07i$,
$\approx -1.07 - 0.21i$, $\approx 0.21 - 1.07i$

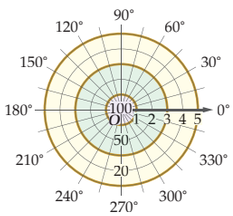
إجابات:

47a)



تطبيقات ومسائل

46) ألعاب: قُسِّمت لوحة السهام إلى 3 مناطق كما هو موضّح في الشكل أدناه، بحيث يحصل اللاعب على 100 نقطة عند إصابته المنطقة القريبة من القطب، وعلى 50 نقطة عند إصابته المنطقة المتوسطة، و 20 نقطة عند إصابته المنطقة البعيدة. (الدرس 1-6)



a) إذا أصاب اللاعب النقطة $(3.5, 165°)$، فما عدد النقاط التي يحصل عليها؟ **20**

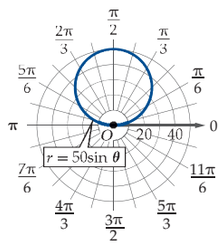
b) حدِّد موقعين، بحيث يحصل اللاعب على 50 نقطة عند إصابة أي منهما؟ **إجابة ممكنة: $(2, 180°)$ أو $(2, 0°)$**

47) حدائق: تستعمل شركة عناية بالحدائق رشاشًا قابلًا للتعديل، ويستطيع الدوران $360°$، ويروي منطقة دائرية طول نصف قطرها 20 ft. (الدرس 1-6) **انظر الهامش.**

a) مثِّل المنطقة التي يستطيع الرشاش رَيَّها في المستوى القطبي.

b) أوجد مساحة المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها، إذا ضُبط ليدور في الفترة $-30° \le \theta \le 210°$. **838 ft^2 تقريبًا**

48) عجلة دوّارة: يمكن تمثيل مسار العجلة الدوّارة في الشكل أدناه بالمعادلة $r = 50 \sin \theta$، حيث r بالقدم. (الدرس 2-6)



a) عيّن الإحداثيين القطبيين لموقع راكب إذا علمت أنه يقع عند $\theta = \frac{\pi}{12}$. (قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر). $\left(12.9, \frac{\pi}{12}\right)$

b) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين لموقع الراكب مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. **(12.5, 3.3)**

c) إذا وقع القطب على سطح الأرض، فما ارتفاع ذلك الراكب مقرّبًا إلى أقرب قدم؟ **3 ft**

49) كهرباء: تُصمَّم معظم الدوائر الكهربائية لتتحمل فرق جهدٍ قدره 220V.

للفرعين **a** , **b** استعمل المعادلة $V = I \cdot Z$، حيث فرق الجهد V بالفولت، والمعاوقة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (الدرس 3-6)

a) إذا كانت شدة التيار المار بالدائرة $(2 + 5j)$ أمبير، فأوجد المعاوقة. **$(15.2 - 37.9j)\ \Omega$**

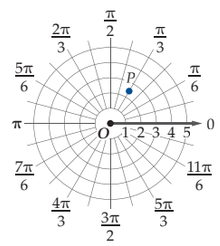
b) إذا كانت معاوقة الدائرة $(1 - 3j)\Omega$، فأوجد شدة التيار. **$(21.9 + 66.0j)$ أمبير**

50) تحويل جوكوسكي (Jowkoski): يُعيِّن تحويل جوكوسكي لكل عدد مركب $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ عددًا مركبًا w يُعطى بالصيغة $w = z + \frac{1}{z}$. أوجد صورة العدد المركب $z = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ وفق هذا التحويل. (الدرس 3-6) **1**

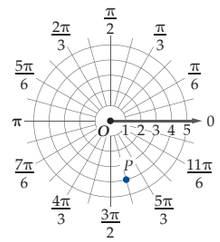
اختبار الفصل

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة يمثِّل كل منها إحداثيات قطبية للنقطة P في كل من التمثيلين $1, 2$، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. **1, 2)** انظر الهامش.

1)



2)



مَثِّل بيانيًّا في المستوى القطبي كلًّا من المعادلات الآتية: **3-6)** انظر ملحق الإجابات.

3) $\theta = 30°$ **4)** $r = 1$

5) $r = 2.5$ **6)** $\theta = \frac{5\pi}{3}$

7) رادار: يقوم مراقب الحركة الجوية بتتبع مسار طائرة موقعها الحالي عند النقطة $(66, 115°)$، حيث r بالأميال.

7b) إجابة ممكنة: $(90, 303.7°)$

$(-28, 60)$

a) عيِّن الإحداثيين الديكارتيين للطائرة. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل.

b) إذا وُجدت طائرة عند نقطة إحداثياتها الديكارتية $(-75, -50)$، فعيِّن الإحداثيين القطبيين لها مقرِّبًا المسافة إلى أقرب ميل، والزاوية إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

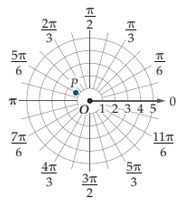
c) ما المسافة بين الطائرتين؟ قرِّب الناتج إلى أقرب ميل. **156 mi**

8) عبِّر عن المعادلة $(x - 7)^2 + y^2 = 49$، بالصورة القطبية. انظر الهامش.

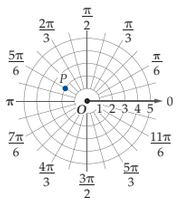
9) كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية 135V، وكانت شدة التيار المار بها I هو $(3 - 4j)$ أمبير، فأوجد معاوقة الدائرة z بالإحداثيات الديكارتية مستعملًا المعادلة $V = I \cdot Z$. $(16.2 + 21.6j)\Omega$

10) اختيار من متعدد: أي مما يأتي يبين تمثيل العدد المركب الذي إحداثياته الديكارتية $(-\sqrt{3}, -1)$ في المستوى القطبي؟ **D**

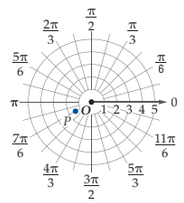
A



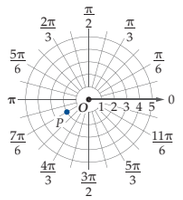
C



B



D



أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرِّب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

11) $(-1 + 4i)^3$ $47 - 52i$

12) $(6 + i)^4$ $1081 + 840i$

المعالجة

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكِّل تحديًّا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (42–34).

إجابات:

1) $\left(2.5, \frac{\pi}{3}\right), \left(2.5, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-2.5, \frac{4\pi}{3}\right)$

2) $\left(4, \frac{19\pi}{12}\right), \left(4, -\frac{5\pi}{12}\right), \left(-4, \frac{7\pi}{12}\right)$

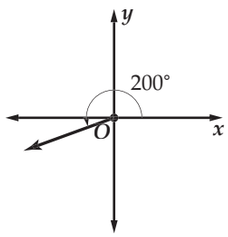
8) $r = 14 \cos \theta$

مخطط المعالجة

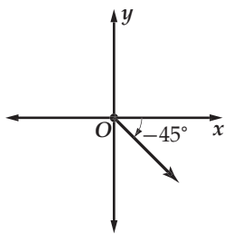
المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 6-3، 6-2، 6-1		
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (52)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل 6 ص (51)

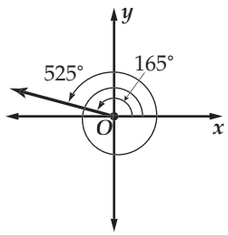
1)

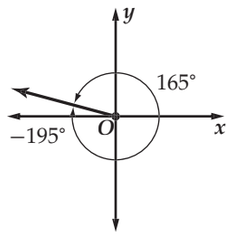


2)

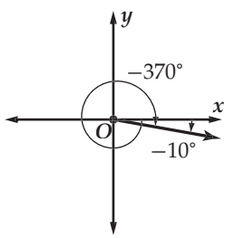


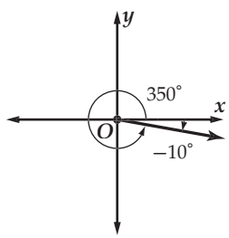
3) 525°, −195°



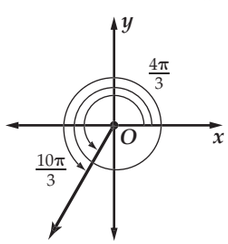


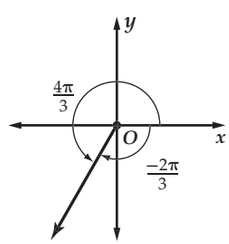
4) 350°, −370°



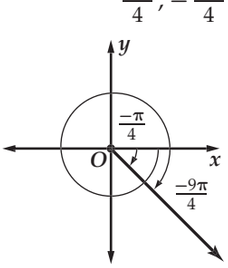


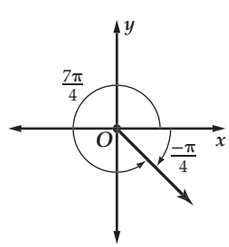
5) $\frac{10\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$





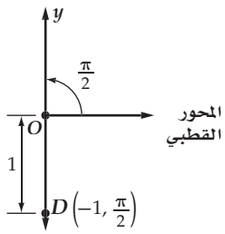
6) $\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$



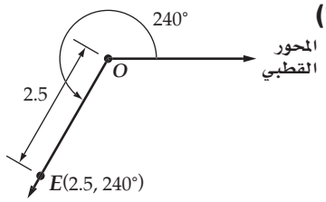


الدرس 1-6 (تحقق من فهمك) ص (53, 55)

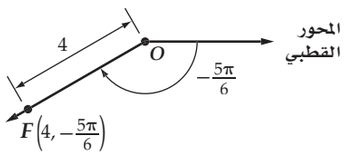
(1A)



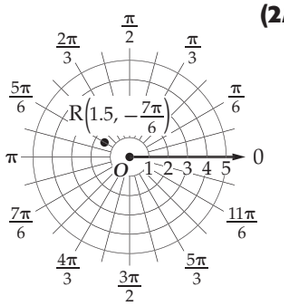
(1B)



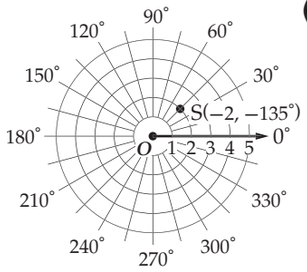
(1C)



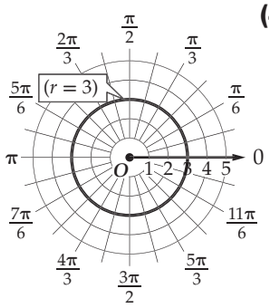
(2A)



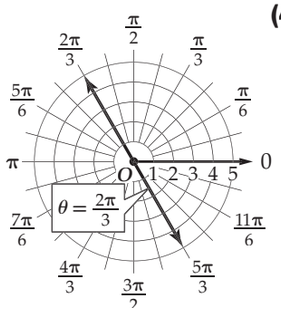
(2B)



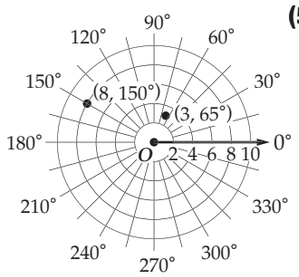
(4A)



(4B)

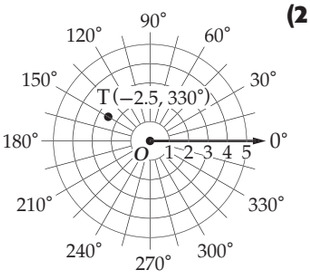


(5A)



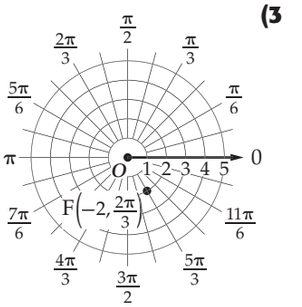
الدرس 1-6، ص (56-58)

(1

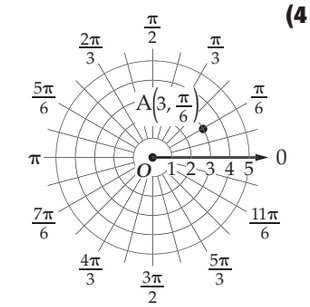


(2

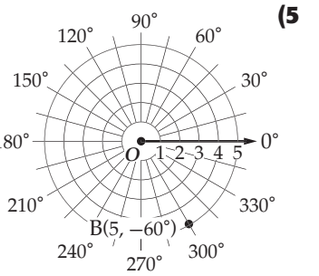
(3



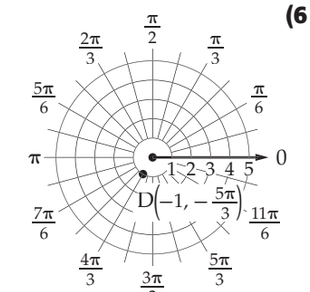
(4



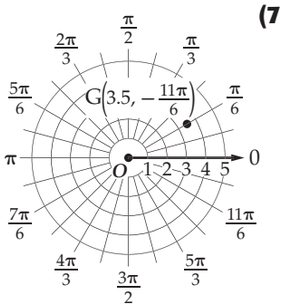
(5



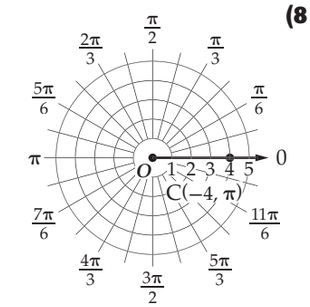
(6



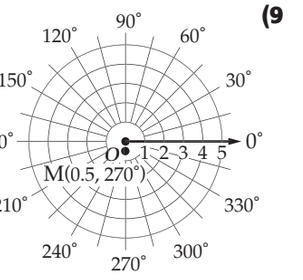
(7



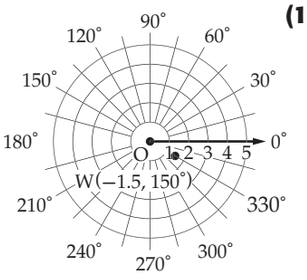
(8



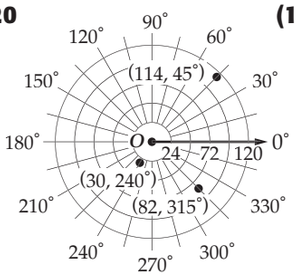
(9



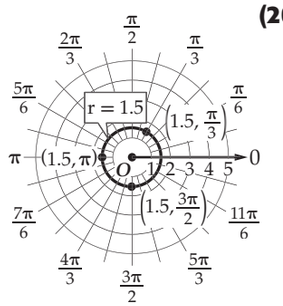
(10



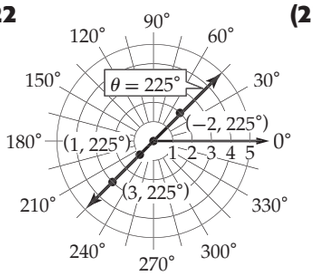
(11a



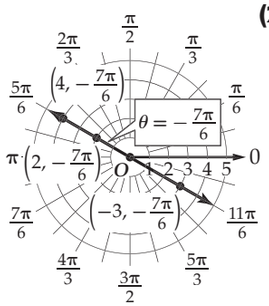
(20



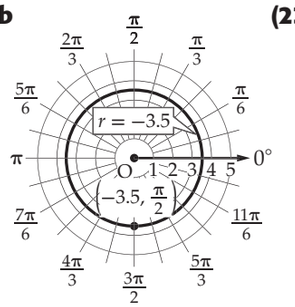
(21



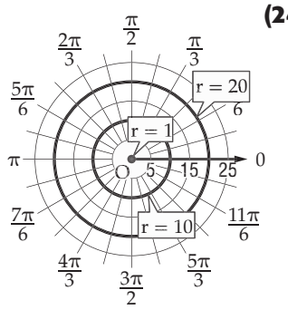
(22



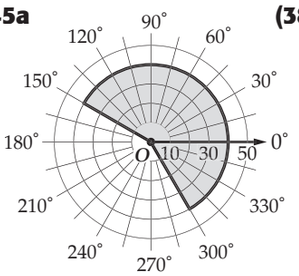
(23



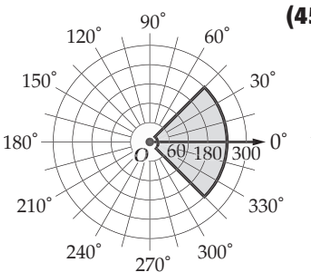
(24b



(38a

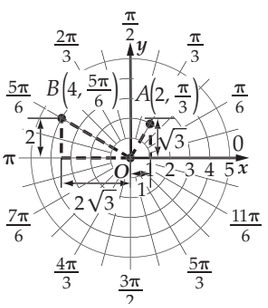


(45a



(51a–c $x = r\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1$

$y = r\sin\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

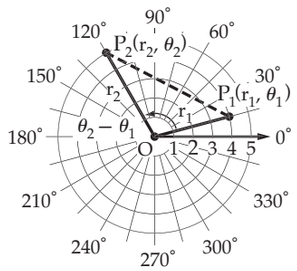


(51d يمثّل طولا الضلعين الأفقي والرأسي القيمة المطلقة للإحداثيين x, y على الترتيب.

(51e إذا كانت إحداثيات النقطة القطبية (r, θ)، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

54) إجابة ممكنة: تحتوي صيغة المسافة على عمليتَي ضرب وجمع قيم r ، وكلتا العمليتين إبدالية، والدالة $\cos\theta$ دالة زوجية. لذا $\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos(\theta_2-\theta_1)$، ومنه $\cos(-\theta)=\cos\theta$.

56)



في المثلث الذي رؤوسه P_1 , P_2 والقطب، ضلعان معلومان وزاوية محصورة بينهما؛ لذا وباستعمال قانون جيب التمام فإن:
$(P_1P_2)^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$ أو
$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

57) عندما $(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\pi}{2}$، فإن $\cos\frac{\pi}{2} = 0$، وعليه فإن تبسيط قانون المسافة القطبية يعطي $\sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2}$، وهذه النتيجة تكافئ نظرية فيثاغورس، حيث تمثّل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين وتر المثلث القائم الذي رؤوسه هاتان النقطتان ونقطة الأصل.

58) سعيد؛ إجابة ممكنة: عيّن علي نقطة على المحور القطبي ورسم منها قطعة مستقيمة رأسية طولها 5 وحداتٍ، بينما كان عليه تعيين نقطة تبعُد 5 وحداتٍ عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية.

59) في الإحداثيات القطبية، لا يؤخذ ارتفاع الطائرة في الحسبان لتحديد موقعها بشكل دقيق.

الدرس 2-6 ، ص (65–66)

24) $r = -2\sec\theta$

25) $r = -10\cos\theta$

26) $r = -3\csc\theta$

27) $r = 5\sec\theta$

28) $r = 4\cos\theta$

29) $r = -6\sin\theta$

30) $\theta = \frac{\pi}{3}$

31) $r = -2\sin\theta$

32) $x^2 + y^2 - 3y = 0$

33) $y = -\sqrt{3}x$

34) $x^2 + y^2 = 100$

35) $x^2 - 4x + y^2 = 0$

36) $y = 4x$

37) $y = 8$

38) $x^2 + y^2 = 16$

39) $-\frac{1}{7}x = y$ أو $x = -7y$

40) $y = -x$

41) $x = 1$

43) $y = 1 - x$ أو $x + y = 1$

44) $y = x + 10\sqrt{2}$ أو $\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 10$

45) $x = -3$

46) $y = \sqrt{3}x + 4$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2$

47) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$ أو $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4$

48) $y = x - 5$ أو $x - y = 5$

49) $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ أو $x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y = 0$

50) $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ أو $x^2 + y^2 + 4y = 0$

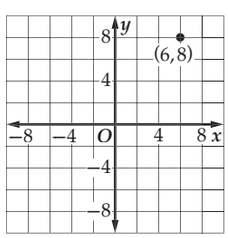
51) $r = \frac{4}{6\cos\theta - 3\sin\theta}$

52) $r = \frac{12}{2\cos\theta + 5\sin\theta}$

53) $r = 12\cos\theta + 16\sin\theta$

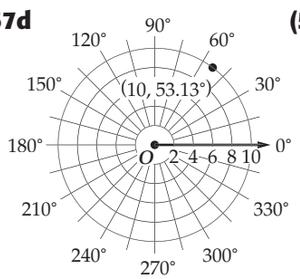
54) $r = -6\cos\theta + 4\sin$

57a)

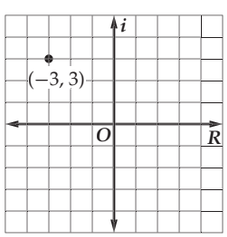


57b) (10, 0.93) أو (10, 53.13°)

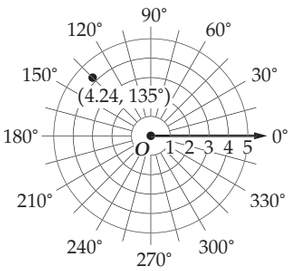
57c)



57d)



57e $\left(4.24, \frac{3\pi}{4}\right)$ أو $(4.24, 135°)$



57f $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,
$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ ، عندما a موجبة،
$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما a سالبة.

58 توفيق؛ إجابة ممكنة: استعمل توفيق التعويض الصحيح. وتمثيل معادلته يطابق المعادلة القطبية الأصلية، في حين تمثِّل إجابة باسل دالة الجيب، ولا تمثِّل الدائرة التي هي التمثيل البياني للمعادلة القطبية الأصلية.

60 إجابة ممكنة: تمثيل معادلات لا تمثِّل دوال، كمعادلات الدوائر أسهل باستعمال الصورة القطبية من استعمال الصورة الديكارتية، في حين أن تمثيل معادلات تمثل دوال كالدوال الخطية أسهل باستعمال الصورة الديكارتية.

61

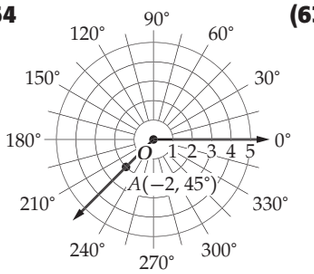
$$y = r\sin\theta \qquad x = r\cos\theta$$

$$\frac{y}{\sin\theta} = r \qquad \frac{x}{\cos\theta} = r$$

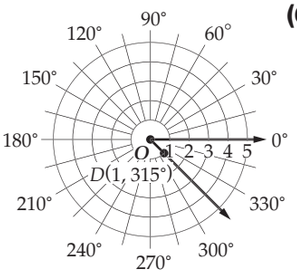
$$y \cdot \frac{1}{\sin\theta} = r \qquad x \cdot \frac{1}{\cos\theta} = r$$

$$y\csc\theta = r \qquad x\sec\theta = r$$

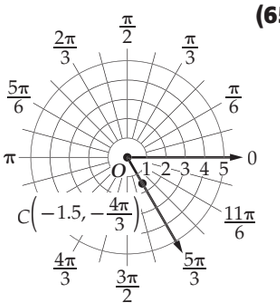
63



64

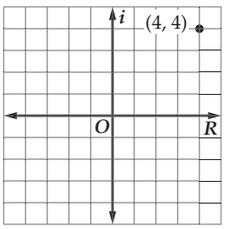


65

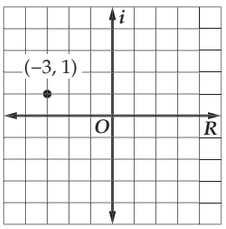


الدرس 3-6، ص (76–78)

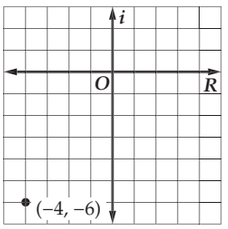
1



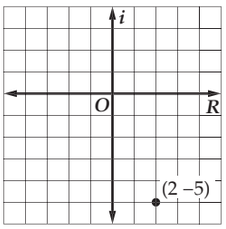
2



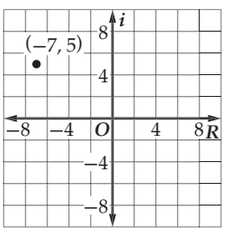
3



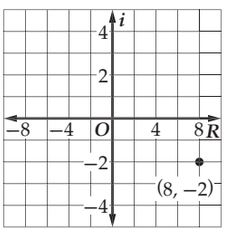
4



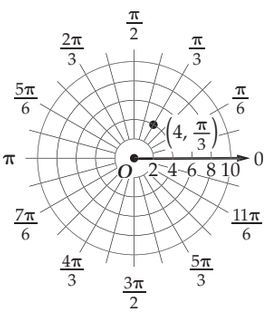
5



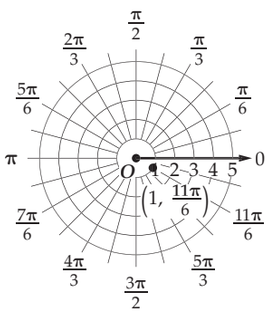
6



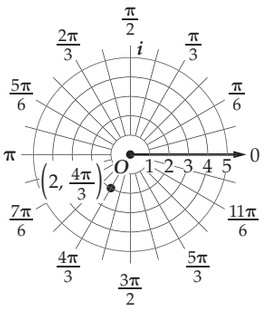
14 $2 + 2\sqrt{3}\,i$



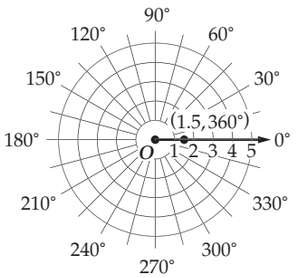
15 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$



16 $-1 - \sqrt{3}i$



17 $\frac{3}{2}$



18 $24\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -12\sqrt{2} + 12\sqrt{2}i$

19 $10(\cos 180° + i\sin 180°), -10$

20 $6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right], 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

21 $4(\cos 360° + i\sin 360°), 4$

(22 $\frac{3}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right], -\frac{3}{4}i$

(23 $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right), -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

(24 $3(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ), -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

(25 $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), 3i$

(26 $10(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ), 5\sqrt{2}-5\sqrt{2}i$

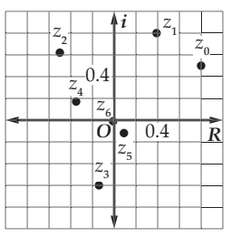
(27 $\frac{1}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right), \frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{12}i$

(33 $\approx 0.97+0.26i, \approx 0.26+0.97i, \approx -0.71+0.71i,$
$\approx -0.97-0.26i, \approx -0.26-0.97i, \approx 0.71-0.71i$

(34 $\approx 0.22+1.67i, \approx -1.67+0.22i,$
$\approx -.22-1.67i, \approx 1.67-0.22i$

(37a $z_1 \approx 0.39+0.8i, z_2 \approx -0.49+0.62i,$
$z_3 \approx -0.14-0.61i,\ z_4 \approx -0.35+0.17i,$
$z_5 \approx 0.09-0.12i,\ z_6 \approx -0.0063-0.0216i$

(37b



(37c إجابة ممكنة: عند تطبيق $f(z)=z^2$ في كل مرة، فإن العدد المركب الناتج يقترب من نقطة الأصل وتقترب قيمته المطلقة من الصفر.

(43 $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right), 3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$
$3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right), 27i$

(44 $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$
$2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right), -16$

(45

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}\right)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}\right)\cdot\left(\frac{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}\right)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}$$

$$\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2-i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_2+i\sin\theta_2\cos\theta_2-i^2\sin^2\theta_2}\right)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}$$

$$\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2-i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}\right)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta_1)]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

(47 1) اكتب الصيغة العامة للجذور النونية للعدد المركب وهي:

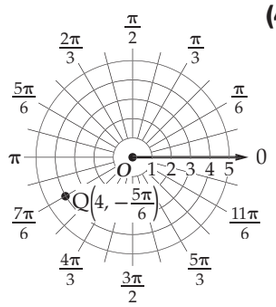
$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

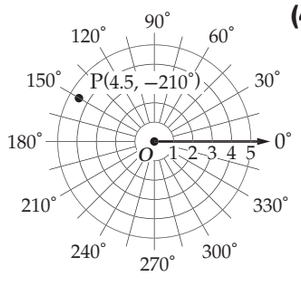
2) عوِّض عن n بالقيمة المطلوبة، إذا أردت إيجاد الجذور الرباعية ($n=4$) وإذا أردت إيجاد الجذور الخماسية($n=5$) ، وهكذا.

3) افترض أن $k=0$ ، وعوِّض في الصيغة العامة؛ لإيجاد الجذر الأول، ثم افترض أن $k=1$ ، وعوِّض لإيجاد الجذر الثاني، وهكذا حتى تصل إلى $n-1$ ، فتحصل على جميع الجذور المطلوبة:

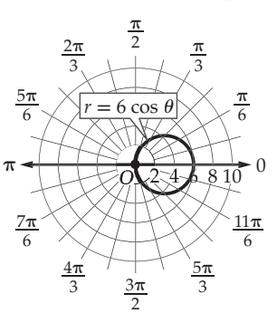
(48



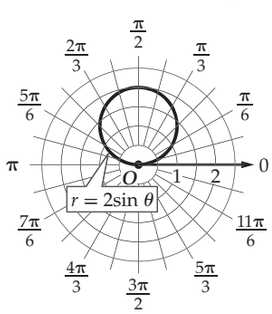
(49



(50 دائرة، $r=6\cos\theta$

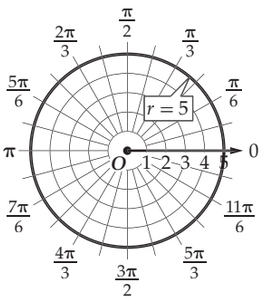


(51 دائرة، $r=2\sin\theta$

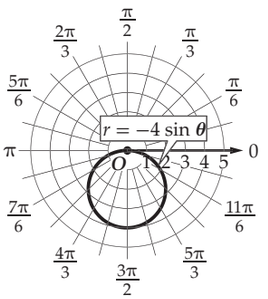


دليل الدراسة والمراجعة، ص (80–81)

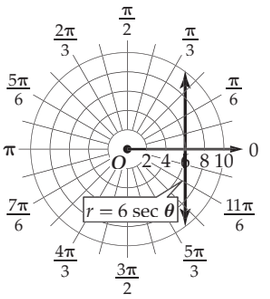
24) $x^2 + y^2 = 25$، دائرة



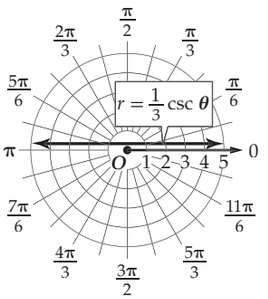
25) $x^2 + (y + 2)^2 = 4$، دائرة



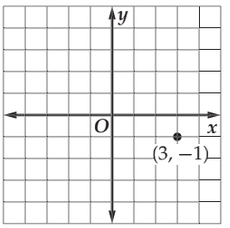
26) $x = 6$، مستقيم



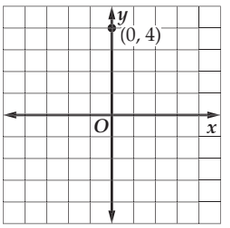
27) $y = \frac{1}{3}$، مستقيم



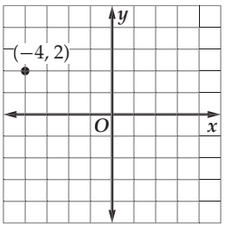
28) $\sqrt{10}$



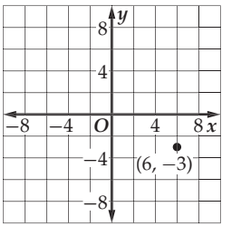
29) 4



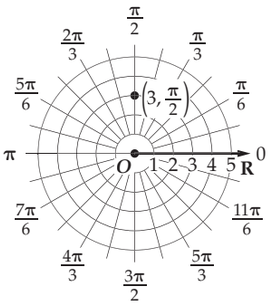
30) $2\sqrt{5}$



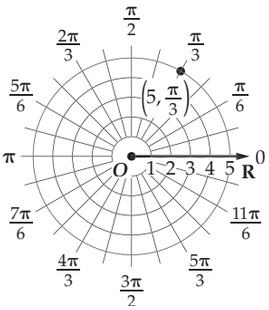
31) $3\sqrt{5}$



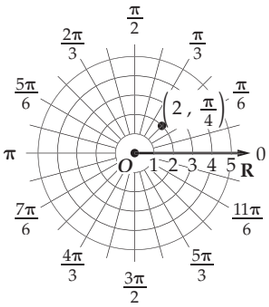
36) $3i$



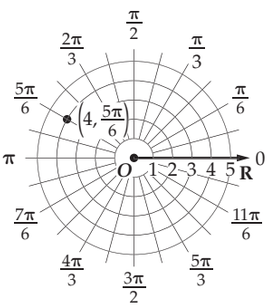
37) $2.5 + 2.5\sqrt{3}i$



38) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

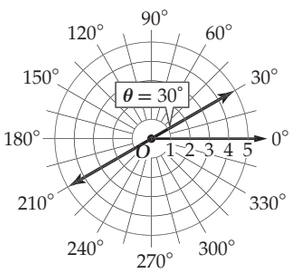


39) $-2\sqrt{3} + 2i$

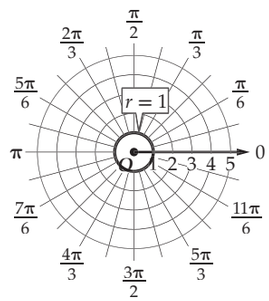


اختبار الفصل، ص (83)

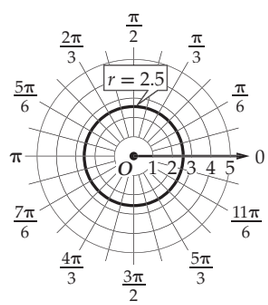
3)



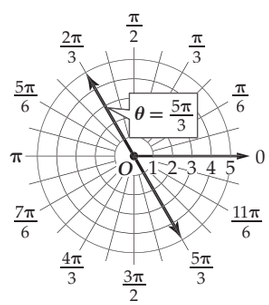
4)



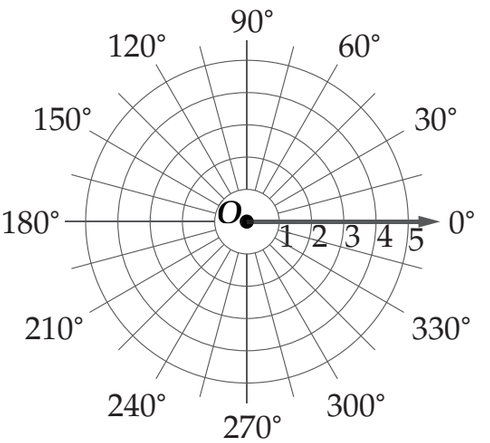
5)

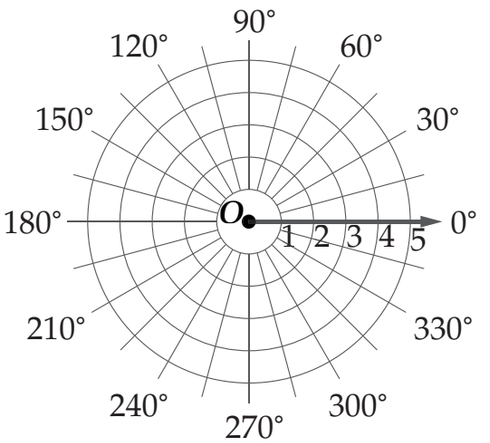


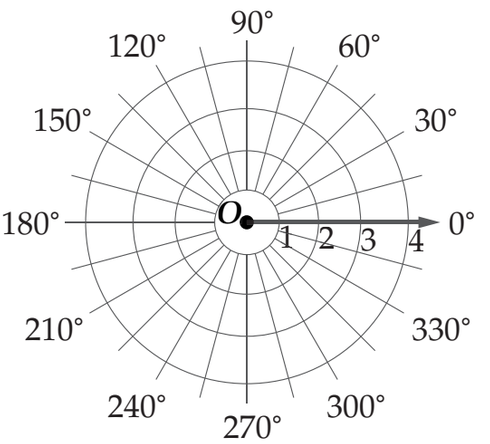
6)

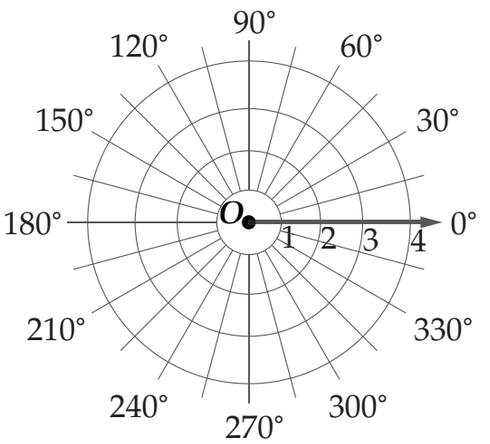


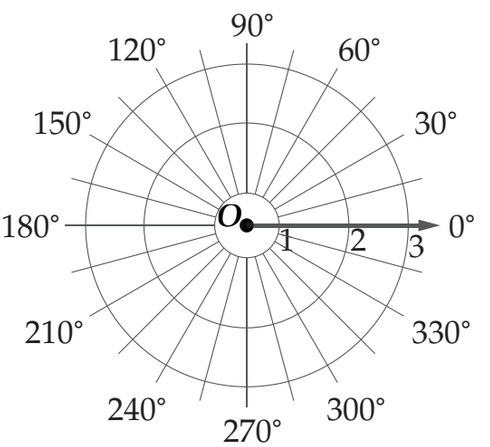
ملحوظة : يمكن للمعلم تصويرها وتوزيعها على الطلاب، عند تكليفهم بالتمثيل في المستوى القطبي.

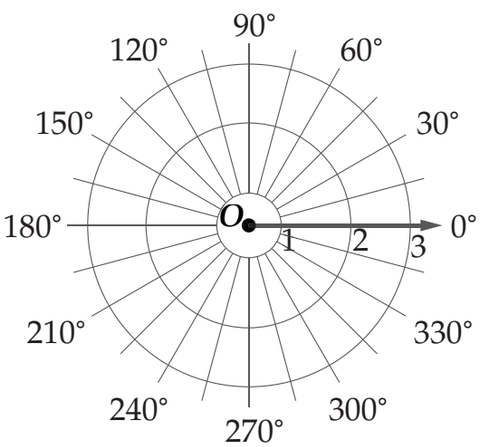


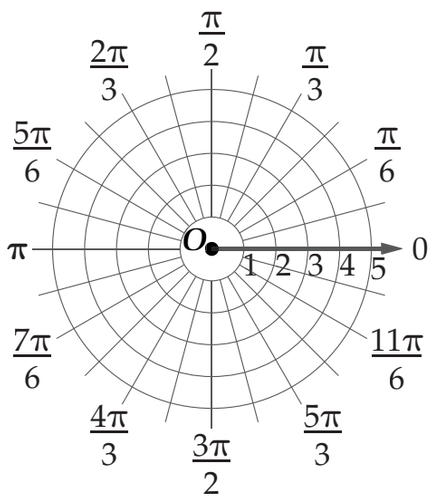


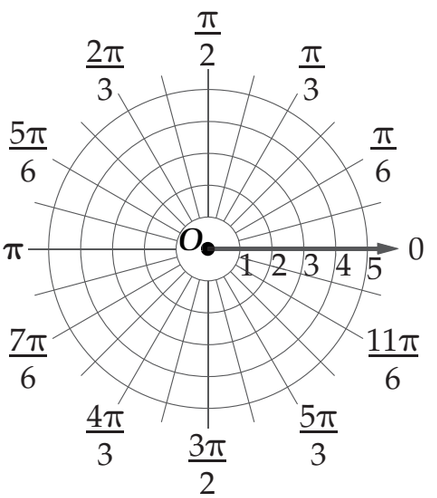


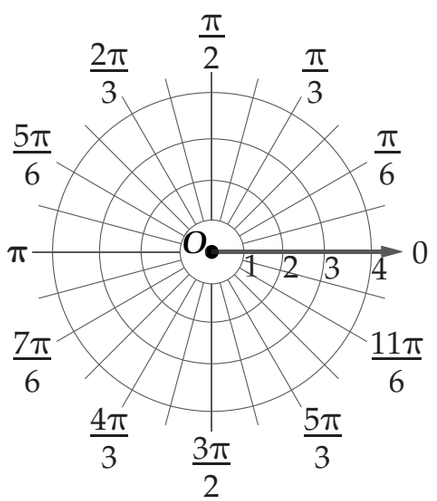


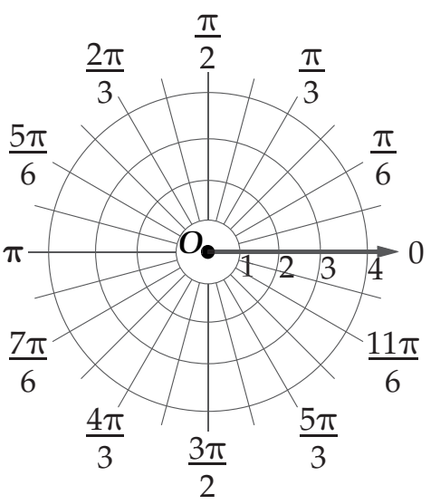


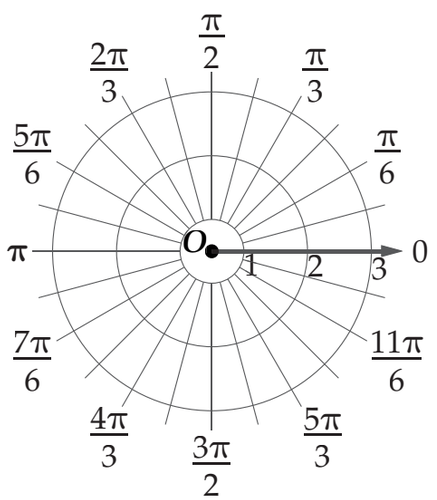


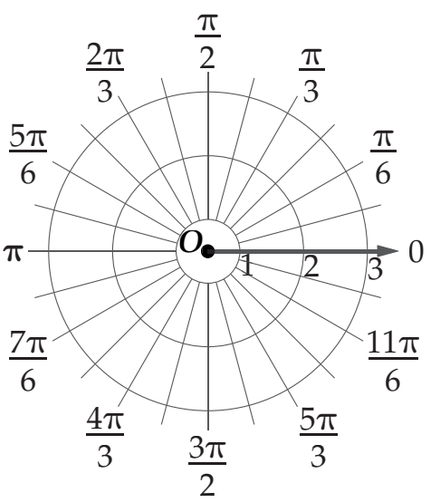

π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O
1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O
1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O
1 2 3 4
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O
1 2 3 4
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O
1 2 3
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O
1 2 3
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

الفصل 7 مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (85)

	الدرس 7-1 (3) حصص	توسع 7-1 حصة	الدرس 7-2 (4) حصص	الدرس 7-3 (4) حصص
العنوان	**الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة**	**معمل الحاسبة البيانية: تقويم البيانات المنشورة**	**التحليل الإحصائي**	**الاحتمال المشروط**
الأهداف	• تقويم الدراسات المسحية، والدراسات القائمة على الملاحظة، والدراسات التجريبية. • التمييز بين الارتباط والسببية.	• استعمال تطبيق Spreadsheet في الحاسبة البيانية لتقويم بيانات منشورة.	• استعمال مقاييس النزعة المركزية والتشتت؛ لمقارنة مجموعات من البيانات. • تعرف مقاييس التشتت.	• إيجاد احتمال وقوع حادثة، إذا عُلم أن حادثة أخرى قد وقعت. • استعمال الجداول التوافقية؛ لإيجاد احتمالات مشروطة.
المفردات الأساسية	الدراسة المسحية المجتمع الكلي التعداد العام العينة المتحيزة غير المتحيزة القائمة على الملاحظة الدراسة التجريبية المجموعة التجريبية المجموعة الضابطة الارتباط السببية		التحليل الإحصائي المتغير بيانات في متغير واحد مقياس النزعة المركزية المعلمة الإحصائي هامش خطأ المعاينة مقياس التشتت التباين الانحراف المعياري	الاحتمال المشروط الجدول التوافقي التكرار النسبي
تمثيلات متعددة				
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6,7) دون • تدريبات حل المسألة، ص (8) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (9) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (12) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (10, 11) دون • تدريبات حل المسألة، ص (12) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (13) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (13) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (14, 15) دون • تدريبات حل المسألة، ص (16) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (17) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (14) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• صفحة على الإنترنت	• الحاسبة البيانية	• السبورة التفاعلية	• السبورة التفاعلية
تنويع التعليم	ص (88, 90)		ص (93, 96)	ص (98, 100)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، (101)

المفاتيح: ضمن ضمن المستوى دون دون المستوى فوق فوق المستوى

الاحتمال والإحصاء

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(25) حصة	(4) حصص	(29) حصة

الدرس 7-4 (4) حصص	الدرس 7-5 (4) حصص	توسع 7-5 حصة	الدرس 7-6 (4) حصص
الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية	**التوزيع الطبيعي**	**معمل الجبر: القانون التجريبي والمئينات**	**التوزيعات ذات الحدين**
• إيجاد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق. • إيجاد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية. • تكوين رسوم بيانية للتوزيعات الاحتمالية واستعمالها.	• تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا أو ملتويًا. • استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.	• استعمال القانون التجريبي للربط بين المئينات والتوزيع الطبيعي.	• إيجاد احتمالات تجارب ذات الحدين . • إيجاد احتمالات باستعمال توزيع ذات الحدين ومفكوكه.
الاحتمال النجاح الفشل فضاء العينة المتغير العشوائي المتغير العشوائي المنفصل التوزيع الاحتمالي المنفصل الاحتمال النظري الاحتمال التجريبي القيمة المتوقعة	التوزيع الاحتمالي المتصل التوزيع الطبيعي التوزيع الملتوي		تجربة ذات الحدين التوزيع ذو الحدين
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (18, 19) دون • تدريبات حل المسألة، ص (20) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (21) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (15) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (22, 23) دون • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (16) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26, 27) دون • تدريبات حل المسألة، ص (28) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (29) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (17) دون ضمن فوق
• السبورة التفاعلية	• الرسائل الفورية		• البحث في شبكة الإنترنت
ص (103, 106)	**ص (110, 112)**		**ص (115, 117)**

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (120–124)
- اختبار الفصل، ص (125)

الفصل 7 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 7**	
	التهيئة للفصل 7 ، ص (85)	مخطط المعالجة، ص (85)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (49, 50)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (101)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7
	اختبار منتصف الفصل، ص (51)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (120-124)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7
	اختبار الفصل، ص (125)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 7**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (53, 55, 57)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 7
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (59)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (52)	
	اختبار الفصل ذو الإجابات المطولة ، ص (61)	
	اختبار تراكمي ، ص (62-64)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون اطلب إلى كل طالب أن يستعمل شريطًا مترِيًّا، ويقيس محيط المعصم لـ 15 طالبًا من زملائه إلى أقرب سنتمتر، واطلب إليهم أن يجدوا المتوسط، والانحراف المعياري للبيانات التي جمعوها، ثم اطلب إليهم أن يبحثوا في توزيع بياناتهم، وما إذا كانت موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا، أو كانت موجبة الالتواء أو سالبة الالتواء.

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية لعمل قائمتَي مقابلة، بحيث تقوم كل مجموعة بوضع واحدة من قائمتين: تتضمّن القائمة الأولى المصطلحات وتعريفات لها، وتتضمّن القائمة الثانية أمثلة رياضية عليها.

ثم اطلب إلى كل مجموعة نسخ ما عملته وتوزيعه على الآخرين؛ وعمل مقابلة بين عناصر كل قائمة . اطلب إلى الطلاب الاحتفاظ بقائمتَي المقابلة لاستعمالها في مراجعة الفصل .

البديل 2 دون المتوسط دون

وزّع الطلاب مجموعات ثلاثية أو رباعية، ثم اطلب إلى كل طالب أن يختار المتوسط أو الوسيط أو المنوال، وأن يكوّن بيانات من 15 قيمة، بحيث يكون استعمال المقياس الذي اختاره أفضل مقاييس النزعة المركزية للبيانات التي قام بوضعها. اطلب إلى كل طالب تقديم ما عمله لمجموعته، ومناقشة ذلك ضمن المجموعة، بحيث تقرر المجموعة أي مقاييس النزعة المركزية يكون استعماله أفضل لكل مجموعة بيانات.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب أن يوضحوا العلاقات بين معاملات ذات الحدين ورمز التوافيق في المثال أدناه.

رموز ذات الحدين:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}x^{n-r+1}y^{r-1} + \ldots + nxy^{n-1} + y^n$$

رموز التوافيق:

$$(x+y)^n = {}_nC_0\,x^n + {}_nC_1\,x^{n-1}y + {}_nC_2\,x^{n-2}y^2 + {}_nC_3\,x^{n-3}y^3 + \ldots + {}_nC_{r-1}\,x^{n-r+1}y^{r-1} + \ldots + {}_nC_{n-1}\,xy^{n-1} + {}_nC_n\,y^n$$

الفصل 7 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 7

مواضيع ذات علاقة في الصفوف 11-8

- تكوين فضاء العينة لتجارب بسيطة أو مركّبة.
- إيجاد الاحتمالات لحوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة.
- استعمال الاحتمالات النظرية والتجريبية؛ لعمل التوقعات واتخاذ القرارات.
- اختيار المقياس المناسب من مقاييس النزعة المركزية أو المدى لوصف مجموعة بيانات.
- اختيار التمثيل المناسب لعرض العلاقات بين البيانات التي تم جمعها.
- تقويم طرائق المعاينة؛ لتحديد صدق الاستنتاج الذي يتم التوصل إليه من مجموعة من البيانات.

الفصل 7

مواضيع ذات علاقة في هذا الفصل

- استعمال التباديل والتوافيق؛ لحساب الاحتمالات وحل المسائل.
- إيجاد احتمال حوادث مستقلة وحوادث غير مستقلة.
- استعمال مقياس من مقاييس النزعة المركزية؛ لتمثيل مجموعة بيانات، وإيجاد بعض مقاييس التشتت لوصف التباين في مجموعة بيانات.
- تحديد ما إذا كانت العينة متحيزة أو لا، وإيجاد هامش خطأ المعاينة.
- إنشاء واستعمال منحنيات التوزيعات الاحتمالية.
- حل مسائل تتوزّع البيانات فيها توزيعًا طبيعيًّا.
- استعمال التوزيع ذي الحدين لإيجاد الاحتمالات.
- تعرُّف الاحتمالات المشروطة وحسابها.

ما بعد الفصل 7

تعريف توزيعات احتمالية أخرى واستعمالاتها.

نظرة على الدروس

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

في هذا الدرس يقوم الطلاب بما يأتي :

- استكشاف ومناقشة العلاقة بين النتائج التي يتم التوصل إليها من عينة الدراسة المسحية بالنتائج التي يتم التوصل إليها من مجتمع الدراسة. وتعرّف أن العينة العشوائية أو غير المتحيزة تتميّز بإتاحة الفرصة نفسها لكل فرد في المجتمع؛ ليكون في العينة.
- تعلم الحالات التي تُستعمل فيها الدراسة المسحية أو القائمة على الملاحظة (وفيها تتم ملاحظة الأفراد دون أي تدخل خارجي)، أو الدراسة التجريبية (وفيها يتم إجراء معالجة معينة للمجموعة التجريبية، وتتم ملاحظة أثر ذلك في مقابل ما تتم ملاحظته في المجموعة الضابطة) لجمع البيانات المطلوبة.
- تمييز ما إذا كانت العلاقة بين حادثتين ارتباطية، أو أن العلاقة بينهما سببية (إحدى الحادثتين سبب مباشر لوقوع الحادثة الأخرى).

7-2 التحليل الإحصائي

في هذا الدرس يُحدّد الطالب المقياس الأفضل من مقاييس النزعة المركزية (المتوسط، الوسيط، المنوال) لتمثيل عينة بيانات.

هامش خطأ المعاينة وهو فترة توضّح الاختلاف في الاستجابة بين العينة والمجتمع.

تقيس مقاييس التشتت مدى تباعد أو انتشار مجموعة من البيانات، ويُعد المدى أحد هذه المقاييس. أمّا المقياسان الآخران فهما التباين، والانحراف المعياري، وهذان المقياسان يصفان المدى الذي تتجمع فيه البيانات حول المتوسط.

- قانون الانحراف المعياري للعينة هو :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2}{n-1}}$$ ، ($\overline{x}$ المتوسط للعينة).

- قانون الانحراف المعياري للمجتمع الكلي هو :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2}{n}}$$ ، (μ المتوسط للمجتمع الكلي).

الاحتمال والإحصاء

7-3 الاحتمال المشروط

احتمال وقوع حادثة ما بشرط وقوع حادثة أخرى يُسمّى الاحتمال المشروط، ويُعرّف الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B إذا علم أن الحادثة A قد وقعت على النحو الآتي:

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$ ، وتُستعمل الجداول التوافقية لتسجيل بيانات تُنْتِجُ نتائج مختلفة في مواقف مختلفة. وتُستعمل البيانات في هذه الجداول؛ لتوضيح الاحتمالات المشروطة وإيجادها.

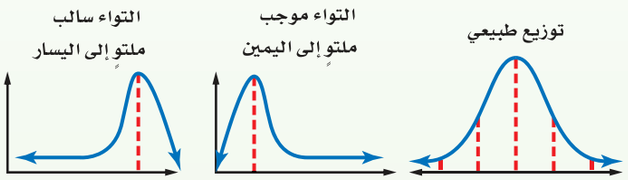
7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

- احتمال نجاح وقوع حادثة هو نسبة عدد مرات النجاح لوقوع الحادثة إلى عدد مرات تكرار التجربة.
- الاحتمال يكون دائمًا عددًا أكبر من أو يساوي 0، وأصغر من أو يساوي 1 .
- مجموع احتمالات النجاح والفشل لحادثة ما يساوي 1.

يستكشف الطلاب التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، من خلال تكوين جداول التوزيعات الاحتمالية وتمثيلها بيانيًّا بالأعمدة. ويستعمل الطلاب معلوماتهم حول الأوساط الموزونة؛ لإيجاد القيمة المتوقعة أو التوقع $E(X)$ لقيم المتغير العشوائي X في التوزيع الاحتمالي.

7-5 التوزيع الطبيعي

يُعّد التوزيع الطبيعي واحدًا من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة. حيث يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ويُمثّل التوزيع المتصل بمنحنى، ويكون متماثلًا، ويشبه شكل الجرس. ويتم وصف خصائص التوزيعات الطبيعية عن طريق القانون التجريبي. وتُسمّى التوزيعات غير المتماثلة التوزيعات الملتوية، وقد يكون التوزيع موجب الالتواء أو سالب الالتواء.



7-6 التوزيعات ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط، أمّا التوزيع ذو الحدين، فيُبيّن احتمالات نتائج تجربة ذات الحدين.

ويمكن حساب الاحتمالات باستعمال الصيغة ${}_nC_x p^x q^{n-x}$ ، حيث n عدد المحاولات المستقلة لإجراء التجربة، و p يُشير إلى احتمال نجاح التجربة، و q يُشير الى احتمال الفشل. ولتمثيل توزيع ذات الحدين توضع النواتج الممكنة على المحور x ، بينما تكون الاحتمالات المقابلة على المحور y.

الفصل 7 ملاحظات

مشروع الفصل

إحصاءات تربوية

يستعمل الطلاب ما تعملوه حول الاحتمال والإحصاء؛ ليصمّموا دراسات مسحية عن مدرستهم، ويحلّلوا نتائجها.

- وزّع الطلاب مجموعات ثلاثية أو رباعية، بحيث تقوم كل مجموعة بتصميم سؤال لدراسة مسحية تتناول سمات يتصف بها طلاب المدرسة. ومن الموضوعات التي يمكن للدراسات المسحية تناولها (المواد المفضلة، والمواد الصعبة، والرياضة المفضلة والأنشطة خارج المدرسة، والخطط بعد التخرج من المدرسة الثانوية، ...إلخ). تأكّد من أن كل سؤال من الأسئلة غير متحيّز.
- جمِّع الأسئلة في استبانة واحدة، حيث يمكن للطلاب تطبيقها على عينة من طلاب المدرسة. اطلب إلى الطلاب التأكد من العشوائية في اختيار العينة.
- اطلب إلى كل مجموعة أن تُمثّل البيانات لنتائج الإجابات عن السؤال الذي وضعوه في الأعمدة.
- وأخيرًا، اطلب إلى كل مجموعة أن تطرح سؤالًا يتضمّن تطبيق احتمال باستعمال التوزيع ذي الحدين ، وأن تجيب عنه. فمثلًا يمكن طرح السؤال الآتي: ما احتمال أن أكثر من 3 طلاب يُفضّلون مادة الرياضيات من بين الطلاب الذين يتم اختيارهم عشوائيًّا؟

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية :

التعريف: التوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي متصل، منحناه يشبه شكل الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط، ويتساوَى فيه المتوسط والوسيط والمنوال، يحدث التوزيع الطبيعي عادة عندما توجد أعداد كبيرة من قيم البيانات، ويكون 68% تقريبًا من البيانات ضمن انحراف معياري واحد من المتوسط، 95% من البيانات ضمن انحرافين معياريين تقريبًا من المتوسط، 99% من القيم ضمن ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط تقريبًا.

الفصل 7 الاحتمال والإحصاء
Probability and Statistics

فيما سبق:

درست إحصائيات العينة ومعالم المجتمع واحتمالات الحوادث المركبة.

والآن:

- أميّز المسوحات، والدراسات والتجارب.
- أكوّن التوزيعات الاحتمالية، وتمثيلاتها البيانية، وأستعملها في إيجاد الاحتمال.
- أستعمل القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.
- أميّز بين العينة الإحصائية، والمجتمع الإحصائي.

لماذا ؟

التربية: يستعمل الاحتمال والإحصاء في دراسة الفرضيات التربوية واختبارها. حيث تُستعمل المسوحات، وتجرى التجارب؛ لتحديد الطرائق التعليمية التي تؤدي إلى تعلم أفضل. ويستعمل الإحصاء في تحديد الدرجات عند تمثيل درجات الفصول بيانيًا، أو عندما يريد المعلمون تقييم درجات الطلاب.

قراءة سابقة: كوّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الاحتمال والإحصاء، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

مثال : يوضّح هذا الشكل توزيعًا طبيعيًّا تقريبًا.

سؤال: اكتب مثالًا من واقع الحياة، يُتوقع أن يكون توزيع البيانات فيه قريبًا من التوزيع الطبيعي.

إجابة ممكنة: أطوال طلاب الصف الثالث الثانوي في مدينة الرياض.

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 7

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حدِّد ما إذا كانت الحوادث الآتية مستقلة، أو غير مستقلة.

1) اختيار قصة وكتاب آخر لا يمثِّل قصة من مكتبة. مستقلة

2) اختيار رئيس، ونائب رئيس، وسكرتير، ومحاسب في نادٍ، على افتراض أنّ الشخص الواحد لا يشغل سوى منصب واحد. غير مستقلة

3) اختيار طالب ومعلم ومشرف اجتماعي للمشاركة في تنظيم الرحلات المدرسية. مستقلة

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تتطلب تطبيق التباديل أو التوافيق في حلّها:

4) اصطفاف سبعة أشخاص في صف واحد عند المحاسب في أحد المتاجر. تباديل

5) ترتيب أحرف كلمة «مدرسة». تباديل

6) اختيار نكهتين مختلفتين لفطيرة من بين 6 نكهات. توافيق

اكتب مفكوك كل من العبارات الآتية: 7-10) انظر الهامش.

7) $(a-2)^4$

8) $(2a+b)^6$

9) $(3x-2y)^5$

10) $\left(\frac{a}{2}+2\right)^5$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

التباديل (Permutations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها مهمًّا.

التوافيق (Combinations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

الحادثتان المستقلتان (Independent Events):
تكون A و B حادثتين مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.

الحادثتان غير المستقلتين (Dependent Events):
تكون A و B حادثتين غير مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقة ما احتمال حدوث B.

الحادثتان المتنافيتان (Mutually Exclusive Events):
تكون A و B حادثتين متنافيتين، إذا لم يكن وقوعهما ممكنًا في الوقت نفسه.

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem):
إذا كان n عددًا طبيعيًّا، فإن :

$$(a+b)^n$$
$$= {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_n a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

فضاء العينة (Sample Space):
هو مجموعة النواتج الممكنة لتجربةٍ ما.

الاحتمال (Probability):
هو النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثةٍ معينةٍ.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا ... فقم"، في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بمراجعة المفاهيم التالية: الحادثة، الاحتمال، الحوادث المستقلة، التباديل، التوافيق، نظرية ذات الحدين.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كلٍّ منها في أثناء دراستهم الفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

7) $a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$

8) $64a^6 + 192a^5b + 240a^4b^2 + 160a^3b^3 + 60a^2b^4 + 12ab^5 + b^6$

9) $243x^5 - 810x^4y + 1080x^3y^2 - 720x^2y^3 + 240xy^4 - 32y^5$

10) $\frac{a^5}{32} + \frac{5a^4}{8} + 5a^3 + 20a^2 + 40a + 32$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-1

تصميم دراسة مسحية.

الدرس 7-1

تقويم الدراسات المسحية والدراسات القائمة على الملاحظة والدراسات التجريبية.

التمييز بين الارتباط والسببية.

ما بعد الدرس 7-1

استعمال نتائج الدراسة المسحية على عينة؛ للتوصل إلى استنتاجات عن المجتمع.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- هل ستكون نتيجة الدراسة المسحية صادقة، حتى إذا لم تشمل طلاب المدرسة جميعهم؟ إجابة ممكنة: يمكن ذلك، وتعتمد على طريقة اختيار الطلاب الذين تشملهم الدراسة المسحية.
- هل ستكون نتيجة الدراسة المسحية صادقة، إذا تمت مقابلة الأشخاص الذين حضروا مباراة كرة قدم؟ في الأغلب لا؛ لأن الأفراد الذين يحضرون مباريات كرة القدم يفضلونها أكثر من الأشخاص الذين يفضلون كرة السلة.

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

Experiments, Surveys, and Observational Studies

فيما سبق:

درست تصميم دراسة مسحية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أميّز الدراسات المسحية، والدراسات القائمة على الملاحظة والدراسات التجريبية.
- أميّز بين الارتباط والسببية.

المفردات:

الدراسة المسحية
survey
المجتمع
population
التعداد العام
census
العينة
sample
المتحيزة
biased
غير المتحيزة
unbiased
الدراسة القائمة على الملاحظة
observational study
المجموعة التجريبية
treatment group
المجموعة الضابطة
control group
الارتباط
correlation
السببية
causation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يرغب الطلاب في تشكيل فريق لكرة السلة في مدرستهم، وكي يجدوا دعمًا لمشروعهم، فقد نفّذوا دراسة مسحية شملت الطلاب وأولياء الأمور؛ لمعرفة الموافقين منهم والمعارضين.

الدراسات التجريبية والمسحية تُستعمل **الدراسات المسحية** في جمع البيانات، وإذا شملت عملية جمع البيانات جميع الطلاب في مدرسة ما، نقول: إن الدراسة شملت **المجتمع**، وفي هذه الحالة تُسمّى هذه العملية **تعدادًا عامًّا**. أمّا إذا تم اختيار عدد محدود من طلاب المدرسة مثل 100طالب، فتكون الدراسة المسحية قد اعتمدت على **العينة**.

وتكون العينة **متحيزة** عندما يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام، فمثلًا: إذا شملت الدراسة المسحية الواردة في فقرة "لماذا؟" رأي لاعبي كرة السلة وأولياء أمورهم فقط، تكون العينة متحيزة. وتكون العينة **غير متحيزة** إذا تم اختيارها عشوائيًّا، أي إذا كان لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة، فإذا أُرسلت استبانة في دراسة مسحية لـ 100 طالب تم اختيارهم عشوائيًّا عندها تكون العينة غير متحيزة.

مثال 1 من واقع الحياة — العينات المتحيزة وغير المتحيزة

دراسات مسحية: حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

a) سؤال كل عاشر شخص يخرج من قاعة الندوات عن عدد مرات حضوره ندوات ثقافية؛ لتحديد مدى دعم سكان المدينة للندوات الثقافية.

متحيزة؛ لأن الأشخاص الذين تم سؤالهم قد يختلفون عن سكان المدينة، حيث إنهم ممن يحضرون الندوات الثقافية.

b) استطلاع آراء أفراد في سوق الماشية؛ لمعرفة ما إذا كان سكان المدينة يحبون تربية الماشية أو لا .

متحيزة؛ لأن المجموعة التي تم مسح رأيها لا تُمثّل بالضرورة رأي أهل المدينة؛ لأنهم غالبًا ممن يحبون تربية الماشية.

c) يحتوي صندوق على أسماء طلاب المدرسة جميعهم، سُحب من الصندوق 100 اسم عشوائيًّا، وسُئل أصحابها عن رأيهم في مقصف المدرسة.

غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة الذين استُطلِعت آراؤهم.

تحقق من فهمك

حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

1A) متحيزة؛ لأن الرياضة المفضلة للاعبي كرة السلة في الغالب هي كرة السلة.

1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيًّا عن رياضتهم المفضلة.

1B) متحيزة؛ لأن كرة القدم ستكون رياضتهم المفضلة.

لتجنُّب التحيّز في الدراسات المسحية المعتمدة على العينات لا بدّ من تحقّق أمرين هما: أن تكون العينة العشوائية مناسبة، وذلك بأن تكون غير متحيزة وحجمها كبير نسبيًّا، وألا تكون الأسئلة المطروحة متحيزة.

مصادر الدرس 1 – 7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (88)	• تنويع التعليم ص (88, 90)	• تنويع التعليم ص (90)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

المثالان 1, 2 يبينان كيفية المقارنة بين العينتين المتحيزة وغير المتحيزة، وكذلك بين الأسئلة المتحيزة وغير المتحيزة.

المثالان 3, 4 يبينان كيفية المقارنة بين الدراسات المسحية، والتجريبية، والقائمة على الملاحظة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان اضافيان

1 **دراسات مسحية:** حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنَّى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسِّر إجابتك:

a) استطلاع رأي مشاهِدِي الكرة الطائرة لمعرفة أكثر الألعاب شعبية. متحيزة؛ لأن اللعبة الشعبية الأكثر احتمالًا من وجهة نظرهم ستكون الكرة الطائرة.

b) الاتصال بكل عاشر شخص في قائمة المشاركين في شراء صحيفة محددة، للاستفسار عن نوع الخدمة المقدّمة. غير متحيزة؛ لا يوجد ما يوحي بأنها متحيزة.

c) الاتصال من خلال الإنترنت؛ لمعرفة نسبة الأشخاص الذين يلجؤون إلى وكلاء السفر. متحيزة؛ لأن الأشخاص الذين تشملهم الدراسة المسحية أقل إمكانية لأن يلجؤوا إلى وكلاء السفر.

2 **رياضة:** أي الأسئلة الآتية، يُحدّد الرياضة المفضلة بالنسبة للطلاب دون تحيز؟

a) هل تُعدّ لعبة كرة القدم ممتعة؟
هذا سؤال متحيز لصالح كرة القدم.

b) ما أفضل لعبة رياضية تحب مشاهدتها؟
هذا سؤال غير متحيز؛ حيث إنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها دون تحيّز.

c) هل تحب مشاهدة مباراة التنس؟
هذا سؤال متحيز لصالح لعبة التنس.

إرشادات للدراسة

العينة المتحيزة
تعدّ العينة متحيزة إذا وفقط إذا كانت غير عشوائية.

2A) هذا سؤال متحيز؛ لأنه ذكر مادة محدّدة، ولم يذكر غيرها.

2B) سؤال متحيز ؛ لأنه حدِّد مادتين للاختيار بينهما.

2C) سؤال غير متحيز؛ لأنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها من دون تحيز.

إرشادات للدراسة

المعالجة الشكلية
المعالجة الشكلية هي المعالجة التي يخضع لها أفراد المجموعة الضابطة، والتي ليس لها أي تأثير في نتائج الدراسة، والهدف الأساسي منها هو التأكد من عدم معرفة الأفراد لأي المجموعتين التجريبية أو الضابطة ينتمون، لضبط محاولة تأثير بعضهم في نتائج الدراسة، وذلك ببذل المزيد من الجهد مثلًا أو العكس.

مثال 2 من واقع الحياة — تصميم الدراسات المسحية

دراسات مسحية في المدرسة: يريد خالد أن يُحدّد أفضل الأماكن للرحلة المدرسية. ما الأسئلة التي تعطيه الإجابة التي يبحث عنها دون تحيُّز؟

a) هل تحب الذهاب إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي؟
هذا سؤال متحيز لصالح مكان محدد.

b) هل تحب الذهاب إلى حديقة الحيوان، أم إلى متنزَّه سلام؟
هذا سؤال متحيز؛ لأنه يحدد بديلين بالاسم.

c) أين تفضل أن تذهب في الرحلة؟
هذا سؤال غير متحيز؛ لأنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها دون تحيّز.

تحقق من فهمك

أي مما يأتي يُحدّد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب دون تحيُّز؟

2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟

2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟

2C) ما مادتك المفضلة؟

في **الدراسة القائمة على الملاحظة**، تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج. وفي **الدراسة التجريبية**، يتم إجراء معالجة خاصة على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة، وتجرى ملاحظة استجاباتهم.

دراسة قائمة على الملاحظة
- من 100 شخص، اختر 50 شخصًا خضعوا المعالجة.
- اجمع البيانات، وحلّلها، وفسّرها.

دراسة تجريبية
- من 100 شخص، اختر من بينهم 50 شخصًا عشوائيًّا وأخضعهم للمعالجة المقصودة بالتجريب، بينما لا تخضع الآخرين لأي معالجة أو لمعالجة شكلية.
- اجمع البيانات، وحلّلها، وفسّرها.

في الدراسة التجريبية، يُسمّى الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة **المجموعة التجريبية**. أمّا الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء الذين لا يخضعون للمعالجة أو يخضعون لمعالجة شكلية، فيسمون **المجموعة الضابطة**. وتعطى المعالجة الشكلية لكي لا يعرف أفراد المجموعات لأي المجموعتين ينتمون، وتصبح الدراسة التجريبية عندها غير متحيزة.

مثال 3 من واقع الحياة — الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة

حدِّد ما إذا كان كل موقف ممّا يأتي يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة. وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

a) اختر 200 طالب نصفهم خضع لأنشطة إضافية في مادة معينة، وقارن بين درجاتهم في تلك المادة.
هذه دراسة قائمة على الملاحظة.

b) اختر 200 طالب واقسمهم عشوائيًّا إلى نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي معيّن، أمّا الأخرى فلا تخضعها لأي برنامج تدريبي.
هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم تقسيم المجموعتين عشوائيًّا، وإحداهما خضعت للبرنامج التدريبي وهي المجموعة التجريبية، والأخرى لم تخضع لأي برنامج تدريبي وهي المجموعة الضابطة، وهي دراسة متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كان الموقف الآتي يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزةً أم لا.

3) اختر 80 طالبًا جامعيًّا نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه في الجامعة. دراسة قائمة على الملاحظة

المحتوى الرياضي

الدراسة المسحية والتعداد السكاني

بما أن التعداد السكاني يتناول جميع أفراد المجتمع السكاني، فإن نتائجه تكون صحيحة، ولكن الدراسة المسحية التي تعتمد على جزء من المجتمع فقط، تكون نتائجها دائمًا تتضمّن بعضًا من النتائج غير المؤكّدة.

التعليم باستعمال التقنيات

صفحة على الإنترنت اطلب إلى الطلاب تصميم دراسة مسحية، وإرسالها إلى صفحة الإنترنت الخاصة بالمدرسة، ثم اطلب إليهم تفحّص العينة التي أجابت عن الدراسة المسحية متناولين مصادر التحيّز المحتملة في هذه العينة.

كيف تعرف متى تُستعمل الدراسات المسحية أو الدراسات التجريبية أو الدراسات القائمة على الملاحظة؟ تستعمل الدراسات المسحية عند الرغبة في جمع بيانات، أو آراء أفراد المجتمع حول موضوع معين، بينما تُستعمل الدراسات القائمة على الملاحظة عند الرغبة في دراسة أثر معالجة سابقة تعرض لها أفراد من المجتمع دون أي تأثير عليهم من الباحث، وتستعمل الدراسات التجريبية عند الرغبة في اختبار طريقة جديدة، أو في دراسة نتائج معالجة مقصودة يؤثر الباحث بها في مجموعة من الأفراد يتم تعيينهم عشوائيًا.

مثال 4 الدراسات المسحية والتجريبية والقائمة على الملاحظة

حدِّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك:

a) **تريد أن تختبر طريقة معالجة لمرض ما.**

يستدعي ذلك إجراء دراسة تجريبيّة يكون المستهدفون فيها مرضى يشكّلون المجموعة التجريبية، وتخضع هذه المجموعة للعلاج، بينما يخضع أفراد المجموعة الضابطة الآخرون وهم مرضى كذلك لعلاج شكلي.

b) **تريد أن تجمع آراءً حول القواعد المعتمَدة في انتخاب رئيس الصف.**

يستدعي هذا دراسة مسحية للآراء، حيث من الأفضل أن تختار أشخاصًا من الصف بصورة عشوائية؛ لتحصل على عينة غير متحيزة.

c) **تريد أن تعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنوات يؤثّر في سعة الرئة أو لا.**

يستدعي هذا إجراء دراسة قائمة على الملاحظة تقارن فيها سعة رئة المدخنين لمدة 10 سنوات، مع سعة الرئة لعدد مساوٍ لهم من غير المدخنين.

تحقق من فهمك دراسة مسحية؛ حيث من الأفضل أن يتم اختيار عينة عشوائية من المدرسة الثانوية، لتحصل على عينة غير متحيزة.

حدّد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، فسّر إجابتك.

4) تريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1 (لا أوافق مطلقًا) إلى 5 (أوافق بشدة).

التمييز بين الارتباط والسببية إن أي علاقة تظهر بين نتائج التجربة والمعالجة لا تعني بالضرورة أن المعالجة هي السبب في النتيجة.

فعندما يوجد **ارتباط** بين ظاهرتين، فإن كلًّا من الظاهرتين تؤثر في الأخرى فإن معرفتك بقيم الظاهرة الأولى يمكّنك من التنبؤ بقيم الظاهرة الثانية، والعكس صحيح، فمثلًا: هناك ارتباط بين كتل الأشخاص وأطوالهم، فكلما زاد طول الشخص زادت كتلته بشكل عام، فإذا عرفت طول شخص يمكنك التنبؤ بكتلته. وعندما يوجد **سببية**، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى لذا فإن السببية تتضمن الترتيب الزمني، فوقوع الظاهرة الأولى أولًا يكون سببًا في وقوع الظاهرة الثانية لاحقًا كنتيجة لذلك، فمثلًا: دوران الأرض حول محورها هو السبب الوحيد في تعاقب الليل والنهار. وبينما يكون من السهل ملاحظة الارتباط بين ظاهرتين، فإنه من الصعب البرهنة على وجود سببية بين الظاهرتين.

إرشادات للدراسة

السببية

إذا لم يوجد أي سبب آخر يعطي النتيجة فإنك تفترض السببية.

مثال 5 الارتباط والسببية

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

a) **أظهرت الدراسات أن الطلاب يكونون أقل نشاطًا بعد تناول الغداء .**

العبارة تظهر ارتباطًا فقط، ولا تظهر سببية؛ لأن تناول الغداء ليس سببًا مباشرًا ولا كافيًا وحده لقلة النشاط لدى الطلاب، فهناك عوامل أخرى تشترك معه، مثل نوعية وكمية الغداء.

b) **إذا رَفعتُ أثقالًا، أستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم .**

العبارة تظهر ارتباطًا؛ لأن رفع الاثقال وحده ليس سببًا مباشرًا للالتحاق بفريق كرة القدم، فقد تكون هناك متطلبات أخرى تشترك معه، مثل: المهارة واللياقة وغيرها.

c) **عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع.**

العبارة الواردة تظهر سببية؛ لأنه ليس هناك عوامل أخرى مع الشمس يلزم وجودها لتسبب طلوع النهار.

تحقق من فهمك ارتباط؛ حيث إن الدراسة قد تساعد على الحصول على تقدير ممتاز، ولكنها لا تضمن ذلك.

بيّن ما إذا كانت العبارة الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك.

5) عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون اللغويون اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة لتصميم سؤال لدراسة مسحية، ثم اطلب إليهم أن تتدرب كل مجموعة على طرح هذا السؤال، بحيث يظهر التحيّز في نغمة الصوت وتعبيرات الوجه. ثم اطلب إليهم طرح هذا السؤال على مجموعتين من الطلاب، بحيث يظهر التحيّز في طرح السؤال على إحدى المجموعتين، ولا يظهر هذا التحيّز عند طرحه على المجموعة الثانية. اطلب إلى المجموعة التي قامت بتصميم السؤال أن يدرسوا ما إذا كانت نسبة الإجابات أعلى في المجموعة التي كان طرح السؤال عليها متحيِّزًا.

التمييز بين الارتباط والسببية

المثال 5 يبيّن كيفية المقارنة بين الارتباط والسببية.

مثالان إضافيان

3 **دراسة تجريبية؛** حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الحالتين الآتيتين تتطلب دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، حدّد المجموعة التجريبية، والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كان هناك تحيز أو لا:

a) اختر 100 طالب، ووزّعهم في مجموعتين متساويتين عشوائيًّا؛ الأولى تسير إلى المدرسة مشيًا على الأقدام، والأخرى لا تفعل ذلك. دراسة تجريبية، المجموعة التجريبية هي التي تسير إلى المدرسة مشيًا على الأقدام، والضابطة هي التي لا تسير، والدراسة التجريبية متحيزة؛ حيث إن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

b) اختر 100 طالب، نصفهم يعمل بعد المدرسة، وقارن نتائج تحصيلهم الدراسي. دراسة قائمة على الملاحظة.

4 حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسِّر إجابتك:

a) تريد أن تعرف ما إذا كان الذين يركضون تكون عضلاتهم قوية أم لا. دراسة قائمة على الملاحظة، مقارنة عضلات الذين يركضون هرولة، مع عدد مماثل لهم ممن لا يقومون بذلك.

b) تريد أن تعرف أكثر المعلمين شعبية في مدرستك. دراسة مسحية، ومن الأفضل أن تقابل الطلاب بصورة عشوائية للحصول على عينة غير متحيزة.

c) تريد اختبار تطعيم ضد أحد الأمراض. دراسة تجريبية، الذين يخضعون للتطعيم هم المجموعة التجريبية، أمّا الذين لا يخضعون ويأخذون تطعيمًا حياديًّا (شكليًّا)، فهم المجموعة الضابطة.

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كلُّ دراسة مسحية فيما يأتي تتبنّى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك: (مثال 1) **1-3) انظر الهامش.**

1) استطلاع رأي كل شخص ثالث يخرج من مطعم للمشويات؛ لمعرفة الوجبة المفضلة للناس.

2) الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد لديهم.

3) الاستفسار من الطالب الذي ترتيبه 20 من كل 20 طالبًا يخرجون من مدرستك، عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي.

4) **دراسة مسحية:** بيِّن ما إذا كانت الدراسة المسحية الآتية تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، فسّر إجابتك.
استطلاع آراء طلاب في كلية الطب؛ لمعرفة المهنة المستقبلية المفضلة لدى الشباب.
متحيزة؛ لأن مهنتهم المستقبلية الأكثر تفضيلًا بالنسبة لهم ستكون الطب.

حدّد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل. (مثال 2)

5) يريد زاهر أن يحدد فريق كرة القدم الأكثر شعبية في المملكة. b
a) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في مدينة الرياض؟
b) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في المملكة؟
c) ما مدى تقديرك لفرق كرة القدم في المملكة؟

6) يريد سليمان أن يحدد الرغبة في تكوين أول نادٍ للشطرنج في المدرسة. c
a) في أي يوم ترغب في أن تتأخر في المدرسة؟
b) هل تحب الشطرنج؟
c) هل تحب أن تنضم إلى نادي الشطرنج في المدرسة؟

7) يريد هاني أن يتعرف إلى الطالب المثالي في المدرسة. a
a) من ترى أنه الطالب المثالي في المدرسة؟
b) هل تُفضّل الطالب الذي لا يبادر بالمساعدة، أم الذي يبادر بها؟
c) إذا طُلِب إليك إبداء الرأي، فهل تفعل؟

حدّد ما إذا كان كل موقف من المواقف الآتية يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا: (مثال 3)

8) قبل الاختبار، قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه بشكل عشوائي، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداهما، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى. ثم قام بمقارنة نتائج الاختبار لهما.
انظر الهامش.

9) وجد عادل 100 شخص، نصفهم متطوعون في مأوى للمحرومين الفقراء، وقارن بين متوسطي الدخل السنوي لأفراد المجموعتين.
دراسة قائمة على الملاحظة.

10) اختر 300 شخص، واقسِّمهم عشوائيًا إلى مجموعتين: إحداهما تقرأ القرآن لمدة ساعة قبل النوم، والأخرى لا تفعل شيئًا، ثم قارن بين كيفية نوم كل من المجموعتين. انظر هامش الصفحة التالية.

11) اختر 250 شخصًا نصفهم في الفِرق الرياضية، وقارن بين كمية الوقت الذي يمضونه في حل الواجبات. دراسة قائمة على الملاحظة.

12) اختر 100 طالب نصفهم في نادي اللغة الإنجليزية، وقارن بين درجاتهم في اللغة الإنجليزية. دراسة قائمة على الملاحظة.

13-17) انظر هامش الصفحة التالية.

حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك: (مثال 4)

13) تريد اختبار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال.

14) تريد استطلاع آراء أشخاص حول سياسة جديدة لشركة.

15) تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثّر في حركة الركبة أو لا.

16) تريد معرفة ما إذا كانت المشروبات الغازية تؤثّر في جدار المعدة أو لا.

17) تريد اختبار معالجة معيّنة تبعد الحيوانات عن البساتين التي تحوي غزلانًا.

بيّن ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطًا، أو سببية، وفسّر إجابتك: (مثال 5) **18-23) انظر هامش الصفحة التالية.**

18) عندما أمارس الرياضة، أكون في وضع نفسي أفضل.

19) عندما يكون الجو باردًا وممطرًا بغزارة، لا نذهب إلى المدرسة.

20) عندما يكون الطقس حارًّا في فصل الصيف، يكثر بيع المشروبات الباردة.

21) كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً.

22) دلَّت الأبحاث على أن من يتقن أكثر من لغة، يكون أقل إمكانية للإصابة بالمرض.

23) النوم بحذائك يؤدي إلى شعورك بالصداع.

24) **استبانات:** توزّع شركة استبانات على العاملين الذين تركوا العمل في الشركة، وكان أحد أسئلة الاستبانة هو كيف يرى العامل خبرته التي اكتسبها في الشركة؟ هل هذه دراسة مسحية متحيزة؟ فسّر السبب. إجابة ممكنة: نعم متحيزة؛ معظم العاملين الذين يتركون عملهم في الشركة، هم غير راضين عنها، وإلا لم يتركوها.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–23، 24، 25، 27–42
ضمن ضمن المتوسط	1–27 فردي، 28–42
فوق فوق المتوسط	18–42

مثال اضافي

5 بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تظهر ارتباطًا، أو سببية، وفسّر إجابتك.

a) عندما يحدث كسوف الشمس يكون القمر واقعًا على استقامة واحدة بين الأرض والشمس.
سببية؛ لأن وقوع القمر بين الأرض والشمس هو السبب الوحيد لحدوث كسوف الشمس.

b) فئران المختبر التي تُمْنَع من النوم، يكون معدل كتلها أقل.
ارتباط؛ مع أن قلة النوم قد تُقلّل من الكتلة، ولكن هذا غير مضمون.

c) الأشخاص الذين يسكنون المدن يشربون عددًا أكبر من زجاجات الماء.
ارتباط؛ يوجد أكثر من عامل لهذه النتيجة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-23 ؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول المجاور في هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1) متحيزة ؛ لأن الوجبة الأكثر تفضيلًا من وجهة نظرهم ستكون المشويات.

2) متحيزة؛ لأن الأشخاص المستهدَفين يميلون إلى العلوم أكثر من غيرهم.

3) غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

8) دراسة تجريبية: لأن المعلم اختار شُعبتين بشكل عشوائي. المجموعة التجريبية هي الشعبة التي قام المعلم بمراجعة المادة لطلابها. والمجموعة الضابطة هي الشعبة الأخرى، وهذه دراسة متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 25 بأنه في الدراسة التجريبية غير المتحيزة، لا يجوز لأي شخص أن يعرف ما إذا كان في المجموعة الضابطة أو في المجموعة التجريبية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب أن يكتب مخطّطًا لدراسة تجريبية من اختياره، يعرّف فيها كلًّا من المجموعة التجريبية، والمجموعة الضابطة.

إجابات:

10) دراسة تجريبية؛ لأنه تم تقسيم الأشخاص إلى مجموعتين عشوائيًّا. تتضمّن المجموعة التجريبية من يقرأ القرآن الكريم قبل النوم، وتتضمّن المجموعة الضابطة من لا يفعل ذلك، وهذه دراسة متحيزة؛ لأن كل مشارك يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

13) دراسة تجريبية: المستهدَفون أشخاص لديهم صلع. والمجموعة التجريبية تتلقّى معالجة، بينما المجموعة الضابطة تتلقّى معالجة شكلية.

14) مسحية، من الأفضل أن تستطلع آراء أشخاص يختارون بصورة عشوائية.

15) دراسة قائمة على الملاحظة.

16) دراسة قائمة على الملاحظة.

17) دراسة تجريبية: الفئة المُستهدفة بساتين فيها غزلان. والمجموعة التجريبية بساتين تتلقّى معالجة معينة تبعد الحيوانات عنها، وبقية البساتين هي المجموعة الضابطة وتتلقّى معالجة شكلية.

18) ارتباط، مع أن ممارسة الرياضة تجعل الإنسان في نفسية أفضل، إلا أن أحدًا منهما لا يتسبّب بالضرورة في الآخر.

19) العبارة تظهر سببية؛ لأن نزول المطر بغزارة سبب كافٍ لوحده؛ لعدم ذهاب الطلاب إلى المدرسة؛ على الرغم من أن الغياب يمكن أن تسببه عوامل أخرى مثل المرض.

20) العبارة تظهر سببية؛ لأن الحرّ في الصيف (ارتفاع درجة الحرارة) هو سبب مباشر في زيادة مبيعات المشروبات الباردة، فجسم الإنسان بحاجة إلى سوائل أكثر لتعويض ما يفقده.

21) ارتباط، مع أن الاثنين يرتبطان كلٌّ منهما بالآخر، لكن كثرة القراءة قد لا تؤثر في الذكاء.

22) ارتباط، حيث إن للدراسة علاقة بين الاثنين، لكن أحدهما قد لا يسبب الآخر.

23) ارتباط، مع أنه ربما توجد علاقة بين الاثنين، إلا أن أحدهما قد لا يُسبّب الآخر.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع كلّف الطلاب بتقصّي طرائق الحصول على عينات عشوائية. يمكن استعمال جداول الأرقام العشوائية الموجودة في ملحق معظم كتب الإحصاء في الحصول على عينة عشوائية لقائمة من الأعداد. اطلب إلى كل طالب اختيار عينة من الأرقام العشوائية يتألّف كل منها من رقمين، واطلب إليه اختيار عينة عشوائية من هذه الأعداد مستفيدًا من جداول الأرقام العشوائية بحيث يبدأ كل طالب من موقع معين في الجدول، وماراًّ من خلال أحد أعمدة الجدول أو أحد صفوفها. هذا ويمكن استعمال الأرقام العشوائية التي يمكن توليدها باستعمال الآلة الحاسبة، أو أي من برامج الجداول الإلكترونية، مثل برنامج الإكسل.

مسائل مهارات التفكير العليا

25) اكتشف الخطأ: طُلب إلى كل من سامي وهشام أن يصمم دراسة تجريبية غير متحيزة. هل وفّق أي منهما في ذلك؟ فسّر إجابتك.

سامي

- خذ مجموعة من 20 شخصًا بطريقة عشوائية.
- اطلب إلى نصفهم عشوائيًّا الالتزام بحمية تعتمد على الفواكه بالكامل لمدة 3 أسابيع.
- قارن بين أوزانهم بعد الأسابيع الثلاثة.

هشام

- خذ 20 لاعبًا لكرة القدم.
- اطلب إلى نصفهم عشوائيًّا أن يقفزوا 500 قفزة إلى أعلى في اليوم.
- قارن عدد مرات القفز إلى أعلى التي تستطيع كل مجموعة تنفيذها بعد الأسابيع الثلاثة.

26) تحدَّ: كيف تظهر الدراسة المسحية عبر الهاتف تحيّزًا للعينة؟
إجابة ممكنة: الدراسات المسحية بالهاتف تكون عادة متحيزة؛ لأن الذين لم تُدرج أسماؤهم لن يتم الاتصال بهم، وكذلك الذين ليس لديهم هواتف.

27) اكتب: قارن من خلال ذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين العينة العشوائية في اختيار الأفراد من المجتمع، وبيّن الاختيار العشوائي لأفراد المجموعة الضابطة في الدراسة التجريبية. **انظر ملحق الإجابات.**

28a, 28c) انظر ملحق الإجابات.

28) مسألة مفتوحة: اذكر مثالًا من واقع الحياة لكل دراسة ممّا يأتي، وحدِّد عدد أفراد العينة، وكيفية اختيارها.

a) مسحية
b) قائمة على الملاحظة
c) تجريبية

28b) إجابة ممكنة: **ألاحظ 20 طالبًا نصفهم لديه غرفة للدراسة، وأقارن درجاتهم في نهاية الفصل.**

29) تبرير: كيف يحدث التحيّز في الدراسة التجريبية؟ وكيف يؤثّر في النتيجة؟ أعطِ مثالًا على ذلك. **انظر ملحق الإجابات.**

مراجعة تراكمية

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 1, 6 \rangle$، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 2-5)

30) $2\mathbf{u}$ $\langle 4, -6 \rangle$

31) $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ $\langle 3, 3 \rangle$

32) $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ $\langle 3, -12 \rangle$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 4-5)

33) $A(2, 2, 7), B(1, 3, -4)$ $\langle -1, 1, -11 \rangle, \sqrt{123}$

34) $A(4, 5, 10), B(7, 1, 8)$ $\langle 3, -4, -2 \rangle, \sqrt{29}$

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلِّ نقطة مما يأتي: (الدرس 2-6)

35) $(3, 90°)$ $(0, 3)$

36) $(2, 210°)$ $(-\sqrt{3}, -1)$

37) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (الدرس 3-6)

38) $6 + 8i$ $\approx 10(\cos 0.93 + i \sin 0.93)$

39) $-1 - i$ $\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

تدريب على اختبار

حدِّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثِّل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدِّد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كانت متحيزة أو لا.

40) اختر 220 شخصًا عشوائيًّا، وقسمهم عشوائيًّا إلى مجموعتين. إحداهما تقوم بالتدريبات الرياضية مدة ساعةً واحدة يوميًّا، والأخرى لا تقوم بهذه التدريبات، ثم قارن بين كتلة الجسم لكل من المجموعتين. **انظر ملحق الإجابات.**

41) اختر 200 طالب، نصفهم يمارس كرة القدم، وقارن فترة النوم بين المجموعتين. **دراسة قائمة على الملاحظة**

42) اختر 100 طالب جامعي، نصفهم لديه وظيفة بدوام جزئي، وقارن معدلاتهم التراكمية. **دراسة قائمة على الملاحظة**

معمل الحاسبة البيانية:

تقويم البيانات المنشورة

Evaluating Published Data

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، مع تطبيق القوائم وجداول البيانات لتقويم البيانات التي يمكن الحصول عليها في الواقع.

يبين الجدول أدناه عدد السيارات التي باعها معرض للسيارات خلال الفترة 2009–1985، وقد قام المعرض بتمثيل هذه البيانات بالأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور؛ وعرضها في إحدى الصحف، وذلك لدعم المقولة بأن مبيعات المعرض تزداد بشكل كبير جدًّا. هل هذا صحيح؟

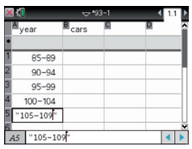
السنوات	1985–1989	1990–1994	1995–1999	2000–2004	2005–2009
عدد السيارات المبيعة	316	451	561	704	823

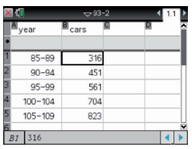
نشاط

تقويم التمثيل البياني للبيانات .

الخطوة 1 أدخل البيانات في صفحة من تطبيق القوائم وجداول البيانات.

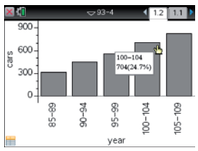
- اضغط (on) ومنها اختر .
- اكتب عنوان البيانات (years) في أعلى العمود (A) وَ (cars) في أعلى العمود (B) .
- لإدخال فئات السنوات في كل خلية بالضغط على (ctrl) ثم اختيار " ، فمثلًا لإدخال الفئة الأولى من السنوات في الخلية A_1 اكتب "89-85" ثم اضغط (enter) ، وكرّر ذلك لبقية فئات السنوات.
- استعمل الأسهم لإظهار الخلية B_1، ثم أدخل البيانات لكل فئة من السنوات.





الخطوة 2 مثِّل البيانات التي تم إدخالها بالأعمدة.

- اضغط (menu) ثم اختر 3:البيانات ومنها 8:التمثيل البياني المختصر
- اختر years في القائمة X: year ، وَ cars في قائمة موجزة cars ، وَ صفحة جديدة من عرض في صفحة جديدة لإظهار التمثيل البياني على صفحة جديدة، ثم اضغط موافق .
- لمشاهدة المعلومات عن أي عمود في التمثيل البياني، قم بالإشارة إلى ذلك العمود فتظهر معلوماته كما هو موضح في الشكل المجاور.



حلّل النتائج

2) إجابة ممكنة: تمثيل الصحيفة؛ لأنه مضلِّل، حيث بدأ التدريج على المحور الرأسي من العدد 250 وليس من الصفر، ولذلك تظهر المبيعات في السنوات 94–90، وكأنها أكثر من ضعف المبيعات في السنوات 89–85، وهي في الحقيقة ليست كذلك.

قارن تمثيلك البياني بتمثيل الصحيفة.

1) هل يعرض التمثيلان البيانات نفسها؟ نعم

2) أي التمثيلين يُظهر أن مبيعات المعرض تزداد بشكل أكبر؟ ولماذا؟

3) لماذا اختار المعرِض أن يعرض بياناته بهذه الطريقة؟ هل هي مقبولة؟ ولماذا؟

3) إجابة ممكنة: يريد المعرض أن يُظهر أنّ الزيادة في المبيعات متسارعة بشكل كبير، وهذا ليس مقبولًا؛ لأن البيانات يجب أن تعرض بصورة واضحة.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل

- ما نسبة الزيادة في المبيعات من فئة السنوات الأولى إلى الفئة الأخيرة ؟ 160% تقريبًا
- كيف أظهر التمثيل البياني الذي أعده المعرض تشوّهًا في البيانات؟

جَعَل الزيادة تُقدّر كأنها 350% ، حيث يظهر طول العمود الممثل للمبيعات في السنوات 2009–2005 مساويًا 4.5 أمثال طول العمود الممثل للمبيعات في السنوات 1989–1985 ، وكأن المبيعات أصبحت تقريبًا 4.5 أمثال المبيعات في السنوات 1989–1985 .

1 التركيز

الهدف: استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية TI-nspire، لتقويم بيانات منشورة.

المواد

- الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

إذا ظهرت صفحة من تطبيق القوائم وجداول البيانات قديمة عند بداية التطبيق، فيجب على الطالب حفظ القديمة أوّلًا، ثم فتح قائمة جديدة من خلال الضغط على المفتاحين: (on) ، ثم 1 مستند جديد ثم فتح صفحة قوائم وجداول بيانات جديدة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب مجموعات ثنائية ذوي قدرات متفاوتة، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط.

- تحتوي الزاوية العليا في اليسار من صفحة القوائم وجداول البيانات على العنوان الذي يُدخله الطلاب.
- الرمز ["] الذي يسبق المدخلة يدل على أن المدخلة نص، ولذلك يجب ألا تُدخل بيانات عددية يسبقها هذا الرمز .

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 3-1

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرينين 2 , 1؛ لتقويم مدى فهم الطلاب تمثيل البيانات بالأعمدة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-1 تدريبات إعادة التعليم

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

المصطلح	التعريف	مثال
الدراسة المسحية	الحصول على معلومات من مجتمع الدراسة أو عينة منه.	أخذ عينة لمعرفة من يؤيد فكرة ما أو يعارضها.
الدراسة القائمة على الملاحظة	اختبار يُراقب فيه الأفراد دون أية محاولة للتأثير في النتائج.	ملاحظة مجموعة مكونة من 100 شخص، منهم 50 يخضعون للمعالجة، ورصد معلومات، وتحليل البيانات وتفسيرها.
الدراسة التجريبية	عملية يجري فيها تدخل مقصود للأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء. ويتم فيها ملاحظة النتائج.	دراسة الفرق بين مجموعتين إحداهما تتعرض لمعالجة، والأخرى لا تتعرض لمعالجة أو تتعرض لمعالجة شكلية.

مثال 1 اذكر ما إذا كان كل موقف مما يأتي يمثّل دراسة تجريبية أو قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية حدّد المجموعة الضابطة، والمجموعة التجريبية، ثم بيّن إن وُجد تحيز أو لا.

اختر 20 مولودًا حديثًا نصفهم من الذكور، ونصفهم من الإناث، وقارن بين كتلهم.

هذه دراسة قائمة على الملاحظة.

مثال 2 حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلّب دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك.

تريد معرفة شعور الطلاب وأولياء الأمور حول الزي الموحد في المدرسة.

تتطلّب هذه الحالة دراسة مسحية، يُفضّل أن تسأل فيها عينة عشوائية من الطلاب، وعينة عشوائية أخرى من أولياء الأمور حول رأيهم في ذلك.

تمارين

حدّد ما إذا كانت كل حالة مما يأتي تمثّل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة، وحدّد المجموعة الضابطة والتجريبية إذا كانت تجريبية، ثم بيّن إن وجد تحيز أو لا:

1) خذ 300 طالب واقسمهم عشوائيًا إلى مجموعتين متساويتين، إحداهما تمارس لعبة كرة السلة 3 مرات في الأسبوع، والمجموعة الأخرى لا تمارس لعبة كرة السلة مطلقًا. وبعد ثلاثة أشهر، آجر مقابلة مع الطلاب، لمعرفة شعورهم نحو المدرسة.

دراسة تجريبية؛ العينة التجريبية هم الطلاب الذين تدربوا على لعبة كرة السلة، وأما المجموعة الضابطة، فهي المجموعة الأخرى. وهذه تجربة متحيزة؛ لأن الطلاب كلهم يعرفون أنفسهم في أي مجموعة.

2) خذ 100 طالب، نصفهم شارك في فريق الرياضيات، وقارن بين درجاتهم ومعدلاتهم.

دراسة قائمة على الملاحظة.

تدريبات إعادة التعليم (7) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

التمييز بين الارتباط والسببية

المصطلح	التعريف	مثال
الارتباط	عندما تحصل حادثة يكون حصول الأخرى ممكنًا.	عندما تتجمع الغيوم فإنه من الممكن نزول المطر.
السببية	إحدى الحادثتين سبب مباشر في وقوع الحادثة الأخرى.	إشعال الضوء يجعل الغرفة أكثر إضاءة.

مثال بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطًا أم سببية، ثم فسّر إجابتك.

الأطفال الذين يعيشون في بيوت واسعة أكثر نشاطًا من الأطفال الذين يعيشون في بيوت صغيرة.

ارتباط؛ لا يوجد سبب يجعلنا نفترض أن حجم البيت يسبب زيادة النشاط، إذ إن هناك أطفالًا مختلفي النشاط يعيشون في بيوت كبيرة. فربما ترجع زيادة النشاط إلى عامل آخر، مثل كميات الغذاء ونوعها.

تمارين

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطًا أم سببية، ثم فسّر إجابتك:

1) إذا ركضت في الشتاء، فإني سأمرض.

2) دلّت الدراسات أن زيادة أكل السمك تحسن درجة الرياضيات.

ارتباط؛ لا ينسب المطر إلى حدوث المرض.

ارتباط؛ مع أن الدراسة وجدت علاقة بين الاثنين، لكن نتيجة الرياضيات لا تتأثر مباشرة بمقدار ما يؤكل من السمك.

3) إذا أضعت كتاب المكتبة، فعليك أن تدفع غرامة.

4) قراءة كتاب عن التغذية الخالية من الدسم تجعلك نحيفًا كتلةً.

سببية؛ عدم إرجاع كتب المكتبة ينسب إلى دفع الغرامة.

ارتباط؛ قراءة كتاب لا ينسب إلى فقدان الكتلة إلا إذا اتبعت نظامًا غذائيًا.

5) إذا تغيّبت يومًا عن المدرسة، فلن أحصل على جائزة الحضور.

6) امتلاكي لسيارة ثمينة تجعلني أجمع ثروة.

سببية؛ الغياب عن المدرسة ينسب إلى عدم الحصول على حضور كامل.

ارتباط؛ إذا كان لديك نقود، فإنها تسمح لك بامتلاك سيارة فخمة، ولكن امتلاكك للسيارة لا يكون سببًا مباشرًا لزيادة دخلك.

تدريبات حل المسألة (8) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-1 تدريبات حل المسألة

الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

1) جراحة هناك تقنية جديدة في جراحة الركبة، حيث تُوضع الركبة في وضع مناسب باستعمال مادة البنتانيوم وأغطية واقية بدلًا من قطع الأربطة والعضلات. وقد قامت دراسة بملاحظة أزمنة الشفاء بعد جراحة 100 ركبة تضنها استعملت فيها التقنية الجديدة. فأيّهما كانت المجموعة الضابطة؟

المجموعة الضابطة هي الأفراد الذين أجريت لهم جراحة الركب بالطريقة التقليدية.

2) مشروبات رياضية تعطي شركة للمشروبات الرياضية عينات مجانية من إنتاجها الجديد في مجمع تجاري، وقد سجل عدد الأشخاص الذين أعمارهم من 20 – 12 مقابل عدد الكبار الذين أخذوا العينات. فهل يدل هذا على دراسة تجريبية أو مسحية أو قائمة على الملاحظة؟

قائمة على الملاحظة.

3) نواه وجدت دراسة أن أعضاء أحد الأندية هم في الأغلب من المحامين والأطباء. فهل هذا ارتباط أم سببية؟

ارتباط.

4) **رسوم متحركة** درس علماء السلوك أثر الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف في سلوك الأولاد.

a) صف دراسة قائمة على الملاحظة يمكن للعلماء أن يقدّموها لدراسة أثر الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف في الأولاد.

إجابة ممكنة: يمكن أن يلاحظ العلماء عدد الجرائم التي تُرتكب من الأحداث الذين يشاهدون هذه الرسوم.

b) صف التجربة التي يمكن أن يعدها العلماء لدراسة أثر الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف في الأولاد.

إجابة ممكنة: أجعل المجموعة التجريبية تشاهد رسوم متحركة تتسم بالعنف لمدة 8 ساعات، ثم لاحظ سلوك أفرادها وقارنه بسلوك الآخرين.

c) كيف يوضّح العلماء أن العنف بين الأولاد كان نتيجة للرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف لا مجرد ارتباط؟

على العلماء أن يثبتوا أن الرسوم المتحركة التي تتسم بالعنف تقود مباشرة إلى العنف.

التدريبات الإثرائية (9) — فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-1 التدريبات الإثرائية

عينات طبقية

يستعمل الباحثون في بعض الحالات عينات طبقية بدلًا من العينات العشوائية، ويمكن للعينات الطبقية في المجتمعات المتنوعة أن تكون أكثر دقة من العشوائية.

حيث يوزّع المجتمع إلى أجزاء متمايزة، قبل اختيار العينة الطبقية على أن يتجانس أفراد كل جزء، ثم يتم أخذ عينة تمثّله من كل جزء، وتكون مجموعة هذه العينات هي العينة الممثّلة للمجتمع.

مثال يمكن تصنيف طلاب مدرسة ثانوية، وعددهم **2294** طالبًا، إلى أربع فئات بحسب الصف، **والفرع/ علمي أو شرعي:**

الصف الحادي عشر علمي: 576	الصف الحادي عشر شرعي: 530
الصف الثاني عشر علمي: 600	الصف الثاني عشر شرعي: 588

اختيرت عينة من 500 طالب لاستطلاع رأيهم، حدّد عدد الطلاب الذين سيشاركون في العينة من كل فئة.

الخطوة 1: أحسب النسبة لكل فئة.

الصف الحادي عشر علمي: $576 \div 2294 = 25.11\%$

الصف الحادي عشر شرعي: $530 \div 2294 = 23.10\%$

الصف الثاني عشر علمي: $600 \div 2294 = 26.16\%$

الصف الثاني عشر شرعي: $588 \div 2294 = 25.63\%$

الخطوة 2: أضرب كل نسبة في حجم العينة.

الصف الحادي عشر علمي: $(25.11\%)(500) = 125.55 \approx$ 126 طالبًا

الصف الحادي عشر شرعي: $(23.10\%)(500) = 115.5 \approx$ 115 طالبًا

الصف الثاني عشر علمي: $(26.16\%)(500) = 130.8 \approx$ 131 طالبًا

الصف الثاني عشر شرعي: $(25.63\%)(500) = 128.15 \approx$ 128 طالبًا

(ملحوظة: تم تقريب العدد 115.5 إلى 115 حتى يكون حجم العينة 500 طالب)

تمارين

لكل من التمرينين 2،1، حدّد عدد الأشخاص في كل فئة من المشاركين في العينة.

1) يتكون مجتمع رياضيين من 18 لاعب كرة قدم، 18 لاعب كرة سلة، ويُراد أخذ عينة ممثلة من 20 رياضيًا.

10 لاعبي كرة قدم، 10 لاعبي كرة سلة

2) أريد التعرف على صعوبات العمل في ستة قطاعات هي: الزراعة، والصناعة، والتجارة، والنقل، والتعليم، والصحة، في مجتمع يتكون من: 100000 يعملون في الصناعة، 195000 في قطاع الزراعة، 150000 في قطاع التعليم، 125000 في قطاع التجارة، 52000 في قطاع الصحة، و 31000 في قطاع النقل. حيث يتطلب ذلك أخذ عينة ممثلة من 100 شخص.

صناعة 15؛ زراعة 30؛ تعليم 23؛ تجارة 19؛ صحة 8؛ نقل 5

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-2

إيجاد مقاييس النزعة المركزية والتشتت.

الدرس 7-2

استعمال مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت؛ لمقارنة مجموعات من البيانات.

ما بعد الدرس 7-2

مقارنة إحصائيات العينة ومعالم المجتمع .

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

و اسأل:

- لماذا يكون من المفيد، وضع البيانات في قائمة عند دراستها؟ إجابة ممكنة: عندما تكون البيانات مرتّبة يكون من السهل معرفة كل من: أصغر قيمة، والوسيط، والمنوال، وأكبر قيمة .
- ما الملاحظات التي يمكنك معرفتها عن الأوقات التي وصل فيها أمجد إلى خط النهاية في المسابقات التي شارك فيها (باستعمال الحساب الذهني فقط)؟ إجابة ممكنة: القيمتان العظمى والصغرى هما : (7:29 , 6:48) ، والمدى 41 ثانية.

مقاييس النزعة المركزية

المثال 1 يبيّن كيفية تحديد مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل مجموعة بيانات.

7-2 التحليل الإحصائي
Statistical Analysis

7:20	6:59	7:29	6:49	7:03	6:51
6:48	6:52	6:50	7:01	6:49	6:57
6:53	7:07	6:54	6:56	7:09	7:02

لماذا ؟

شارك أمجد في 18 سباقًا جبليًّا للدراجات خلال العام الماضي، ويُمثّل الجدول المجاور الزمن بالدقائق والثواني الذي استغرقه للوصول إلى خط النهاية في كل منها. أي من مقاييس النزعة المركزية يفضل أن يستعمله أمجد لوصف هذه الأزمنة؟

إن إيجاد أحد مقاييس النزعة المركزية لوصف البيانات وتلخيصها، والوصول إلى الاستنتاجات المتعلقة بالدراسة يُسَمى **التحليل الإحصائي** لها.

التحليل الإحصائي البيانات الموجودة في الجدول أعلاه تشتمل على **متغير**؛ لذا تُسمى **بيانات في متغير واحد**. ولوصف مثل هذه البيانات، يُستعمل أحد **مقاييس النزعة المركزية**، الذي يشير إلى متوسط البيانات أو منتصفها (مركزها)، وأبرز هذه المقاييس هو المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

وعند اختيار مقياس لوصف البيانات يمكن استعمال الجدول أدناه:

مفهوم أساسي — **مقاييس النزعة المركزية**

المقياس	التعريف	أكثر فائدةً عندما
المتوسط الحسابي	مجموع القيم مقسومًا على عددها	لا توجد في البيانات قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي يشغل موقع المنتصف عند ترتيب القيم تنازليًا أو تصاعديًا في مجموعة بيانات عددها فرديٌّ، أو هو المتوسط للعددين الموجودين في المنتصف، في مجموعة بيانات عددها زوجي ومرتبة ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا.	توجد في البيانات قيم متطرفة، ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.
المنوال	القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم.	تحوي البيانات قيمًا متكررة.

مثال 1 من واقع الحياة — **مقاييس النزعة المركزية**

a) زمن السباق: إشارة إلى البيانات في سباق الدراجات أعلاه، أيّ مقاييس النزعة المركزية يصف البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

بما أن البيانات تنتشر ولا يظهر فيها قيم متطرفة، يكون المتوسط هو الأفضل.

17	15	17	16
15	16	16	12
18	18	18	14
1	48	16	40

b) أيّ من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور؟ ولماذا؟

بما أنه توجد قيم متطرفة ولا يوجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات، فإن الوسيط أفضل من غيره لتمثيل البيانات.

تحقق من فهمك المنوال؛ حيث إن الغالبية العظمى من القيم متساوية.

1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال، و30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالهما لمجموعة من البيانات، هما **المَعْلَمة** وهو مقياس يصف خاصية في المجتمع. و**الإحصائي** وهو مقياس يصف خاصية في العينة. فمتوسط دخل الفرد في المملكة هو مثال على المَعْلَمة، أما دخل الفرد في مدينتك التي تسكنها، فهو مثال على الإحصائي. ويتم تحديد مجتمع الدراسة في ضوء الهدف من الدراسة، فإذا أراد باحث مثلًا تعرف مدى رضا معلِّمي الرياضيات عن المناهج الجديدة في المملكة، فإن مجتمع الدراسة يكون جميع معلِّمي الرياضيات الذين يُدرِّسون المناهج الجديدة في المملكة، ولصعوبة إجراء الدراسة على جميع المعلمين، فإنه يتم اختيار مجموعة صغيرة والتي تمثل عينة الدراسة.

فيما سبق:
درست مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت. (مهارة سابقة)

والآن:
- أختار مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات.
- أجد هامش خطأ المعاينة وأستعمله.
- أستعمل مقاييس التشتت لمقارنة مجموعات من البيانات.

المفردات:
التحليل الإحصائي
statistical analysis
المتغير
variable
بيانات في متغير واحد
univariate data
مقاييس النزعة المركزية
measure of central tendency
المَعْلَمة
parameter
الإحصائي
Statistic
هامش خطأ المعاينة
margin of sampling error
مقياس التشتت
measure of variation
التباين
variance
الانحراف المعياري
standard deviation

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة
القيمة المتطرفة
هي واحدة من البيانات أكبر أو أصغر كثيرًا من بقية البيانات.

مصادر الدرس 7-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (93)	• تنويع التعليم ص (93, 96)	• تنويع التعليم ص (93, 96)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

وعند سحب عينة من مجتمع فهنالك خطورة من وجود خطأ في المعاينة ناتج عن إجراء الدراسة على عينة من المجتمع وليس على المجتمع بأكمله يسمى **هامش خطأ المعاينة**. وكلما زاد حجم العينة قلّ هامش خطأ المعاينة، ويُحَدِّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تدل على مدى اختلاف استجابة العينة عن المجتمع، وهذا يعني أنه يصف المدى الذي تقع فيه نسبة المجتمع فيما إذا أجريت الدراسة على المجتمع بأكمله.

مفهوم أساسي — **هامش خطأ المعاينة**

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال 2 — **هامش خطأ المعاينة**

في دراسة مسحية عشوائية شملت 2148 شخصًا، أفاد 58% منهم أن كرة القدم هي لعبتهم المفضّلة.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

$\text{هامش خطأ المعاينة} \approx \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ — قانون هامش خطأ المعاينة

$\approx \pm \frac{1}{\sqrt{2148}}$ — $n = 2148$

$\approx \pm 0.0216$ — بسّط

إذن هامش الخطأ للمعاينة $\pm 2.16\%$ تقريبًا.

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمّن نسبة المجتمع الذين أفادوا أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة؟

$58\% + 2.16\% = 60.16\%$ $\quad$ $58\% - 2.16\% = 55.84\%$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا بأن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة تقع بين 55.84% و 60.16% أي تقع في الفترة (55.84% , 60.16%).

تحقق من فهمك

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصًا، قال 41% منهم: إنهم مرتاحون للنهضة العلمية.

2A) ما هامش خطأ المعاينة؟ $\pm 1.75\%$

2B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟ بين 39.25% و 42.75%

إرشادات للدراسة

كتابة هامش خطأ المعاينة
نكتب هامش خطأ المعاينة عادة على صورة نسبة مئوية.

مقاييس التشتت تصف **مقاييس التشتت** مقدار تباعد البيانات أو تقاربها، ومن أشهر مقاييس التشتت **التباين**، و**الانحراف المعياري**. ويصف هذان المقياسان مدى بعد مجموعة البيانات عن المتوسط أو قربها منه.

يُمثّل الرمز $\bar{x}$ المتوسط للعينة ويُقرأ «x بار»، ويمثّل الرمز μ المتوسط للمجتمع ويُقرأ «ميو». ويحسب كل من المتوسط للعينة والمتوسط للمجتمع بالطريقة ذاتها، أمّا طريقة حساب الانحراف المعياري لكل من بيانات العينة وبيانات المجتمع، فتختلف، وفيما يأتي توضيح لطريقة حساب كل من الانحراف المعياري للعينة (ويُرمز له بالرمز s، والانحراف المعياري للمجتمع (ويرمز له بالرمز σ ويقرأ «سيجما»).

إرشادات للدراسة

مقاييس التشتت
درست سابقًا مقاييس التشتت (المدى، الربيعات، المدى الربيعي، الانحراف المتوسط.

مفهوم أساسي — **قانونا الانحراف المعياري**

العينة

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث n عدد قيم العينة، وَ $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة وَ x_k قيم العينة.

المجتمع

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$

حيث n عدد قيم المجتمع، وَ $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للمجتمع وَ x_k قيم المجتمع.

هامش خطأ المعاينة

المثال 2 يبيّن كيفية إيجاد هامش خطأ المعاينة في الدراسة المسحية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 **رواتب:** يعمل 3 موظفين في شركة براتب سنوي مقداره 200000 ريال لكلٍّ منهم، ويعمل 10 آخرين براتب سنوي مقداره 70000 ريال لكلٍّ منهم، بينما يعمل 60 موظفًا في الشركة براتب سنوي مقداره 40000 ريال لكلٍّ منهم.

a) أيّ مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟ المنوال؛ حيث إن الغالبية العظمى من البيانات متساوية.

b) أي مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات الآتية؟ ولماذا؟ 37, 33, 40, 31, 33, 38, 35

المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة.

2 في دراسة مسحية عشوائية شملت 1710 شباب، أفاد 76% منهم أنهم يحبون الرياضة.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟ $\approx \pm 0.0242$

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع الذين يحبون الرياضة؟ بين 73.58% , 78.42%؛ أي في الفترة (73.58% , 78.42%)

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلاب البحث في مجلة، أو صحيفة، أو في الإنترنت عن دراسة مسحية، ثم مقارنة هامش خطأ المعاينة المذكور في الدراسة بالنتائج التي يحسبونها وفق الطريقة التي تعلموها في هذا الدرس.

مقاييس التشتت

المثال 3 يبيّن كيفية حساب الانحراف المعياري لمجموعتين من البيانات والمقارنة بينهما .

مثال إضافي

3 **طقس:** كانت درجات الحرارة الفهرنهايتية في مدينة ما خلال أول 10 أيام من العام الماضي كما يأتي:

58, 68, 71, 73, 84, 89, 71, 73, 63, 56

وفي هذا العام كانت:

52, 37, 50, 54, 55, 60, 63, 56, 58, 48

a) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينةً أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة التي قِيسَت في العام الماضي. 10.4 تقريبًا

b) استعمل الحاسبة لإيجاد الانحراف المعياري لدرجات الحرارة لأيام هذا العام. 7.3 تقريبًا

c) قارن الانحراف المعياري في كلا العامين. وماذا تستنتج؟
الانحراف المعياري في العام الماضي أكبر من الانحراف المعياري في هذا العام، وهذا يعني أنه يوجد تباعد أكبر في درجات حرارة أول عشرة أيام من العام الماضي.

المحتوى الرياضي

وضّح للطلاب أن الانحراف المعياري لمجموعة بيانات هو عدد يصف مدى بعد مفردات المجموعة بعضها عن بعض، كما يخبرك عن مدى بُعد أو قُرب قيم البيانات عن متوسطها.

مثال 3 من واقع الحياة

الانحراف المعياري

درجات اختبار: حصل طلاب المعلم صالح في اختبارين متتاليين على المتوسط نفسه في اختبار الرياضيات وهو 75. إذا علمت أن درجات الاختبارين كما يأتي:

الاختبار A	الاختبار B
85, 80, 75, 75, 70, 75, 75, 65, 75, 75, 75, 80, 75, 75, 70, 80, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 75	100, 100, 90, 10, 100, 95, 10, 95, 100, 100, 85, 15, 95, 20, 95, 90, 100, 100, 90, 10, 100, 100, 25

a) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات الاختبار A.

الخطوة 1 بما أن المتوسط 75 للاختبار كاملًا ، فهو يمثل متوسط المجتمع. ومن هنا فإن:
$\mu = 75$.

الخطوة 2 أوجد الانحراف المعياري.

قانون الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(85-75)^2 + (80-75)^2 + \ldots + (75-75)^2 + (75-75)^2}{23}}$$

$$\approx 3.9$$

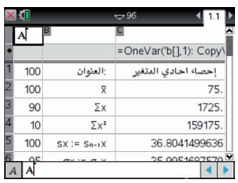
المتوسط لدرجات الاختبار A يساوي 75، والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 3.9

b) استعمل الحاسبة البيانية؛ لإيجاد الانحراف المعياري للاختبار B.

اضغط (on) ثم (⊞) وأدخل القيم (الدرجات) في العمود A.

ولمشاهدة الإحصائيات اضغط (menu) ثم اختر 4:الإحصاء ثم 1: الحسابات الإحصائية ثم 1:احصاء أحادي المتغير ...

ثم اضغط موافق موافق موافق



المتوسط لدرجات الاختبار B يساوي 75
والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 36

c) قارن الانحراف المعياري في كلا الاختبارين. وماذا تستنتج؟

الانحراف المعياري للاختبار B أكبر كثيرًا من الانحراف المعياري للاختبار A؛ لذا فدرجات الطلاب في الاختبار A أكثر تجانسًا، أي أن درجات بعضهم قريبة من بعضٍ، مقارنةً بالاختبار B الذي يبيِّن درجات عالية جدًّا، ودرجات لآخرين دون المتوسط كثيرًا.

تحقق من فهمك

3A احسب المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحدّدة في الجدول المجاور. $\mu = 30.6, \sigma = 2.74$

31	33	33	34	28
31	36	34	29	33
36	28	32	29	30
28	28	29	33	29
29	27	28	31	26

3B ضع 70 مكان 30 في الجدول المجاور. ماذا تتوقع أن يحدث لكلٍّ من المتوسط والانحراف المعياري؟ أعد الحسابات للتحقّق.

3C اختير (5) طلاب عشوائيًّا من فصل دراسي، وقيست أطوالهم فكانت:175 سم، 170 سم، 168 سم، 167سم، 170 سم. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب. 3.8 تقريبًا

الربط مع الحياة

يستعمل المعلمون الأنواع المختلفة من الأسئلة الموضوعية والمقالية لتقدير درجات طلابهم.

إرشادات للدراسة

المتوسط للمجتمع
عندما يكون المتوسط للمجتمع μ معلومًا، يمكنه أن يحلّ مكان المتوسط للعينة $\bar{x}$.

إرشادات للدراسة

المتوسط والانحراف المعياري للعينة
إذا قارن المعلم صالح درجات طلابه بدرجات طلاب آخرين في اختبار وطني مثلًا، فإن درجات طلابه تُعدُّ عينةً من درجات كل الطلاب الذين تقدموا للاختبار، وعليه أن يحسب $\bar{x}$ ، s في هذه الحالة.

3B إجابة ممكنة: يجب أن يزداد المتوسط قليلًا تبعًا لذلك، أما الانحراف المعياري فيزداد بشكل كبير.
$\mu = 32.2$
$\sigma = 8.19$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

استعمل الجداول الإلكترونية، أو أية برمجية مناسبة؛ لحساب مقاييس إحصائية متعددة لبيانات تم جمعها من خلال دراسة مسحية. واستمر في عرض هذه المعلومات على السبورة التفاعلية في أثناء تدريسك، بحيث يتم التوصّل إلى معنى كل مقياس وكيفية تفسيرها .

إجابات :

1) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرّفة.
2) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة متطرفة.
3) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة واحدة متطرفة، ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.
4) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرّفة .
5) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة واحدة متطرفة أكبر كثيرًا من بقية القيم وهي 66 .

تدرب وحل المسائل

أي مقاييس النزعة المركزية يصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (مثال 1) **1-5) انظر هامش الصفحة السابقة.**

1) 833, 796, 781, 776, 758

2) 37.2, 36.8, 40.4, 19.2

3) 65, 70, 17, 60, 55, 65, 63, 58, 60, 69

4) 53, 61, 46, 59, 61, 55, 49

5) تغذية: يوضح الجدول أدناه عدد السعرات لكل طبق خضار.

الخضار	السعرات	الخضار	السعرات	الخضار	السعرات
زهرة	10	بركلي	25	باذنجان	14
بندورة	17	ملفوف	17	فاصوليا	30
حبوب	66	جزر	28	فلفل	20
كوسا	17	سبانخ	9	خس	9

6) طقس: يبيّن الجدول أدناه، درجات الحرارة في أثناء النهار ولمدة أسبوع بالدرجات الفهرنهايتية: **المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.**

اليوم	درجة الحرارة
السبت	64°F
الأحد	73°F
الإثنين	69°F
الثلاثاء	70°F
الأربعاء	71°F
الخميس	75°F
الجمعة	74°F

7) ألعاب أولمبية: في دراسة مسحية عشوائية شملت 5824 شخصًا، أفاد 29% منهم أنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز. (مثال 2) **انظر الهامش**

a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز ؟

8) رياضة: في دراسة مسحية عشوائية شارك فيها 5669 شخصًا، وجد أن 31% منهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا. **انظر الهامش.**

a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا؟

9) تمارين رياضية: في دراسة مسحية شملت 4213 شخصًا اختيروا بطريقة عشوائية، أفاد 78% منهم أنهم يمارسون الرياضة لمدة ساعة أسبوعيًّا على الأقل.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟ **$\approx \pm 1.54\%$**

b) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الذين يمارسون الرياضة ساعة واحدة على الأقل أسبوعيًّا؟
بين 76.5% و 79.5% أي في الفترة (76.5% , 79.5%)

10) قيادة: تُحدّد عادة السرعات القصوى على الطرقات تفاديًا للحوادث.

a) فيما يأتي السرعات القصوى (mi/h) للطرقات جميعها في إحدى الدول بين مدنها وقراها. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للسرعات في الجدول أدناه. (مثال 3) **3.5 تقريبًا**

السرعات القصوى للطرقات جميعها (mi/h)									
70	70	65	65	75	70	70	75	65	70

b) إذا كان الانحراف المعياري للسرعات القصوى (mi/h) للطرقات جميعها في دولة أخرى (24) . قارن الانحراف المعياري للسرعات في كلا الدولتين. وماذا تستنتج؟
انظر الهامش.

11) تدريب: في أثناء التمرين سجَّل سلطان الأزمنة التي ركض فيها مسافة 40 m. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات في الجدول أدناه.
0.09 تقريبًا

أزمنة قطع المسافة 40 m ركضًا بالثواني									
4.8	4.9	4.8	4.7	5.0	4.9	4.8	4.9	4.8	5.0

12) اختبارات: فيما يأتي درجات صف مكوّن من 10 طلاب في اختبار من 25 درجة.

درجات 10 طلاب في اختبار من 25 درجة									
20	17	21	22	20	21	20	21	21	23

a) قارن بين المتوسط والوسيط للدرجات. **انظر الهامش.**

b) أوجد الانحراف المعياري للبيانات، وقرّبه إلى أقرب جزء من مئة. **1.05**

c) على افتراض أن الدرجة 20 كانت خطأً، وتم تعديلها إلى 25، كيف يتأثّر كلٌّ من المتوسط والوسيط بهذا التغيير؟ **انظر الهامش**

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–9، 12–14، 16–29
ضمن ضمن المتوسط	1–13 فردي، 16–29
فوق فوق المتوسط	10–29

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9 ؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

7a) $\approx \pm 1.31\%$

7b) $0.29 + 0.0131 = 0.3031 \approx 30.3\%$
$0.29 - 0.0131 = 0.2769 \approx 27.7\%$
الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا بأنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز تقع بين 27.7% و 30.3%

8a) $\approx \pm 1.33\%$

8b) $0.31 + 0.0133 = 0.3233 \approx 32.3\%$
$0.31 - 0.0133 = 0.2967 \approx 29.7\%$
الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا أنهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريًّا تقع بين 29.7% و 32.3%

10b) الانحراف المعياري للدولة الثانية أكبر كثيرًا من الانحراف المعياري للدولة الأولى؛ لذا فالسرعات القُصوى في الدولة الأولى أكثر تجانسًا؛ أي أن السرعات القُصوى قريبة بعضها من بعض، مقارنة بالسرعات القُصوى في الدولة الثانية التي تتضمن سرعات قصوى كبيرة جدًّا، وأخرى صغيرة جدًّا.

12a) المتوسط = 20.6، الوسيط = 21. والقيمتان قريبتان إحداهما من الأخرى.

12c) المتوسط الجديد = 20.8
الوسيط الجديد = 21
يرتفع المتوسط قليلًا، والوسيط يبقى كما هو.

إرشادات للمعلم الجديد

اختيار الآلة الحاسبة

لكلٍّ من الآلة الحاسبة العلمية أو البيانية مفاتيح وتطبيقات تُستعمل لحساب المتوسط، والوسيط، والانحراف المعياري، وتكلفة الآلة الحاسبة العلمية أقل من تكلفة الآلة الحاسبة البيانية؛ لذا اترك للطلاب حرية الاختيار بين الآلتين في هذا الدرس.

4 التقويم

تعلّم سابق اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة توضح كيف ساعدهم ما تعلموه عن الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة في الدرس 1-7 على التحليل الإحصائي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 7-2, 7-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (49)

إجابات:

14) إجابة ممكنة :

كتل طلاب الصف الثالث الثانوي (بالكيلو جرام)			
69	112	61	55
91	108	66	62
81	79	83	51
58	86	92	77

لا يوجد منوال، الوسيط = 78، والمتوسط 76.9375، والانحراف المعياري 18 تقريبًا.

16) إجابة ممكنة: عند حذف القيمة المتطرفة الكبيرة، ستكون بقية القيم قريبة بعضها من بعض؛ لذا سينقص الانحراف المعياري، والمتوسط لبقية القيم سينقص أيضًا؛ لأن القيمة المتطرفة الكبيرة هي التي تؤدي إلى ارتفاع قيمة المتوسط.

17) إجابة ممكنة: سيزداد الوسيط كذلك بمقدار 10 ، فمثلًا إذا كان الوسيط لمجموعة بيانات يساوي 18، وزِيدَت كل مفردة بمقدار 10، فإن الوسيط يزداد بمقدار 10 ليصبح 28. ويزداد المتوسط أيضًا بمقدار 10؛ لأن البيانات جميعها زادت بالمقدار نفسه، فمثلًا المتوسط لمجموعة الأعداد 2, 2, 2, 2, 2 هو 2 ، إذا زيدت كل مفردة بمقدار 10 ، فإنها تصبح 12, 12, 12, 12, 12 ، ويصبح المتوسط للمجموعة الجديدة يساوي 12. أمّا الانحراف المعياري، فإنه لا يتأثر مع زيادة كل مفردة بالقيمة نفسها؛ حيث إن مقدار التباعد في القيم يبقى نفسه، فزيادة كل مفردة بمقدار ثابت لا تؤثّر في تباعد القيم الجديدة.

20) متحيزة؛ لأن لاعِبِي كرة السلة في الغالب يكونون أطول من المعدل العام لأطوال طلاب المدرسة، لذلك لا تُمثّل أطوال لاعِبِي كرة السلة أطوال الطلاب.

13) **مدارس:** يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب لكل معلم في مدارس إحدى المناطق التعليمية:

عدد الطلاب لكل معلم				
27	22	26	26	25
24	25	28	22	24
24	26	24	22	20
27	23	22	29	23
24	24	26	29	28
28	29	25	25	23

13a) المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.

a) ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لهذه البيانات؟ ولماذا؟

b) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات، علمًا بأن المتوسط الحسابي لها يساوي 25، وقرِّبه إلى أقرب جزء من مئة. 2.35

مسائل مهارات التفكير العليا

14) **مسألة مفتوحة:** اجمع بيانات في متغيّر واحد، ثم صف مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت المناسبة لهذه البيانات. انظر الهامش.

15) **تحدٍّ:** إذا أيَّد 67% من المستهدفين موضوع دراسة مسحية، وكانت الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المؤيدة هي 64.8%-69.2%، فكم شخصًا تناولت الدراسة المسحية رأيهم؟ 2066

16) **تبرير:** حذفت قيمة متطرفة كبيرة من مجموعة بيانات، كيف يؤثّر ذلك في المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة البيانات؟ وضّح ذلك. انظر الهامش.

17) **تبرير:** إذا زيدت كل قيمة في مجموعة بيانات بمقدار 10، فكيف يؤثّر ذلك في المتوسط والوسيط والانحراف المعياري؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش.

18) **اكتب:** قارن بذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتوسط والوسيط لمجموعة بيانات في متغيّر واحد. إجابة ممكنة : مع أن كلًّا من المتوسط والوسيط يمثِّل مركز البيانات، فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في منتصف البيانات، بينما يتأثر المتوسط بالقيم جميعها.

مراجعة تراكمية

حدِّد إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك. (الدرس 1-7)

19) قام باحث بإرسال استبانة إلى كل شخص تنتهي بطاقة الأحوال الخاصة به برقم معيّن. غير متحيزة ؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

20) إيجاد أطوال أعضاء فريق كرة السلة لتحديد المتوسط الحسابي لأطوال طلاب المدرسة. انظر الهامش.

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أو لا. (الدرس 5-5)

21) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 1, 1 \rangle$ 0، متعامدان

22) $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ 32، غير متعامدين

23) $\mathbf{u} = \langle 3, 4, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -3, -5 \rangle$ −40، غير متعامدين

24) $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 2، غير متعامدين

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 6-2)

25) (6, 11) (12.53, 1.07), (−12.53, 4.21)

26) (−9, 2) (9.22, 2.92), (−9.22, 6.06)

27) (3, 1) (3.16, 0.32), (−3.16, 3.46)

تدريب على اختبار

28) **إحصاء:** في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة، أي ممّا يأتي لا يؤثّر في الوسيط؟ D

A مضاعفة كل عدد
B زيادة كل عدد بمقدار 10
C زيادة القيمة الصغرى فقط
D زيادة القيمة الكبرى فقط

29) **درجات اختبار:** كانت درجات 5 طلاب اختيروا عشوائيًّا في فصل دراسي كما يلي 55, 45, 30, 50, 70. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم احسب الانحراف المعياري لدرجاتهم إلى أقرب عدد صحيح. B

A 40
B 15
C 14
D 13

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اطلب إلى بعض الطلاب حساب المدى والانحراف المعياري لمجموعات مختلفة كبيرة من البيانات. واسألهم أن يقارنوا القيم، ويبحثوا في مدى إمكانية إعطاء تعميم حول علاقة المدى بالانحراف المعياري . لمجموعات البيانات الكبيرة "المدى يعادل تقريبًا من أربع إلى ست مرات الانحراف المعياري"، وهذا يُعطي قاعدة سريعة لتقدير الانحراف المعياري من معرفة المدى دون المرور بحسابات معقّدة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (10) — دون

الاسم: التاريخ:

7-2 تدريبات إعادة التعليم

التحليل الإحصائي

مقاييس النزعة المركزية

المصطلح	التعريف	أفضل استعمال له
المتوسط	مجموع البيانات مقسومًا على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي موقعة في المنتصف في قيم مرتبة أو المتوسط عند وجود قيمتين في المنتصف.	عندما توجد قيم متطرفة في البيانات، ولا توجد فراغات كبيرة في المنتصف.
المنوال	العدد أو الأعداد التي تظهر أكثر من غيرها.	توجد قيم متكررة عديدة في البيانات.
هامش خطأ المعاينة	$\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ ، للعينة العشوائية التي حجمها n.	تقدير إلى أي مدى تمثل العينة المجتمع.

مثال 1 أي مقاييس النزعة المركزية نصف البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

{2.1, 21.5, 22.3, 22.8, 23.1, 159.4}

هناك قيم متطرفة، غير أنه لا توجد فراغات كبيرة بين البيانات؛ لذا فالوسيط هو أفضل مقياس .

مثال 2 ما هامش خطأ المعاينة والفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي؟

استُطلِعت آراء **400** شخص حول موقع حديقة عامة، فأجاب **51%** منهم بالموافقة على المكان المقترح.

لما كان الاستطلاع قد شمل 400 شخص، فإن هامش خطأ المعاينة $\pm \frac{1}{\sqrt{400}}$ أو $\pm 5\%$. ونسبة الأشخاص المؤيدين هي النسبة التي وُجدت في الدراسة المسحية مضافًا إليها أو مطروحًا منها 5%. لذا فالفترة هي (56% , 46%).

تمارين

أي مقاييس النزعة المركزية يصف كل مجموعة من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

1) {45, 16, 30, 45, 29, 45}
المنوال؛ البيانات فيها قيم مكررة .

2) {100, 92, 105, 496, 77, 121}
الوسيط؛ توجد قيمة متطرفة 496 .

3) {2.5, 99.5, 110.5, 76}
الوسيط؛ توجد قيمة متطرفة 2.5 .

4) {60, 50, 55, 62, 44, 65, 51}
المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة أو قفزات في المنتصف .

5) كتب استُطلعت آراء 28 شخصًا، ووُجد أن 40% منهم يقرأ 3 كتب على الأقل شهريًا. فما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يقرؤون 3 كتب شهريًا على الأقل؟
هامش خطأ المعاينة ± 0.1890 = أو $\pm 18.9\%$ الفترة الممكنة هي (58.9% , 21.1%) .

تدريبات إعادة التعليم (11) — دون

الاسم: التاريخ:

7-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

التحليل الإحصائي

مقاييس التشتت

	قانون الانحراف المعياري	
	المتغير	القانون
العينة	s	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
المجتمع	σ	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{n}}$

مثال حدّد ما إذا كانت البيانات الآتية تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري مقربًا إلى أقرب جزء من مئة.

بيّن الجدول الآتي درجات 12 طالبًا في مسابق الرياضيات.

درجات 12 طالبًا سجلوا في مسابق للرياضيات في إحدى الجامعات					
69	92	83	75	99	61
91	98	65	73	94	77

هذه بيانات مجتمع؛ لأن جميع درجات الطلاب وعددهم 12 قد أخذت.

$$\mu = \frac{\sum_{i}^{12} (x_i)}{12} = \frac{977}{12} = 81.42$$

ثم أوجد مجموع مربعات الفروق بين الدرجات والمتوسط.

$$\Sigma [(61 - 81.42)^2 + (99 - 81.42)^2 + (75 - 81.42)^2 + \ldots + (91 - 81.42)^2] = 2095.55$$

عوّض هذه القيمة في قانون الانحراف المعياري لحصل على $\sqrt{\frac{2095.55}{12}} \approx 13.21$

تمارين

1) حدّد ما إذا كان كل مما يأتي يمثّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات، مقربًا إلى أقرب جزء من مئة.

a)

درجات بعض طلاب الآداب في إحدى الجامعات					
88	76	95	82	91	88
90	82	85	92	94	75

عينة؛ الانحراف المعياري = 6.61

b)

أعمار جميع أعضاء النادي الثقافية					
16	15	14	15	17	14

مجتمع؛ الانحراف المعياري = 1.07

تدريبات حل المسألة (12) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

7-2 تدريبات حل المسألة

التحليل الإحصائي

1) درجات حرارة فهيا يأتي درجات الحرارة السيليزية العظمى في خمسة أيام اختيرت عشوائيًا من شهر جمادى الآخرة (عام 1434 هـ) في مدينة الرياض .

المركز	الوسط
1	34°
2	35°
3	33°
4	31°
5	35°

هل تُعد هذه البيانات عينة أم مجتمعًا ؟
عينة

2) أجري استطلاع للرأي حول رغبة الأشخاص في قضاء الإجازة خارج البلاد، فكانت الفترة الممكنة التي تتضمّن نسبة المجتمع الذي أبدو رغبة في ذلك هي: 46.5% إلى 49.5% . فما هامش خطأ المعاينة؟
هامش الخطأ 1.5%±

3) تفاح تصف البيانات الآتية أعداد حبات التفاح في 20 سلة مختلفة : {80, 75, 68, 82, 77, 74, 81, 85, 73, 79, 75, 73, 80, 71, 82, 81, 77, 80, 78, 84}. فما الوسيط لعدد حبات التفاح في السلة؟
الوسيط = 78.5

4) سيارات حدّدت دائرة المرور سرعات السيارات على الطرق الخارجية بالميل / ساعة على النحو التالي: {65, 61, 72, 54, 78, 61, 74, 75, 61, 55, 64, 66, 70}. فما المنوال لهذه السرعات؟
المنوال = 61 mi/h

5) النظام الشمسي اعتقد العلماء الفلكيون حتى نهاية القرن العشرين أن هناك 9 كواكب. و الجدول الآتي يبين كتل هذه الكواكب.

الكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري
الكتلة (10^{21}طن)	0.364	5.37	6.58	0.708	2093

الكوكب	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
الكتلة (10^{21}طن)	627	95.7	113	0.0138

a) أي مقاييس النزعة المركزية يصف هذه البيانات بصورة أفضل؟
الوسيط؛ في البيانات قيم متطرفة، و لا توجد فجوات في الوسط .

b) ما القيمة الدقيقة للمقياس الأفضل لهذه البيانات؟
الوسيط : 6.58

c) ما الانحراف المعياري لهذه البيانات؟
الانحراف المعياري = 652.71

d) كم كوكبًا كتلته ضمن مدى انحراف معياري واحد من مقياس النزعة المركزية؟
8

التدريبات الإثرائية (13) — فوق

الاسم: التاريخ:

7-2 التدريبات الإثرائية

المتوسطات (Means)

توجد متوسطات أخرى غير المتوسط الحسابي المعروف ومنها:

المتوسط الهندسي (*Ageometric Meam*) ويُعرف بأنه الجذر النوني لناتج ضرب n من القيم، ويُستعمل عادة في المعاملات التجارية لمعرفة معدلات النمو .

المتوسط التوافقي H (*Harmonic Meam*) ويُعرف بأنه عدد القيم مقسومًا على مجموع مقلوباتها، ويُستعمل عادة في حساب معدلات السرعة . $H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$

تمارين

1) أوجد المتوسط الهندسي للقيم: 225, 181, 110, 118, 107
141.4 تقريبا

2) أوجد المتوسط التوافقي للقيم: 3, 4, 5, 6
4.21 تقريبا

3) سفر إذا سافرت بسيارتك، وقطعت نصف المسافة بسرعة ثابتة، ثم قطعت نصف المسافة الآخر بسرعة ثابتة أخرى، فإن سرعتك المتوسطة في الرحلة هي المتوسط التوافقي. إذا قام سعد برحلة طويلة وقطع نصف المسافة بسرعة 60 mi/h ، والنصف الآخر بسرعة 70 mi/h ، فكم كانت سرعتك المتوسطة في الرحلة كلها؟
64.6 mi/h تقريبا

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 7

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (13)

دون ضمن فوق

7-2 التحليل الإحصائي

أيّ مقاييس النزعة المركزية يصف البيانات الآتية بشكل أفضل؟ ولماذا؟

1) {12.1, 14.9, 6.7, 10, 12.8, 14, 18}
المتوسط، لا يوجد قيم متطرفة أو بيانات متكررة.

2) {77.9, 101, 78.9, 105, 4.2, 110, 87.9}
الوسيط؛ توجد قيمة متطرفة هي 4.2

3) {10, 14.7, 14.7, 21, 7.4, 14.7, 8, 14.7}
المنوال، يوجد قيم متكررة.

4) {29, 36, 14, 99, 16, 15, 12, 30}
الوسيط توجد قيمة متطرفة هي 99.

5) **سيارات،** في دراسة مسحية شملت 56 شخصًا اختيروا عشوائيًّا في إحدى المدن وُجِد أن 14% منهم يقودون سيارات بيضاء اللون. ما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي الذين يقودون سيارات بيضاء؟
هامش خطأ المعاينة = ±0.1336، والفترة الممكنة تقع بين 27.36% , 0.64%

6) **شواطئ البحر،** في دراسة مسحية شملت 812 شخصًا اختيروا عشوائيًّا وُجِد أن 57% ذهبوا إلى شاطئ البحر أربع مرات على الأقل خلال العام الماضي. ما هامش خطأ المعاينة؟ وما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين ذهبوا إلى شاطئ البحر أربع مرات على الأقل خلال العام الماضي؟
هامش خطأ المعاينة = ±0.0351، والفترة الممكنة تقع بين 60.51% , 53.49%

7) أوجد الانحراف المعياري للبيانات في كل من a, b، وقرّبه إلى أقرب جزء من مئة.

a)

عدد مرات فوز كل لاعب في فريق لنس العاوزة في الموسم الماضي					
10	2	9	17	4	8
9	9	10	15	19	5

الانحراف المعياري = 4.88

b)

الدرجات التي حصل عليها 18 طالبًا اختيروا عشوائيًا من طلاب الصف الثالث الثانوي					
7	10	4	5	10	9
11	5	6	4	4	3
12	7	8	5	3	9

عينة، الانحراف المعياري = 2.86

13

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

الاحتمال المشروط
Conditional Probability

فيما سبق:
درست مفهوم الاحتمال وكيفية حسابه. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد احتمال وقوع حادثة إذا عُلم أن حادثة أخرى قد وقعت.
- أستعمل الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة.

المفردات:
الاحتمال المشروط
conditional probability
الجدول التوافقي
contingency table
التكرار النسبي
relative frequency

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يختبر هيثم دواءً يقي من بعض الأمراض. وتوجد مجموعتان من الأشخاص إحداهما تجريبية تمّ إعطاء الدواء الحقيقي لأفرادها، بينما تمّ إعطاء دواء شكلي (غير فعّال) للمجموعة الأخرى (المجموعة الضابطة). وبعد الحصول على النتائج، يريد هيثم أن يجد احتمال بقاء المستهدفين أصحاء نتيجة الدواء.
وهذا المثال يُفسّر مفهوم الاحتمال المشروط.

الاحتمال المشروط يُسمّى احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A، **احتمالًا مشروطًا**. ويرمز له بالرمز $P(B \mid A)$، ويقرأ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A.

مفهوم أساسي الاحتمال المشروط

إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B، إذا عُلِم أن الحادثة A قد وقعت يعرّف على النحو:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

مثال 1 الاحتمال المشروط

ألقت عبير مكعب أرقام مرةً واحدةً. ما احتمال ظهور العدد 3، علمًا بأن العدد الظاهر فردي؟

توجد 6 نواتج ممكنة من إلقاء مكعب الأرقام مرةً واحدةً.

لتكن A الحادثة التي يكون فيها العدد الظاهر عددًا فرديًا.
ولتكن B الحادثة التي يظهر فيها العدد 3.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ — 3 نواتج ذات عدد فردي من بين 6 نواتج

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ — واحد من النواتج الستة فردي ويُمثّل العدد 3

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ — احتمال وقوع الحادثة B علمًا بأن الحادثة A قد وقعت

$= \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ — $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

احتمال ظهور العدد 3 علمًا بأن العدد الظاهر فردي هو $\frac{1}{3}$.

تحقق من فهمك

1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقّمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13. إذا سحبت نوال بطاقة، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علمًا بأن ما سحبته كان العدد 11 أو 12 أو 13؟ $\frac{1}{3}$

مصادر الدرس 7-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (98)	• تنويع التعليم ص (98, 100)	• تنويع التعليم ص (100)
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	• ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-3
حساب الاحتمالات.
الدرس 7-3
إيجاد احتمال وقوع حادثة، إذا عُلِم أن حادثة أخرى قد وقعت.
استعمال الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة.
ما بعد الدرس 7-3
استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:
- لماذا سُمِّيت المجموعة التجريبية بهذا الاسم؟ لأنه يتم تجريب (تطبيق) المعالجة الحقيقية (دواء، أسلوب تدريسي، ... إلخ) عليها.
- ما أهمية وجود المجموعة الضابطة؟ لمقارنة نتائج الاختبارات عليها بنتائج الاختبارات على المجموعة التجريبية؛ وذلك لمعرفة أثر المعالجة الحقيقية.

الاحتمال المشروط
المثال 1 يبيّن كيفية إيجاد الاحتمال المشروط.

مثال إضافي

1 يحتوي كيس على 52 بطاقة، نصفها لونها أحمر، والنصف الآخر لونه أخضر، إذا كان نصف البطاقات الحمراء تحمل الرقم 1، والنصف الآخر يحمل الرقم 2، وكذلك الحال بالنسبة للبطاقات الخضراء، وسحب جميل بطاقة، فما احتمال أن تحمل الرقم 2، علمًا بأنها حمراء؟ $\frac{1}{2}$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

الجداول التوافقية

المثالان 2, 3 يبيّنان كيفية استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمالات المشروطة.

مثالان إضافيان

2 جامعات: أُجريت دراسة وسُجِّلت نتائجها في الجدول التالي. أوجد احتمال أن يخطط أحد المشمولين بالدراسة للالتحاق بالجامعة بعد الثانوية العامة علمًا بأنها أنثى.

الالتحاق بالجامعة	العدد	
	ذكور	إناث
نعم	342	376
لا	151	138

0.73 تقريبًا

3 مثال على اختبار:

استعمل البيانات في المثال 3، وأوجد احتمال ألا يكون الطالب ضمن المنتخب الوطني، مع العلم بأنه في السنة الرابعة. D

A 16.6% **C** 50.4%

B 19.8% **D** 83.4%

الجداول التوافقية **الجداول التوافقية** هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا يسمى **تكرارًا نسبيًّا**، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط.

مثال 2 من واقع الحياة — الجداول التوافقية

مشي: أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًّا معافى، علمًا بأنه يمارس المشي.

الحالة	عدد الأشخاص	
	يمارس المشي (w)	لا يمارس المشي (Nw)
مريض(S)	1600	1200
معافى(H)	800	400

عدد الأشخاص الكلي في الدراسة 400 + 1200 + 800 + 1600 ويساوي 4000 شخص، ويراد إيجاد احتمال H علمًا بأن W قد وقع.

$$P(H \mid W) = \frac{P(H \text{ و } W)}{P(W)}$$ قانون الاحتمال المشروط

$$= \frac{800}{4000} \div \frac{2400}{4000}$$ $P(H \text{ و } W) = \frac{800}{4000}$, $P(W) = \frac{1600+800}{4000}$

$$= \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$ بسّط

احتمال أن يكون الشخص معافى، بشرط أنه يمارس المشي هو $\frac{1}{3}$.

إرشادات للدراسة

حل مختصر

يمكن اختصار الحل في المثال 2 باستعمال الجداول التوافقية وفضاء العينة المختصر على النحو الآتي: احتمال أن يكون الشخص معافى بشرط أنه يمارس المشي هو

$$P(H \mid W) = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$

تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًّا معافى، علمًا بأنه لا يمارس المشي. $\frac{1}{4}$

يمكن استعمال الجداول التوافقية لتمثيل أي عدد من الحالات الممكنة.

مثال 3 على اختبار

يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم، إذا اختير طالب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني، علمًا بأنه في السنة الثالثة.

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ضمن المنتخب الوطني(B)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الوطني(A)	269	262	276	257

A 11.5% تقريبًا

B 16.6% تقريبًا

C 13.0% تقريبًا

D 19.8% تقريبًا

إرشادات للدراسة

كتابة الاحتمال

تذكر أن الاحتمال يُعبَّر عنه بكسر اعتيادي أو بكسر عشري أو بنسبة مئوية.

اقرأ فقرة الاختبار

تريد معرفة احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني (B) علمًا بأنه في السنة الثالثة (T). مجموع الطلاب هو 1180 طالبًا.

حُلّ فقرة الاختبار

$$P(B \mid T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)}$$ قانون الاحتمال المشروط

$$= \frac{36}{1180} \div \frac{312}{1180}$$ $P(B \cap T) = \frac{36}{1180}$, $P(T) = \frac{36+276}{1180}$

$$\approx 0.115\,\% \approx 11.5\%$$

الجواب الصحيح A.

تحقق من فهمك

3) أوجد احتمال أن يكون الطالب ممن هم ضمن المنتخب الوطني، علمًا بأنه في السنة الأولى. B

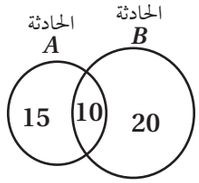
A 2.6% تقريبًا **B** 2.5% تقريبًا **C** 8.4% تقريبًا **D** 7.7% تقريبًا

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا كنت ترى أن بعض الطلاب سيستفيدون من استعمال المنظمات البيانية،

فاستعمل أشكال (ڤن) لمساعدتك على حساب الاحتمالات المشروطة من الجداول التوافقية. ولإيجاد $P(B \mid A)$، ارسم الدائرتين المتقاطعتين اللتين تُمثّلان الحادثتين A , B . ثم اكتب العدد الذي يُمثّل منطقة التقاطع إضافة إلى الأعداد في كل من الحادثتين A , B، واللتين تقعان خارج منطقة التقاطع. عندها يكون الاحتمال المطلوب $P(B \mid A)$ مساويًا العدد الذي يُمثّل التقاطع بين A , B مقسومًا على مجموع العددين المكتوبين داخل الدائرة التي تمثّل الحادثة A، فمثلًا في الشكل المجاور:



$$P(B \mid A) = \frac{10}{25}$$

تدرب وحل المسائل

يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و 10 كرات صفراء، و 6 كرات بيضاء، و 5 كرات خضراء. إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا، فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي: (مثال 1)

1) أن تكون الكرة خضراء، إذا عُلم أنها ليست زرقاء. $\frac{5}{27}$

2) أن تكون حمراء، إذا عُلم أنها ليست خضراء. $\frac{1}{5}$

3) أن تكون صفراء، إذا عُلم أنها ليست حمراء وليست زرقاء. $\frac{10}{21}$

4) أن تكون خضراء أو بيضاء، إذا عُلم أنها ليست حمراء. $\frac{11}{29}$

5) أن تكون زرقاء، إذا عُلم أنها بيضاء. 0

6) **قطاعات دائرية:** رقّمت قطاعات دائرية متطابقة في قرص من 1 إلى 8، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 8 إذا عُلِم أنه استقر عند عدد زوجي؟ $\frac{1}{4}$ أو 25 %

7) **فحص القيادة:** يوضّح الجدول أدناه أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ. إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل مما يأتي: (مثال 2)

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

a) الشخص ناجح علمًا بأنه أخذ حصصًا. $\frac{32}{41}$

b) الشخص راسب علمًا بأنه لم يأخذ حصصًا. $\frac{2}{5}$

c) لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح. $\frac{3}{7}$

8) **دروس التقوية:** سجّلت مدرسة أعداد طلاب الصفين الثاني المتوسط والثالث المتوسط المشتركين وغير المشتركين في دروس التقوية. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل ممّا يأتي:

	مشارك	غير مشارك
الثاني المتوسط	156	242
الثالث المتوسط	312	108

a) الطالب مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثاني المتوسط. $\frac{78}{199}$

b) الطالب غير مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثالث المتوسط. $\frac{9}{35}$

c) الطالب في الصف الثاني المتوسط علمًا بأنه غير مشارك. $\frac{121}{175}$

9) **اختيار من متعدد:** يُبيّن الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة قدم، والذين تغيَّبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون قد حضر المباراة علمًا بأنه من السنة الثالثة. C (مثال 3)

	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
الحضور	48	90	224	254
الغياب	182	141	36	8

A 48.6% تقريبًا

B 77.6% تقريبًا

C 86.2% تقريبًا

D 91.6% تقريبًا

10) **اختيار من متعدد:** يقارن عادل وإبراهيم وسعود مجموعة أمثال شعبية جمعوها. وتم تمثيل ذلك وفق الجدول المجاور. إذا اختير مثل مما جمعوه عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون المثل اجتماعيًّا، علمًا بأنه ليس مما جمعه عادل. D

	فكاهي	اجتماعي	خليط
عادل	521	316	44
إبراهيم	119	145	302
سعود	244	4	182

A 35.9% تقريبًا

B 24.8% تقريبًا

C 17.2% تقريبًا

D 15% تقريبًا

إذا ألقيت أربع قطع نقد متمايزة مرةً واحدة، فأجب عمّا يأتي:

11) ما احتمال ظهور شعارين، علمًا بوجود كتابة على قطعة واحدة على الأقل؟ $\frac{2}{5}$

12) ما احتمال ظهور 3 كتابات علمًا بوجود شعار واحد على الأقل؟ $\frac{4}{15}$

13) ما احتمال عدم ظهور أي شعار علمًا بأنه توجد كتابة واحدة على الأقل؟ $\frac{1}{15}$

14) ما احتمال عدم ظهور أي كتابة علمًا بأنه يوجد 3 شعارات على الأقل؟ $\frac{1}{5}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

ارسم مخطّط الرسم الشجري على السبورة التفاعلية؛ لتوضّح للطلاب كيفية إيجاد الاحتمال المشروط. واحفظ عملك وأرسل المخطط إلى الطلاب؛ ليكون مرجعًا لهم.

المحتوى الرياضي

الاحتمال المشروط إذا تغيّر احتمال الحادثة B عند وقوع الحادثة A، فلا بد من استعمال الاحتمال المشروط مع الحادثة B. إن وقوع الحادثة A يُنظر إليه وكأنه قلّص فضاء العينة إلى الحادثة B.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 9-1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9–1 ، 15–13 ، 26–18
ضمن ضمن المتوسط	15–1 فردي، 26–18
فوق فوق المتوسط	27–9

4 التقويم

بطاقة مكافأة ضع جدولًا توافقيًّا على السبورة، يتم من خلاله مقارنة الذين يرتدون أثوابًا بيضاء بالذين يرتدون أثوابًا ذوات ألوان أخرى، مع خاصية أخرى مثل الرياضة المدرسية التي يشاركون فيها، أو النادي العلمي الذي ينتمون إليه. واطلب إليهم كتابة احتمالات مشروطة معتمدين على هذا الجدول التوافقي.

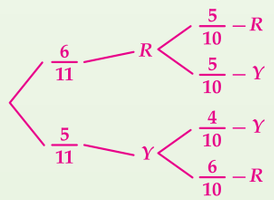
إرشادات للمعلم الجديد

تبرير ذكّر الطلاب أن استعمال خاصية الإبدال وخاصية التجميع والبحث عن أزواج من الأعداد، يجعل العمليات الحسابية أسهل.

إجابات:

18) إجابة ممكنة: عندما تكون الحادثتان A و B مستقلتين، فإن احتمال حدوث إحداهما لا يؤثّر في حدوث الأخرى. فمثلًا: إلقاء حجر النرد لا يؤثّر في سحب بطاقة. فاحتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 من بين بطاقات مرقمة علمًا بأن الرقم 3 ظهر على حجر النرد يكافئ احتمال سحب الرقم 3 من البطاقات فقط. أي أن $P(A \mid B) = P(A)$. وعندما تكون الحادثتان غير مستقلتين يطبق الاحتمال المشروط. فمثلًا: احتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 دون إرجاع يؤثّر في احتمال سحب بطاقة أخرى، حيث يقل فضاء العينة.

19) إجابة ممكنة: صندوق به 11 كرة، منها 6 حمراء وَ 5 صفراء. سحب كرتان على التوالي دون إرجاع، استعمل الرسم الشجري لبيان الاحتمالات جميعها.



لاحظ أن المرحلة الثانية تمثّل الاحتمال المشروط فمثلًا احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء علمًا بأن الأولى حمراء هو $\frac{5}{10}$

21) إجابة ممكنة :

الصف	هندسة	طب
سنة أولى	6	9
سنة ثانية	8	5

احتمال أن يكون من كلية الطب علمًا بأنه في السنة الجامعية الأولى يساوي $\frac{3}{5}$

15) بطاقات: يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسَّمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورُقِّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. إذا سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل البطاقة الرقم 9 علمًا بأنها حمراء اللون؟ $\frac{1}{13}$

16) يبين الجدول أدناه أعداد الألعاب الإلكترونية الموجودة لدى شخص. إذا اختيرت لعبة عشوائيًّا فأوجد كلًّا من الاحتمالين الآتيين:

اللعبة	العدد
كرة قدم	5
كرة سلة	2
مصارعة	6
سباق سيارات	4
أخرى	3

a) أن تكون من ألعاب المصارعة علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة القدم. $\frac{2}{5}$

b) أن تكون من ألعاب سباق السيارات علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة السلة وليست من ألعاب المصارعة. $\frac{1}{3}$

مسائل مهارات التفكير العليا

17) تحدٍّ: ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية. ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علمًا بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاث الأولى؟ **0.25%**

18) اكتب: فسّر الاختلاف بين الاحتمال المشروط لحوادث غير مستقلة، والاحتمال المشروط لحوادث مستقلة. أعطِ مثالًا لكل نوع. **انظر الهامش.**

19) تبرير: إذا مُثِّل احتمال حادثة مركبة من حادثتين بالرسم الشجري (شجرة الاحتمال)، فأي فروع الرسم الشجري يمثّل الاحتمال المشروط. أعط مثالًا لموقف يمكن تمثيله بشجرة احتمال ثم مثّله. **انظر الهامش.**

20) تبرير: إذا رُميت قطعة نقد بشكل حر 21 مرة متتالية، فما احتمال أن تظهر الصورة في الرمية 21، إذا علمت أن الصورة ظهرت في الرميات العشرين الأولى؟ وضّح تبريرك.
إجابة ممكنة: 50%؛ ليس للرميات السابقة تأثير في الرمية 21، فهي حوادث مستقلة.

21) مسألة مفتوحة: كوِّن جدولًا توافقيًّا، واحسب احتمالًا مشروطًا يرتبط بالجدول. **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

22) استعمل مسطرة ومنقلة، لرسم متجه يمثّل $\mathbf{v} = 20\,\text{km/h}$، باتجاه 60° مع الأفقي. **(الدرس 1-5)** **انظر الهامش.**

23) ثقافة مالية: يوضّح الجدول أدناه دخل 12 شركة في الأسبوع الأول من شهر محرم عام 1433هـ بالريال. **(الدرس 2-7)**

الدخل لكل شركة بالريال		
25778	25698	25200
23858	25580	27828
29173	22861	32903
27870	27124	23995

a) أوجد كلًّا من المتوسط الحسابي والوسيط.
المتوسط 26489 ريالًا، والوسيط 25738 ريالًا

b) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات وقرّبه إلى أقرب جزءٍ من مئة.
2736.46 ريالًا

c) لنفترض أن تقريرًا عن الشركات المذكورة ذكر أن القيمة 22861 ريالًا كانت خطأً، وهي في الحقيقة 24861. فكيف يتأثّر كل من المتوسط والوسيط بهذا التعديل؟
يزداد المتوسط ليصل إلى 26655.67 ويبقى الوسيط كما هو.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي، تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة. وفسّر إجابتك. **(الدرس 1-7)**
انظر الهامش.

24) دراسة مسحية تتناول موظفي مطعم، لتقرر أكثر الأطباق شعبية.

25) دراسة مسحية تتناول رأي مرتادي مكاتب البريد، لمعرفة أكثر ألوان السيارات شيوعًا. **غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة فرصة متساوية لأن يكون ضمن عينة الدراسة التي استطلعت آراؤهم.**

تدريب على اختبار

26) إذا كانت A , B حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيث كان $P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.5,\ P(A \cup B) = 0.4$، فما قيمة $P(A \mid B)$؟ **A**

A 0.6
B 0.7
C 0.8
D 0.9

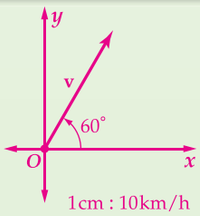
27) سحبت كرة بشكل عشوائي من كيس يحتوي على كرتين حمراوين و3 زرقاء دون إرجاع وكانت زرقاء. ما احتمال سحب كرة زرقاء ثانية؟ $\frac{1}{2}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع يمكن إيجاد احتمال وقوع الحادثتين A , B معًا بضرب احتمال كل منهما، إذا كانتا مستقلتين. ولكن إذا لم تكونا مستقلتين فلا بد من استعمال الاحتمال المشروط لأحدهما، حيث إن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. استعمل هذا القانون لإيجاد احتمال سحب بطاقتين دون إرجاع الأولى تحمل الرقم 5، والثانية تحمل الرقم 6، من 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات، لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأزرق، ورقّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13.. $\frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663} \approx 0.006$

22) إجابة ممكنة :



24) متحيزة ؛ لأن الأشخاص الذين تم مسح رأيهم قد يظنون أن الأطباق التي يقدمها المطعم هي الأكثر شعبية.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 7

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (14) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-3 تدريبات إعادة التعليم

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط يُسمى احتمال وقوع حادثة B إذا عُلِم أن حادثة أخرى A قد وقعت احتمالًا مشروطًا، ويُرمز إليه بالرمز $P(B|A)$.

مثال القرص الدوّار: يلعب عثمان لعبة القرص الدوّار الموضح إلى اليسار.

فما احتمال أن يتوقف المؤشر على العدد 7 علمًا بأنه توقف على عدد أكبر من 5؟

هناك 8 نتائج ممكنة للقرص الدوار الموضح.

افترض أن الحادثة A هي: المؤشر الذي توقَّف على عدد أكبر من 5

وأن الحادثة B هي: المؤشر الذي توقَّف على العدد 7

$P(A)=\frac{3}{8}$ هناك 3 نواتج من 8 نواتج أكبر من 5

$P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ ناتج واحد من 8 نواتج يكون أكبر من 5 ويساوي 7

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ قانون الاحتمال المشروط

$P(B|A)=\frac{1}{8}\div\frac{3}{8}$ تعويض القيم $P(A)$ و $P(A\cap B)$

$P(B|A)=\frac{1}{3}$

احتمال أن يتوقف المؤشر على 7، علمًا بأن المؤشر توقَّف على عدد أكبر من 5 يساوي $\frac{1}{3}$

تمارين

مجموعة بطاقات مكونة من 52 بطاقة موزَّعة بالتساوي على أربعة ألوان هي: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأزرق. وقد رُقِّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. فإذا سحبت بطاقة من مجموعة البطاقات، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

1) البطاقة حمراء علمًا بأن البطاقة المسحوبة تحمل الرقم 1
$\frac{1}{4}$

2) البطاقة تحمل الرقم 6 علمًا بأن لونها أسود.
$\frac{1}{13}$

3) البطاقة سوداء علمًا بأن اللون المسحوب أسود أو أخضر.
$\frac{1}{2}$

إذا أُلقي مكعب أرقام مرة واحدة، فأوجد كل احتمال مما يأتي:

4) العدد الظاهر 4 علمًا بأن العدد الظاهر زوجي.
$\frac{1}{3}$

5) العدد الظاهر 2 علمًا بأن العدد الظاهر أقل من 6
$\frac{1}{5}$

6) العدد الظاهر زوجي علمًا بأن العدد الظاهر 3 أو 4
$\frac{1}{2}$

تدريبات إعادة التعليم (15) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الاحتمال المشروط

الجداول التواقتية هي جداول تُسجَّل فيها البيانات ضمن خلايا على أن تعطي الحالات المحتملة المختلفة نتائج ممكنة مختلفة. ومثل هذه الجداول تستعمل لتحديد الاحتمالات المشروطة.

مثال كرة اليد: أوجد احتمال أن طالبًا في فريق كرة اليد علمًا أنه في السنة الثالثة.

الصف	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
يلعب كرة يد	17	20	34	14
لا يلعب كرة يد	586	540	510	459

المجموع 2180 طالبًا $= 459 + 17 + 510 + 34 + 540 + 20 + 586 + 14$

$P(L|J)=\frac{P(L\cap J)}{P(J)}$ قانون الاحتمال المشروط

$P(L\cap J)=\frac{34}{2180}$ ، $P(J)=\frac{34+510}{2180}$ $=\frac{34}{2180}\div\frac{544}{2180}$

$=\frac{34}{544}=\frac{1}{16}$ بسّط

احتمال أن الطالب يلعب كرة يد علمًا بأنه في السنة الثالثة $\frac{1}{16}$.

تمارين

	ولي أمر	طالب
يستطيع أن يحضر	104	112
لا يستطيع أن يحضر	32	14

1) **احتفالات** يبيّن الجدول المجاور الحضور في حفل تخرّج. أوجد احتمال أن يحضر شخص بوصفه (ولي أمر) هذا الحفل.
$\frac{13}{17}$

2) **رياضة** يبيّن الجدول المجاور عدد الطلاب الذين يلعبون كرة سلة. أوجد احتمال أن يلعب طالب كرة سلة علمًا بأنه في أعلى صف في المدرسة.

الصف	يلعب كرة سلة	لا يلعب كرة سلة
قبل الصف الأعلى	22	352
الصف الأعلى	34	306

$\frac{1}{10}$

3) **تسوق** أجابت 4 شركات أعمال في المدينة عن استبانة تسأل حول أسلوب الدفع الذي تقبل به عند الشراء: هل كان نقدًا أم تحويلًا بنكيًا أم باستعمال بطاقة الائتمان؟ أوجد احتمال كل مما يأتي:

أسلوب الدفع	شركة الأعمال الأولى	شركة الأعمال الثانية	شركة الأعمال الثالثة	شركة الأعمال الرابعة
نقدًا	304	140	102	49
بطاقة ائتمان	456	223	63	70
تحويل بنكي	380	166	219	28

a) يستعمل المتسوّق بطاقة الائتمان علمًا بأنه يتسوّق من الشركة الأولى. $\frac{2}{5}$

b) يستعمل المتسوّق التحويل البنكي علمًا بأنه يتسوّق من الشركة الرابعة. $\frac{4}{21}$

c) يتسوّق من الشركة الثالثة علمًا بأنه يدفع نقدًا. $\frac{6}{35}$

تدريبات حل المسألة (16) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-3 تدريبات حل المسألة

الاحتمال المشروط

1) **الأقراص الدوارة**، يقوم خالد باللعب بالقرص الدوّار أدناه، فما احتمال أن يقف المؤشر عند العدد 6 علمًا بأن العدد الذي توقف عنده أكبر من 2؟

$\frac{1}{4}$

2) **بطاقات:** زُوِّدت 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية، بالألوان الأحمر، والأخضر، والأزرق، والأصفر، ورُقِّمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13 فإذا سحبت فاطمة بطاقة عشوائية، فما احتمال أن تكون حمراء علمًا أنها ليست خضراء أو صفراء؟
$\frac{1}{2}$

3) **مكعب الأرقام**، يلقي عبدالسلام مكعبي أرقام، فما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 11 علمًا أنه ظهر على أحدهما فقط الرقم 5 ؟
$\frac{1}{5}$

4) أحضى معاذ عدد أكواب الشاي وفناجين القهوة التي قدَّمها للزبائن خلال 3 أيام فكانت على النحو التالي:

اليوم	شاي	قهوة
الاثنين	42	8
الثلاثاء	47	3
الأربعاء	47	3

a) أوجد احتمال تقديمه فنجان قهوة علمًا أن اليوم هو الأربعاء.
$\frac{3}{50}$

b) أوجد احتمال تقديمه فنجان قهوة علمًا أن اليوم هو الاثنين.
$\frac{4}{25}$

c) أوجد احتمال أن يكون اليوم هو الثلاثاء علمًا أنه قدَّم الشاي.
$\frac{47}{136}$

التدريبات الإثرائية (17) — فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

7-3 التدريبات الإثرائية

نظرية بيز (Bayes theorem)

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعة من الحوادث المتنافية فيما بينها، وتشكّل جميعها الفضاء العيني، وكانت B حادثة من الفضاء العيني نفسه $p(B) > 0$ ، فإن:

$$P(A_n|B)=\frac{P(A_n)\,P(B|A_n)}{P(A_1)\,P(B|A_1)+P(A_2)\,P(B|A_2)+\ldots+P(A_n)\,P(B|A_n)}$$

مثال صندوقان يحوي كل منهما كرات بألوان مختلفة، اختير أحدهما بصورة عشوائية وسُحبت منه كرة فكانت زرقاء. ما احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الثاني، إذا علمت أن احتمال سحب كرة زرقاء من الصندوق الأول $\frac{1}{2}$، ومن الصندوق الثاني $\frac{1}{4}$ ؟

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)\,P(B|A_2)}{P(A_1)\,P(B|A_1)+P(A_2)\,P(B|A_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

تمارين

1) كيسان يحوي كل منهما كرات بألوان مختلفة، اختير أحدهما بصورة عشوائية وسُحبت منه كرة فكانت حمراء. ما احتمال أن تكون قد سُحبت من الكيس الأول، إذا علمت أن احتمال سحب كرة حمراء من الكيس الأول $\frac{1}{3}$، ومن الكيس الثاني $\frac{1}{4}$؟
$\frac{4}{7}$

2) في مصنع آلتان تنتج الأولى 90% من القطع، وتنتج الثانية 10% منها. إذا اختيرت إحدى القطع عشوائيًا وكانت معيبة، فما احتمال أنها من إنتاج الآلة الأولى، إذا علمت أن نسبة المعيب في إنتاج الآلة الأولى 5%، ومن الآلة الثانية 8%؟
0.85 تقريبًا.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 7

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (14) — دون ضمن فوق

7-3 الاحتمال المشروط

ألقي مكعبان مرقمان متمايزان مرة واحدة. أوجد احتمال كل ممّا يأتي:

1) ظهور العدد 5 على وجهي المكعبين علمًا بأن العدد نفسه ظهر عليهما. $\frac{1}{6}$

2) ظهور العدد 4 على وجهي المكعبين علمًا بأن العددين الظاهرين، كل منهما يزيد على 3. $\frac{1}{9}$

3) عدم ظهور العدد 2 على أي من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين زوجيان. $\frac{4}{9}$

4) **كيمياء:** يختبر كل من أحمد ووليد درجة الحموضة (PH) لـ32 مركّبًا في إحدى تجارب الكيمياء، وقد قسموا العمل بينهما كما في الجدول المجاور. إذا اختير مركب عشوائيًّا، فأوجد كل احتمال فيما يأتي:

نتائج	وليد	أحمد
حامضي	12	8
قاعدي	9	3

a) أن يكون المركب حامضيًّا علمًا بأن وليدًا هو الذي اختبره. $\frac{4}{7}$

b) أن يختبر أحمد المركب علمًا بأن النتيجة "قاعدي". $\frac{1}{4}$

5) **انتخابات:** تنافس المرشحان (A) ، (B) على رئاسة اللجنة الاجتماعية ضمن منطقة تشتمل على أربع مجمعات سكنية (المجمع 1، والمجمع 2، والمجمع 3، والمجمع 4). والجدول أدناه يمثّل الأصوات التي حصل عليها المرشّحان.

	المجمع 1	المجمع 2	المجمع 3	المجمع 4
المرشح(A)	61	54	40	30
المرشح(B)	65	50	40	45

إذا اختير شخص عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

a) أن يكون الشخص قد انتخب المرشح A علمًا بأنه من المجمع 4. $\frac{2}{5}$

b) أن يكون الشخص قد انتخب المرشح B علمًا بأنه من المجمع 3. $\frac{1}{2}$

6) **كرة سلة:** أحرز أحد لاعبي كرة السلة 194 هدفًا خلال العام الحالي، بينما كان رصيده من الأهداف في الأعوام السابقة 2162 هدفًا. إذا علمت أن الجدول أدناه يمثّل الأهداف التي سجّلها خلال العام الحالي والأعوام السابقة، واختير هدف عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

	هدف بنقطة	هدف بنقطتين	هدف بثلاث نقاط	مجموع الأهداف
العام الحالي	150	39	5	194
الأعوام السابقة	1721	386	55	2162

a) الهدف بنقطة واحدة علمًا بأن الهدف قد سجّل خلال العام الحالي. $\frac{75}{97}$

b) الهدف بنقطتين علمًا بأن الهدف قد سجّل في الأعوام السابقة. $\frac{193}{1081}$

14

الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك. (الدرس 1-7) **انظر الهامش.**

1) يتم اختيار كل ثاني شخص يخرج من مجمع تجاري يبيع بالجملة؛ لمعرفة عدد الأطفال في الأُسَر في تلك المدينة.

2) يتم اختيار كل عاشر موظف يخرج من شركة؛ لمعرفة رأي الموظفين في عملهم.

3) سؤال كل خامس طالب يدخل المدرسة عن مواصفات المعلم المثالي.

4) **اختيار من متعدد:** حدّد أيًّا من العبارات الآتية توضح السببية: (الدرس 1-7) D

A إذا تدرّبت كل يوم، فستصبح لاعبًا محترفًا في كرة السلة.

B إذا قرأت كتابك المقرر، فستنجح في الاختبار.

C إذا تقدّمت لعشر وظائف مختلفة، فستتلقى عرضًا من واحدة على الأقل.

D إذا وقفت بالخارج تحت المطر من دون مظلة، فستبتل.

حدد ما إذا كانت كل من الحالتين الآتيتين تمثّل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة. وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة. (الدرس 1-7)

5) اختر 250 طالبًا في المرحلة المتوسطة نصفهم من المدارس الأهلية، وقارن بين عاداتهم الدراسية. **دراسة قائمة على الملاحظة**

6) خَصِّص لنصف الموظفين الذين اختيروا بطريقة عشوائية ساعة لتناول الغداء، وقارن اتجاهاتهم نحو العمل مع بقية زملائهم. **انظر الهامش.**

7) أي مقاييس النزعة المركزية تصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (الدرس 2-7) **انظر الهامش.**

عدد سنوات الخبرة						
2	1	4	2	3	2	2
1	2	4	3	1	3	2
4	1	3	2	3	2	3
0	1	1	1	4	3	2
3	2	2	2	1	2	1

8) يحاول باحث أن يحدد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح الكهربائية على أزهار للزينة المنزلية، حيث قام بتعريض مجموعة من الأزهار لإضاءة المصابيح الجديدة، ومجموعة أخرى لإضاءة المصابيح العادية. ويبيّن الجدول أدناه أعداد الأزهار التي عاشت أو ماتت في المجموعتين.

	إضاءة جديدة	إضاءة عادية
عاشت	24	17
ماتت	6	13

إذا اختيرت زهرة منها عشوائيًّا، فما احتمال: (الدرس 3-7)

a) أن تكون من الأزهار التي تعرضت لإضاءة المصابيح الجديدة علمًا بأنها عاشت؟ $\frac{24}{41}$

b) أن تكون من الأزهار التي عاشت علمًا بأنها تعرضت لإضاءة المصابيح العادية؟ $\frac{17}{30}$

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال كل مما يأتي: (الدرس 3-7)

9) ظهور عدد فردي علمًا بأن العدد الظاهر أكبر من 3. $\frac{1}{3}$

10) ظهور العدد 4 علمًا بأن العدد الظاهر كان زوجيًّا. $\frac{1}{3}$

11) **اختيار من متعدد:** في القرص ذي المؤشر الدوار المقسم إلى (16) قطاعًا متطابقًا، ومرقمة بالأعداد 16–1، ما احتمال استقرار المؤشر على عدد فردي، إذا علم أنه استقر على عدد أكبر من 3؟ (الدرس 3-7) D

A $\frac{13}{16}$

B $\frac{8}{16}$

C $\frac{8}{13}$

D $\frac{6}{13}$

الدروس من 1-7 إلى 3-7

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب. وللأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51)

إجابات:

1) متحيزة؛ لأن الذين تم استطلاع آرائهم يكون لديهم أطفال أكثر من غيرهم في العادة.

2) غير متحيزة؛ لأن مجتمع الدراسة هو الموظفون في الشركة، ولكل موظف الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

3) غير متحيزة؛ طلاب المدرسة جميعهم يشكلّون المجتمع، وكل طالب له الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

6) دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي النصف الذي حصل على ساعة لتناول الغداء. والمجموعة الضابطة هي النصف الآخر من الموظفين.

7) المتوسط، لا يوجد قيم متطرّفة في البيانات.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 7-3 ,7-2 ,7-1	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (86)		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-4

إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا عُلم أن حادثة أخرى قد وقعت.

الدرس 7-4

إيجاد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.

إيجاد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.

تكوين تمثيلات بيانية للتوزيعات الاحتمالية واستعمالها.

ما بعد الدرس 7-4

تكوين تمثيل بياني للتوزيع ذي الحدين واستعماله.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- بكم طريقة يمكنك اختيار 3 أشخاص من بين 8 أشخاص؟ 56
- بكم طريقة يمكنك اختيار 4 أشخاص من بين 18 شخصًا؟ 3060

الاحتمال

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال التوافيق في إيجاد الاحتمالات.

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

Probability and Probability Distributions

فيما سبق:
درست إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثة أخرى قد وقعت. (الدرس 3–7)

والآن:
- أجد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.
- أمثّل بيانيًا التوزيعات الاحتمالية وأستعملها.

المفردات:

النجاح
success

الفشل
failure

المتغير العشوائي
random variable

المتغير العشوائي المنفصل
discrete random variable

التوزيع الاحتمالي
probability distribution

التوزيع الاحتمالي المنفصل
discrete probability distribution

الاحتمال النظري
theoretical probability

الاحتمال التجريبي
experimental probability

القيمة المتوقعة
expected value

www.obeikaneducation.com

تنبيه!

احتمال النجاح والفشل
لاحظ أن الحرف الصغير s يدل على عدد مرات النجاح في وقوع حادثة، بينما الحرف الكبير S يدل على حادثة النجاح، وكذلك الأمر بالنسبة للحرفين f و F.

لماذا؟

افترض أن شركة لديها 4 شواغر، وتشترط لتعيين الموظفين لديها اجتيازهم لمقابلة شخصية. إذا تقدم للشركة 8 أشخاص من المنطقة A، و 10 أشخاص من المنطقة B، وتمت مقابلة المتقدمين، واختير 4 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالوظائف 3 أشخاص من المنطقة A وشخص واحد من المنطقة B؟

الاحتمال تسمى النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معيَّنة احتمالًا. ووقوع الشيء المرغوب فيه يُسمّى **نجاحًا**، وعدم وقوعه يُسمّى **فشلًا**. ومجموعة النواتج الممكنة تُسمّى فضاء العينة. وكلما اقترب احتمال وقوع حادثة من 1، كانت فرصة أو إمكانية وقوعها أكبر.

مفهوم أساسي **احتمال النجاح والفشل**

إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثة S من المرات، وعدد مرات فشل وقوع الحادثة نفسها f من المرات، فإن احتمال النجاح يُكتب على النحو $P(S)$، كما يُكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويُعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالصيغتين الآتيتين:

$$P(S) = \frac{s}{s+f} \quad , \quad P(F) = \frac{f}{s+f}$$

لاحظ أن الصيغة: $P(S) = \frac{s}{s+f}$ لا تختلف في مضمونها عن الصيغة: $P(\text{الحادثة}) = \frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$

مثال 1 **الاحتمال باستعمال التوافيق**

رشّحت مدرسة 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي، و 16 طالبًا من الصف الأول الثانوي للتنافس على 6 جوائز؛ نظرًا لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مقابلة المرشحين في اليوم الأول، واختير 6 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالجوائز 3 طلاب من الصف الأول الثانوي و 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي؟

الخطوة 1 حدّد عدد مرات النجاح s

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الثاني هو $_{12}C_3$

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الأول هو $_{16}C_3$

استعمل التوافيق، ومبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النجاحات s.

$$_{12}C_3 \cdot {}_{16}C_3 = \frac{12!}{9!\,3!} \cdot \frac{16!}{13!\,3!} = 123200$$

الخطوة 2 حدّد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s+f$.

$$s+f = {}_{28}C_6 = \frac{28!}{22!\,6!} = 376740$$

الخطوة 3 أوجد الاحتمال

$P(\text{فوز 3 من الأول و3 من الثاني}) = \frac{s}{s+f}$ احتمال النجاح

$= \frac{123200}{376740}$ $s = 123200,\ s+f = 376740$

≈ 0.327016 استعمل الآلة الحاسبة

احتمال فوز 3 طلاب من الصف الأول و3 من الصف الثاني هو تقريبًا 0.33 أو 33%.

مصادر الدرس 7-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (103)	• تنويع التعليم ص (103)	• تنويع التعليم ص (103, 106)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

تحقق من فهمك

1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رُشِّحوا من الصف الثاني الثانوي 3، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4، واختير 4 طلاب من الذين رُشِّحوا بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟ **16.5% تقريبًا**

مثال 2 من واقع الحياة — الاحتمال باستعمال التباديل

لدى صالح 6 أصدقاء تبدأ أسماؤهم بالأحرف A , B , C , D , E , F، ويتوقع من كل منهم اتصالًا هاتفيًا للاتفاق على موعد رحلة ينوون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولًا ثم B ثانيًا، ويتصل كل من D, E , F أخيرًا.

الخطوة 1 حدِّد عدد مرات النجاح s.

عدد طرق اتصال A أولًا ثم B ثانيًا هو 1

عدد طرق اتصال كل من D , E , F في الأخير هو $_3P_3$

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s.

$$s = 1 \cdot {}_3P_3 = 1 \cdot 3! = 6$$

الخطوة 2 أوجد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s + f$.

$s + f = {}_6P_6 = 6! = 720$ ، وتمثل عدد الترتيبات الممكنة لاتصالات الأصدقاء الستة.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$$P(S) = \frac{s}{s+f}$$ احتمال النجاح

$$= \frac{6}{720}$$ $s = 6 , s+f = 720$

$$\approx 0.0083$$ استعمل الآلة الحاسبة

الاحتمال المطلوب هو تقريبًا 0.008 أو 0.8% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) سباق: اشترك صلاح، وعبد اللّه، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟ $\frac{1}{56}$ **أو 2% تقريبًا**

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يُسمى المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة **متغيرًا عشوائيًا**. والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى **متغيرًا عشوائيًا منفصلاً**.

التوزيع الاحتمالي هو دالة تربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، مع احتمال وقوعها، ويعبر عنه بجدول أو معادلة، أو تمثيل بياني. ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1، أي أن $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1، أي أن $\sum P(X) = 1$.

والتوزيع الاحتمالي المنفصل هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل.

فعند رمي قطعتي نقد متمايزتين مرَّةً واحدة، فإن فضاء العينة هو {TT, TL, LT, LL} ، حيث يُمثّل L الوجه الذي يحمل الشعار، و T الوجه الذي يحمل الكتابة، إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فإن X يأخذ القيم 0, 1, 2 . ويمكنك حساب الاحتمال النظري لعدم الحصول على شعار، أو الحصول على شعار واحد، أو الحصول على شعارين، ثم تكوين جدول يمثّل التوزيع الاحتمالي، كما يمكنك تمثيله بيانيًا كما يأتي:

مراجعة المفردات

التباديل والتوافيق
عند اختيار مجموعة من الأشخاص أو الأشياء بترتيب معيّن، فإن الاختيار يُسمّى تبديلًا، وعندما لا نهتم بعملية ترتيب الأشخاص أو الأشياء، فإن الاختيار يُسمّى توفيقًا.

إرشادات للدراسة

البيانات المنفصلة والبيانات المتصلة
تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عدّ البيانات مثل عدد الأرانب في مزرعة. وتكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، فمثلاً أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.

الاحتمال باستعمال التباديل

المثال 2 يبيّن كيفية استعمال التباديل في إيجاد الاحتمالات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 لدى بثينة 26 كتابًا، منها 16 قصة والبقية كتب أخرى، إذا أخذت معها في رحلة 8 كتب اختارتها بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون بين هذه الكتب 4 قصص، و4 كتب أخرى ؟

0.24464 تقريبًا أو 24.5%

2 اختارت عائشة التي تدرس في الجامعة المساقات الآتية : (لغة إنجليزية، لغة عربية، علوم، فقه، أصول الدين). إذا حدّد البرنامج عشوائيًّا ترتيب هذه المساقات، وكان لهذه المساقات الفرصة نفسها لتكون في أي وقت من اليوم، فما احتمال أن يكون أول درسين لعائشة هما اللغة العربية، وأصول الدين مهما كان ترتيب هذين المساقين؟ $\frac{1}{10}$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الاجتماعيون لقد نشأ علم الاحتمال في بداياته من المقامرة. ومع أن هذه الفكرة غير مقبولة في التربية الإسلامية، إلّا أن استعمال هذا العلم في الوقت الحاضر، هو في مجالات كثيرة وذات فائدة، مثل مجال الطب ومجال الأرصاد الجوية.

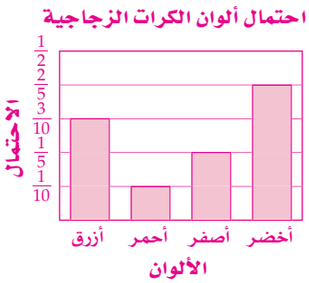
الاحتمال

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال التمثيل البياني أو الجدول لتوضيح التوزيع الاحتمالي.

مثال إضافي

3 يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية، منها 3 زرقاء، وواحدة حمراء، وكرتان صفراوان، و 4 كرات خضراء. إذا سحبت كرة عشوائيًّا، فأجب عما يأتي:

a) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي:



b) استعمل التمثيل البياني؛ لتُحدّد أي ناتج يكون له أكبر إمكانية للوقوع. وما احتماله؟ الأخضر، $\frac{2}{5}$

c) ما احتمال سحب كرة حمراء أو زرقاء؟ $\frac{2}{5}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

حدِّد طالبين ليحلا مثالًا على التوزيعات الاحتمالية أمام طلاب الفصل، اطلب إلى أحدهما أن يكوّن تمثيلًا بالأعمدة للتوزيع الاحتمالي، واطلب إلى الآخر أن يبيّن كيفية إيجاد احتمالات قيم المتغير العشوائي على التمثيل بالأعمدة.

قراءة الرياضيات

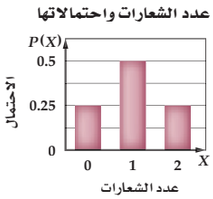
احتمالات المتغيرات العشوائية

يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن يكون المتغير العشوائي X مساويًا لـ 1.

$P(0)=\frac{1}{4}$ ، $P(1)=\frac{1}{2}$ ، $P(2)=\frac{1}{4}$

يُبيّن الجدول أدناه والتمثيل بالأعمدة المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



مثال 3 التوزيع الاحتمالي المنفصل

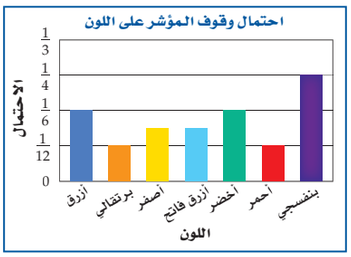
إرشادات للدراسة

البيانات الوصفية

يمكننا أن نتعامل مع البيانات الوصفية بوصفها متغيرات عشوائية منفصلة.

يوضّح القرص ذو المؤشر الدوّار توزيعًا احتماليًّا، حيث يمكن أن يتوقّف المؤشر على أيٍّ من القطاعات الملونة، وقد كتب على كل قطاع احتمال ظهوره (لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1).

a) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي:



b) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدّد اللون الأكبر إمكانية لوقوف المؤشر عنده، ثم أوجد احتماله.

أكثر الألوان إمكانية لوقوف المؤشر عنده هو اللون البنفسجي، واحتماله يساوي $\frac{1}{4}$.

c) أوجد (أخضر أو أزرق) P.

احتمال التوقّف عند اللون الأزرق أو الأخضر هو $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

تنبيه!

احتمال الحوادث المتنافية

تذكر أنه إذا كانت A و B حادثتين متنافيتين، فإن $P(A \text{ أو } B)=P(A)+P(B)$.

تحقق من فهمك

يوضح الجدول أدناه توزيعًا احتماليًّا، حيث أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة، وسُجّل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين واحتمال كلٍّ منها.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

3A) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي. انظر الهامش.

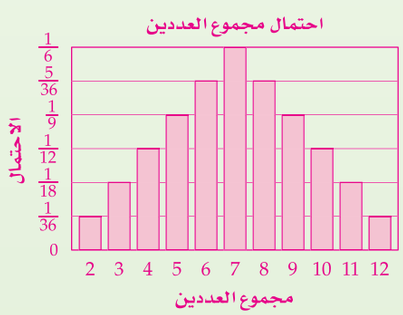
3B) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتماله. 7, $\frac{1}{6}$

3C) أوجد P (11 أو 5). $\frac{1}{6}$

إن الاحتمالات التي تمت دراستها هنا هي **احتمالات نظرية**؛ لأنها مبنية على افتراضات يتوقّع الحصول عليها، بينما **الاحتمالات التجريبية** يتم تقديرها من عدد من التجارب. **والقيمة المتوقعة أو التوقع** $E(X)$ هي المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي المنفصل؛ أي أن القيمة المتوقعة $E(x)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $P(X)$، ويمكن إيجادها باستعمال القانون $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} Xi.P(Xi)$، وتنتج هذه القيمة من خلال اعتماد الاحتمال النظري كوزن للمتغير العشوائي. ويخبرك بما يمكن حدوثه على المدى البعيد، وذلك بعد محاولات كثيرة.

إجابة (تحقق من فهمك):

3A)



إرشادات للدراسة

قانون الأعداد الكبيرة

ينص قانون الأعداد الكبيرة على أنه كلما ازداد عدد مرات إجراء التجربة، اقتربت قيمة معدل القيم الناتجة من القيمة المتوقعة.

مـثال 4 القيمة المتوقّعة

أوجد القيمة المتوقّعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

القيمة المتوقعة $E(X)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كلٍّ منها $P(X)$.

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$ عوّض في قانون المتوسط الموزون

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$ اضرب

$$= \frac{21}{6} = 3.5$$ اجمع

تحقق من فهمك

4) أوجد القيمة المتوقّعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. $2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \ldots + 12 \times \frac{1}{36} = 7$

تدرب وحل المسائل

1) صندوق فيه 10 كرات، منها 6 حمراء، إذا سحبت منه كرتان معًا عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟ (مثال 1) $\frac{1}{3}$

2) فن: اختار مسؤول متحف للفنون 4 لوحات بشكل عشوائي من بين 20 لوحة؛ لعرضها في أحد المعارض. ما احتمال أن تكون 3 منها لفنان واحد يشارك بـ 8 لوحات في المتحف؟ (مثال 1) 13.9% تقريبًا

3) دخل 8 لاعبين A,B,C,D,E,F,G,H في مباراة، إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًا، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A,C,E,G على الترتيب؟ (مثال 2) $\frac{1}{1680}$ أو 0.06% تقريبًا

4) مختبر: دخلت طالبات صف وعددهن 26 إلى مختبر المدرسة. إذا اختارت المعلمة أسماء الطالبات عشوائيًا لتشكل مجموعات للعمل، فما احتمال أن تكون أول ثلاث طالبات ذُكرت أسماؤهن جميلة، وآمنة، وخديجة على الترتيب؟ (مثال 2) $\frac{1}{15600}$

5) أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6، وسجل العدد الأكبر بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين إذا اختلفا، وأحدهما إذا تساويا. (مثال 3)

a) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي. انظر الهامش.

b) ما الناتج الأقل إمكانية للوقوع؟ وما احتماله؟ $1, \frac{1}{36}$

c) أوجد $P(2 \text{ أو } 1)$؟ $\frac{1}{9}$

6) أخبار: أجرى موقع إلكتروني مسحًا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبيّن نتائج هذا المسح. (مثال 3)

المصدر	الاحتمال
التلفاز	0.35
المذياع	0.31
الأصدقاء	0.02
الصحف	0.11
الإنترنت	0.19
مصادر أخرى	0.02

a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًّا. انظر الهامش.

b) إذا اختير أحد الذين شملهم هذا المسح عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت؟ 30% أو 0.3

c) مثّل البيانات بالأعمدة. انظر الهامش.

7) أوجد القيمة المتوقعة عند سحب قصاصة ورق عشوائيًّا من بين 5 قصاصات كتب على كل منها أحد الأرقام 5–1 دون تكرار. 3

8) جوائز: باع أحد النوادي 500 تذكرة دخول لحضور إحدى مبارياته ثمن الواحدة 10 ريالات ، وأجري سحب عشوائي على أرقام التذاكر خُصصت فيه ثلاث جوائز للأرقام الرابحة، بحيث تربح تذكرة واحدة الجائزة الأولى وقيمتها 1000 ريال، وتربح تذكرتان الجائزة الثانية وقيمتها 100 ريال، وتربح 5 تذاكر الجائزة الثالثة وقيمتها 50 ريالًا. إذا اشترى شخص تذكرة، فما القيمة المتوقعة للربح في هذا الموقف؟ (مثال 4) 2.9

تنويع الوجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	5–1، 10–8، 25–12
ضمن ضمن المتوسط	13–1 فردي، 25–15
فوق فوق المتوسط	25–8

القيمة المتوقعة

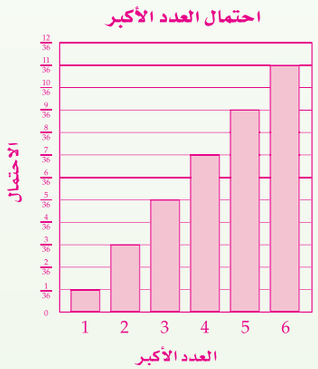
المثال 4 يبيِّن كيفية إيجاد القيمة المتوقّعة لتوزيع احتمالي.

مثال إضافي

4 قطعة خشبية على شكل هرم ثلاثي منتظم أوجهه الأربعة متطابقة ومرقّمة بالأعداد 1, 2, 3, 4. أوجد القيمة المتوقَّعة عند إلقاء الهرم مرة واحدة. $\frac{5}{2}$ أو 2.5

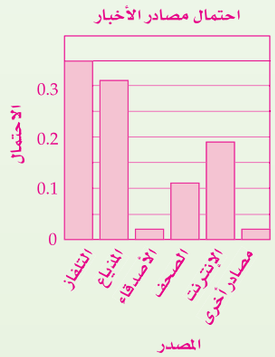
إجابات:

5a)



6a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي أكبر من أو يساوي 0 وأصغر من أو يساوي 1، ومجموعها يساوي 1؛ $0.35 + 0.31 + 0.02 + 0.11 + 0.19 + 0.02 = 1$

6c)



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

4 التقويم

تعلم لاحق اسأل الطلاب كيف يعتقدون أن الدرس الحالي في التوزيعات الاحتمالية، سيساعدهم على دراسة التوزيع الطبيعي في الدرس الآتي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 4-7, 7-3 بإعطائهم:

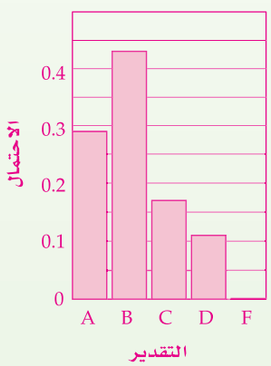
الاختبار القصير 2، ص (49)

إجابات:

13a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي أكبر من أو يساوي 0 وأصغر من أو يساوي 1 ومجموعها يساوي 1 ؛

$0.29 + 0.43 + 0.17 + 0.11 + 0 = 1$

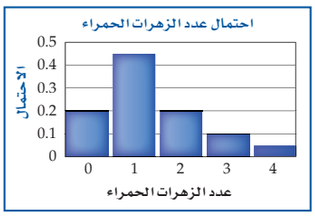
13c)



15a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي أكبر من أو يساوي 0 وأصغر من أو يساوي 1 ومجموعها يساوي 1 ؛

$0.05 + 0.05 + 0.15 + 0.10 + 0.30 + 0.15 + 0.20 = 1$

9) أزهار: يوضّح التمثيل البياني أدناه التوزيع الاحتمالي لعدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور.



a) أوجد $P(0)$. $\frac{1}{5}$ أو 20%

b) ما احتمال أن تكون زهرتان على الأقل حمراوين؟ 35%

10) تبرُّعات: قام طلاب الصف الثالث المتوسط في مدرسة بجمع بعض الأطعمة في طرود للتبرع بها للأسر الفقيرة. ولقد أحصى الطلاب أنواع المواد المقدمة كما في الجدول أدناه.

التبرع بالأطعمة	
النوع	عدد الطرود
وجبات طعام	36
أرز	22
سكر	12
قمح	45

a) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائيًّا على القمح. $\frac{9}{23}$ أو 39.1% تقريبًا

b) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائيًّا على وجبة طعام أو أرز. $\frac{58}{115}$ أو 50.4% تقريبًا

11) جوائز: تنافس 50 متسابقًا منهم جاسم وجلال وعلي في سحب عشوائي على أربع جوائز. ما احتمال أن يربح اثنان من الأسماء الثلاثة؟ $\frac{69}{4900}$ أو 1.4% تقريبًا

12) ألعاب رياضية: اختار معلم التربية الرياضية 5 طلاب عشوائيًّا من بين الطلاب البالغ عددهم 124 طالبًا ليساعدوه على تطبيق بعض الألعاب. ما احتمال أن يختار واحدًا على الأقل من بين عشرة أقارب له يجلسون مع الطلاب؟ 34.8% تقريبًا

13) درجات: أُجري اختبار في الرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي، والجدول أدناه يُبين نتائج هذا الاختبار.

نتائج اختبار الرياضيات	
التقدير	الاحتمال
A	0.29
B	0.43
C	0.17
D	0.11
F	0

a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًّا. انظر الهامش.

b) إذا اختير طالب عشوائيًّا، فما احتمال ألا يقل تقديره عن B؟ 0.72

c) مثّل البيانات بالأعمدة. انظر الهامش.

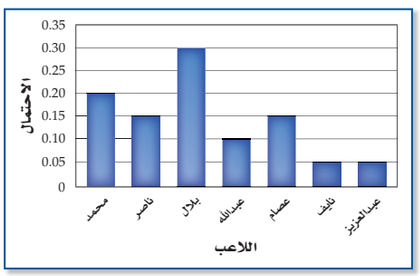
14) كرات زجاجية: لدى زيد 35 كرة زجاجية؛ 8 منها سوداء، و 12 حمراء، و 9 خضراء، والبقية بيضاء. فإذا سحب كرتين معًا عشوائيًّا.

a) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي؟ انظر ملحق الإجابات

b) ما الناتج ذو الإمكانية الأقل للوقوع؟ كرتان من اللون الأبيض

c) أوجد (إحداهما سوداء والأخرى خضراء) P. 12% تقريبًا

15) مسابقات: يُبيّن التمثيل بالأعمدة احتمال أن يربح كل طالب جائزة.



a) بيّن أن هذه البيات تمثّل توزيعًا احتماليًّا؟ انظر الهامش.

b) أوجد (ربح محمد أو بلال) P. 50%

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب الأعداد 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1 على 8 قطع ورقية، واخلطها وضعها في كيس ورقي، واطلب إلى الطلاب تكوين توزيع احتمالي للعدد الناتج من سحب قطعة ورق من الكيس عشوائيًّا باستعمال الاحتمال التجريبي وتكرار التجربة 50 مرة. اجعلهم يتبادلون الأدوار في السحب مع الإرجاع، واطلب إليهم أن يقارنوا الاحتمال التجريبي مع الاحتمال النظري.

الاحتمالات النظرية هي $P(4) = \frac{1}{4}$ ، $P(3) = \frac{1}{8}$ ، $P(2) = \frac{1}{4}$ ، $P(1) = \frac{3}{8}$.

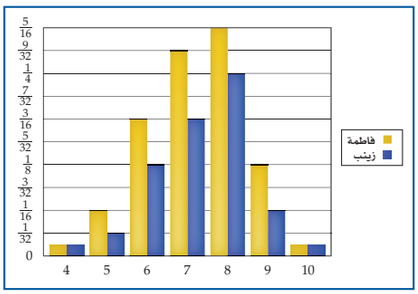
16) أمطار: التوزيع الاحتمالي أدناه يوضّح عدد الأيام الممطرة في السنة في إحدى الدول. أوجد القيمة المتوقّعة لعدد الأيام الممطرة. انظر الهامش.

عدد الأيام الممطرة في السنة									
عدد الأيام	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	0.1	0.1	0.15	0.15	0.25	0.1	0.08	0.05	0.02

17) بطاقات: رُقِّمت مجموعة بطاقات على النحو الآتي: 3 بطاقات تم ترقيم كل منها بالرقم 8، وبطاقتان تمّ ترقيم كل منهما بالعدد 10، و 4 بطاقات تمّ ترقيم كل منها بالرقم 6، و3 بطاقات تمّ ترقيم كل منها بالرقم 5، وبطاقتان تمّ ترقيم كل منها بالرقم 2، وبطاقة تمّ ترقيمها بالرقم 3. إذا سُحبت من هذه البطاقات واحدة عشوائيًّا، فما القيمة المتوقعة لهذه البطاقة؟ 9

مسائل مهارات التفكير العليا

18) اكتشف الخطأ: كوَّنت كلٌّ من فاطمة، وزينب توزيعًا احتماليًّا باستعمال التمثيل بالأعمدة لمجموع العددين الناتجين عن دوران مؤشر القرص المجاور مرتين. أيهما يعدُّ تمثيلها صحيحًا؟ فسرِّ إجابتك. انظر الهامش.

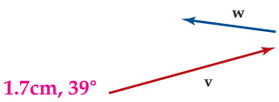


19) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا: «يُبنى الاحتمال النظري على نتائج التجارب». برِّر إجابتك. إجابة ممكنة: غير صحيحة أبدًا؛ يبنى الاحتمال التجريبي على التجارب، بينما يُبنى الاحتمال النظري على ما يُتوقَّع الحصول عليه.

20) مسألة مفتوحة: كوِّن توزيعًا احتماليًّا منفصلًا فيه 5 نواتج مع تحديد احتمال كل منها. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

21) أوجد محصلة المتجهين أدناه مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهه بالنسبة للأفقي. (الدرس 1-5)



22) اكتب المعادلة $r = 12\cos\theta$ على الصورة الديكارتية. (الدرس 2-6)
$x^2 + y^2 - 12x = 0$

23) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء. سُحبت كرتان على التوالي دون إرجاع. ما احتمال أن تكون الثانية بيضاء إذا كانت الأولى حمراء؟ (الدرس 3-7) $\frac{1}{2}$

تدريب على اختبار

24) يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء، و 4 كرات خضراء، وكرتين زرقاوين. سُحبت 3 كرات معًا عشوائيًّا. إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فما هي جميع القيم الممكنة لـ X؟ B

A 1, 2

B 0, 1, 2

C 1, 2, 3

D 0, 1, 2, 3

25) ما القيمة المتوقَّعة للتوزيع الاحتمالي المبيَّن في الجدول أدناه؟ D

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

A 0.1

B 0.16

C 0.56

D 2

تنبيه!

اكتشف الخطأ اسأل الطلاب في السؤال 18، ما النواتج التي يكون المجموع في كل منها 5, 6, 7, 8, 9, 10 ؟

إجابات:

16) $E(x) = (0 \cdot 0.1) + (1 \cdot 0.1) + (2 \cdot 0.15) + (3 \cdot 0.15) + (4 \cdot 0.25) + (5 \cdot 0.1) + (6 \cdot 0.08) + (7 \cdot 0.05) + (8 \cdot 0.02)$
$= 0 + 0.1 + 0.3 + 0.45 + 1 + 0.5 + 0.48 + 0.35 + 0.16$
$= 3.34$ أيام ممطرة

18) إجابة ممكنة: فاطمة؛ زينب لم تأخذ في الحسبان كل الاحتمالات، فمثلًا عند حساب أن يكون المجموع 5 فقد أخذت في الحسبان وقوف المؤشر على الرقم 3 ثم 2، ولم تأخذ بعين الاعتبار وقوفه على 2 ثم 3 .

20) إجابة ممكنة : القرص الدوار المكوّن من 5 مناطق متطابقة مظلَّلة بالألوان وهي الأحمر، والأزرق، والأصفر، والأخضر، والبني.

اللون	البني	الأخضر	الأصفر	الأزرق	الأحمر
الاحتمال	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (18) — دون

الاسم: التاريخ:

7-4 تدريبات إعادة التعليم

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

احتمال في الاحتمال، يسمى ظهور النتائج المرغوب فيه نجاحًا، ويُسمى ظهور بقية النواتج فشلًا.

احتمال النجاح و الفشل	إذا أمكن أن تنجح حادثة في s من المرات وتفشل في f من المرات فإن احتمال النجاح $P(S)$، واحتمال الفشل $P(F)$ هما: $P(S)=\frac{s}{s+f}$ ، $P(F)=\frac{f}{s+f}$

مثال 1 ما احتمال أن تظهر صورتان على الأقل عند إلقاء 3 قطع نقدية؟

يوجد من بين النواتج الثمانية 4 نواتج فيها صورتان على الأقل؛
لذا فإن احتمال ظهور صورتين على الأقل هو $\frac{4}{8}$ أو $\frac{1}{2}$.

مثال 2 ما احتمال اختيار 4 قصص وسيري حياة من قائمة تتكون من 12 قصة و 6 سِيَر حياة؟

عدد إمكانات النجاح $_{12}C_2 \cdot {}_6C_2$
عدد الاختيارات الممكنة $s+f$، هو $_{18}C_4$
$P(\text{4 قصص وسيري حياة}) = \frac{{}_{12}C_4 \cdot {}_6C_0}{{}_{18}C_4} = 0.40$ تقريبًا
اختيار 4 قصص وسيري حياة يساوي 40% تقريبًا.

تمارين

1) عائلة لدى عائلة 3 بقرات و 4 خراف. فإذا اختير رأسان عشوائيًا، فما احتمال كلٍّ من:

a) P(خروفان) $\frac{2}{7}$ b) P(بقرتان) $\frac{1}{7}$ c) P(بقرة وخروف) $\frac{4}{7}$

2) سجَّل سامر 10 محاضرات حاسوب و5 محاضرات رياضيات على قرص مدمج. فإذا اختار 6 محاضرات عشوائيًا، فأوجد احتمال كلٍّ من:

a) P(6 محاضرات حاسوب) **4.2%** b) P(2 رياضيات و 4 حاسوب) **42.0%** c) P(2 حاسوب و 4 رياضيات) **4.5%**

3) حلوى يحتوي كيس حلوى على 15 قطعة حمراء، 10 قطع صفراء، 6 قطع خضراء. أوجد احتمال كلٍّ من:

a) سحب قطعة حمراء $\frac{15}{31}$ b) عدم سحب قطعة صفراء $\frac{21}{31}$
c) سحب قطعة خضراء $\frac{6}{31}$ d) عدم سحب قطعة حمراء $\frac{16}{31}$

تدريبات إعادة التعليم (19) — دون

الاسم: التاريخ:

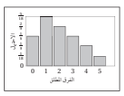
7-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

التوزيعات الاحتمالية، المتغير العشوائي هو متغير قيمته ناتج عددي لحادثة عشوائية، والتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط عناصر فضاء العينة باحتمالاتها.

مثال 3 ألقي مكعبان مرقمان (6–1)، والجدول والأعمدة البيانية يوضحان توزيع القيمة المطلقة للفرق بين العددين الظاهرين. استعمل التمثيل البياني لتحدِّد أيّ النواتج أكثر احتمالًا، وما احتماله؟

الفرق المطلق	0	1	2	3	4	5
الاحتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$



من التمثيل البياني أكبر احتمال هو $\frac{5}{18}$.
والناتج الأكثر احتمالًا هو 1، واحتماله $\frac{5}{18}$.

تمارين

1) احتمال ألقيت 4 قطع نقدية.

a) أكمل الجدول لتوضّح التوزيع الاحتمالي لعدد الشعارات الظاهرة.

عدد الشعارات	0	1	2	3	4
الاحتمال	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

b) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

c) أوجد P(4 شعارات). $\frac{1}{16}$

تدريبات حل المسألة (20) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

7-4 تدريبات حل المسألة

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

1) هنود تُكتب الأحرف "T" "R," "A," "H" على قطع ورقية، ووُضعت في كيس وخُلطت جيدًا. ثم سحبت واحدة تلو الأخرى عشوائيًا، ورُتِّب بعضها بجانب بعض دون النظر إليها. فما احتمال أن تكون كلمة "ART"؟ $\frac{1}{6}$

2) مكعب الأرقام ألقي جمال مكعبي أرقام واحدًا تلو الآخر. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الثاني أكبر من العدد الظاهر على الأول؟ $\frac{5}{12}$

3) لغات أراد سعود اختيار اللغة التي سيدرسها من بين الإنجليزية، والفرنسية، والألمانية، والروسية. فأعطى كل لغة رقمًا من الأرقام من 0 إلى 3، وأحضر أربع قطع نقدية وقرَّر أن يلقيها معًا، على أن يكون عدد الشعارات الظاهرة هو الذي سيقرِّر اللغة التي سيدرسها، وذلك بأن يكون عدد الشعارات مناظرًا لرقم اللغة، فهل أسلوب سعود في اختيار اللغة يعطي جميع اللغات الفرصة نفسها؟ فسِّر إجابتك.
لا. إجابة ممكنة: احتمال الحصول على 0 هو 1 من 16، ولكن احتمال الحصول على 1 هو 1 من 4.

4) منتجات وضع باحثون الجدول الآتي حول نكهات الملجلجات التي تباع في الأسواق.

النكهة	فانيلا	شوكولاتة	أناناس
النسبة المئوية	28%	8%	7%

النكهة	زبدة	كاكاو	أخرى
النسبة المئوية	4.5%	3.5%	49%

a) اختيرت علبة من الملجلجات عشوائيًا، ما احتمال أن تكون بنكهة الشوكولاتة؟ **8%**

b) اختيرت علبة من الملجلجات عشوائيًا، ما احتمال أن تكون العلبة ليست بنكهة الفانيلا؟ **72%**

c) اختيرت علبة من الملجلجات عشوائيًا، ما احتمال أن تكون بنكهة الفانيلا أو الشوكولاتة أو الأناناس أو الزبدة أو الكاكاو؟ **51%**

التدريبات الإثرائية (21) — فوق

الاسم: التاريخ:

7-4 التدريبات الإثرائية

الاحتمال الهندسي

a) إذا أُطلق سهم على اللوحة المثلثية المجاورة، فما فرصة إصابة الجزء المظلَّل؟

هذه الفرصة تُسمى احتمالًا، ويمكن إيجاده من خلال مقارنة مساحة المنطقة المظلَّلة بمساحة اللوحة كاملة. وتحدد هذه النسبة نسبة الأسهم التي ستصيب المنطقة المظلَّلة.

$$\frac{\text{مساحة المنطقة المظلَّلة}}{\text{مساحة المنطقة الكاملة}} = \frac{\frac{1}{2}(4)(6)}{\frac{1}{2}(8)(6)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

وبصورة عامة إذا كانت S منطقة جزئية من المنطقة R، فإن الاحتمال لنقطة اختيرت عشوائيًا أن تنتمي إلى المنطقة الجزئية S هو:

$$P(S) = \frac{\text{مساحة المنطقة الجزئية } S}{\text{مساحة المنطقة } R}$$

أوجد احتمال أن تقع نقطة اختيرت عشوائيًا في المنطقة الجزئية المظلَّلة لكل مما يأتي:

(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{5}{9}$

(3) $\frac{\pi}{4}$

توضّح لوحة الهدف المجاورة وجود خمس دوائر متحدة المركز الذي يقع في مركز لوحة مربعة طول ضلعها 38 *cm*، وأنصاف أقطار الدوائر هي 2 *cm*, 5 *cm*, 8 *cm*, 11 *cm*, 14 *cm*. وبيّن الشكل عدد النقاط التي يحصل عليها الشخص إذا أصاب كل منطقة دائرية، فإذا أُطلق سهم وأصاب اللوحة، فأوجد احتمال الحصول على كل من النقاط الآتية (علمًا بأن إصابة أي نقطة خارج المناطق الدائرية لا يُكسبه أي نقاط):

(4) 0 نقطة $\frac{361-49\pi}{361}$
(5) نقطة واحدة $\frac{75\pi}{1444}$
(6) نقطتان $\frac{57\pi}{1444}$
(7) 3 نقاط $\frac{39\pi}{1444}$
(8) 4 نقاط $\frac{21\pi}{1444}$
(9) 5 نقاط $\frac{\pi}{361}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 7

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط فوق

كتاب التمارين (15)

دون ضمن فوق

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

1) بالونات، يحتوي كيس على بالونة خضراء، و 4 بالونات حمراء، و 5 بالونات صفراء. إذا سُحبت منه بالونتان معًا عشوائيًا، فأوجد كلًا ممّا يأتي:

a) (البالونتان حمراوان) P b) $\frac{2}{15}$ (بالونة حمراء والأخرى صفراء) P c) $\frac{4}{9}$ (بالونة صفراء والأخرى خضراء) P $\frac{1}{9}$

d) (البالونتان خضراوان) P e 0 (بالونتان صفراوان) P $\frac{2}{9}$ f) (بالونة حمراء والأخرى خضراء) P $\frac{4}{45}$

2) واجبات، لدى سعود 5 واجبات منزلية للمواد: الرياضيات، الكيمياء، الفيزياء، الأحياء، اللغة الإنجليزية. إذا أراد حلّها جميعًا في ذلك اليوم، فما احتمال أن تكون أول مادتين يقوم بحلهما هما الرياضيات والفيزياء، علمًا بأن لكل مادة الفرصة نفسها لتكون في أي وقت من اليوم؟ $\frac{1}{10}$

3) ورق الجدران، زار جاسم معرض ورق الجدران؛ ليشتري ورقًا لمنزله الجديد. ووجد لدى المعرض 28 كتابًا يحتوون على عينات ورق الجدران، منها 10 كتب لعيّنات تخطيط ورسم، و 18 كتابًا لعيّنات مناظر طبيعية. إذا سمح المعرض لجاسم أن يصطحب معه 4 كتب إلى البيت ليتقي منها، فاختار 4 كتب عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكتب جميعها من كتب التخطيط والرسم؟ $\frac{2}{195}$

4) اتصالات، استعمل الجدول أدناه الذي يُبيّن التوزيع الاحتمالي لعدد الهواتف النقالة في منزل كل طالب من طلاب مدرسة.

X عدد الهواتف النقالة	1	2	3	4	5
الاحتمال	0.01	0.16	0.34	0.39	0.10

a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًا. الاحتمالات جميعها محصورة بين صفر وواحد، ومجموع الاحتمالات يساوي $0.01 + 0.16 + 0.34 + 0.39 + 0.10 = 1$

b) إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون في منزله أكثر من 3 هواتف؟ 0.49

c) مثّل البيانات بالأعمدة.

15

الاحتمال والإحصاء

الفصل السابع

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

7-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-5

تحليل التوزيعات الاحتمالية.

الدرس 7-5

تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا أو ملتوية.
استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.

ما بعد الدرس 7-5

إيجاد الاحتمالات لتجارب ذات الحدين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

و اسأل:

- ما نسبة الطلاب الذين تزيد درجاتهم على 80 درجة؟ تتنوع الإجابات.
- ما نسبة الطلاب الذين تقع درجاتهم بين 80–60؟ تتنوع الإجابات.

التوزيعات الطبيعية والملتوية

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال التمثيل بالأعمدة لتحديد ما إذا كانت البيانات ملتوية أو موزّعة توزيعًا طبيعيًّا.

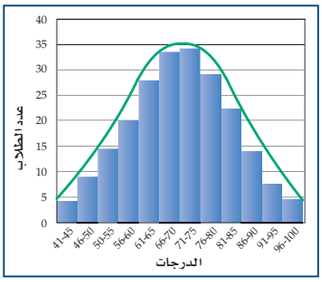
7-5 التوزيع الطبيعي
The Normal Distribution

فيما سبق:
درست التوزيعات الاحتمالية. (الدرس 4–7)

والآن:
- أحدّد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزَّعة طبيعيًّا أو ملتوية .
- أستعمل القانون التجريبي لأجد الاحتمالات.

المفردات:
التوزيع الاحتمالي المتصل
continuous probability distribution
التوزيع الطبيعي
normal distribution
التوزيع الملتوي
skewed distribution

www.obeikaneducation.com

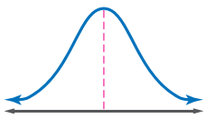


لماذا؟

مثّل المعلم عبدالعزيز درجات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانيًّا كما هو مبيّن في الشكل المجاور. لاحظ أن هناك تجمعًا لدرجات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع الدرجات يشبه الجرس تقريبًا. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعًا طبيعيًّا.

التوزيعات الطبيعية والملتوية في **التوزيع الاحتمالي المتصل** والذي هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ومثال ذلك أطوال أشخاص وأوزانهم، ومستوى الدهنيات عند الأشخاص البالغين. وأفضل مثال على التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو **التوزيع الطبيعي**.

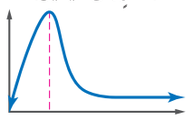
مفهوم أساسي خصائص التوزيع الطبيعي



- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسه.

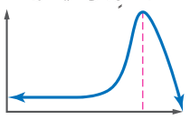
على الرغم من أن التوزيع الطبيعي متصل، فإن التوزيعات المنفصلة أيضًا يمكن أن يكون لها شكل التوزيع الطبيعي. ويمكن للتوزيعات أن تظهر بأشكال أخرى تُسمّى **توزيعات ملتوية**.

التواء موجب (ملتوٍ إلى اليمين)



معظم البيانات تتركز في اليسار وقليل منها في اليمين.

التواء سالب (ملتوٍ إلى اليسار)



معظم البيانات تتركز في اليمين وقليل منها في اليسار.

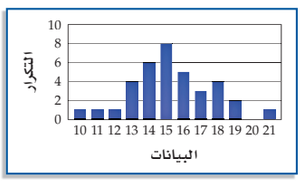
مثال 1 تصنيف بيانات التوزيع

حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

a)

البيانات	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
التكرار	1	1	1	4	6	8	5	3	4	2	1

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في الوسط، ويبدو كأنه إلى حد ما متماثل حول المتوسط، فإن البيانات تُعتبر موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.



مصادر الدرس 7-5

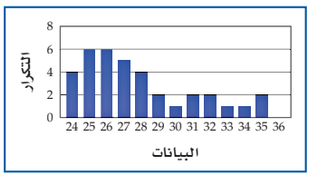
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (110)	• تنويع التعليم ص (110)	• تنويع التعليم ص (112)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

b)

البيانات	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
التكرار	4	6	6	5	4	2	1	2	2	1	1	2

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في جهة اليسار ومنخفض في كل من الوسط وعلى اليمين، فإن التوزيع يبدو كأنه ملتوٍ إلى اليمين (التواء موجب).



تحقق من فهمك التواءً موجبًا

1) حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.

قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1

القانون التجريبي إن المساحة بين قيمتين من البيانات تمثِّل نسبة البيانات التي تقع بين هاتين القيمتين. ويمكن أن يستعمل القانون التجريبي لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي، والتي تقع ضمن انحراف أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط.

مفهوم أساسي القانون التجريبي

يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

- يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

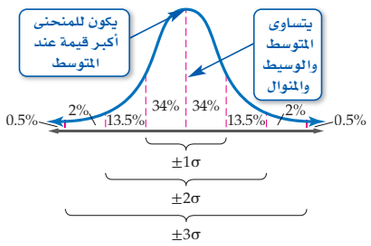
وهذا يعني أن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

وهذا يعني أن الغالبية العظمى من البيانات (95%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

وهذا يعني أن جميع البيانات تقريبًا (99%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.



مثال 2 التوزيع الطبيعي

المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X ثم اختيارها عشوائيًّا في هذا التوزيع عن 24، (أي أوجد $P(X > 24)$).

$\mu = 34, \sigma = 5$

الخطوة 1 أوجد القيم $\mu \pm \sigma, \mu \pm 2\sigma, \mu \pm 3\sigma$ (وهي المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه المضاعفات الثلاثة الأولى للانحراف المعياري).

$\mu \pm \sigma = 34 \pm 5 = 29, 39$

$\mu \pm 2\sigma = 34 \pm 10 = 24, 44$

$\mu \pm 3\sigma = 34 \pm 15 = 19, 49$

إرشادات للدراسة

«منفصل، مقابل «متصل»

يأخذ التوزيع الاحتمالي المنفصل عددًا محدودًا من القيم، وغالبًا ما تكون أعدادًا صحيحة. أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيأخذ عددًا غير محدد من القيم تنتمي إلى فترة متصلة. وفي حالة التوزيع الاحتمالي المتصل يكون احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة واحدة فقط مساويًا للصفر.

إرشادات للدراسة

التوزيع الطبيعي

في الحالات جميعها يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا ليكون التوزيع طبيعيًا تقريبًا.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدّد ما إذا كانت البيانات في كل ممّا يأتي تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

a) 31, 37, 35, 36, 34, 36, 32, 36, 34, 35, 33, 33, 33, 32, 34, 34, 35, 34

موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا

b) 14, 15, 11, 13, 13, 14, 15, 14, 12, 13, 14, 15

التواءً سالبًا

القانون التجريبي

المثالان 2, 3 يبيِّنان كيفية استعمال القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات لقيم متغيّر عشوائي في التوزيع الطبيعي.

مثال إضافي

2 تتوزَّع مجموعة بيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 66 ، وانحراف معياري 11. أوجد احتمال اختيار قيمة لـ X عشوائيًّا من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من 44، أي أوجد $p(X<44)$. 2.5%

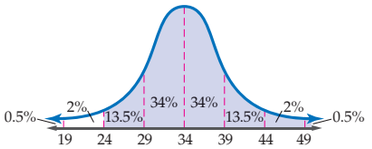
التعليم باستعمال التقنيات

رسائل فورية كلّف الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية، ويرسل كل شخص إلى زميله سؤالًا حول التوزيع الطبيعي (مثال: ما نسبة القيم التي تكون ضمن انحرافين معياريين فوق المتوسط الحسابي؟). ويجب أن يجيب زميله على السؤال، ثم يتحقّق كل منهما من الإجابة.

المحتوى الرياضي

التوزيعات الطبيعية يكون لأشكال التوزيعات الطبيعية للمتغيرات العشوائية جميعها الشكل نفسه.

الخطوة 2 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، وحدِّد عليه المتوسط $\mu = 34$ والقيم السابقة.



الخطوة 3 ظلل المنطقة التي تمثل الاحتمال المطلوب.

الخطوة 4 احسب الاحتمال المطلوب:

$$P(X > 24) = (13.5 + 34 + 34 + 13.5 + 2 + 0.5)\% = 97.5\%$$

إذن: $P(X > 24) \approx 97.5\%$

تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًّا في التوزيع الوارد في المثال **2** أقل من 49. **99.5% تقريبًا**

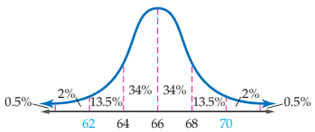
تُمَثِّل العينة التي يكون توزيعها توزيعًا طبيعيًّا بمنحنى طبيعي، وكأنها مجتمعًا.

مثال 3 من واقع الحياة — عينة موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا

أطوال: توزّع أطوال **1800** يافع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط **66 in**، وانحراف معياري يساوي **2 in**.

a) ما العدد التقريبي لليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

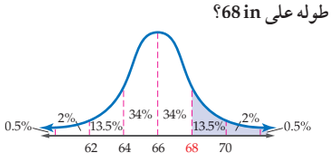
ارسم منحنى التوزيع الطبيعي.



تبعد كل من 62 , 70 عن المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ لذا فإن 95% من البيانات واقعة بين الطولين 62 , 70.

ولأن $95\% \times 1800 = 1710$، لذا يوجد 1710 يافعين تقريبًا تقع أطوالهم بين 62 in و 70 in.

b) ما احتمال أن يتم اختيار أحد اليافعين عشوائيًّا، بحيث يزيد طوله على 68 in؟



من الشكل المجاور، القيمة الأكبر من 68 تبعد أكثر من انحراف معياري واحد عن المتوسط الحسابي، وتتوزّع الأطوال على النحو الآتي: 13.5% بين انحراف معياري واحد وانحرافين معياريين، 2% بين انحرافين معياريين وثلاثة انحرافات معيارية، 0.5% فوق 3 انحرافات معيارية.

لذا فاحتمال اختيار يافع يكون طوله أكبر من 68 in

$$(13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$$

إذن الاحتمال المطلوب يساوي 16% تقريبًا

تحقق من فهمك

درجات: إذا علمت أن كتل **100** موظف في شركة تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره **70** كيلوجرامًا، وانحراف معياري **10** كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلوجرامًا؟ **68 موظفًا تقريبًا**

3B) ما احتمال أن يتمّ اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجرامًا؟ **97.5% تقريبًا**

مثال أضافي

3 **تغليف:** عَدَّ الطلاب قطع الحلوى في 100 علبة صغيرة، فوجدوا أن عدد قطع الحلوى لكل علبة يتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 23 لكل علبة، وانحراف معياري يساوي قطعة واحدة.

a) ما عدد العلب التي تحتوي على عدد من قطع الحلوى بين 22, 24؟ 68 علبة تقريبًا

b) ما احتمال أن تحتوي علبة اختيرت عشوائيًّا على 25 قطعة فأكثر؟ 2.5% تقريبًا

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-10 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

التواء المنحنى وضّح للطلاب أن التوزيع الموجب الالتواء يمتد منحناه إلى اليمين، وأما التوزيع السالب الالتواء، فإن منحناه يمتد إلى اليسار.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا احتاج الطلاب إلى مساعدة لرسم المنحنى الطبيعي،

فبين لهم بيِّن للطلاب أن اتجاه التقعّر للمنحنى يتحوّل من أسفل إلى أعلى عند النقطتين اللتين تبعدان انحرافًا معياريًّا واحدًا عن المتوسط الحسابي. كما أن رسم المنحنى الطبيعي لكل مسألة يساعد الطلاب على إتقان الرسم.

تدرب وحل المسائل

1) درجات: يوضّح الجدول أدناه نتائج أحد الاختبارات (النهاية العظمى للاختبار 40). حدّد ما إذا كانت البيانات تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزّعة توزيعًا طبيعيًّا. (مثال 1) **التواءً موجبًا**

فئات الدرجات	عدد الطلاب
13–15	12
16–18	27
19–21	29
22–24	19
25–27	8
28–31	1
32–35	1

2) حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول أدناه تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزعة توزيعًا طبيعيًّا: **التواءً موجبًا**

عدد زوار المتنزهات	
عدد الزوار بالآلاف	عدد المتنزهات
3–4	10
5–6	2
7–8	2
9–10	1
11–12	1
13 فأكثر	4

3) تتوزّع مجموعة بيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 161، وانحراف معياري 12، أوجد أن يتم اختيار قيمة لـ X عشوائيًّا من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من 149، أي أوجد $P(X < 149)$. (مثال 2) **16% تقريبًا**

إذا توزّعت البيانات في الأسئلة 7-4 توزيعًا طبيعيًّا، وكان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل منها هو موضّح، فأوجد الاحتمال المطلوب.

4) $\mu = 74, \sigma = 6, P(X > 86)$ **2.5% تقريبًا**

5) $\mu = 13, \sigma = 0.4, P(X < 12.6)$ **16% تقريبًا**

6) $\mu = 63, \sigma = 4, P(59 < X < 71)$ **81.5% تقريبًا**

7) $\mu = 91, \sigma = 6, P(73 < X < 103)$ **97% تقريبًا**

8) مدارس: أعطى عمران اختبارًا قصيرًا لطلبته البالغ عددهم (50) طالبًا، وكانت الدرجات موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 21، وانحراف معياري 2. (مثال 3) انظر الهامش.

a) ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 23 ,19؟

b) ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و25 ؟

9) بطاريات السيارة: إذا حُدِّد عمْرُ بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها باستعمال هذه البطارية، وعلمت أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 100000 km، وانحراف معياري 10000 km. وتنتج إحدى الشركات 20000 بطارية في الشهر، فأجب عما يأتي:

a) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يتراوح عمرها بين 90000 km – 110000 km؟ **13600**

b) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يزيد عمرها على 120000 km؟ **500**

c) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يقلُّ عمرها عن 90000 km؟ **3200**

d) ما احتمال أن تشتري بطارية عشوائيًّا، ويتراوح عمرها بين 80000 km – 110000 km؟ **81.5% تقريبًا**

10) صحة: يتوزّع مستوى الدهنيات (الكولسترول) في فئة الشباب الذكور في إحدى الدول توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 158.3، وانحراف معياري 6.6

a) ما احتمال أن تقل نسبة الكولسترول عند الشباب الذكور عن 151.7؟ **16% تقريبًا**

b) كم شخصًا تقريبًا من بين 900 شخص شملتهم الدراسة يتراوح مستوى الكولسترول عندهم بين 145.1 – 171.5؟ **855**

11) طعام: تتوزّع مدة صلاحية نوع معين من البطاطس توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 180 يومًا، وانحراف معياري 30 يومًا. **68% تقريبًا**

a) ما احتمال أن تقع مدة صلاحية المنتج بين 150 يومًا، 210 أيام؟ **34% تقريبًا**

b) ما احتمال أن تقع مدة صلاحية المنتج بين 180 يومًا، 210 أيام؟

c) ما احتمال أن تقل مدة صلاحية المنتج عن 90 يومًا؟ **0.5% تقريبًا**

d) ما احتمال أن تزيد مدة صلاحية المنتج على 210 أيام؟ **16% تقريبًا**

12) طول: تتوزّع أطوال 880 طالبًا في إحدى الجامعات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره 67 in، وانحرافٍ معياري مقداره 2.5 in

a) كم طالبًا تقريبًا يزيد طوله على 72 in؟ **22 طالبًا تقريبًا**

b) ما احتمال أن تقع أطوال الطلاب بين 59.5 in و 69.5 in؟ **83.5% تقريبًا**

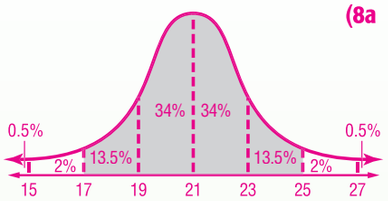
13) صناعة: تُستعمل آلة لتعبئة عبوات بالمياه المعدنية، وتختلف كمية الماء اختلافًا ضئيلًا بين العبوات. إذا كان حجم الماء في 120 عبوة يتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 1.1 L، وانحراف معياري 0.02 L، فأجب عما يأتي:

a) كم عبوة تقريبًا يكون حجم الماء فيها أقل من 1.06 L؟ **3 عبوات تقريبًا**

b) ما احتمال أن يكون حجم الماء في العبوات بين 1.08 L و 1.14 L؟ **81.5% تقريبًا**

إجابات:

8a)



توزيع درجات الطلاب

تبعد كل من 19, 23 انحرافًا معياريًّا واحدًا عن المتوسط الحسابي؛ لذلك
$34\% + 34\% = 68\%$ من البيانات تقع بين الدرجتين 19, 23
ولأن $50 \times 68\% = 34$ ، لذا يوجد 34 طالبًا تقريبًا تقع درجاتهم بين 19, 23

b) تبعد كل من 17, 25 عن المتوسط انحرافين معياريين؛ لذلك
$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% = 95\%$
إذن 95% من البيانات تقع بين الدرجتين 17, 25،
إذن الاحتمال المطلوب يساوي 95% تقريبًا.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10–1، 25–16
ضمن ضمن المتوسط	11–1 فردي ، 14–12 ، 25–16
فوق فوق المتوسط	25–7

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 14 أن 68% من أي توزيع طبيعي يقع ضمن انحراف معياري واحد من المتوسط .

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب رسم مخطّط لتوزيعات طبيعية، وتوزيعات ملتوية إلى اليسار، وأخرى ملتوية إلى اليمين.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 5-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (50)

إجابات:

16) إجابة ممكنة: عندما تشمل البيانات أطوال طلاب المرحلة الابتدائية جميعهم إضافة إلى أطوال الهيئة التدريسية والإدارية في المدرسة، فإن معظم الحالات تكون متركزة في الجهة اليسرى (الطلاب)، بينما تكون أطوال فئة الهيئة التدريسية والإدارية إلى الجهة اليمنى، وبذلك فإن هذا التوزيع يكون ملتويًا التواءً موجبًا. وفي صف يكون تحصيل الطلاب فيه عاليًا، فإن معظم البيانات لتحصيل الطلاب تتركز في الجهة اليمنى من التوزيع، ويوجد عدد قليل من البيانات في الجهة اليسرى. عند ذلك يكون التوزيع سالب الالتواء. وعندما تشمل البيانات معدلات الطلاب في جميع أنحاء المملكة مثلًا، فإن معظم الحالات تكون متمركزة في الوسط، مع وجود بعض الحالات إلى اليمين وبعضها إلى اليسار، عند ذلك يكون التوزيع طبيعيًا.

17) إجابة ممكنة: صحيح، فبحسب القانون التجريبي، فإن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

19) إجابة ممكنة: يُعد إلقاء مكعب الأرقام (1–6) مثالًا على التوزيع الاحتمالي المنفصل، وفي مثل هذا التوزيع يوجد عدد محدود من الإمكانات، أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيمكن أن يُمثّله أعمار 400 بطارية، حيث يمكن للعمر أن يأخذ أي قيمة في الفترة التي يُشكّلها مجال التوزيع.

مسائل مهارات التفكير العليا

14) **اكتشف الخطأ:** تتوزّع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط مقداره 11.5 cm، وانحراف معياري مقداره 2.5 cm ومدى من 3.6 cm إلى 19.8 cm، وقد حاولت كل من مريم وأمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط التوزيع. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

أمينة؛ وزّعت مريم المدى على الفترات بالتساوي

مريم	أمينة
مدى البيانات 16.2 cm، 68% من المدى يساوي تقريبًا 11 cm، ويتوزّع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5 cm، أي أن مدى 68% سيكون من 6 cm إلى 17 cm	تمتد النسبة 68% من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ أي أن مدى 68% سيكون من 9 cm إلى 14 cm

15) **تحدٍّ:** في مستودع للأدوات الكهربائية عدد من المسجلات التي تعمل على البطارية. إذا كانت أعمار البطاريات تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 8.0 h، وانحراف معياري 0.7 h، فما العدد التقريبي للمسجلات في المستودع إذا علمت أن هناك 8 مسجّلات يزيد عمر بطارياتها على 10.1 h؟ 1600

16) **اكتب:** اشرح الفرق بين التوزيعات الموجبة الالتواء، والتوزيعات السالبة الالتواء، والتوزيعات الطبيعية لمجموعة بيانات. أعطِ مثالًا على كل منها. انظر الهامش.

17) **تبرير:** بحسب القانون التجريبي، فإن معظم البيانات في التوزيع الطبيعي تقع ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. هل هذا صحيح أم خاطئ؟ برّر إجابتك. انظر الهامش.

18) **مسألة مفتوحة:** أوجد بيانات واقعية تبدو كأنها تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا، أعطِ خصائص هذا التوزيع فيما يتعلق بالمتوسط الحسابي، والانحراف المعياري. ومثّل البيانات بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

19) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على توزيع احتمالي منفصل، وآخر متصل. وصف الفرق بينهما. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

20) **طلاب:** رُشّح 3 طلاب من الصف الأول الثانوي، و11 طالبًا من الصف الثاني الثانوي لتوزيع بعض الطرود على الفقراء. إذا اختير من بينهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن تتضمّن العينة طالبين من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ (الدرس 4-7) 16.5% تقريبًا

21) يبيّن الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين شاركوا في المسابقات الثقافية، والذين لم يشاركوا من الصفوف: الأول والثاني والثالث الثالث الثانوي في مدرسة ما. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون قد شارك في المسابقات الثقافية علمًا بأنه من الصف الثالث الثانوي؟ (الدرس 3-7) $\frac{3}{14}$

	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
المشاركون	7	9	6
غير المشاركين	23	20	22

22) **جسور:** جسر لعبور المشاة فوق مسطح مائي على شكل قطع مكافئ فتحته إلى أسفل، أوجد معادلة الجسر، مفترضًا أن نقطة الأصل على سطح الماء تحت رأس القطع. (مهارة سابقة)

$x^2 = -2158\ (y - 325)$ تقريبًا

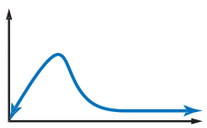
تدريب على اختبار

23) يتوزّع عمر 10000 مصباح كهربائي توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي 300 يوم، وانحراف معياري 40 يومًا. كم مصباحًا يقع عمره بين 260 يومًا، 340 يومًا؟ D

A 2500 C 5000

B 3400 D 6800

24) ما الوصف الأفضل للتوزيع الاحتمالي الممثّل أدناه؟ D



A توزيع سالب الالتواء C توزيع طبيعي

B توزيع متماثل D توزيع موجب الالتواء

25) **صناعة:** تتوزّع قياسات أقطار مجموعة من الأقراص المدمجة التي تصنعها إحدى الشركات توزيعًا طبيعيًّا بانحراف معياري مقداره 1 mm، وبمتوسط حسابي 120 mm.

a) ما احتمال أن يزيد طول قطر قرص اختير عشوائيًّا على 120 mm؟ 50% تقريبًا

b) إذا كانت الشركة تصنع 1000 قرص في الساعة، فما العدد التقريبي للأقراص المصنوعة في الساعة الواحدة، والتي يتراوح قطر كل منها بين 119 mm, 122 mm؟ 815

تنويع التعليم

فوق

توسّع اكتب القانون $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ على السبورة، ووضّح للطلاب: أن المتوسط الحسابي للمجتمع هو μ، وأن الانحراف المعياري للمجتمع هو σ، وأن X هي قيمة لمتغيّر يتبع التوزيع الطبيعي، أمّا Z فتُمثّل متغيّرًا طبيعيًّا معياريًّا. كلّف الطلاب أن يجدوا قيمتي Z المقابلتين لِقيمتَي x (0.32s, 0.38s) واللتين تمثّلان زمني ردة الفعل لموقف ما، علمًا بأن أزمنة ردة الفعل في هذا الموقف تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط: $\mu = 0.35\text{ s}$، وانحراف معياري $\sigma = 0.05\text{ s}$. $-0.6, +0.6$

ثم استعمل الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لإيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي، والمرتبطة بأي زوج من قيم z، وذلك باتباع الخطوات التالية:

- اضغط (on) ثم اضغط
- اضغط
- اختر normcdf( ) فتظهر على الشاشة normcdf( )
- أدخل البيانات داخل القوسين بحسب الترتيب (μ, σ , أكبر قيمة لِـ z, أقل قيمة لِـ z)
- اضغط (enter) فتظهر النتيجة

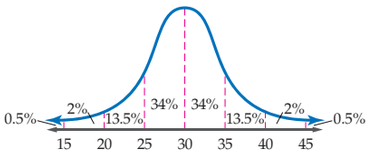
واطلب إليهم إيجاد نسبة الذين تقع زمن ردة الفعل لديهم في الفترة (0.38 , 0.32). 45% تقريبًا

عند معرفة المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع طبيعي، تستنتج أن 68%, 95%, 99% من البيانات ستكون ضمن انحراف معياري واحد، أو انحرافين معياريين أو ثلاثة انحرافات معيارية عن المتوسط على الترتيب، وهذا ما يُسمّى القانون التجريبي. ويمكنك استعمال القانون التجريبي لتجد المئينات. والمئين n يقابل القيمة التي يقل عنها أو يساويها $n\%$ من قيم البيانات.

نشاط

في اختبار للرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي وُجد أن درجات الطلاب تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 30، وانحراف معياري 5

الخطوة 1 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي لدرجات الطلاب المشابه للشكل المجاور، و عيّن عليه المتوسط وأيضًا المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه مضاعفات الانحراف المعياري كما هو موضح في الشكل.



الخطوة 2 الدرجة 30 هي المتوسط، وبالرجوع إلى الشكل يمكن أن ترى أن 50% من الدرجات أقل من الدرجة 30 أو تساويها؛ لذا يمكنك القول: إن الدرجة 30 تقابل المئين 50.

ما المئين الذي يقابل الدرجة 35؟ **الدرجة 35 تُمثّل المئين 84.**

الخطوة 3 ما المئين الذي يقابل الدرجة 40؟ **الدرجة 40 تمثّل المئين 79.5.**

الخطوة 4 ما الدرجة التي تقابل المئين 99.5؟ **45**

تمارين: **1, 2)** انظر الهامش.

في كلٍّ من السؤالين التاليين، ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، ثم أجب عن المطلوب.

1) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الفيزياء موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 15، وانحراف معياري 2، فأوجد المئينات التي تقابل الدرجات 13, 15, 21.

2) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الكيمياء موزّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 40، وانحراف معياري 4، فأوجد الدرجات التي تقابل المئينات 99.5, 50, 84.

1 التركيز

الهدف استعمال القانون التجريبي للربط بين المئينات والتوزيع الطبيعي.

إرشادات التدريس

ذكّر الطلاب بأنهم تعلموا في الدرس 7-5 أن 0.5% من التوزيع الطبيعي أكبر من 3 انحرافات معيارية فوق المتوسط. أو أصغر من 3 انحرافات معيارية تحت المتوسط.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط.

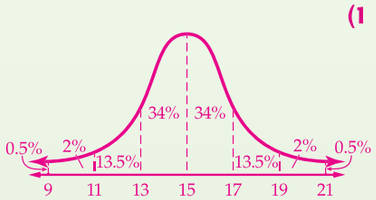
واسأل:

- ما المئين الذي يقابل الوسيط في التوزيع الطبيعي؟ الخمسون
- ماذا يمكنك القول عن المئين الذي يقابل الدرجة 37؟ يقع بين المئين 84 والمئين 97.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمرينين 1, 2.

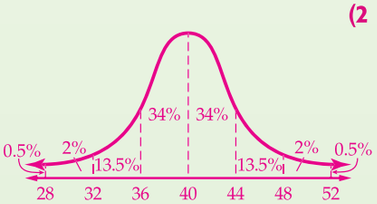
إجابات:

1)



الدرجة 21 تقابل المئين 99.5، والدرجة 15 تقابل المئين 50، والدرجة 13 تقابل المئين 16

2)



الدرجة 52 تقابل المئين 99.5، والدرجة 40 تقابل المئين 50، والدرجة 44 تقابل المئين 84

من المحسوس إلى المجرد

يمكنك بسهولة إيجاد المئين الذي يقابل درجة معينة لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي وبالعكس، وضِّح السبب.

إجابة ممكنة: لأن النسب المئوية للمساحات تحت المنحنى الطبيعي المقابلة للمتوسط وأيضًا المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه مضاعفات الانحراف المعياري محددة، مما يسهل إيجاد المئين الذي يقابل درجة معينة وبالعكس.

توسّع المفهوم

هل يمكن أن يكون المئين 50 هو المتوسط لتوزيعات غير طبيعية؟

يمكن أن يتساوى المتوسط والوسيط لتوزيع غير طبيعي، ولكن المئين 50 هو الوسيط لجميع التوزيعات الطبيعية وغير الطبيعية.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 1 لتقويم الطلاب فيما إذا كانوا قادرين على تحديد المئينات المرتبطة بالدرجات المعطاة أم لا.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (22) — دون

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريبات إعادة التعليم

التوزيع الطبيعي

التوزيعات الطبيعية والمتوية، يمثل التوزيع الاحتمالي المتصل بمنحنى.

أنواع التوزيعات المتصلة	طبيعي	التواء موجب (ملتوٍ إلى اليمين)	التواء سالب (ملتوٍ إلى اليسار)

مثال حدّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواء موجبًا، أو التواء سالبًا، أو موزّعة توزيعًا طبيعيًا.

القيمة	80	90	100	110	120
التكرار	2	4	7	3	2

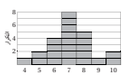
استعمل البيانات لتمثيل المدرج التكراري، فتظهر البيانات وكأنها توزّع توزيعًا طبيعيًا تقريبًا.

تمارين

حدّد ما إذا كانت البيانات في كل مما يأتي تظهر التواء موجبًا، أو التواء سالبًا، أو موزّعة توزيعًا طبيعيًا، ثم مثّل البيانات بالمدرج التكراري.

1)

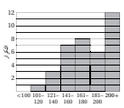
كتل الأطفال	4	5	6	7	8	9	10
عدد الأطفال	1	2	4	8	5	1	2



توزع طبيعي تقريبا

2) **سالبة الالتواء**

أعمار البيوت	عدد البيوت
أقل من أو يساوي 100000	0
101000–120000	1
12100–140000	3
14100–160000	7
16100–180000	8
18100–200000	6
أكبر من 200000	12



تدريبات إعادة التعليم (23) — دون

الاسم: التاريخ:

7-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

التوزيع الطبيعي

القانون التجريبي

توزيع طبيعي	للتوزيع الطبيعي الخواص الآتية: يبلغ أقصى قيمة له عند المتوسط. يتساوى المتوسط والوسيط والمنوال تقريبًا. 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري. 95% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري. 99% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.

مثال توزّع أطوال لاعبي كرة السلة توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 6 أقدام وبوصة واحدة، وانحراف معياري مقداره بوصتان (القدم = 12 بوصة).

a) ما احتمال أن يُختار لاعب عشوائيًا ويكون طوله أقل من 5 أقدام و9 بوصات؟

ارسم منحنى توزيع طبيعي، وحدّد المتوسط والنقاط التي تزيد على المتوسط أو تنقص عنه بانحراف معياري، وانحرفين معياريين، وثلاثة انحرافات معيارية.

القيمة 5 أقدام و 9 بوصات تقع تحت المتوسط بانحرافين معياريين؛ لذا سيكون 2.5% من اللاعبين تقريبًا أطوالهم أقل من 5 أقدام و9 بوصات.

b) إذا كان في النادي 240 لاعبًا، فكم لاعبًا منهم يزيد طوله على 6 أقدام و 3 بوصات؟

القيمة 6 أقدام و 3 بوصات تقع فوق المتوسط بانحراف معياري واحد، لذا فإن 16% من اللاعبين تقريبًا تكون أطوالهم أكبر من هذا الطول. ويكون عدد اللاعبين هو:

$240 \times 0.16 \approx 38$

تمارين

1) **إنتاج البيض** أعداد البيض الذي ينتجه نوع من الدجاج سنويًا يتوزّع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 225 بيضة، وانحراف معياري مقداره 10 بيضات.

a) ما نسبة الدجاج الذي ينتج ما بين 215 و235 بيضة في السنة؟

تقريبا 68%

b) كم تتوقع عدد الدجاج الذي ينتج أكثر من 245 بيضة في السنة من أصل 400 دجاجة؟

10 دجاجات تقريبا

2) **صناعة** تُقطّر أحد أنواع المسامير المنتجة في أحد المصانع توزّع توزيعًا طبيعيًا بوسط 18 mm، وانحراف معياري 0.2 mm.

a) ما نسبة المسامير المنتجة التي طول قطرها أكبر من 18.4 mm؟

تقريبا 2.5%

b) ما نسبة المسامير التي يقع طول قطرها بين 17.8 و 18.2 mm؟

تقريبا 68%

تدريبات حل المسألة (24) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

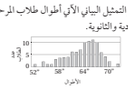
7-5 تدريبات حل المسألة

التوزيع الطبيعي

1) **موقف السيارات** أجريت دراسة حول مدى التزام الناس بالاصطفاف في المواقف بحسب قياسات المكان المخصص، ووُجد أن البيانات التي جُمعت توزّع توزيعًا طبيعيًا تقريبًا بمتوسط 8.5 in. ووُجد أن 5% تقريبًا من السيارات تقف على مسافة تزيد على 11.5 in من نهاية الموقف المخصص. فما نسبة عدد السيارات التي تقف على مسافة تقل عن 5.5 in من نهاية الموقف؟

5%

2) يوضح التمثيل البياني الآتي أطوال طلاب المرحلتين الإعدادية والثانوية.



فهل هذه البيانات موجبة الالتواء أو سالبة الالتواء أو موزّعة توزيعًا طبيعيًا؟

سالبة الالتواء

3) **مواقد** وجد في أثناء متابعة مواقد أحد المصانع حتى تبقى في حدود 350°F، أن درجة حرارة المواقد تتوزّع توزيعًا طبيعيًا بوسط 350°F، وانحراف معياري 0.5°F. فما النسبة المئوية للمواقد التي تتراوح درجات حرارتها من 350°F إلى 351°F؟

تقريبا 47.5%

4) وجد في مزرعة لتربية الحراف أن كتل الحراف تتوزّع توزيعًا طبيعيًا بوسط 68 باوندًا، وانحراف معياري 10 باوندات معًا.

a) ما النسبة المئوية التقريبية لعدد الحراف التي تتراوح كتلها بين 58، 78 باوندًا؟

تقريبا 68%

b) ما النسبة المئوية للخراف التي تتوقّع أن كتلتها تزيد على 98 باوندًا؟

تقريبا 0.5%

c) ما نسبة الحراف التي تتوقع أن تقل كتلها عن 48 باوندًا؟

تقريبا 2.5%

d) ما كتلة خروف يقع ضمن أقل 0.5% من الحراف كتلة؟

38 باوندًا أو أقل

التدريبات الإثرائية (25) — فوق

الاسم: التاريخ:

7-5 التدريبات الإثرائية

حساب القيم المعيارية

يُعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية، فالكثير من القياسات يكون توزيعها طبيعيًا بصورة عامة مثل: الأطوال، والكتل، وقياسات الذكاء. والأكثر أهمية أنه في حالة المتغيرات المتعلقة بالأفراد، فإن هذه القياسات لا تكون موزّعة توزيعًا طبيعيًا إلّا أن المجاميع والمتوسطات قبل إلى أن تتوزّع توزيعًا طبيعيًا. ولسوء الحظ فإنه يصعب إيجاد قيم دوال التوزيع الاحتمالي الطبيعي، وحلًا هذه المشكلة، قام الإحصائيون بوضع جداول لهذه الغاية، وذلك بجعل الصفر هو المتوسط الحسابي والانحراف المعياري يساوي العدد 1. وأطلق على هذا التوزيع التوزيع الطبيعي المعياري ويرمز إليه بالرمز $N(0, 1)$ حيث N تشير إلى التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي $0 = (mu)\ \mu$، وانحرافه المعياري σ $1 = (sigma)$.

افترض أن متغيرًا مثل x يتوزّع توزيعًا طبيعيًا بوسط حسابي μ، وانحراف معياري σ. وحتى تحسب الاحتمالات لهذا التوزيع الطبيعي يجب تحويله إلى توزيع طبيعي معياري من خلال تحويلات مناسبة. والرمز Z يُرمز إلى الدرجات المعيارية. والخطوات الآتية توضح عملية التحويل:

- إذا لم يُعطَ الوسط الحسابي والانحراف المعياري، فاحسب كلًّا منهما من البيانات المعطاة.
- عرّف $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

مثال 3 افترض أن الزمن (X) المتطلّب لإكمال اختبار يتوزّع طبيعيًا، وأن الزمن يُعطى بالدقائق، وعدد طلاب الصف 12 طالبًا.

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، والعلاقة بين قيم Z وقيم X بعد تعويض قيمتي المتوسط والانحراف المعياري فيها.

الطلاب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الزمن (X)	35	42	48	33	32	39	40	52	48	34	36	44

المتوسط الحسابي = 40.25 ، والانحراف المعياري = 6.34 ، و $Z = \frac{(X - 40.25)}{6.34}$

تمارين

5) افترض أن المتغير العشوائي X يتوزّع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي $\mu = 20$، وانحراف معياري $\sigma = 5$، فحوّل العبارات الاحتمالية الآتية إلى عبارات مكافئة بدلالة قيم Z:

a) $P(X > 18)$

$$P\left(Z > \frac{18 - 20}{5}\right) = P\left(Z > -\frac{2}{5}\right)$$

b) $P(17 < X < 23)$

$$P\left(\frac{17 - 20}{5} < Z < \frac{23 - 20}{5}\right) = P\left(-\frac{3}{5} < Z < \frac{3}{5}\right)$$

c) $P(X < 19)$

$$P\left(Z < \frac{19 - 20}{5}\right) = P\left(Z < -\frac{1}{5}\right)$$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

7-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-6

استعمال نظرية ذات الحدين.

الدرس 7-6

إيجاد احتمالات تجارب ذات الحدين.
إيجاد احتمالات باستعمال توزيع ذات الحدين ومفكوكه.

ما بعد الدرس 7-6

إيجاد احتمالات حوادث معينة في فضاء محدود.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما احتمال ألا يحصل سلمان على نقطة عند لعبه إرسال؟ 64%
- هل يمثِّل النجاح مرتين متتاليتين حادثتين مستقلتين؟ نعم
- إذا كانت نجاحات الإرسال مستقلة، فما احتمال ألا يحصل سلمان على أي نقطة في إرسالين متتاليين؟ 0.4096

7-6 التوزيعات ذات الحدين
Binomial Distributions

فيما سبق:
درست استعمال نظرية ذات الحدين. (مهارة سابقة)

والآن:
- أميِّز تجربة ذات الحدين.
- أجد الاحتمالات باستعمال التوزيع ذي الحدين ومفكوكه.

المفردات:
تجربة ذات الحدين
binomial experiment

التوزيع ذو الحدين
binomial distribution

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

في لعبة الكرة الطائرة تبين أن اللاعب سلمان ينجح في لعب الإرسال الساحق الذي لا يصده الخصم في 36% من محاولاته، وبذلك يحصل فريقه على نقطة في كل مرة ينجح فيها.

التوزيع ذو الحدين كثير من التجارب الاحتمالية يكون لها نتيجتان فقط؛ نجاح أو فشل أو يمكن جعلها كذلك. فمثلًا في مسائل الاختيار من متعدد التي لها 5 إجابات، يمكن تصنيف نتائج الإجابة عن كل فقرة إلى صح، أو خطأ، ويمكن تصنيف نتائج دواء طبي على أنه فعّال أو غير فعّال.

مفهوم أساسي تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد(n) من المحاولات المستقلة (المرات) .
- كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان؛ نجاح S ، أو فشل F .
- $P(S)$ "ويرمز له بالحرف p" هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ "ويرمز له بالحرف q" هو نفسه في كل محاولة ويساوي $p - 1$.

ويُمثِّل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

مثال 1 تمييز التجربة ذات الحدين

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

a) تُبيّن نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية. إذا تم اختيار 6 طلاب عشوائيًّا، وسؤالهم عمَّا إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة؛ وكان المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الطلاب الذين يملكون الحاسبة البيانية، فإن:

هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين وهي:

- كل طالب تم اختياره يُمثِّل محاولة، وعملية اختيار الطلاب الستة تتكون من محاولات مستقلة.
- للتجربة نتيجتان متوقعتان: الطالب يملك الحاسبة البيانية S، أو لا يملكها F .
- احتمال النجاح نفسه لكل طالب تم اختياره $P(S) = 0.68$.

وفي هذه التجربة $n = 6, p = P(S) = 0.68$. احتمال الفشل $q = 1 - p$ ، أي أن:
$q = 1 - 0.68 = 0.32$. ويُمثِّل X عدد الطلاب الذين يملكون حاسبة بيانية من الّذين تم اختيارهم، أي أن:
$X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، وخُصّص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض. سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة ذات اللون الأخضر.

في هذه التجربة، كل بطاقة يتم سحبها تُمثِّل محاولة، وبما أنه يتم الاحتفاظ بالبطاقة التي تم اختيارها (السحب دون إرجاع)، فإن المحاولات غير مستقلة، واحتمال النجاح في كل محاولة يختلف عن الأخرى؛ لذا فإن هذه التجربة ليست ذات حدين.

مصادر الدرس 7-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (115)	• تنويع التعليم ص (115)	• تنويع التعليم ص (117)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات حل المسألة، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

1A أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحّد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

1B أجاب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة.

1A ليست ذات حدين
$P(S) = 61\%$,
$P(F) = 1 - 61\% = 39\%$،
في حين أن 24% لا يحبون الزي الموحد، وهذا لا يساوي 39% ، وهذا يعني أنه ليس لكل محاولة نتيجتان فقط.

1B تجربة ذات حدين
$n = 20, p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$,
$X = 0, 1, 2, \ldots 20$

يُسمى توزيع النتائج المتوقَّعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيع ذات الحدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة ${}_nC_X p^X q^{n-X}$ التي تمثل حدًّا في مفكوك $(p+q)^n$.

مفهوم أساسي — صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(X) = {}_nC_X\, p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!X!} p^X q^{n-X}$$

حيث p احتمال النجاح، وq احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

مثال 2 من واقع الحياة — التوزيع ذو الحدين

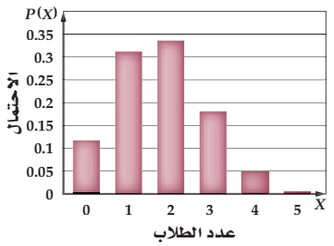
اختبار: في اختبار نهائي، أكد 35% من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلاب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم عن السؤال، فكوِّن جدولًا للتوزيع ذي الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلاب على الأقل عن السؤال بنعم.

هذه تجربة ذات حدين فيها: $n = 5, p = 0.35, q = 1 - 0.35 = 0.65$. استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحساب احتمال كل قيمة ممكنة من قيم X مستعملًا صيغة احتمال ذات الحدين.

$$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$$
$$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$$
$$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$$
$$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$$
$$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$$
$$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$$

وفيما يأتي جدول التوزيع ذي الحدين للمتغير X ، وتمثيله بالأعمدة.

عدد الذين أدُّوا الاختبار بشكل اعتيادي



X	P(X)
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005

إرشاد تقني

حساب احتمال ذات الحدين

لإيجاد كل احتمال لذات الحدين على الحاسبة البيانية:
استعمل الأمر binomPdf(n, p, x) من قائمة تطبيق الحاسبة .

مثال: لإيجاد p (1)
اكتب binomPdf (5, 0.35, 1)
ثم اضغط Enter
فتحصل على 0.312386
كما يمكن إيجادها باستعمال الآلة الحاسبة العلمية كما يأتي:
اضغط على المفاتيح الآتية من اليسار إلى اليمين:

5 SHIFT ÷ 1 × 0.35 $x^{\blacksquare}$ 1 ▶ × (1 − 0.35) $x^{\blacksquare}$ (5 − 1) =

فتظهر الشاشة 0.31238593375

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون اطلب إلى الطلبة العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، واطلب إليهم توقع عدد مرات ظهور الكتابة عند رمي قطعة نقد 50 مرة، ثم اطلب إليهم رمي القطة 50 مرة وإيجاد عدد مرات ظهور الكتابة فعلًا، ومقارنة النتائج في الحالتين.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

التوزيع ذو الحدين

المثال 1 يُبيّن كيفية تمييز التجربة ذات الحدين.

المثال 2 يُبيّن كيفية تكوين جدول توزيع ذات الحدين.

مثال إضافي

1 حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك، وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q . وقيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

a) أُجري مسح إحصائي في إحدى المناطق التعليمية في المملكة، فتبيَّن أنّ 95% من المعلمين يحبون مهنتهم، وأن 5% لا يحبونها، إذا تم اختيار 50 معلمًا عشوائيًّا، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد المعلمين الذين يحبون مهنتهم.

التجربة ذات حدين فيها:
$n = 50, p = 0.95, q = 0.5,$
$X = 0, 1, 2, 3, \ldots, 50$

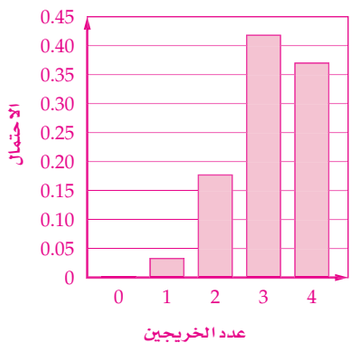
b) يحتوي صندوق على 10 رقاقات إلكترونية زرقاء اللون و 5 رقاقات حمراء اللون، إذا تم سحب 3 رقاقات عشوائيًّا الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الرقاقات الزرقاء المسحوبة.

الحوادث غير مستقلة؛ لأن احتمال سحب رقاقة زرقاء يختلف بعد كل سحب، وعليه فإن التجربة ليست ذات حدين.

مثال إضافي

2 **كليات:** في دراسة حديثة أُجريت على خريجي إحدى الكليات، تبيّن أن 78% من الخريجين يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج. تم اختيار 4 خرّيجين عشوائيًّا وسؤالهم عما إذا كانوا يرغبون في تلقي التدريب العملي بعد تخرجهم. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الخرجين الذين أجابوا بنعم عن السؤال، فكوّن التوزيع ذا الحدين ومثّله بيانيًّا، ثم أوجد احتمال أن ثلاثة منهم على الأقل أجابوا بنعم عن السؤال.

X	$P(X)$
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370



$P(x \geq 3) = 0.788$

التوزيع ذو الحدين

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد المتوسط، والتباين، والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في التوزيع ذي الحدين.

المثال 4 يبيّن كيفية تقريب توزيع ذي حدين إلى توزيع طبيعي.

إرشادات للدراسة

اختيار الاحتمالات
أحيانًا يكون من الأسهل أن تجد احتمال الفشل وتطرح هذه النتيجة من 1 لتجد احتمال النجاح، لأنهما احتمالان متتامان.

لإيجاد احتمال أن 3 طلاب على الأقل أجابوا بنعم، أوجد $P(3) + P(4) + P(5)$.

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$ احتمال 3 طلاب على الأقل

$= 0.181 + 0.049 + 0.005$ $P(3) = 0.181,\ P(4) = 0.049,\ P(5) = 0.005$

$= 0.235 = 23.5\%$ بسّط

تحقق من فهمك

2) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 خريجين عشوائيًّا، وتم سؤالهم عمّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكوّن التوزيع ذا الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم. انظر الهامش.

تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

يحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي X في التوزيع ذي الحدين بالصيغ الآتية:

المتوسط $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

مـثال 3 المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

اختبار: **بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال 2 . أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، ثُمَّ فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.**

استعمل صيغ المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين. في هذه التجربة ذات الحدين $n = 5,\ p = 0.35,\ q = 0.65$.

$\mu = np$

$= 5(0.35) = 1.75$

$\sigma^2 = npq$

$= 5(0.35)(0.65) = 1.1375$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$= \sqrt{1.1375} \approx 1.0665$

متوسط التوزيع يساوي 1.8 تقريبًا، ويعني أن خريجَين تقريبًا من أصل 5 أجابوا بنعم. كل من التباين والانحراف المعياري يساوي 1.1 تقريبًا.

تحقق من فهمك

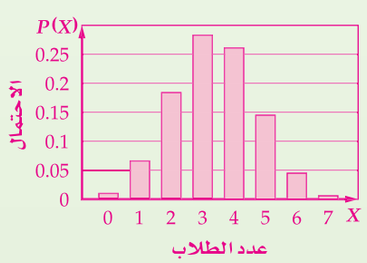
3) **كليات:** أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

3) $\mu = 3.36,\ \sigma^2 = 1.747,\ \sigma \approx 1.322,$ تقريبًا 3 طلبة من بين 7 يدرسون لغة عالمية في سنة التخرج.

إجابة (تحقق من فهمك):

2)

X	$P(X)$
0	0.010
1	0.066
2	0.184
3	0.283
4	0.261
5	0.145
6	0.045
7	0.006



$P(X < 4) = 0.543 = 54.3\%$

عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة ذات الحدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

في التوزيع ذي الحدين عندما تُمثّل n عدد المحاولات، واحتمال النجاح p، واحتمال الفشل q، ويكون $np \geq 5, nq \geq 5$، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = np$، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.

إرشادات للدراسة

التقريب إلى التوزيع الطبيعي

يُستعمل التقريب إلى التوزيع الطبيعي؛ لأنه مع زيادة n يصبح استعمال التوزيع ذي الحدين لإيجاد الاحتمال عملية معقّدة وصعبة.

مثال 4 تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

أشارت دراسة سابقة إلى أن 64% من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفّذ بلال دراسة مسحية على 300 من هؤلاء الخريجين اختارهم عشوائيًّا. ما احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة؟

في الدراسة المسحية التي نفّذها بلال، عدد الخريجين الذين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة يتبع التوزيع ذا الحدين، حيث:

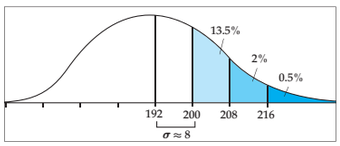
$$n = 300, p = 0.64, q = 0.36$$

وحيث إن:

$$np = 300\,(0.64) = 192 > 5$$

$$nq = 300\,(0.36) = 108 > 5$$

يمكنك استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:



المتوسط للتوزيع الطبيعي: $\mu = np$

$n = 300, p = 0.64$: $= 300(0.64) = 192$

الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي: $\sigma = \sqrt{npq}$

$n = 300, p = 0.64, q = 0.36$: $= \sqrt{300(0.64)(0.36)}$

استعمل الآلة الحاسبة: ≈ 8.31

العدد 200 أكبر من المتوسط بمقدار انحراف معياري واحد تقريبًا كما هو مبين في الرسم أعلاه؛ لذا يكون احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل يساوي 16% تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألّا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليلِ عدد أيام الإجازة الصيفية؟ انظر ملحق الإجابات.

مثالان إضافيان

3 كليات: بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال الإضافي 2. أوجد المتوسط، والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، ثم فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

المتوسط = 3.12، التباين = 0.686، والانحراف المعياري = 0.828، بمعدل 3 خريجين من أصل 4 يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج.

4 في الدراسة المسحية في المثال 4، ما احتمال أن يوافق 175 من المستهدفين على الأكثر ؟

2.5% تقريبًا

المحتوى الرياضي

التوزيع ذو الحدين يُسمّى التوزيع ذو الحدين التوزيع ذا المعلمتين، وهما عدد المحاولات (n)، واحتمال النجاح في المرة الواحدة (p). وتتحدّد الاحتمالات تمامًا عند معرفة هاتين المعلمتين.

التعليم باستعمال التقنيات

البحث في شبكة الإنترنت اطلب إلى الطلاب البحث في المواقع عن التوزيعات ذات الحدين وأمثلة عليها.

تنويع التعليم

فوق

توسّع قسّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية، على أن يقوم طالب من كل مجموعة بكتابة سؤال مسح إحصائي من اهتمامات المجموعة. كلِّف كل مجموعة بمناقشة كيفية تحقيق السؤال لشروط تجربة ذات الحدين، وكتابة نتائج المسح، ثم تحديد كل من n, p, q وتكوين التوزيع ذي الحدين وتمثيله بيانيًّا بالأعمدة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-8** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

1) تجربة ذات حدين؛ $n = 10$، $P = \frac{1}{6}$ لكل رمية، $q = \frac{5}{6}$ ، قيم المتغير العشوائي 0-10 .

2) تجربة ذات حدين؛ $n = 20$، $p = \frac{1}{2}$ ، $q = \frac{1}{2}$ ، قيم المتغير العشوائي 0-20 .

3) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة؛ لأنه يوجد أكثر من نتيجتين متوقعتين؛ لأن العمر قد يكون أي عدد ضمن المعقول.

4) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة: بما أنك تسحب كرات دون إرجاع، فإن الاحتمالات تختلف في كل سحب لنقص عدد الكرات.

تدرب وحل المسائل

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك، فاكتب قيم n, p, q ، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبيّن السبب. (مثال 1) **1-4) انظر الهامش.**

1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5 .

2) أُلقيت قطعة نقد 20 مرة، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

3) سألت 15 شخصًا عن أعمارهم، والمتغير العشوائي X يدل على أعمار هؤلاء الأشخاص.

4) صندوق به 52 كرة، منها 13 كرة حمراء، و13 كرة زرقاء، و13 كرة بيضاء، و13 كرة صفراء. سحبت 10 كرات على التوالي دون إرجاع. والمتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

كوّن التوزيع ذا الحدين لكلِّ متغير عشوائي مما يأتي، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد المتوسط، وفسّر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين، والانحراف المعياري. (المثالان 2, 3) **5-7) انظر ملحق الإجابات.**

5) إذا كان 89 % من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، وتم اختيار 5 طلاب عشوائيًّا من هذه المدرسة، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني.

6) بيّنت دراسة أن 26 % من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم. إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًّا، وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم.

7) أفادت دراسة إحصائية أن 65 % من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم. إذا تم اختيار 8 طلاب عشوائيًّا ممن يمتلكون سيارات، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة أمان في أثناء قيادة سياراتهم.

8) أعمال صيفية: تبيَّن في دراسة سابقة أن 90% من طلاب الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية، لكن مندرًا قدّر أن النسبة أقل من ذلك؛ لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 طالب من الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائيًّا. ما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلاب المستهدفين حصلوا على عمل صيفي؟ (مثال 4) **2.5% تقريبًا**

9) رخصة قيادة: اعتمادًا على إحدى الدراسات المسحية السابقة، إذا علمت أن 85% من طلاب إحدى الجامعات لديهم رخص قيادة سيارة، فما احتمال أن يكون 6 طلاب على الأقل من بين 10 تم اختيارهم عشوائيًّا لديهم رخص قيادة سيارة؟ **0.99013 أو 99% تقريبًا**

10) كرة قدم: كسب فريق لكرة القدم 75.7% من مبارياته. أوجد احتمال أن يكسب 7 مباريات على الأقل من بين مبارياته العشر القادمة. **0.792 أو 79.2% تقريبًا**

11) رياضيون: وفق بعض الدراسات الحديثة، إذا علمت أن 80% من طلاب المدارس الثانوية يمارسون رياضة واحدة على الأقل في مدرستهم، إذا اختير 6 طلاب عشوائيًّا، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الذين يمارسون رياضة على الأقل.

a) فأوجد الاحتمالات المرتبطة بعدد الطلاب الذي يمارسون رياضة واحدة على الأقل. **انظر ملحق الإجابات.**

b) ما احتمال ألا يزيد عدد الذين يمارسون الرياضة عن طالبين؟ **1.7% تقريبًا**

12) غسيل سيارات: يقوم بعض الأشخاص بغسيل السيارات لزبائن بعض المجمعات التجارية مقابل أجر معين. وقد أفادت دراسة مسحية أن 65% من الزبائن يدفعون أكثر من الحد الأدنى لأجرة غسيل سياراتهم. ما احتمال أن يدفع أربعة على الأقل من خمسة زبائن مبلغًا أكثر من الحد الأدنى للأجر. **42.8% تقريبًا**

13) حوافز دعائية: تضع شركة للعصائر حوافز بحيث إن 30% من علب العصير تربح علبة مجانية، وقد اشترت سعاد 10 علب. مثّل بالأعمدة البيانية التوزيع الاحتمالي للتوزيع ذي الحدين إذا كان المتغير العشوائي يدل على عدد علب العصير الرابحة. **انظر ملحق الإجابات.**

14) برامج دينية: بناءً على دراسة مسحية سابقة، إذا علمت أن 70% من الأشخاص تحت سن العشرين يتابعون برنامجًا دينيًّا على الأقل في التلفاز. إذا استطلع خليل رأي 200 شخص تحت سن 20 سنة، فما احتمال أن 146 شخصًا منهم على الأقل يتابعون برنامجًا دينيًّا على الأقل؟ **16% تقريبًا**

إذا علمت أن نسبة النجاح في توزيع ذي حدين 60%، ويوجد 18 محاولة، فأجب.

15) ما احتمال ألا توجد أي محاولة ناجحة؟ **0.0000069% تقريبًا**

16) ما احتمال أن توجد 12 محاولة فاشلة؟ **0.0145 أو 1.45% تقريبًا**

تنويع الوجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–8، 10–19، 25–33
ضمن ضمن المتوسط	1–25 فردي، 25–33
فوق فوق المتوسط	15–33

17) تنس طاولة: كسب لاعب 85% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية. أوجد الاحتمالات الآتية:

a) أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة. **13.8% تقريبًا**

b) أن يكسب مباراتين على الأقل من بين المباريات الخمس القادمة. **99.8% تقريبًا**

c) أن يخسر مباراة واحدة على الأقل في مبارياته الخمس القادمة. **55.6% تقريبًا**

لكل من التوزيعات ذات الحدين الآتية، يدلّ الرمز n على عدد المحاولات، ويدلّ الرمز p على احتمال نجاح كل محاولة. أوجد احتمال الحصول على X من النجاحات. 18-23) انظر الهامش.

18) $n = 8, p = 0.3, X \geq 2$

19) $n = 10, p = 0.2, X > 2$

20) $n = 6, p = 0.6, X \leq 4$

21) $n = 9, p = 0.25, X \leq 5$

22) $n = 10, p = 0.75, X \geq 8$

23) $n = 12, p = 0.1, X < 3$

مسائل مهارات التفكير العليا

25, 26) انظر الهامش.

24) تحدٍّ: في تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي، إذا علمت أن احتمال وجود $66 - 60$ نجاحًا يساوي 34%، وكان $\bar{x} = 60$ ، واحتمال النجاح 36%، فكم كان عدد المحاولات؟ **تقريبًا 156**

25) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك. «من الأفضل أن تجد احتمال الفشل وتطرحه من 1 لتجد احتمال النجاح».

26) مسألة مفتوحة: صف حالة من أنشطة المدرسة أو المجتمع ينطبق عليها التوزيع ذو الحدين، وحدّد عدد المحاولات المستقلة (n) ، وكلًّا من: احتمال النجاح واحتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

27) اكتب: فسّر العلاقة بين التجربة ذات الحدين والتوزيع ذي الحدين. **التوزيع ذو الحدين يوضح احتمالات أعداد مرات النجاح لتجربة ذات الحدين في n من المحاولات.**

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت المعادلة في كلٍّ ممايأتي تمثّل دائرة، أو قطعًا مكافئًا، أو قطعًا ناقصًا، أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية. وبرّر إجابتك: (مهارة سابقة)

28) $x^2 + 4y^2 = 100$ **قطع ناقص**

29) $5y^2 - 10x = 0$ **قطع مكافئ**

30) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 16 = 0$ **دائرة**

31) سرعة: وضع نظام لمراقبة سرعة السيارات وتسجيلها في شارع قريب من إحدى المدارس، إذا توزّعت هذه السرعات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 37 mi/h، وانحراف معياري 4 mi/h، فكم سيارة كانت تسير بسرعة تقل عن 33 mi/h في عينة حجمها 425 سيارة؟ **68** (الدرس 7-5)

32) دراسة جامعيَّة: أوضح استطلاع في إحدى المدارس الثانوية أن 88% من الطلاب يريدون إكمال دراستهم الجامعية. وقد قام نواف باستطلاع آراء 150 طالبًا تم اختيارهم عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون في العينة 132 طالبًا على الأقل يرغبون في استكمال دراستهم الجامعية؟ **50%** (الدرس 7-5)

تدريب على اختبار

33) اختبار: تقدّمت سمر لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل، لكنها أجابت عن الأسئلة من خلال التخمين (دون معرفة علمية بالموضوع)، ما احتمال أن تحصل على:

a) 7 أسئلة صحيحة الإجابة؟ **0.003**

b) 9 أسئلة صحيحة الإجابة؟ **0.00003**

c) 0 سؤال صحيح الإجابة؟ **0.056**

d) 3 أسئلة صحيحة الإجابة؟ **0.25**

34) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية 90% ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أُجريت العملية ثلاث مرات؟ **D**

A) 0.001

B) 0.1

C) 0.9

D) 0.999

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب أن يجد احتمال وجود ثلاثة أولاد ذكور عند عائلة إذا علم أن لدى هذه العائلة 4 أطفال.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 7-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

تنبيه!

تجنّب الأخطاء شجّع الطلاب على التفكير في معقولية حلولهم. أكد على حقيقة أن معظم البيانات تتمركز عادةً حول المتوسط.

إجابات:

18) 0.744 أو 74.4% تقريبًا

19) 0.322 أو 32.2% تقريبًا

20) 0.767 أو 76.7% تقريبًا

21) 0.99 أو 99% تقريبًا

22) 0.526 أو 52.6% تقريبًا

23) 0.889 أو 88.9% تقريبًا

25) في بعض الأحيان، إذا كانت الحادثة تتألف من عدد كبير من العناصر مقارنة بالحادثة المتممة، فإننا نقوم بإيجاد احتمال الحادثة المتممة، ونطرح الناتج من الواحد الصحيح، فمثلاً: عندما يكون فضاء العينة مكوّنًا من الأعداد 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ، وأردنا إيجاد احتمال الحصول على الأعداد 3, 4, 5, 6, 7 فإنه بدلًا من إيجاد الاحتمال لكل من الأعداد 3 – 7 وجمع هذه الاحتمالات، يكون من الأفضل إيجاد الاحتمال لكل من الأعداد الثلاثة 0, 1 , 2 ، وطرح الناتج من العدد 1.

26) إجابة ممكنة: إذا عُلم أن نسبة القطع المعيبة في مصنع 3%، واشترى تاجر 500 قطعة اختيرت عشوائيًّا، فإنه يستطيع أن يجد احتمال وجود 10 قطع معيبة من بينها، حيث $n = 500, p = 3\%, q = 97\%$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) — دون

الاسم: التاريخ:

7-6 تدريبات إعادة التعليم

التوزيعات ذات الحدين

تجارب ذات الحدين

تجربة ذات الحدين	تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية: • لكل محاولة نتيجتان فقط . • هناك عدد محدد من المحاولات . • المحاولات مستقلة . • احتمالات نواتج كل محاولة ثابتة .

مثال 1

غُذّت قطعة نقد ليكون احتمال ظهور الشعار 90% في كل مرة تُلقى فيها القطعة. فما احتمال الحصول على 7 شعارات في 8 رميات؟

احتمال الحصول على شعار $\frac{9}{10}$ ، واحتمال الحصول على كتابة $\frac{1}{10}$ ، لذا يوجد ${}_8C_7$ طريقة لاختيار 7 شعارات .

$$P(\text{7 شعارات}) = {}_8C_7 \left(\frac{9}{10}\right)^7 \left(\frac{1}{10}\right)^1$$
$$= 8 \cdot \frac{9^7}{10^8}$$
$$\approx 0.38$$

احتمال الحصول على 7 شعارات من 8 رميات يساوي تقريبًا 38%.

تمارين

1) **بحرة سلة** احتمال أن يحرز ماهر نقطة لكل رمية حرة 0.72 ، وفي إحدى مراحل التدريب رمى من خط المنطقة الحرة 8 رميات.
   a) ما احتمال أن يحرز 6 نقاط بالضبط؟ **31% تقريبًا**
   b) ما احتمال أن يحرز 6 نقاط على الأقل؟ **60% تقريبًا**

2) **مدرسة** يحاول معلم أن يضع 4 أو 5 بدائل لكل سؤال من نوع اختيار من متعدد، ويريد أن يُقلل من احتمال الحصول على الدرجات بمجرد التخمين .
   a) ما احتمال أن يحصل الطالب على 60% على الأقل باستعمال التخمين في اختبار مكون من 5 أسئلة لكل منها أربعة بدائل؟ **10.4% تقريبًا**
   b) ما احتمال أن يحصل الطالب على 60% على الأقل باستعمال التخمين في اختبار من خمسة أسئلة لكل منها 5 بدائل ؟ **5.8% تقريبًا**

3) **تزلج** يسقط متدرب في أثناء تدربه على التزلج على الجليد 15% من المرات التي يحاولها. وفي إحدى تدريباته حاول 20 مرة.
   a) ما احتمال أن يسقط مرة واحدة؟ **14% تقريبًا**
   b) ما احتمال أن يسقط 4 مرات؟ **18% تقريبًا**

تدريبات إعادة التعليم (26) — دون

الاسم: التاريخ:

7-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

التوزيعات ذات الحدين

التوزيع ذو الحدين يمكن استعمال نظرية ذات الحدين لإيجاد الاحتمال في الحالات التي لها نتيجتان ممكنتان فقط، ويمكن إيجاد معاملات الحدود في مفكوك ذات الحدين باستعمال التوافيق .

نظرية ذات الحدين ℒ الاحتمالات

احتمال الحصول على x نجاح في n من التجارب المستقلة، $P(x) = {}_nC_x\, p^x\, q^{n-x}$ ، حيث p احتمال النجاح، q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة. $(p + q = 1)$

مثال

ما احتمال أن يظهر 3 شعارات و 3 كتابات عند رمي 6 قطع نقدية؟

يوجد نتيجتان ممكنتان ومتساويتا الاحتمال هما الشعار (L)، والكتابة (T)، وإلقاء 6 قطع نقدية تمثّل أحداثًا مستقلة. وعند فك $(L+T)^6$ فإن الحدود التي تحتوي L^3T^3 تمثل 3 شعارات و 3 كتابات، وتستعمل لإيجاد الاحتمال المطلوب. من خلال نظرية ذات الحدين معامل L^3T^3 هو ${}_6C_3$.

$$P(L) = \frac{1}{2} \text{ , } P(T) = \frac{1}{2} \qquad P(\text{3 شعارات و3 كتابات}) = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$= \frac{20}{64}$$
$$= \frac{5}{16}$$

احتمال الحصول على 3 شعارات و3 كتابات هو $\frac{5}{16}$ أو 0.3125.

تمارين

1) **نقود** أوجد احتمال كل مما يأتي إذا ألقيت قطعة نقدية 8 مرات:
   a) (5 شعارات بالضبط) P — **22% تقريبًا**
   b) (شعاران بالضبط) P — **11% تقريبًا**
   c) (عدد زوجي من الشعارات) P — **50%**
   d) (6 شعارات على الأقل) P — **14% تقريبًا**

2) **صحيح – خطأ** أجاب توفيق عن اختبار مكون من 10 أسئلة بجواب عنها بـ (صحيح أو خطأ). عشوائيًا ودون معرفة أي شيء عن موضوع الاختبار. أوجد كلًا من الاحتمالين الآتيين:
   a) أن يحصل توفيق على 8 إجابات صحيحة . — **$\frac{45}{1024}$ أو 0.044 تقريبًا**
   b) أن يحصل توفيق على 3 إجابات صحيحة على الأكثر. — **$\frac{11}{64}$ أو 0.172 تقريبًا**

3) ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 أربع مرات، فما احتمال الحصول على العدد 6 مرتين بالضبط؟
$\frac{25}{216}$ أو 0.116 تقريبًا

تدريبات حل المسألة (28) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

7-6 تدريبات حل المسألة

التوزيعات ذات الحدين

1) **جينات** يجري عامر بعض التجارب على الجينات الوراثية وقبل أن يجري إحدى التجارب أراد أن يحسب نظريًّا احتمالات بعض النواتج. أحد الحسابات يتطلب إيجاد مفكوك $(p+q)^4$. في المفكوك؟
$p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$

2) **ألعاب** احتمال أن تفوز سميرة $\frac{2}{3}$ ، فإذا لعبت 7 أشواط، فما احتمال أن تفوز في أربعة منها بالضبط؟ قرب الجواب لأقرب جزء من ألف.
0.256 تقريبًا

3) **أعطال** تنتج شركة مكتشفات كهربائية للدوائر إلكترونية، فإذا كان احتمال عطل المكتشف 1 من كل 1000. ويحتوي صندوق على 10000 مكتشف، فاكتب عبارة تمثّل احتمال أن يكون 10 من بينها غير صالحة.
$10000C_{10}\left(\frac{1}{1000}\right)^{10}\left(\frac{999}{1000}\right)^{9990}$

4) يستعمل ماجد الحافلات في الذهاب إلى عمله والإياب منه. وفي الفترة الصباحية تكون حركة الحافلات كبيرة، وهناك فرصة 1 إلى 8 لأن يجد حافلة بانتظاره عند وصوله الموقف. فما احتمال أن يجد حافلة بانتظاره مرتين على الأقل خلال فترة 5 أيام من دوامه الأسبوعي؟ قرب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.
0.121 تقريبًا

5) **رياضة** فرصة فوز أحد الأندية الرياضية هو 75% في كل مباراة من مبارياته السبع عشرة في هذا الموسم. فما احتمال أن يفوز في 13 مباراة منها على الأقل؟ قرب الجواب إلى أقرب جزء من ألف.
0.574

6) **شطرنج** يلعب عبدالرحمن الشطرنج، إذا لعب 3 مرات، وكان احتمال فوزه في المرة الواحدة 64%، فأجب عما يأتي (قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف):
   a) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بالمرات الثلاثة؟ **0.262 تقريبًا**
   b) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بمرتين على الأقل؟ **0.705 تقريبًا**
   c) ما احتمال أن يفوز عبدالرحمن بمرة واحدة فقط؟ **0.249 تقريبًا**

التدريبات الإثرائية (29) — فوق

الاسم: التاريخ:

7-6 التدريبات الإثرائية

توزيعات متعددة الحدود

متعددة الحدود هي تعميم لذات الحدين، فمثلًا $(a+b+c)^2$ هي متعددة حدود. وإحدى طرق إيجاد المعاملات هي من خلال عملية الضرب المباشر واستعمال خاصية التوزيع. وذلك بأن تأخذ كل حدٍّ في العامل الأول وتضربه في جمع حدود العامل الثاني، وتجمع الحدود المتماثلة، (لاحظ أن مجموع الأسس في كل حد يساوي 2).

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$$
$$= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$$
$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

ومن أهمية هذا المفكوك هو ربط كل حدٍّ بتجزئة معينة، فمثلًا التجزئة $\{1, 0, 1\}$ تمثّل الحدَّ ac في المفكوك، والذي يمكن أن يكتب على الصورة $a^1b^0c^1$، في حين أن التجزئة $\{0, 2, 0\}$ تمثل b^2 . ويمكن حساب معامل كل حد باستعمال القانون :

$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!}$، حيث n الأس و $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$. تذكر أن $0! = 1$.

الحد	التجزئة	المعامل
a^2	$\{2,0,0\}$	$\frac{2!}{2!\,.\,0!\,.\,0!} = 1$
b^2	$\{0,2,0\}$	$\frac{2!}{0!\,.\,2!\,.\,0!} = 1$
c^2	$\{0,0,2\}$	$\frac{2!}{0!\,.\,0!\,.\,2!} = 1$
ab	$\{1,1,0\}$	$\frac{2!}{1!\,.\,1!\,.\,0!} = 2$
ac	$\{1,0,1\}$	$\frac{2!}{1!\,.\,0!\,.\,1!} = 2$
bc	$\{0,1,1\}$	$\frac{2!}{0!\,.\,1!\,.\,1!} = 2$

1) أوجد جميع تجزئات $(x+y+z)^3$.
$\{3,0,0\}, \{0,3,0\}, \{0,0,3\}, \{2,0,1\}, \{2,1,0\}, \{1,2,0\}, \{1,0,2\}, \{0,1,2\}, \{0,2,1\}, \{1,1,1\}$

2) أوجد معاملات مفكوك $(x+y+z)^3$ المرتبطة بكل تجزئة.
$\{3,0,0\} \to 1, \{0,3,0\} \to 1, \{0,0,3\} \to 1, \{2,0,1\} \to 3, \{2,1,0\} \to 3, \{1,2,0\} \to 3,$
$\{1,0,2\} \to 3, \{0,1,2\} \to 3, \{0,2,1\} \to 3, \{1,1,1\} \to 6$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 7

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (17)

دون ضمن فوق

7-6 التوزيعات ذات الحدين

1) قطع نقود، إذا أُلقيت قطعة نقد 6 مرات متتالية. أوجد كلًّا مما يأتي:

a) (ظهور الكتابة 3 مرات)P $\frac{5}{16}$

b) (ظهور الكتابة 5 مرات)P $\frac{3}{32}$

c) (عدم ظهور الكتابة)P $\frac{1}{64}$

d) (ظهور الكتابة 4 مرات على الأقل)P $\frac{11}{32}$

2) ضربات حرة، احتمال أن يحرز لاعب كرة قدم هدفًا من ضربة حرة $\frac{2}{3}$. إذا ضرب 5 ضربات حرة، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

a) (عدم إحراز أي هدف)P $\frac{1}{243}$

b) (إحراز أهداف من جميع الضربات)P $\frac{32}{243}$

c) (إحراز هدفين)P $\frac{40}{243}$

d) (إحراز هدفين على الأكثر)P $\frac{17}{81}$

3) سلامة مرورية، أشارت دراسة أن 73% ممن يقودون السيارات، يستعملون حزام الأمان. إذا اختير 10 أشخاص عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون نصفهم يستعملون حزام الأمان؟ 7.5% تقريبًا

4) مواصلات، في استطلاع للرأي أُجري مؤخّرًا، تبيّن أن 80% من سكان إحدى المناطق يستعملون سياراتهم الخاصة في الذهاب إلى أعمالهم. إذا تم اختيار ثلاثة أشخاص من سكان هذه المنطقة عشوائيًّا وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون سياراتهم الخاصة للذهاب إلى أعمالهم.

a) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يدل على عدد الأشخاص الذين أجابوا بنعم.

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.008	0.096	0.384	0.512

b) أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع. وفسّر معنى المتوسط في سياق هذا الموقف.

المتوسط 2.4 ، والتباين 0.48 تقريبًا، والانحراف المعياري 0.69 تقريبًا، بالمتوسط 2 من كل 3 أشخاص يتم اختيارهم عشوائيًّا من سكان هذه المنطقة يستعملون سياراتهم الخاصة للوصول إلى عملهم.

الاحتمال والإحصاء

17

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 5-1، فذكِّرهم باستعمال هذه الصفحات مرجعًا؛ ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات للفصل 7 ، ص (52)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

العينة والمجتمع (الدرسان 2-7, 1-7)

- تكون العينة متحيزة إذا صُمّمت لصالح نواتج معينة .
- تكون العينة غير متحيزة إذا كانت عشوائية.

الارتباط والسببية

- عندما يوجد ارتباط بين ظاهرتين فإن كلًّا منهما تؤثر في الأخرى، وعندما يوجد سببية، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى.

هامش خطأ المعاينة

- عند سحب عينة حجمها n من مجتمع، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$.

الانحراف المعياري	
المجتمع	العينة
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$

الاحتمال المشروط (الدرس 3-7)

- الاحتمال المشروط: هو احتمال وقوع حادثة معينة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.
- الجداول التوافقية : هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا يسمى تكرارًا نسبيًّا، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط .

التوزيعات الاحتمالية (الدروس 6-7, 5-7, 4-7)

المفهوم	الوصف
منفصل	عدد محدّد من النواتج الممكنة
متصل	عدد غير محدّد من النواتج الممكنة
طبيعي	منحنيات متماثلة
ملتوي	منحنيات غير متماثلة
تجربة ذات الحدين	تجربة احتمالية يكون لها نتيجتان فقط

المفردات

الدراسة المسحية ص 86
المجتمع ص 86
تعداد عام ص 86
العينة ص 86
المتحيزة ص 86
غير المتحيزة ص 86
الدراسة القائمة على الملاحظة ص 87
الدراسة التجريبية ص 87
المجموعة التجريبية ص 87
المجموعة الضابطة ص 87
الارتباط ص 88
السببية ص 88
التحليل الإحصائي ص 92
المتغير ص 92
بيانات في متغير واحد ص 92
مقياس النزعة المركزية ص 92
المَعْلَمة ص 92
الإحصائي ص 92
هامش خطأ المعاينة ص 93
مقاييس التشتت ص 93
التباين ص 93
الانحراف المعياري ص 93
الاحتمال المشروط ص 97
الجدول التوافقي ص 98
التكرار النسبي ص 98
النجاح ص 102
الفشل ص 102
المتغير العشوائي ص 103
المتغير العشوائي المنفصل ص 103
التوزيع الاحتمالي ص 103
التوزيع الاحتمالي المنفصل ص 103
الاحتمال النظري ص 104
الاحتمال التجريبي ص 104
القيمة المتوقعة ص 104
التوزيع الاحتمالي المتصل ص 108
التوزيع الطبيعي ص 108
التوزيع الملتوي ص 108
تجربة ذات حدين ص 114
التوزيع ذو الحدين ص 115

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط فضاء العينة باحتمالات نواتج فضاء العينة .
2) عندما توجد علاقة بين حادثتين، فإنه يوجد ارتباط بينهما.
3) الدراسة المسحية تكون متحيزة إذا صُمّمت لصالح نواتج معينة.
4) إذا أُعطيت مجموعة معالجة شكلية لا أثر لها في النتيجة، فإن هذه المجموعة تُسمّى المجموعة الضابطة .
5) يُحدّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تبين الفرق في الاستجابة بين العينة والمجتمع .

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

7-1 الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة (الصفحات 90 - 86)

حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك:

6) يتم اختيار كل عاشر متسوِّق يخرج من مجمع تجاري؛ لمعرفة إن كان مرتاحًا أو مطمئنًا لشرائه من المجمع. انظر الهامش.

7) يتم اختيار كل عاشر طالب يخرج من المدرسة؛ لمعرفة أحب المواد الدراسية إليه في المدرسة. انظر الهامش.

8) يطلب أحد مطاعم الوجبات السريعة إلى زبائنه أن يكملوا استبانة حول أفضل مطعم للوجبات السريعة. انظر الهامش.

حدِّد ما إذا كانت كل حالة تحتاج إلى دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة تجريبية.

9) اختر 100 طالب نصفهم يعمل جزئيًّا بعد الدراسة، وقارن بين الأوساط لدرجاتهم. دراسة قائمة على الملاحظة

10) اختر 100 شخص، وقسّمهم إلى نصفين عشوائيًّا، ودع إحدى المجموعتين تتناول وجبات قليلة الدسم، بينما تتناول الأخرى وجبات اعتيادية. وقارن النتائج؛ لمعرفة أثر الوجبات القليلة الدسم على صحة الجسم. دراسة تجريبية

مثال 1

اختار صاحب وكالة للسيارات 100 زبون عشوائيًّا قاموا بإجراء الصيانة الدورية لسياراتهم في الوكالة حديثًا، وطرح سؤالًا عليهم حول نوعية الخدمة التي تُقدّمها الوكالة. هل يُمثّل الزبائن الذين تم اختيارهم عينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

غير متحيزة ؛ لأنّ لكل شخص من زبائن الوكالة الفرصة نفسها لأن يكون من بين العينة.

مثال 2

وزّع معلم الرياضيات طلابه مجموعتين عشوائيًّا، وطبّق عليهم اختبارًا، حيث طلب من المجموعة الأولى أداء تمارين رياضية قبل الاختبار، بينما أعطى المجموعة الثانية الاختبار دون أن يطلب منهم تأدية أي تمارين رياضية، وقارن نتائجهم في الاختبار. هل هذه الدراسة دراسة مسحية أم دراسة قائمة على الملاحظة أم دراسة تجريبية؟ وإذا كانت تجريبية، فاذكر كلًّا من المجموعتين الضابطة والتجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة متحيزة أم لا.

دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي الأولى، والضابطة هي الثانية، والدراسة التجريبية متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي اليها.

7-2 التحليل الإحصائي (الصفحات 96 - 92)

11) **فصول السنة:** في دراسة مسحية عشوائية شملت 3446 شخصًا، ذكر 34% منهم أن الربيع هو أفضل فصول السنة لديهم. ما هامش الخطأ في المعاينة؟ $\pm 1.7\%$ تقريبًا

12) **سباحة:** في أثناء تمرين السباحة، قاس خالد الأزمنة التي استغرقها في كل مرة لقطع مسافة 400 m، وسجل النتائج الممثلة في الجدول أدناه. أوجد الانحراف المعياري للأزمنة التي حققها.

6.37 ثوانٍ

الزمن بالثواني					
307	312	308	320	311	301
302	304	308	309	315	313
306	314	316	313	313	311
309	306	310	319	326	329
309	314	318	315	318	320

مثال 3

قال 12% من عينة حجمها 2645 شخصًا: إن كرة القدم هي الأكثر تفضيلًا لديهم. ما هامش خطأ المعاينة ؟

هامش خطأ المعاينة $= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

$= \pm \frac{1}{\sqrt{2645}}$

$\approx \pm 0.019$

هامش خطأ المعاينة $\pm 1.9\%$ تقريبًا.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكِّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 7 ص (46)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات :

6) غير متحيزة؛ لكل متسوِّق في المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

7) غير متحيزة؛ لكل طالب في المدرسة الفرصة نفسها ليكون في العينة.

8) متحيزة؛ لأن زبائن المطعم الذين تُقدَّم لهم الاستبانة غالبًا يفضلون هذا المطعم.

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

7-3 الاحتمال المشروط (الصفحات 100 - 97)

13) كرة طائرة: يحصل طارق على نقطة في 65% من مرات قيامه بضربة الإرسال، ما احتمال ألا يحصل على نقطة في ضربة الإرسال الثانية علمًا بأنه حصل على نقطة في ضربة الإرسال الأولى؟ 35%

14) في الجدول أدناه إذا اختير طالب عشوائيًّا فأجب عما يأتي:

	يلبس نظارات	لا يلبس نظارات
الأول الثانوي	6	15
الثاني الثانوي	5	22

a) ما احتمال أن يكون الطالب من الأول الثانوي علمًا بأنه يلبس نظارات؟ $\frac{6}{11}$

b) ما احتمال أن يكون من الذين لا يلبسون النظارات علمًا بأنه من الثاني الثانوي؟ $\frac{22}{27}$

مثال 4

دراسة: أوجد احتمال أن يأخذ طالب اختير عشوائيًّا حصة إضافية علمًا بأنه طالب جديد.

	يأخذ حصصًا إضافية (E)	لا يأخذ حصصًا إضافية (X)
طالب جديد (N)	126	84
طالب قديم (O)	98	72

$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)}$ قانون الاحتمال المشروط

$= \frac{126}{380} \div \frac{210}{380}$ $P(E \cap N) = \frac{126}{380}$, $P(N) = \frac{210}{380}$

$= \frac{126}{210} = \frac{3}{5}$ بسّط

7-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية (الصفحات 107 - 102)

قرعة الألعاب: خلط يوسف بطاقات الألعاب جميعها في صندوق، حيث تشكّلت البطاقات من 12 بطاقة لكرة القدم، 8 بطاقات لكرة الطائرة، 5 بطاقات لكرة السلة وجميعها متماثلة. إذا تم اختيار 3 بطاقات بصورة عشوائية، فأوجد احتمال كل من:

15) P(3 بطاقات للكرة الطائرة) $\frac{14}{575}$

16) P(3 بطاقات لكرة القدم) $\frac{11}{115}$

17) P(بطاقة لكرة السلة وبطاقتان للكرة الطائرة) $\frac{7}{115}$

18) P(بطاقتان لكرة السلة وبطاقة لكرة القدم) $\frac{6}{115}$

19) بطاقات: مجموعة بطاقات مرقّمة مكوّنة من 3 بطاقات عليها الرقم 9، 4 عليها العدد 10، 5 عليها الرقم 6، 4 عليها الرقم 5، وبطاقتين على كلٍّ منهما الرقم 2، وبطاقة عليها الرقم 3. إذا سحبت بطاقة عشوائيًّا من مجموعة البطاقات، فما القيمة المتوقّعة لهذه البطاقة؟ 6.5 تقريبًا

مثال 5

لدى حمزة 5 كتب في حقيبته، هي الرياضيات والكيمياء واللغة الإنجليزية واللغة العربية والتاريخ. إذا قام بترتيبها على رفّ في صف واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن تأتي كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار ؟

الخطوة 1 حدّد عدد النجاحات.

${}_3P_3$ مكان الكتب الثلاثة إلى اليسار

${}_2P_2$ أمكنة الكتابين الآخرين

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s .

$s = {}_3P_3 \cdot {}_2P_2 = 3! \cdot 2! = 12$

الخطوة 2 أوجد عدد عناصر فضاء العينة $s + f$.

${}_5P_5 = 5! = 120$ $s + f = 120$

وتمثل عدد الترتيبات الممكنة للكتب الخمسة على الرف.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{12}{120} = 0.1$ احتمال النجاح

احتمال وضع كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار يساوي 0.1 أو 10%.

122 الفصل 7 الاحتمال والإحصاء

7-5 التوزيع الطبيعي (الصفحات 112 - 108)

في كلٍّ من السؤالين الآتيين توزيع طبيعي بمتوسط وانحراف معياري. أوجد الاحتمال المطلوب في كل منهما.

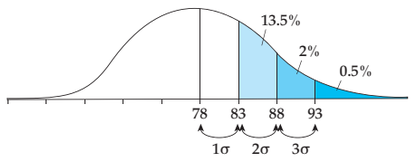
20) $\mu = 121, \sigma = 9, P(X > 103)$ **97.5%**

21) $\mu = 181, \sigma = 12, P(X > 169)$ **84%**

22) زمن الركض: أزمنة الركض لمسافة 40 m لفريق كرة القدم المدرسي تتوزَّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 4.7 s، وانحراف معياري 0.15 s . ما نسبة اللاعبين الذين يقل زمن قطعهم المسافة عن 4.4 s؟ **2.5%**

مثال 6

تتوزّع مجموعة من البيانات توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 78، وانحراف معياري 5 . أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X اختيرت عشوائيًّا عن 83 .



بما أن $\mu + \sigma = 78 + 5 = 83$؛ لذا فإن الاحتمال المطلوب يكون مساويًا $13.5\% + 2\% + 0.5\% = 16\%$

7-6 التوزيعات ذات الحدين (الصفحات 119 - 114)

23) أشخاص مشهورون: في إحدى الدراسات تَبيّن أن 63% من الشباب يفضلون أداء أحد الرياضيين المشهورين. إذا اختير 5 من الشباب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يفضلون أداء هذا الرياضي أو لا.

a) إذا مثَّل المتغير العشوائي X عدد الشباب الذين يفضِّلون أداء هذا الرياضي، فكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثِّله بالأعمدة. **انظر الهامش.**

b) أوجد احتمال أن يكون أكثر من 2 من الشباب يفضِّلون أداء هذا الرياضي. **73.3%**

24) ساعات: أشارت دراسة مسحية للبالغين أن ما نسبته 74% من البالغين يلبسون ساعة يد. وقد قام بكر باستطلاع رأي 200 شخص من البالغين عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون 160 شخصًا على الأقل ممن شملهم الاستطلاع يلبسون ساعة يد؟ **2.5%**

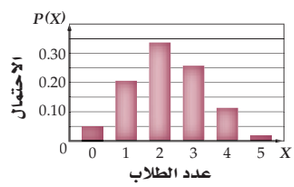
مثال 7

رسم هندسي: أُجريت دراسة في إحدى المدارس، فَتبيّن أن 45% من الطلاب يستطيعون رسم مخروط. إذا تم اختيار 5 منهم بشكل عشوائي، ومثَّل المتغير العشوائي X عدد الطلاب الذين لديهم مقدرة على رسم مخروط، فأجب عمّا يأتي:

a) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X، ومثِّله بالأعمدة.

في هذه المسألة $n = 5, p = 0.45, q = 1 - 0.45 = 0.55$.

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0.050	0.206	0.337	0.276	0.113	0.018



b) أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع.

$\mu = np = 5(0.45) = 2.25$

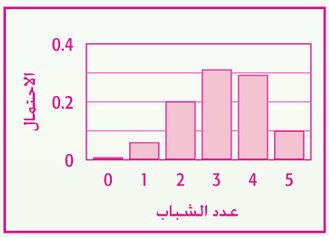
$\sigma^2 = npq = 5(0.45)(0.55) = 1.2375$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.2375} \approx 1.1124$

إجابة:

23a)

X	P(X)
0	0.007
1	0.059
2	0.201
3	0.342
4	0.291
5	0.099



إجابات:

25b) هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم اختيار المجموعتين عشوائيًّا، وإحدى المجموعتين (التجريبية) خضعت لدورة تدريبية في اللغة الإنجليزية، والأخرى (الضابطة) لم تخضع لأي دورة تدريبية، وهي دراسة تجريبية متحيزة؛ لأن كل موظف يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

28)

X	0	1	2	3
$P(X)$	0.125	0.375	0.375	0.125

تطبيقات ومسائل

25) حدِّد ما إذا كان كل موقف مما يأتي يمثِّل دراسة تجريبيّة، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبيّة، ثم بيّن إن وجد تحيز أو لا: (الدرس 1-7)

a) اختر 100 طالب نصفهم يأتي إلى المدرسة مبكرًا، وقارن بين تحصيلهم في مادة معينة. **هذه دراسة قائمة على الملاحظة**

b) اختر 100 موظف، واقسمهم نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى دورة في اللغة الإنجليزية، أما الأخرى فلا تخضعها لأي دورة تدريبية. **انظر الهامش.**

26) اختير 10 طلاب بصورة عشوائية من الصف الثالث الثانوي، وقيست أطوالهم بالسنتمترات فكانت كما يلي:

170, 165, 155, 168, 177, 180, 168, 167, 160, 161

بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم اوجد الانحراف المعياري لهذه الأطوال. (الدرس 2-7)
7.55 تقريبًا

27) سجِّلت أعداد الطلاب ذوي العيون الزرقاء أو غير الزرقاء في أحد المعاهد.

	سنة أولى	سنة ثانية
عيون زرقاء	5	10
عيون ليست زرقاء	95	80

إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن تكون عيونه زرقاء علمًا بأنه في السنة الثانية. (الدرس 3-7) $\frac{1}{9}$

28) رُميت 3 قطع نقد مرة واحدة. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، ثم مثِّله بالأعمدة. (الدرس 4-7) **انظر الهامش.**

29) سكة حديد: إذا كانت الفترات الزمنية للانتظار التي يقضيها 16000 مسافر في إحدى محطات سكك الحديد موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 72 min، وانحراف معياري 15 min، فأوجد نسبة المسافرين الّذين ينتظرون أكثر من 42 min. (الدرس 5-7)
97.5% تقريبًا

30) إجازات: في دراسة مسحية سابقة وجد أن ما نسبته 70% من العاملين يأخذون إجازاتهم السنوية في الصيف، لكن محسنًا يعتقد أن هذا الرقم مبالغ فيه، فقام باستطلاع رأي 650 عاملًا عشوائيًّا. ما احتمال ألا يأخذ أكثر من 420 عاملًا إجازاتهم في الصيف؟ (الدرس 6-7) **0.5% تقريبًا**

الفصل 7 اختبار الفصل

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية تصف ارتباطًا أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

1) عندما يرى محمود البرق، فإنه يسمع الرعد بعد ذلك.

2) عندما يركض نايف عند مدخل المدرسة، فإنه يكون متأخرًا عن المدرسة.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك: 3, 4) انظر الهامش.

3) استطلع صاحب مخزن يبيع من خلال الشبكة العنكبوتية زبائنه عن أهمية وجود الإنترنت في المنزل.

4) يختار معلم 5 أسماء لطلاب يدرسهم؛ لإلقاء كلمة الصباح بعد أن يقوم بوضع الأسماء جميعها في سلة ويخلطها .

أي مقاييس النزعة المركزية يصف كلًّا من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

5)

درجات اختبار				
3	3	3	4	4
4	4	5	5	4
4	3	3	3	3
4	4	3	3	3
3	4	3	5	4

المتوسط؛ لأن البيانات لا تتضمّن قيمًا متطرفة.

6)

الطول بالبوصة				
64	61	62	64	61
83	66	61	65	63
61	65	62	63	84
61	63	66	62	61

الوسيط؛ لأن البيانات تتضمن قيمًا متطرفة، ولا توجد فجوات كثيرة في المنتصف

فيما يأتي المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات تتوزّع توزيعًا طبيعيًا، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منها:

7) $\mu = 54, \sigma = 5, P(X > 44)$ 97.5%

8) $\mu = 35, \sigma = 2.4, P(X < 37.4)$ 84%

يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية زرقاء، و8 كرات حمراء، و 12 خضراء، وجميعها متماثلة، سحبت كرتان واحدة تلو الأخرى، أوجد الاحتمال لكل من:

9) الكرة الثانية حمراء، علمًا بأن الكرة الأولى زرقاء دون إرجاع. $\frac{8}{29}$

10) الكرة الثانية زرقاء، علمًا بأن الكرة الأولى خضراء مع الإرجاع. $\frac{1}{3}$

11) **اختبارات:** أعطى المعلم أيمن طلابه الفرصة لإعادة أحد الاختبارات، كما عقد درس مراجعة اختياري يوم الخميس قبل إعادة الاختبار لمن يرغب. بعض الطلاب تحسَّن أداؤهم، والبعض الآخر لم يتحسن، والجدول أدناه يبين ذلك. إذا اختير طالب عشوائيًا، فأوجد:

	تحسن	لم يتحسن
حضر المراجعة	12	3
لم يحضر المراجعة	4	6

a) احتمال أن يكون قد تحسّن علمًا بأنه حضر المراجعة. $\frac{12}{15}$ أو 80%

b) احتمال أنه لم يحضر المراجعة علمًا بأنه لم يتحسّن. $\frac{6}{9} \approx 67\%$

12) **اختيار من متعدد:** شارك 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، وَ 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في السحب على 5 جوائز. إذا كان السحب عشوائيًا، فما احتمال أن يكون الرابحون 3 من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ D

A 0.46% تقريبًا

B 0.25% تقريبًا

C 70% تقريبًا

D 30% تقريبًا

13)

X	0	1	2
$P(X)$	0.1	0.6	0.3

13) سُحبت كرتان معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات زرقاء، وكرتين حمراوين. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

14) **طقس:** أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام السبعة القادمة 40% . أوجد احتمال أن يسقط المطر في يومين من هذه الأيام على الأقل. 84.1% تقريبًا

15) **حديقة:** يخطط يعقوب لزرع 24 شجرة أزهار، إذا علمت أن البذور التي أحضرها لأزهار من اللونين الأبيض والأزرق، وأنها لم تزهر بعد، ولكنه يعلم أن احتمال الحصول على زهرة زرقاء 75% ، فما احتمال حصوله على 20 زهرة زرقاء على الأقل؟ 0.24665تقريبًا أو 24.7%

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة، ص (61–53)

إجابات:

1) ارتباط: على الرغم من أن البرق يسبق الرعد دائمًا، ولكن هذا لا يعني أن البرق هو الذي يسبب الرعد.

2) ارتباط: مع وجود علاقة بين الحدثين، إلا أن نايفًا قد يركض لسبب آخر.

3) متحيزة؛ لأن الناس الذين تم استطلاع آرائهم يرون أهمية كبرى لوجود الإنترنت، فهم يشترون من خلاله.

4) غير متحيزة؛ كل فرد في المجتمع له الفرصة نفسها ليكون في العينة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 7-1, 7-2, 7-3, 7-4, 7-5 , 7-6		
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (86)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

الدرس 1-7، ص (92)

25) إجابة ممكنة: ليس أيّ منهما، كلا التجربتين متحيّزتان؛ لأن الموجودين في المجموعة التجريبية يعلمون ذلك.

27) إجابة ممكنة: العينة العشوائية؛ تُسحب العينات العشوائية من المجتمع للحصول على عينة ممثّلة للمجتمع، وبغرض تجنّب التحيّز، يتم استعمال الإختيار العشوائي؛ لتحديد الأفراد في كل من المجموعتين التجريبية والضابطة، بحيث يكون لكل منهم الفرصة ذاتها ليكون ضمن أي من المجموعتين. كما يتم التأكد أن كل فرد لا يعرف إلى أي مجموعة ينتمي.

28a) إجابة ممكنة: دراسة مسحية تتناول استطلاع رأي 50 طالبًا في الصف الأول الثانوي حول الطريقة التي سيقررون بناءً عليها مسار التعليم الثانوي المفضل لهم.
العينة: سجّل طلاب المدرسة جميعهم في قائمة، واسحب عشوائيًّا 50 طالبًا .
موضوع الدراسة المسحية: طريقة تحديد الطالب خياره في مسار التعليم الثانوي الذي يرغب فيه على مقياس من 1 إلى 5 ، حيث يدل الرمز 1 على المعارضة بشدة، والرمز 5 على الموافقة بشدة.

28c) إجابة ممكنة: اختر عينة من 20 شخصًا عشوائيًّا مصابين بالرشح. أعطِ نصفهم علاجًا، وأعطِ النصف الآخر علاجًا شكليًّا، وقارن بين النتائج بعد 3 أسابيع . المجموعة التجريبية هي مجموعة الأشخاص الذين أُعطوا العلاج المقصود، والمجموعة الضابطة هم الذين أُعطوا علاجًا محايدًا (شكليًّا).

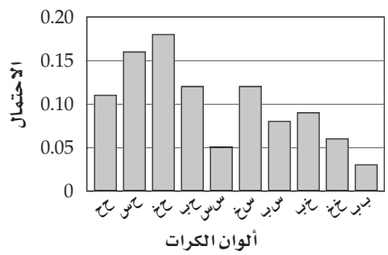
29) إجابة ممكنة: يمكن أن يحدث التحيّز في الدراسة التجريبية عندما يعلم الأفراد في المجموعة التجريبية أنها هي المجموعة التي ينتمون إليها. فمثلًا إذا علم أفراد مجموعة تجريبية أنهم يتعرّضون لعلاج بقصد زيادة مستوى الطاقة لديهم، فقد يحاولون التأثير في نتائج الدراسة، وإثبات أن العلاج فاعل أو غير فاعل، وكذلك إذا علم أفراد المجموعة الضابطة أنهم يأخذون علاجًا غير فاعل، فلن تكون لديهم الدافعية لاستكمال التجربة.

40) دراسة تجريبية: وضع الأشخاص في مجموعات عشوائية. تتضمن المجموعة التجريبية التي تقوم بالتدريبات الرياضية لمدة ساعة واحدة يوميًّا، وتتضمن المجموعة الضابطة من لايفعل ذلك.
الدراسة التجريبية متحيزة؛ لأن أفراد المجموعة التجريبية يعلمون أنهم يخضعون لدراسة. وأفراد المجموعة الضابطة أنهم لا يتدربون أسوة بأفراد المجموعة التجريبية.

الدرس 4-7، ص (108)

14a)

أحمر / أحمر	11%
أحمر / أسود	16%
أحمر / أخضر	18%
أحمر / أبيض	12%
أسود / أسود	5%
أسود / أخضر	12%
أسود / أبيض	8%
أخضر / أبيض	9%
أخضر / أخضر	6%
أبيض / أبيض	3%

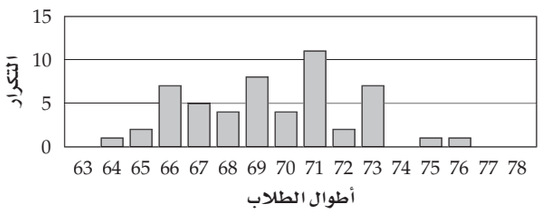


الدرس 5-7، ص (114)

18)

أطوال الطلاب بالبوصات							
70	65	71	69	66	71	72	73
70	69	73	66	72	69	68	71
70	67	73	71	71	67	69	65
71	68	68	73	66	69	66	67
66	73	64	67	71	71	73	67
73	75	71	71	76	69	69	66
68	71	69	66	70			

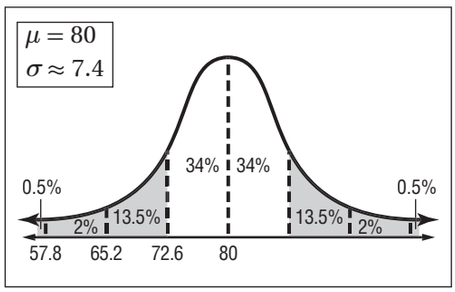
المتوسط للبيانات 69.47 in، الانحراف المعياري 2.73 in



الدرس 6-7 ، تحقق من فهمك 4، ص (120 - 119)

تحقق من فهمك 4

4)



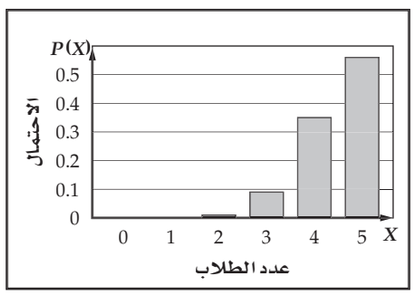
الدراسة التي قامت بها آية تعد تجربة ذات حدين فيها:
$n = 250, p = 0.32, q = 1\text{-}0.32 = 0.68$

وحيث إن:
$np = 250\ (0.32) = 80 > 5$
$nq = 250\ (0.68) = 170 > 5$

فإنه يمكننا استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:
$\mu = np = 80$
$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{250 \times 0.32 \times 0.68} \approx 7.4$

العدد 65 أصغر من المتوسط بمقدار انحرافين معياريين تقريبًا؛ لذا يكون احتمال أن يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية يساوي تقريبًا
$(13.5 + 34 + 50)\% = 97.5\%$ ،
وعليه فإن احتمال المتممة وهي ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية يساوي تقريبًا:
$1 - 97.5\% = 2.5\%$.

5)

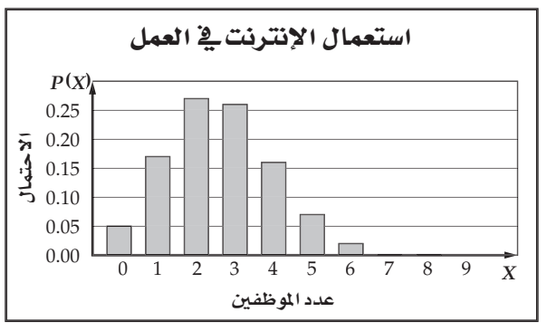


X	$P(X)$
0	0.00
1	0.00
2	0.01
3	0.09
4	0.35
5	0.56

$\mu \approx 4.45$؛ إجابة ممكنة: من بين 5 طلاب من طلاب المرحلة الثانوية 4 منهم تقريبًا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني،
$\sigma^2 \approx 0.49$، $\sigma \approx 0.70$

6)

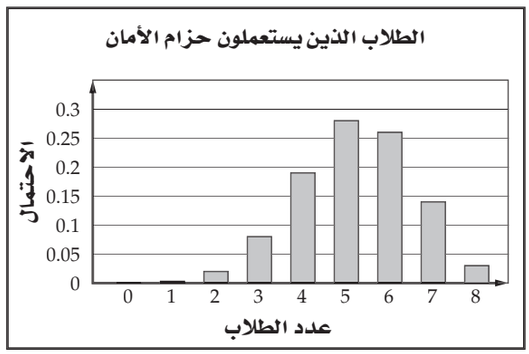
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.05	0.17	0.27	0.26	0.16	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00



$\mu \approx 2.60$؛ إجابة ممكنة: من بين 10 موظفين 3 منهم تقريبًا يستعملون الإنترنت في العمل $\sigma^2 \approx 1.92$ ، $\sigma \approx 1.39$

7)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X)	0.00	0.003	0.02	0.08	0.19	0.28	0.26	0.14	0.03

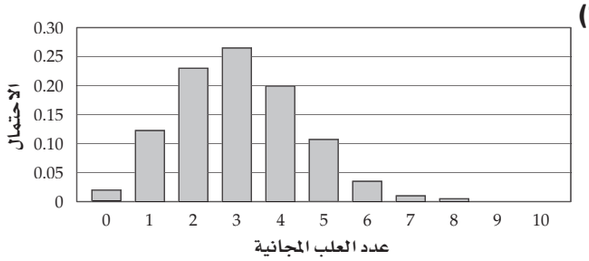


$\mu \approx 5.20$؛ إجابة ممكنة: من بين 8 طلاب من طلاب الجامعات الّذين يملكون سيارات خاصة 5 منهم تقريبًا يستعملون حزام الأمان في أثناء قيادة سياراتهم، $\sigma^2 \approx 1.82$، $\sigma \approx 1.35$

11a)

عدد الطلاب	الاحتمال
0	00.0064%
1	00.15%
2	01.5%
3	08.2%
4	24.6%
5	39.3%
6	26.2%

13)



الفصل 8 مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (127)

	الدرس 8-1 (4) حصص	الدرس 8-2 (4) حصص	استكشاف 8-3 حصة واحدة
العنوان	تقدير النهايات بيانيًّا	حساب النهايات جبريًّا	معمل الحاسبة البيانية ميل المنحنى
الأهداف	• تقدير نهاية الدالة عند قيم محددة. • تقدير نهاية الدالة عند المالانهاية .	• إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند قيم محددة . • إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند المالانهاية.	• استعمال الحاسبة البيانية لتقدير ميل منحنى .
المفردات الأساسية	النهاية من جهة واحدة، النهاية من جهتين	التعويض المباشر الصيغة غير المحددة	
تمثيلات متعددة			
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6,7) دون • تدريبات حل المسألة، ص (8) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (9) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (18) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (10, 11) دون • تدريبات حل المسألة، ص (12) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (13) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (19) دون ضمن فوق	
التقنيات لكل درس	مدونة	السبورة التفاعلية	الحاسبة البيانية
تنويع التعليم	ص (134 , 136)	ص (144 , 146)	

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

النهايات والاشتقاق

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(25) حصة	(4) حصص	(29) حصة

الدرس 8-3 (4) حصص	الدرس 8-4 (4) حصص	الدرس 8-5 (4) حصص	الدرس 8-6 (4) حصص
المماس والسرعة المتجهة	**المشتقات**	**المساحة تحت المنحنى والتكامل**	**النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**
• إيجاد معدّل التغيّر اللحظي لدالة عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة. • إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.	• إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات . • استعمال قانوني الضرب والقسمة في إيجاد المشتقات.	• تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات. • تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.	• إيجاد الدوال الأصلية. • استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد التكامل المحدد.
المماس معدل التغيّر اللحظي قسمة الفرق السرعة المتجهة اللّحظية	المشتقة الاشتقاق المعادلة التفاضلية المؤثر التفاضلي	التجزيء المنتظم التكامل المحدد الحد الأدنى الحد الأعلى مجموع ريمان الأيمن التكامل	الدالة الأصلية التكامل غير المحدد النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.
	ص(163)	ص(172)	ص(179)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (14, 15) دون • تدريبات حل المسألة، ص (16) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (17) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (20) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (18, 19) دون • تدريبات حل المسألة، ص (20) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (21) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (21) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (22, 23) دون • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (22) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26, 27) دون • تدريبات حل المسألة، ص (28) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (29) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (23) دون ضمن فوق
مدونة	الكاميرا التوثيقية	السبورة التفاعلية	مدونة
ص (152 , 154)	ص (161 , 163)	ص (166 , 170)	ص (177 , 179)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (155)

التقويم الختامي
• دليل الدراسة والمراجعة، ص (180 – 184)
• اختبار الفصل، ص (185)

الفصل 8 التقويم والمعالجة

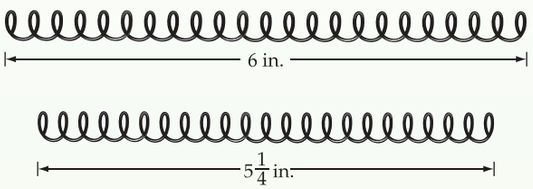
	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 8**	
	التهيئة للفصل 8 ، ص (127)	مخطط المعالجة، ص (127)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (68, 69)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (155)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8
	اختبار منتصف الفصل، ص (70)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (180-184)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8
	اختبار الفصل، ص (185)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 8**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (72-77)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 8
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (78 , 79)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (71)	
	اختبار الفصل ذو الإجابات المطولة ، ص (80)	
	اختبار تراكمي ، ص (81-83)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون أحضر إلى الفصل بعض النوابض الشديدة المقاومة عند ضغطها، واطلب إلى الطلاب ضغط نابض منها وقياس طوله. أكّد لهم أن طول النابض المضغوط يصل إلى قيمة معينة.



المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة تلخص الفروق بين التكامل المحدد وغير المحدد. على أن يضمّنوا فقراتهم ذكر أوجه الشبه والاختلاف في خطوات حساب كل نوع منهما.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب عمل لوحات تلخص قواعد الاشتقاق المختلفة، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل. وعلى الطلاب أن يضمّنوا لوحاتهم وصفًا لكل قاعدة اشتقاق ومثالًا عليها. قم بتثبيت اللوحات على جدار الفصل؛ لتعين الطلاب على تذكر القواعد.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب كتابة إرشادات لإيجاد مشتقات دوال مختلفة، وأمثلة على جميع قواعد الاشتقاق تستعمل فيها هذه الإرشادات.

الفصل 8 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 8

مواضيع ذات علاقة من الفصل 1

- تقدير النهايات؛ لدراسة اتصال دالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.
- إيجاد متوسط معدل التغيّر باستعمال القاطع.
- إيجاد متوسط معدل تغيّر دالة.

الفصل 8

- تقدير نهايات الدوال عند قيم محددة، أو عند المالانهاية.
- إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند قيم محددة وعند المالانهاية.
- إيجاد معدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية عند نقطة باستعمال المشتقات.
- استعمال قانوني الضرب والقسمة في إيجاد المشتقات.
- تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- إيجاد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.
- إيجاد الدوال الأصلية.
- استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد التكامل المحدد.

ما بعد الفصل 8

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- استعمال قواعد الاشتقاق؛ في حساب مشتقات دوال مختلفة.
- استعمال التكامل؛ في حساب المساحة بين منحنيي دالتين.
- إيجاد حجوم الأجسام الدورانية.

نظرة على الدروس

8-1 تقدير النهايات بيانيًّا

- يمكن تقدير نهايات كثير من الدوال من خلال تكوين جداول لقيمها، أو من خلال تمثيلها بيانيًّا، فإذا اقتربت نهاية الدالة من اليسار ونهايتها من اليمين من القيمة نفسها للدالة، فإن النهاية موجودة عند قيمة المتغير المناظرة.
- وإذا كان للدالة خط تقارب رأسي عند نقطة ما، فإن نهاية هذه الدالة غير معرّفة عند تلك النقطة، ويمكن وصف سلوك الدالة عند تلك النقطة بغير المحدود أو اللانهائي أو $\pm\infty$.

8-2 حساب النهايات جبريًّا

- تستعمل الطرائق الجبرية أيضًا لحساب النهايات، والخطوة الأولى لإيجاد النهاية هي محاولة تعويض القيمة التي يقترب منها المتغيّر في الدالة، فإذا كان ناتج التعويض صيغة غير محددة مثل $\frac{0}{0}$ ، فإن الطرق الجبرية الأخرى تستعمل لتبسيطها، بحيث يمكننا التعويض مرةً أخرى بشكل مباشر.
- ومن الطرائق الجبرية المستعملة في حساب النهايات، التحليلُ إلى العوامل لتبسيط المقدار بحيث يمكن حساب النهاية بالتعويض المباشر.
- توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية غير معرّفة، أو ∞ أو $-\infty$ ، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.

2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.

3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.

وكحالة خاصة من الدوال النسبية لدوال المقلوب، بحيث تكون $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$، كما أنه لأي عدد صحيح موجب n فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

النهايات والاشتقاق

8-3 المماس والسرعة المتجهة

إن معدل تغيّر الدالة الخطية هو نفسه ميل المستقيم الذي يمثّلها. ومعدل تغيّر دالة غير خطية عند نقطة ما عليها هو ميل مماس منحنى هذه الدالة عند تلك النقطة. وميل المماس هو معدل التغير اللحظي عند هذه النقطة. وتستعمل الصيغة $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ في إيجاد معدل التغيّر اللحظي عند النقطة $(x, f(x))$. وتستعمل أيضًا في إيجاد السرعة المتجهة اللحظية عند نقطة، أو في إيجاد معادلة تمكننا من حساب السرعة المتجهة اللحظية عند أي نقطةٍ على منحنى الدالة.

8-4 المشتقة

مشتقة الدالة هي النهاية التي تُستعمل في إيجاد ميل مماس منحنى هذه الدالة عند أي نقطة عليها، والاشتقاق هو الاسم الذي يُطلق على عملية إيجاد المشتقة، والجدول أدناه يلخص بعض قواعد الاشتقاق:

	القاعدة	مثال
مشتقة القوة	$f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$	إذا كان $f(x) = x^2$ فإن $f'(x) = 2x$
مشتقة الثابت	$f(x) = c$, $f'(x) = 0$	إذا كان $f(x) = 6$ فإن $f'(x) = 0$
مشتقة مضاعفات القوى	$f(x) = c\,x^n$, $f'(x) = cnx^{n-1}$	إذا كان $f(x) = 3x^2$ فإن $f'(x) = 6x$
مشتقة المجموع أو الفرق	$f(x) = g(x) \pm h(x)$, $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$	إذا كان $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$ فإن $f'(x) = 6x + 2 - 0 = 6x + 2$

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

يعرض هذا الدرس طريقتين لحساب المساحة تحت منحنى دالة.

الطريقة الأولى تتم من خلال جمع مساحات مستطيلات صغيرة تشكّل المساحة تحت المنحنى، وتزداد دقة هذه الطريقة كلما زاد عدد المستطيلات المستعملة في الحساب.

أما الطريقة الثانية، فهي من خلال التكامل، والذي يستعمل النهايات بدلًا من المستطيلات. وهذه الطريقة أكثر دقة ولا تحتاج لحساب مساحات عدة مستطيلات.

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا أُعطينا دالة مكتوبة على صورة مشتقة لدالة أخرى، فإن الدالة الأخرى تُسمى الدالة الأصلية للدالة المعطاة. وهناك خيارات كثيرة لها؛ لأن الحد الثابت فيها غير معلوم.

الدالة الأصلية للدالة $f(x) = kx^n$ هي $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$ حيث k و n عددان معلومان $n \neq -1$، C أي عدد حقيقي.

وترشدنا النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل إلى طريقة إيجاد التكامل دون اللجوء إلى النهايات، وبما أن العدد الثابت ليس ذا أهمية في التكامل المحدد، فإنه إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

مشروع الفصل

الأفعوانية

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن النهايات والاشتقاق؛ لوصف سرعة وموقع عربة الأفعوانية المتغيرين.

- اطلب إلى الطلاب جمع معلومات حول حدود الارتفاعات والسرعات التي تبلغها الأفعوانيات.
- اطلب إليهم مناقشة عدة طرائق؛ لاختبار معدلات سرعة عربة الأفعوانية في فترات زمنية مختلفة.
- اطلب إليهم العمل معًا في مجموعات واستعمال المعلومات التي جمعوها خلال البحث لتعريف دالة تُمثِّل سرعة العربة واستعمال هذه الدالة؛ في إيجاد معدلات سرعة العربة في ثلاث نقاط مختلفة خلال حركتها.
- اطلب إلى كل مجموعة تلخيص ما توصلت إليه، وعرضه أمام الفصل.

المفردات: قدِّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية :

التعريف: معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويعطى بالصيغة $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال: أوجد معدل التغير اللحظي للدالة $f(x) = 5$ عند النقطة $(1, 5)$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h} = 0$$

سؤال: أوجد معدل التغير اللحظي للدالة $f(x) = x$ عند النقطة $(2, 2)$

معدل التغير اللحظي للدالة عند $(2, 2)$ يساوي 1

الفصل 8 النهايات والاشتقاق
Limits and Differentiation

فيما سبق:
درستُ النهايات ومُعدلات التغيّر.

والآن:
- أحسبُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.
- أجدُ مُعدلات التغيّر اللحظية.
- أجدُ مشتقات دوال كثيرات الحدود، وأحسب قيمها.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمالِ التكامل المحدد.
- أجد الدالة الأصلية، وأستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

لماذا؟

الأفعوانية: يُعد الاشتقاق وسيلة فاعلة ومهمة عند دراسة مُعدلات التغيّر غير الثابتة ، فإذا ركبت الأفعوانية يومًا ، فإن سرعتك وتسارعك يتغيران باستمرار مع الزمن بالاعتماد على موقعك، وستدرس في هذا الفصل مسائل تحتوي مواقف مشابهة.

قراءة سابقة: استعمل أسئلة اختبار منتصف الفصل؛ لتساعدك على توقّع محتوى النصف الأول من الفصل.

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 8

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

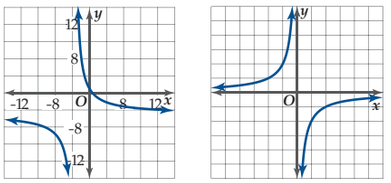
البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

استعمل التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: **2–1)** انظر ملحق الإجابات.

1) $q(x) = -\frac{2}{x}$ **2)** $m(x) = \frac{7 - 10x}{2x + 7}$



3) صناعة: يمكن تقدير معدل التكلفة بالريال لإنتاج x قطعة من منتج ما باستعمال الدالة $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. صف سلوك الدالة باستعمال التمثيل البياني للحاسبة البيانية عندما تقترب x من موجب مالانهاية. انظر ملحق الإجابات.

4) أوجد متوسط مُعدّل تغيّر الدالة $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6$، على الفترة $[-4, -1]$ **17–**

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي: **8–5)** انظر الهامش.

5) $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2 + 1}$ **6)** $h(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 10}$

7) $f(x) = \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x + 2)(x - 4)}$ **8)** $g(x) = \frac{x^2 - 16}{(x - 2)(x + 4)}$

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتابعة مما يأتي: **12–9)** انظر الهامش.

9) 8, 3, −2, −7, … **10)** 5, −1, −7, −13, …

11) 5, −10, 20, −40, … **12)** −28, −21, −14, −7, …

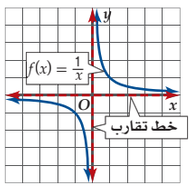
البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

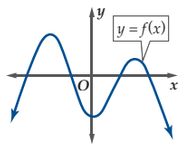
مراجعة المفردات

النهاية (limit)
الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة.

خطوط التقارب (asymptotes)
خط يقترب من منحنى الدالة دون أن يصله.



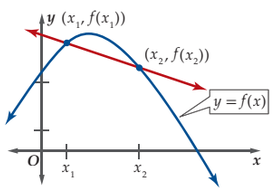
الدالة المتصلة (continuous function)
تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

عدم الاتصال القابل للإزالة (removable discontinuity)
نقاط عدم اتصال قابلة للإزالة تحدث غالبًا عندما يكون بين بسط ومقام الدالة النسبية عوامل مشتركة.

متوسط معدل التغير (average rate of change)
متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة $f(x)$ هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.



تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالمفردات الواردة في الفصل، وكتابة تعريف أو وصف لكل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها بوصفها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فقم" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بمراجعة الطلاب في: استعمال التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة، وإيجاد معادلات خطوط التقارب، وإيجاد متوسط معدل التغير لدالة على فترة معطاة.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

5) $y = 2$

6) $x = 10$

7) $x = -2, x = 4, y = 1$

8) $x = 2, y = 1$

9) $-12, -17, -22, -27$

10) $-19, -25, -31, -37$

11) $80, -160, 320, -640$

12) $0, 7, 14, 21$

8-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-1

تقدير النهايات؛ لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.

الدرس 8-1

تقدير نهاية الدالة عند قيم محددة.

تقدير نهاية الدالة عند المالانهاية .

ما بعد الدرس 8-1

حساب النهايات جبريًّا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

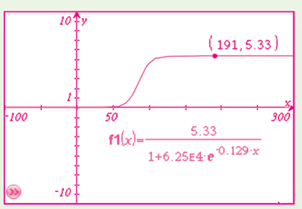
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما ميزات منحنى الدالة $f(x) = \dfrac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129x}}$؟

يتزايد بشكل مُطّرد، ثم يتوقف التزايد مع الاقتراب من نهاية ما .

- استعمل الحاسبة البيانية؛ لتَمثيل الدالة بيانيًّا. ووظّف هذا المنحنى في إيجاد نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية. 5.334



8-1 تقدير النهايات بيانيًّا
Estimating Limits Graphically

فيما سبق:
درستُ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن:
- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات:
النهاية من جهة واحدة
one-sided limit
النهاية من جهتين
two-sided limit

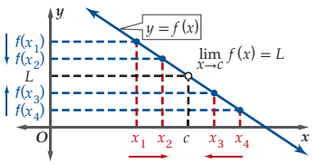
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هل هناك نهايات للأرقام المسجَّلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجَّل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة 5.05 m. ويمكن استعمال الدالة: $f(x) = \dfrac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129x}}$ لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م، حيث x عدد السنوات منذ عام 1900 م، يمكنك استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب x من المالانهاية؛ للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

تقدير النهايات عند قيم محددة: يتمحور علمُ التفاضلِ والتكاملِ حول مسألتين أساسيتين:
- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x.

وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.



تعلمت في الدرس 3-1 أنه إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L، كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L، وتكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c؛ أي $\lim_{x \to c} f(x)$، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيًّا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.

تاريخ الرياضيات

ثابت بن قرة
(221هـ–288هـ)
من أوائل من فكروا بعلم التفاضل والتكامل، حيث أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران القطع المكافئ حول محوره.

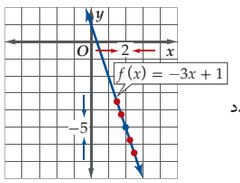
مثال 1 تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًّا: مثِّل الدالة الخطية $y = -3x + 1$ بيانيًّا باستعمال النقطتين $(-2, 1)$، $(0, 1)$.

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = -3x + 1$، أنه كلما اقتربت x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد -5؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن :

$\lim_{x \to 2} (-3x + 1) = -5$.



التعزيز عدديًّا: كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ← | → x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997		−5.003	−5.03	−5.3

يبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد -5، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. انظر ملحق الإجابات. (1A, 1B للجداول والتمثيل البياني)

1A) $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$ 16 **1B)** $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$ 0

مصادر الدرس 8-1

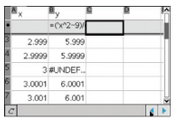
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (134)	• تنويع التعليم، ص (134, 135)	• تنويع التعليم، ص (135, 136)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (18)	• كتاب التمارين، ص (18)	• كتاب التمارين، ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 7) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

في المثال 1 ، لاحظ أن $\lim_{x\to 2}(-3x+1)$ هي نفسها $f(2)$، إلا أن نهاية الدالة لا تساوي دائمًا قيمة الدالة.

إرشاد تقني

جداول

لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire ، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة ، ثم اختيار الجدول بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة .



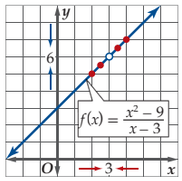
مثال 2 تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدولِ قيم.

التحليل بيانيًا:

مجال الدالة $R-\{3\}$

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ المجاور، أنه كلما اقتربت x من العدد 3 ، فإن قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد 6 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:



$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

x تقترب من 3 ← | → x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ ، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 3 ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك

(2A, 2B) للجدول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك من خلال جدول قيم.

(2A $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$ -0.25

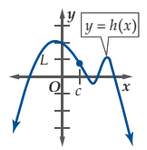
(2B $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ 6

في المثال 2 ، لاحظ أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 عند اقتراب قيم x من العدد 3، على الرغم من أن $f(3)\neq 6$. فالعبارة $\frac{x^2-9}{x-3}$ غير معرّفة عندما $x=3$. وهذه الملاحظة توضّح مفهومًا مهمًّا في النهايات.

مفهوم أساسي عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

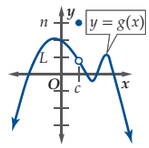
التعبير اللفظي: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.

الأمثلة:



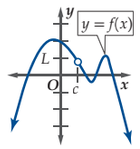
$\lim_{x\to c}h(x)=L$

$h(c)=L$



$\lim_{x\to c}g(x)=L$

$g(c)=n$



$\lim_{x\to c}f(x)=L$

$f(c)$ غير معرفة

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.

تقدير النهايات عند قيم محددة

الأمثلة 1-5 تُبيّنُ كيفية استعمال التمثيل البياني في تقدير نهايات أنواع مختلفة من الدوال.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 قدّر $\lim_{x\to -1}(4x+1)$ باستعمال التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. -3 ؛ للتَّمثيل البياني انظر الهامش.

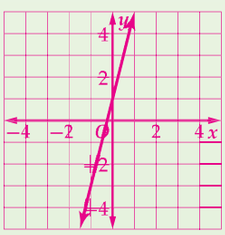
x	$f(x)$
-1.01	-3.04
-1.001	-3.004
-1	
-0.999	-2.996
-0.99	-2.96

2 قدّر $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ باستعمال التَّمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. 8 ؛ للتَّمثيل البياني انظر الهامش.

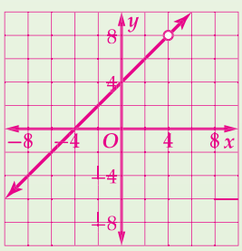
x	$f(x)$
3.99	7.99
3.999	7.999
4	
4.001	8.001
4.01	8.01

إجابات (مثالان إضافيان):

(1



(2



لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من c من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهةٍ واحدة**.

تنبيه!

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار للدالة

لمناقشة النهاية من اليمين لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرّفة على يمين c على فترة (c, b).

ولمناقشة النهاية من اليسار لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرّفة على يسار c على فترة (a, c).

مفهوم أساسي — **النهايات من جهة واحدة**

النهاية من اليمين	النهاية من اليسار
إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين، فإن:	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار، فإن:
$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$ ، وتقرأ:	$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ:
نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1	نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2

يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين**، وما يعنيه كونها موجودة.

مفهوم أساسي — **النهاية عند نقطة**

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، أي أنه:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L \text{ ،}$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ إذا وفقط إذا كان}$$

إرشادات للدراسة

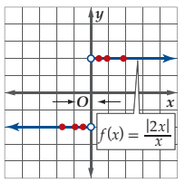
وصف النهاية

إذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين، فإننا نقول: إن النهاية غير موجودة.

مثال 3 — **تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين**

قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$

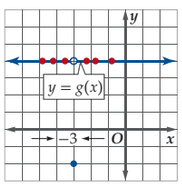


يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين، فإن $\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

b) $\lim_{x\to -3^-} g(x)$ ، $\lim_{x\to -3^+} g(x)$ ، $\lim_{x\to -3} g(x)$ ، حيث $g(x) = \begin{cases} 4 & , x \neq -3 \\ -2 & , x = -3 \end{cases}$



يُبيّن التمثيل البياني للدالة $g(x)$ أن:

$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = 4 \quad , \quad \lim_{x\to -3^+} g(x) = 4$$

وبما أن النهايتين من اليسار ومن اليمين متساويتان، فإن $\lim_{x\to -3} g(x)$ موجودة وتساوي 4.

تحقق من فهمك **3A, B)** انظر ملحق الإجابات

قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

3A) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to 1} f(x)$ حيث: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , x < 1 \\ 2x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$

3B) $\lim_{x\to -2^-} g(x)$, $\lim_{x\to -2^+} g(x)$, $\lim_{x\to -2} g(x)$ ، حيث: $g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , x < -2 \\ -x^2 & , x \geq -2 \end{cases}$

مثال إضافي

3 قدِّر –إن أمكن – كلًّا من النهايات الآتية:

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، حيث $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & , x < 1 \\ x + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$,

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$,

إذن، $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

b) $\lim_{x\to 0^-} g(x)$, $\lim_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim_{x\to 0} g(x)$ ، حيث $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 0 \\ \frac{1}{4}x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1$,

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -1$,

إذن، $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$

$\lim_{x\to 0} g(x)$ موجودة وتساوي -1

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: أنشيء صفحة إلكترونية حول النهايات والاشتقاق، وحدِّث هذه الصفحة بعد نهاية كل درس من خلال إضافة ملاحظات ومقاطع مصورة ومصادر أخرى، ثم اطلب إلى الطلبة تحديث المعلومات.

إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

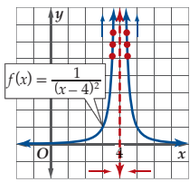
قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-4)^2}$

التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{1}{(x-4)^2}$ المجاور أن:

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{(x-4)^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{(x-4)^2}=\infty$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 4، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، وبما أن كلًّا من النهايتين من اليسار ومن اليمين ∞. لذا فإن $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-4)^2}$ لا تساوي عددًا حقيقيًّا، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين ∞، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-4)^2}=\infty$.



التعزيز عدديًّا:

x تقترب من 4 ← → x تقترب من 4

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100

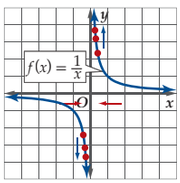
يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 4 من اليسار أو من اليمين، فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{1}{x}$ المجاور أن:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار، قلَّت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليمين. إن كلتا النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين. لذا فإن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ غير موجودة، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x=0$ بعبارة واحدة، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار.



التعزيز عدديًّا:

x تقترب من 0 ← → x تقترب من 0

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار أو من اليمين، فإن قيم $f(x)$ إما أن تنقص أو تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

4A) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x-3}$ غير موجودة

4B) $\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{2}{x^4}$ $-\infty$

قراءة الرياضيات

السلوك غير المحدود

تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x\to c$، أنه باختيار قيمة لـ x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.

تنبيه!

النهايات غير المحدودة

من الضروري أن نفهم أن العبارتين

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

هما فقط وصف للحالة التي يسببها $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة، إذ لا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ عددين حقيقيين.

مثال إضافي

4 قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}$ ∞

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^3}$ غير موجودة

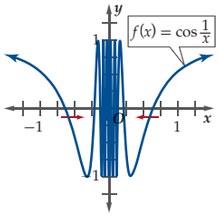
مثال إضافي

5 قدِّر $\lim_{x \to 0} (x \sin x)$. 0

لا تكون النهاية موجودة أيضًا عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c.

مثال 5 النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ إذا كانت موجودة.



يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ المجاور أن قيم $f(x)$ تتذبذبُ بشكل مستمر بين العددين -1 ، 1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0 ، مما يعني أنه لأي قيمة x_1 قريبة من الصفر ، بحيث $f(x_1) = 1$ ، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًّا من الصفر مثل x_2 ، بحيث $f(x_2) = -1$ ، وبالمثل لأي قيمة قريبة من الصفر x_3 ، بحيث $f(x_3) = -1$ ، يمكنك إيجاد قيمة مثل x_4 قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4) = 1$.

أي أن $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ غير موجودة.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

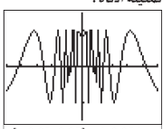
(5A) $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ غير موجودة

(5B) $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$ 0

إرشاد تقني

التذبذب اللانهائي

خاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية تفيد غالبًا في توقع قيمة النهاية للدالة، إلا أنه لا يمكنك الاعتماد عليها دائمًا. فهي تعتمد على عدد محدود من النقاط في تمثيل المنحنى، كما في المثال 5 المبيَّن تمثيله أدناه.



فالتمثيل بالحاسبة البيانية لم يظهر أن للدالة عددًا لا نهائيًا في التذبذبات بالقرب من الصفر.

نلخّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة غير موجودة.

ملخص المفهوم أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c من اليمين، أو العكس.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c.

تقدير النهاية عند اللانهاية : درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم x من عدد ثابت c ، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخّص لرموز هذه النهايات.

مفهوم أساسي النهايات عند اللانهاية

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$

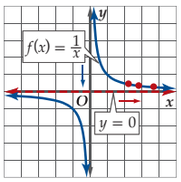
132 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

مـثال 6 تقدير النهاية عند المالانهاية

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ المجاور أن $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}=0$ ، فكلما زادت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.



التعزيز عدديًا:

x تقترب من ∞ ←

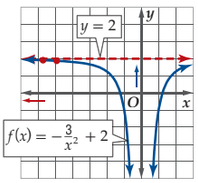
x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

→

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما زادت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0.

b $\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{x^2}+2\right)$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=-\frac{3}{x^2}+2$ المجاور أن $\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{x^2}+2\right)=2$ ، فكلما قلَّت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.



التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$ ←

x	−10000	−1000	−100	−10
$f(x)$	1.99999997	1.999997	1.9997	1.97

←

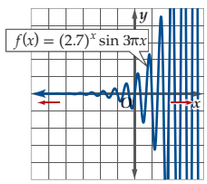
يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 2.

c $\lim_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$, $\lim_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$

التحليل بيانيًا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=(2.7)^x \sin 3\pi x$ المجاور أن:

$\lim_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x=0$ ، فكلما قلَّت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0 .

في حين يبيّن التمثيل البياني أن $\lim_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$ غير موجودة ، فكلما ازدادت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدةً.



التعزيز عدديًا:

x تقترب من $-\infty$ ← x تقترب من ∞ →

x	−17.1	−10.8	−10.1	0	10.1	50.1	99.1
$f(x)$	3.4×10^{-8}	−0.00002	−0.00004	0	1.8×10^{4}	3.3×10^{21}	-4.5×10^{42}

← →

يتضح من نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0 ، في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم x.

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب أفقي $y=0$ ، وتشير النهاية في مثال 6b إلى وجود خط تقارب أفقي $y=2$.

تنبيه!

السلوك المتذبذب

إن التذبذب اللانهائي للدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. فإذا كان التذبذب بين قيمتين مختلفتين، فالنهاية غير موجودة، أما إذا كان التذبذب متقاربًا نحو عدد معين، فالنهاية موجودة.

تقدير النهاية عند المالا نهاية

المثالان 6 , 7 يبيِّنان كيفية تقدير النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$.

مثال إضافي

6 قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي:

a $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right)$ 1

b $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^3}-1\right)$ −1

c $\lim_{x\to\infty} \cos x$ غير موجودة

إرشادات للمعلم الجديد

خطوط التقارب للدالة سلوك غير محدود عند خطوط التقارب الرأسية، ويمكن وصف هذا السلوك بِـ $\pm\infty$ ، في حين تكون نهاية الدالة التي لها خط تقارب أفقي $y=c$ مساوية لِـ c عند اقتراب قيم x من ∞ أو $-\infty$.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

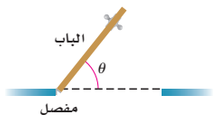
6A) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$ -3 **6B)** $\lim_{x\to-\infty}5^x$ 0 **6C)** $\lim_{x\to\infty}\sin x$ غير موجودة

يمكنك استعمال التمثيل البياني أو جدول قيم لتقدير النهايات عند المالانهاية في كثير من المواقف الحياتية.

مثال 7 من واقع الحياة — تقدير النهاية عند المالانهاية

a) هيدروليك: تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُرك لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ تمثِّل زاوية فتحه θ بعد t ثانية.

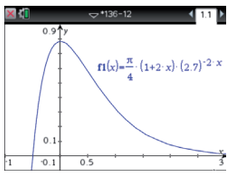
قدِّر $\lim_{t\to\infty}\theta(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.



قدِّر النهاية:

مثِّل الدالة $\theta(t)=\frac{\pi}{4}(1+2t)(2.7)^{-2t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. لاحظ أنه كلما زادت قيم t، فإن قيم الدالة $\theta(t)$ تقترب من العدد 0.

أي أن $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=0$.



[−1, 3] scl: 0.5 by [−0.1, 0.9] scl: 0.1

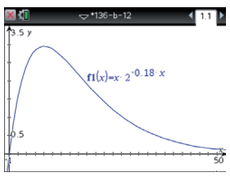
فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية 0 في هذه المسألة، تعني أن الزاوية التي يصنعها الباب مع وضع الإغلاق مع مرور الزمن هي 0 درجة بالراديان. بمعنى أنه بعد مرور زمن أطول، فإن الباب سيقترب من وضع الإغلاق التام.

b) دواء: يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل مللتر بالعلاقة $C(t)=t2^{-0.18t}$، حيث t الزمن بالساعات بعد حقن المريض. قدِّر $\lim_{t\to\infty}C(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:

مثِّل الدالة $C(t)=t2^{-0.18t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زادت قيمة t فإن منحنى الدالة يقترب من 0، أي أن $\lim_{t\to\infty}C(t)=0$.



[−1, 50] scl: 2 by [−0.5, 3.5] scl: 0.5

فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية هي 0، وتعني في هذه المسألة أنه مع مرور الزمن، فإن تركيز الدَّواء سيصبح قريبًا من الصفر في دم المريض.

تحقق من فهمك

7A) انظر الهامش.

7A) كهرباء: يزوّد مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يُعطى بالعلاقة $V(t)=165\sin 120\pi t$، حيث t الزمن بالثواني. قدِّر $\lim_{t\to\infty}V(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

7B) أحياء: عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبًا وفاكهةً وخميرةً فإن عدد الذبابات بعد t يوم يُعطى بالعلاقة $P(t)=\frac{230}{1+56.5(2.7)^{-0.37t}}$، قدِّر $\lim_{t\to\infty}P(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

الربط مع الحياة

الأنظمة الهيدروليكية هي أحد أنظمة نقل القدرة التي تستعمل طاقة السوائل لقيادة أو تحريك الأجزاء المتحركة في النظام الهيدروليكي. وتستعمل في العديد من المجالات، ومنها فرامل السيارات والأبواب الثقيلة وغيرها.

إرشاد تقني

استعمل الآلة الحاسبة

للوصول إلى شكل مناسب للتمثيل البياني للدالة في الآلة الحاسبة، يمكنك استعمال بعض ميزات الآلة.

بدءًا من مفتاح menu، يمكنك استعمال خاصية 4: تكبير/تصغير النافذة

واختيار 1: إعدادات النافذة، لتحديد مدى القيم وطول فترة التدريج لكل من x, y، كذلك يمكن اختيار 3: تكبير، 4: تصغير

لتصغير وتكبير التمثيل البياني، حتى يمكن الحصول على شكل مناسب للدالة.

كما يمكن استعمال خاصية 5: تتبع المسار لتتبع قيم الدالة؛ مما يساعد على التوصل لتقدير قيمة النهاية.

مثال إضافي

7) a) بكتيريا: يُمكن نمذجة نمو مجتمع بكتيري بالدالة $B(t)=\frac{675}{1+135^{-0.6t}}$، حيث t الزمن بالساعات. قدِّر $\lim_{t\to\infty}B(t)$، إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

$\lim_{t\to\infty}B(t)=675$، المجتمع البكتيري يصل إلى 675 كحد أقصى مع مرور الزمن.

b) سكان: يُعطى عدد سكان مدينة ما بالعلاقة $P(t)=0.7(1.1)^t$، حيث t الزمن بالسنوات. قدِّر $\lim_{t\to\infty}P(t)$، إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

$\lim_{t\to\infty}P(t)=\infty$؛ أي أن عدد سكان هذه المدينة سيزداد مع مرور الزمن بلا حدود.

إجابات

7A) $\lim_{t\to\infty}V(t)$ غير موجودة، حيث $V(t)$ يتذبذب بين -165 و 165. كلما ازدادت t. وهذا يعني أن الجهد الكهربائي في المقبس يتذبذب بين -165, 165 مع مرور الزمن

7B) $\lim_{t\to\infty}P(t)=230$، سيصبح عدد الذبابات 230 ذبابة مع مرور الزمن.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلِّمون الحركيُّون: استعمل شريطًا لاصقًا أو حبلًا لرسم مستوى إحداثي على أرضية الفصل، واطلب إلى أحد الطلاب الوقوف عند نقطة الأصل، ثم اطلب إلى مجموعة من الطلاب أن يقفوا ليشكّلوا منحنى دالة على المستوى الإحداثي، وناقشهم في قيمة نهاية الدالة عند نقطة باستعمال الإحداثيات التي تمثِّلها مواقعهم، ثم اطلب إليهم تغيير مواقعهم وتشكيل منحنى جديد.

تدرب وحل المسائل

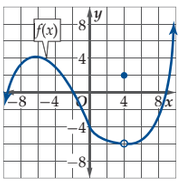
قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. إرشاد: "يمكنك استعمال الآلة البيانية للتمثيل البياني". (المثالان 1, 2) **8–1) للجدول والتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.**

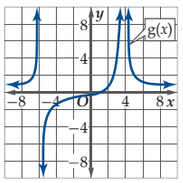
1) $\lim_{x\to 5}(4x-10)$ **10**
2) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^5-2x^3+3x^2\right)$ **12**
3) $\lim_{x\to -2}(x^2+2x-15)$ **−15**
4) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$ **−3**
5) $\lim_{x\to 0}[5(\cos^2 x-\cos x)]$ **0**
6) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ **4**
7) $\lim_{x\to 6}(x+\sin x)$ **5.72**
8) $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+x-20}{x+5}$ **−9**

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 3) **9-20) للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.**

9) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x}$ **0**
10) $\lim_{x\to 0^-}\frac{|4x|}{x}$ **−4**
11) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{|x|}$ **0**
12) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ **1**
13) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{|2x+1|}{x}$ **0**
14) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{|x+2|}$ **غير موجودة**
15) $\lim_{x\to 0}(\sqrt{-x}-7)$ **−7**
16) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ **10**
17) $\lim_{x\to 0}\frac{|3x|}{2x}$ **غير موجودة**
18) $\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x^2-1}$ **غير موجودة**
19) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\begin{cases} x-5 & , x<0 \\ x^2+5 & , x\geq 0 \end{cases}$ **غير موجودة**
20) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & , x<0 \\ \frac{2x}{x} & , x\geq 0 \end{cases}$ **2**

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الأمثلة 1-4)



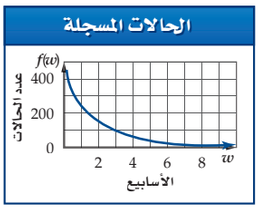


21) $\lim_{x\to -4} f(x)$ **3**
22) $\lim_{x\to 4} g(x)$ **∞**
23) $\lim_{x\to 4} f(x)$ **−6**
24) $\lim_{x\to -6} g(x)$ **غير موجودة**

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الأمثلة 4-6)

25) $\lim_{x\to -4}\frac{-17}{x^2+8x+16}$ **−∞**
26) $\lim_{x\to 4}\frac{|x|}{x-4}$ **غير موجودة**
27) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2}{x^2-10x+25}$ **∞**
28) $\lim_{x\to 6}\frac{5}{(x-6)^2}$ **∞**
29) $\lim_{x\to -\infty}(x^5-7x^4-4x+1)$ **−∞**
30) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x-22}{4x^3-13}$ **0**
31) $\lim_{x\to \infty} x\cos x$ **غير موجودة**
32) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$ **−1**
33) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}$ **غير موجودة**
34) $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$ **0**

35) **دواء:** تم توزيع لقاح للحدِّ من عدوى مرض ما. ويُبيّن التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح. (مثال 7) **a, b انظر الهامش.**



a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to 1} f(w)$ ، $\lim_{w\to 3} f(w)$.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to \infty} f(w)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

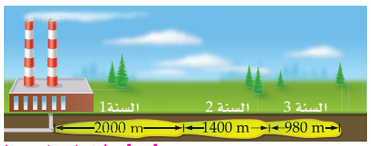
36) **برامج تلفزيونية:** يُقدَّر عدد مشاهدي أحد البرامج التلفزيونية اليومية بالدالة $f(d)=12(1.25012)^d-12$، حيث d رقم اليوم منذ أول يوم للبرنامج. (مثال 7) **a–c انظر الهامش.**

a) مثِّل الدالة $f(d)$ بيانيًّا في الفترة $0\leq d\leq 20$.

b) ما عدد مشاهدي البرنامج في اليوم: الخامس، العاشر، العشرين، بعد شهرين ($d=60$)؟

c) قدِّر $\lim_{d\to \infty} f(d)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

37) **كيمياء:** تتسرَّب مادة سامة من أنبوب غاز تحت الأرض كما في الشكل أدناه. ويعبِّر عن المسافة الأفقية بالأمتار التي تقطعها المادة المتسرِّبة بالدالة $d(t)=2000(0.7)^{t-1}$, $t\geq 1$، حيث t عدد السنوات منذ بدء التسرُّب. (مثال 7)



a, b, d انظر ملحق الإجابات.

a) مثِّل باستعمال الآلة البيانية الدالة بيانيًّا في الفترة $1\leq t\leq 15$.

b) استعمل التمثيل البياني وخاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية لإيجاد قيم d عندما $t=5, 10, 15$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to \infty} d(t)$. **0**

d) هل من الممكن أن تصل المادة المتسرِّبة لمستشفى يقع على بُعد 7000 m من موقع التسريب؟ تذكَّر أن مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هو $\frac{a_1}{1-r}$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 37-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

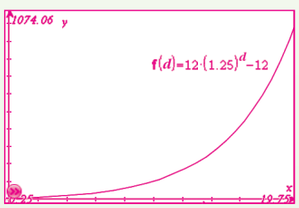
أخطاء شائعة في التمارين 13-9 ذكّر الطلاب أن نهاية الدالة عند c من أي جهة يمكن أن تكون موجودة، على الرغم من أن الدالة يمكن أن تكون غير معرّفة عند c ، أو النهاية غير موجودة عند c.

إجابات

35a $\lim_{w\to 1} f(w)=100$; $\lim_{w\to 3} f(w)=250$

35b 0؛ إجابة ممكنة: سيقضي اللقاح على العدوى مع مرور الزمن.

36a



36b نحو 25 ، نحو 100، نحو 1031، نحو 7875584 شخصًا سوف يشاهدون البرنامج بعد مرور شهرين .

36c ∞، إجابة ممكنة: يعني الناتج أن عدد مشاهدي البرنامج سيزداد بشكل لا نهائي.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	31–1، 48، 49، 51، 52، 54–61
ضمن ضمن المتوسط	47–1 فردي، 48، 49، 51، 52، 54–61
فوق فوق المتوسط	32–61

تنبيه !

اكتشف الخطأ في السؤال 48 على الطلاب معرفة عدم وجود النهاية عند هذه النقطة من التمثيل البياني للدالة؛ وذلك لاختلاف النهايتين من اليسار واليمين.

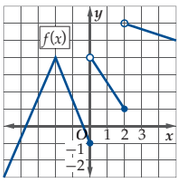
4 التقويم

تعلم لاحق سيقوم الطلاب في الدرس التالي بإيجاد، النهايات جبريًّا. اطلب إليهم الكتابة حول فائدة هذا الدرس في تعلم الدرس القادم .

إجابة :

47) غير موجودة؛ تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد 5− من اليمين ومن اليسار.

للدالة الممثَّلة بيانيًّا أدناه، قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



38) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **−1**

39) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **4**

40) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **غير موجودة**

41) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **1**

42) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **6**

43) $\lim_{x\to 1} f(x)$ **2.5**

حاسبة بيانية : حدِّد ما إذا كانت النهاية موجودة أو غير موجودة في كل مما يأتي. وإذا لم تكن موجودة، فصف التمثيل البياني للدالة عند نقطة النهاية: **غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x=2$**

44) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ **غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x=$**

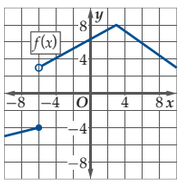
45) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x}{x^2-x-2}$

46) $\lim_{x\to 0} 3\cos\frac{\pi}{x}$ **غير موجودة؛ تذبذب**

47) $\lim_{x\to -5} \frac{|x+5|}{x+5}$ **انظر الهامش.**

مسائل مهارات التفكير العليا

48) اكتشف الخطأ : قال علي: إن نهاية الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب x من 6− هي 4− . في حين قال محمد: إنها 3. هل أي منهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



كلاهما على خطأ، إذا اقتربت الدالة من قيمتين مختلفتين من اليمين واليسار، فإن النهاية غير موجودة عند تلك النقطة.

49) مسألة مفتوحة : أعطِ مثالًا على $f(x)$، بحيث تكون $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة، و $f(0)$ غير معرفة، ومثالًا على دالة أخرى $g(x)$، بحيث تكون $g(0)$ معرفة، ولكن $\lim_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة. **انظر ملحق الإجابات.**

50) تحدَّ : إذا كان $g(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$. فقدِّر كلًّا من $\lim_{x\to 2} g(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$. وإذا كانت $j(x), h(x)$ كثيرتي حدود بحيث: $h(a)=0$, $j(a)\neq 0$ ، فماذا يمكنك القول عن $\lim_{x\to a}\frac{j(x)}{h(x)}$ ؟

برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات.**

51) تبرير : حَدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات.**

إذا كان $f(c)=L$، فإن $\lim_{x\to c} f(x)=L$.

52) مسألة مفتوحة : مَثِّل بيانيًّا دالة تحقق كلًّا مما يأتي: $f(0)=2, f(2)=5$, $\lim_{x\to 0} f(x)=-3$ ، و $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة.

انظر ملحق الإجابات.

53) تحدَّ : قدِّر كلًّا من النهايات الآتية للدالة f إذا كانت موجودة:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & , \quad x<-1 \\ -1 & , \quad -1\le x\le 0 \\ x^2 & , \quad 1<x\le 2 \\ x-3 & , \quad x>2 \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **غير موجودة** **b)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **غير موجودة** **c)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **−1**

54) اكتب : من خلال ما لاحظته في حل التمارين، وضِّح طريقتك لتقدير نهاية دالة متصلة. **انظر ملحق الإجابات.**

مراجعة تراكمية

55, 56) انظر ملحق الإجابات.

55) أثبت صحة المتطابقة. **(الدرس 2-3)**

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right)=\cos^2\theta$$

56) حدِّد ما إذا كانت الدالة الآتية متصلة عند قيم x المعطاة. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدِّد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة $h(x)=\frac{x^2-25}{x+5}$ **(الدرس 3-1)**

57) أوجد متوسط مُعدّل تغير $f(x)=\sqrt{x-6}$ في الفترة $[8, 16]$. **(الدرس 4-1)** **0.219**

انظر ملحق الإجابات.

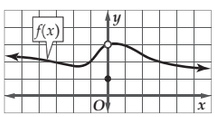
أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 5-5)

58) $\mathbf{u}=\langle 2, 9, -2\rangle, \mathbf{v}=\langle -4, 7, 6\rangle$ **63°**

59) $\mathbf{m}=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, $\mathbf{n}=-7\mathbf{i}+8\mathbf{j}+9\mathbf{k}$ **93.4°**

تدريب على اختبار

60) باستعمال التمثيل البياني للدالة $y=f(x)$ أدناه، ما قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$ (إن وجدت)؟ **C**



C 3 **A** 0

B 1 **D** النهاية غير موجودة

61) إذا كانت $g(x)=\frac{1}{x^2}$ وكانت العبارات: **A**

I نقطة عدم اتصال لا نهائي.

II نقطة عدم اتصال قفزي.

III نقطة عدم اتصال قابل للإزالة.

فأيٌّ مما يأتي يصف التمثيل البياني لمنحنى الدالة **g(x)**؟

C II فقط **A** I فقط

D I و II فقط **B** I , III فقط

تنويع التعليم

فوق

توسّع : إذا احتوى كل من بسط ومقام الدالة النسبية العامل الخطي نفسه، فإن بإمكاننا إزالة نقطة عدم الاتصال الناتجة عن هذا العامل من خلال اختصاره. ومثالًا على ذلك، أوجد نقطة عدم الاتصال التي يمكن إزالتها للدالة $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2+5x-14}$. هل النهاية موجودة عند تلك النقطة؟ وضِّح إجابتك.

$\left(2, \frac{2}{3}\right)$؛ نعم لأن النهايتين من اليسار واليمين متساويتان .

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم: التاريخ:

8-1 تدريبات إعادة التعليم

تقدير النهايات بيانيًا

تقدير النهاية عند قيمة ثابتة.

النهاية من اليسار	النهاية من اليمين
إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1، عندما تقترب قيم x من c من اليسار، فإن: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L_1$	إذا اقتربت قيم الدالة $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2، عندما تقترب قيم x من c من اليمين، فإن: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L_2$

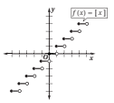
وجود النهاية عند نقطة

تكون نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا وُجدت النهايتان من اليسار ومن اليمين وكانتا متساويتين. بمعنى أنه: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ و $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$، إذا وفقط إذا $\lim_{x\to c} f(x) = L$

مثال قدِّر كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة.

$\lim_{x\to 2^-} [\![x]\!]$، $\lim_{x\to 2^+} [\![x]\!]$، $\lim_{x\to 2} [\![x]\!]$

يظهر من منحنى الدالة $f(x) = [\![x]\!]$، أن $\lim_{x\to 2^-} [\![x]\!] = 1$ و $\lim_{x\to 2^+} [\![x]\!] = 2$. ولمّا كانت النهايتان من اليسار واليمين مختلفتين عندما تقترب x من 2، فإن $\lim_{x\to 2} [\![x]\!]$ غير موجودة.



تمارين

قدِّر كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|3x|}{x}$ — 3
2) $\lim_{x\to -2} \frac{|x-2|}{x^2-4}$ — ∞
3) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$ — 7
4) $\lim_{x\to 0} (1-\cos^2 x)$ — 0
5) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3+27}{x^2-9}$ — $-\infty$
6) $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2}$ — ∞

تدريبات إعادة التعليم (7) — دون

الاسم: التاريخ:

8-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تقدير النهايات بيانيًا

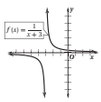
تقدير النهايات عند المالانهاية:

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عندما تزداد قيم x دون حدود، فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عندما تنقص قيم x دون حدود، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$

مثال قدِّر قيمة: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+3}$.

التحليل بيانيًا، التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x+3}$ يبيّن أن $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+3} = 0$؛ إذ يقترب منحنى الدالة من المحور x كلما ازدادت قيم x، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي هو $y = 0$

التعزيز عدديًا، كوّن جدولًا يظهر قيمًا كبيرة لـ x.



x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.08	0.01	0.001	0.0001	0.00001

يظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من الصفر كلما ازدادت قيم x.

تمارين

قدِّر كل من نهايةٍ مما يأتي إذا كانت موجودة:

1) $\lim_{x\to-5} (2x^2+3)$ — 53
2) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x}$ — 2
3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+1}{x-2}$ — −3
4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$ — 0
5) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{3x^3+2x}$ — 0
6) $\lim_{x\to-\infty} (2^x+x)$ — $-\infty$
7) $\lim_{x\to\infty} (x \sin x)$ — غير موجودة
8) $\lim_{x\to-\infty} (2.7)^{2x}$ — 0
9) $\lim_{x\to\infty} \cos 2\pi$ — غير موجودة

تدريبات حل المسألة (8) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

8-1 تدريبات حل المسألة

تقدير النهايات بيانيًا

1) **نمو البكتيريا:** يعطى وزن مجتمع بكتيري بالعلاقة: $f(t) = \frac{4}{1+0.35e^{-0.2t}}$ جرامًا بعد t ساعة.

a) مثّل بيانيًا منحنى الدالة $f(t)$ في الفترة $0 \le t \le 18$

b) استعمل المنحنى لتقدير وزن البكتيريا بعد 8 ساعات. مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.
3.7 جرامات.

c) قدِّر $\lim_{t\to\infty} f(t)$، إذا كانت موجودة، وفسّر معناها.
4 جرامات؛ الوزن الأقصى للبكتيريا سيصل إلى 4 جرامات.

2) **سيارات:** يبلغ ثمن سيارة 30000 ريال، وبعد t سنة من شرائها يصبح سعرها $v(t) = 30000(0.85)^t$.

a) مثّل الدالة $v(t)$ بيانيًا على الفترة $0 \le t \le 8$.

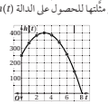
b) قدِّر قيمة السيارة بعد 10 سنوات من شرائها.
5906 ريالًا.

c) قدِّر قيمة $\lim_{t\to\infty} v(t)$، إذا كانت موجودة، وفسر معناها.
0 ؛ بمرور الوقت يصبح ثمن السيارة صفرًا.

3) **ارتفاع المقذوفات،** افترض أن جسمًا قذف إلى أعلى، والدالة $h(t)$ تمثل ارتفاعه بالأقدام بعد t ثانية، ويبين الجدول الآتي ارتفاع القذيفة $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية من قذفها.

t	$h(t)$	t	$h(t)$
0	256	4	384
1	336	5	336
2	384	6	256
3	400	7	144

a) مثّل البيانات، وارسم منحنًى يمر بنقاط البيانات التي مثّلتها للحصول على الدالة $h(t)$.



b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\lim_{t\to 8} h(t)$
0 قدم

4) **النظرية النسبية،** يُعبّر عن كتلة جسم متحرك بسرعة v نظريًا بالمعادلة: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{s^2}}}$، حيث m_0 كتلة الجسم عند السكون، و s سرعة الضوء، و v سرعة الجسم، فما قيمة $\lim_{v\to s^-} m$ ؟
∞

5) **كهرباء،** وجد أحد أن معادلة فرق جهد دائرة كهربائية هي: $V(t) = 140 \sin 120\pi t$، وضح سبب كون $\lim_{t\to\infty} V(t)$ غير موجودة.
بزيادة t يتذبذب المنحنى بين 140 و−140

التدريبات الإثرائية (9) — فوق

الاسم: التاريخ:

8-1 التدريبات الإثرائية

النهايات

هناك العديد من أمثلة النهايات في الحياة العملية؛ بعضها مطلقة لا يمكن تجاوزه، وبعضها الآخر يمثل إرشادات، يدفع من يتجاوزها غرامة.

املأ الجدول

النهاية	كيف تضبط النهاية؟	هل النهاية مطلقة؟	الغرامة في حال تجاوز النهاية
1) السرعة القصوى في شارع سريع	**تضع إدارة المرور حدودًا للسرعة.**	**لا**	**دفع مبلغ محدد في حالة التجاوز**
2) ارتفاع نفق	**وضع حدود ارتفاع السيارات التي يسمح لها بالمرور في مكان بارز**	**نعم**	**تحطم المركبة، أو تحطم أجزاء من النفق**
3) وزن الحقيبة في رحلة جوية	**تعليمات من شركة الطيران الناقلة**	**لا**	**يدفع المسافر أجور شحن عن الوزن الزائد**
4) درجة حرارة جسم دافئ موضوع في غرفة باردة	**توضع حدود لدرجة حرارة الغرفة**	**نعم**	**غير ممكنة**
5) سرعة مركبة فضائية متسارعة	**وضع ثابت فيزيائي (سرعة الضوء)**	**نعم**	**غير ممكنة**

رياضيًا، قد تكون النهاية موجودة ومتنهية، أو غير متنهية، أو غير موجودة، صنّف كل نهاية من حيث كونها موجودة ومتنهية، أو غير متنهية، أو غير موجودة، وإذا كانت النهاية موجودة ومتنهية، فأوجد قيمتها:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1}$ — **موجودة؛ 1**
2) $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$ — **غير موجودة**
3) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$ — **موجودة؛ $\frac{4}{3}$**
4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin|x|}{x}$ — **غير موجودة**
5) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^4}$ — **غير متنهية**

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 8

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (18)　　دون ضمن فوق

8-1 تقدير النهايات بيانيًا

قدِّر كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

1) $\lim_{x\to 0^+}(4-\sqrt{x})$ 4
2) $\lim_{x\to 3^+}\frac{3-x}{|x-3|}$ -1
3) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ 8
4) $\lim_{x\to -1^-}\frac{x+7}{x^2+8x+7}$ $-\infty$
5) $\lim_{x\to -1^+}\frac{x+7}{x^2+8x+7}$ ∞
6) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}$ ∞

الفصل الثامن — النهايات والاشتقاق

قدِّر كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

7) $\lim_{x\to -\infty}\frac{-4x^2}{x^2+1}$ -4
8) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x-2}{x-1}$ 3
9) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ 2
10) $\lim_{x\to \infty}(2.7)^{3x+2}$ ∞

11) **مُعدل التغيّر:** يرتكز سلم طوله 20 ft على جدار. سُحبت قاعدة السلم بعيدًا عن الجدار بمُعدّل 3 ft/sec. فبدأ الطرف العلوي للسلم في بالهبوط بمُعدّل $r(x)=\frac{3x}{\sqrt{400-x^2}}$ قدمًا لكل ثانية، حيث x المسافة بين قاعدة السلم والجدار. قدّر $\lim_{x\to 20^-} r(x)$ باستعمال التمثيل البياني بالآلة البيانية. ∞

12) **كتب:** تمثل الدالة $v(t)=\frac{300}{6+35(0.2)^t}$ سعر كتاب بالريال بعد t سنة من نشره. كم يكون الثمن النهائي للكتاب؟ أيْ أوجد $\lim_{t\to\infty} v(t)$ باستعمال التمثيل البياني بالآلة البيانية. 50 ريالًا

13) **تلوُّث:** يمكن تقدير تكلفة تنظيف بقعة ملوثة بمخلفات كيميائية بالدالة $C(x)=\frac{312x}{100-x}$، حيث C التكلفة بالريال، و x كمية المخلفات الكيميائية بالجرامات، $0\le x<100$. قدّر $\lim_{x\to 100^-} C(x)$. ∞

18

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-2

تقدير النهايات بيانيًّا وعدديًّا.

الدرس 8-2

إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

ما بعد الدرس 8-2

استعمال النهايات في حساب ميل منحنى دالة غير خطية عند نقطة.
استعمال النهايات في حساب المساحات تحت المنحنيات.

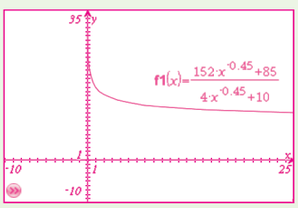
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما النهاية التي تقترب منها x عندما تكون الاستضاءة في حدِّها الأدنى أو الأعلى؟ $0 ; \infty$
- مثّل العلاقة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة. وضّح ما الذي يحدث لقطر البؤبؤ عندما تزداد الاستضاءة.



يقل قطر البؤبؤ عندما تزداد الاستضاءة.

8-2 حساب النهايات جبريًّا
Evaluating Limits Algebraically

فيما سبق:
درستُ كيفية تقدير النهايات بيانيًّا وعدديًّا. (الدرس 1–8)

والآن:
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

المفردات:
التعويض المباشر
direct substitution
الصيغة غير المحددة
indeterminate form

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

إذا أُعطيت اتساع البؤبؤ بالملمترات لعين حيوان بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}$؛ حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux)، فإنه يمكنك استعمال النهاية عندما تقترب x من 0 أو ∞ لإيجاد اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدِّها الأدنى أو الأعلى.

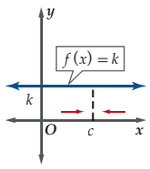
حساب النهاية عند نقطة: تعلمتَ في الدرس 1-8 تقدير النهايات بيانيًّا، وباستعمال جداول قيم . وستكتشف في هذا الدرس طرائق جبرية لحساب النهايات.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

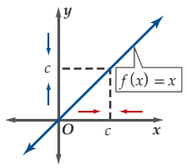
الرموز: $\lim_{x \to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim_{x \to c} x = c$



تنبيه!
إذا كانت $f(c) \le 0$ و n عددًا زوجيًّا فإن $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)}$ غير موجودة.

تظهر أهمية نهايات الدوال الثابتة والدالة المحايدة واضحة في خصائص النهايات.

مفهوم أساسي — خصائص النهايات

إذا كان k , c عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x \to c} f(x)$, $\lim_{x \to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim_{x \to c} [k f(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$، حيث $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$، إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) > 0$، حيث n عدد زوجي.
وإذا كان n عددًا فرديًّا، فإن $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ ،

مصادر الدرس 8-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (144)	• تنويع التعليم، ص (144)	• تنويع التعليم، ص (144, 146)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (19)	• كتاب التمارين، ص (19)	• كتاب التمارين، ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10, 11) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

حساب النهاية عند نقطة

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص النهايات؛ في حساب النهايات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to 3}(x^2+2x-4)$ 11

b) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3}{x+2}$ -1

c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+4}$ $\sqrt{6}$

إرشادات للدراسة

خصائص النهايات

تبقى خصائص النهايات صحيحة في حال كون النهايات من جهة واحدة، وفي حال كونها عند المالانهاية، شريطة وجود هذه النهايات.

مثال 1 استعمال خصائص النهايات

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to 4}(x^2-6x+3)$

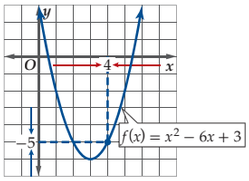
خاصيتا المجموع والفرق: $\lim_{x\to 4}(x^2-6x+3)=\lim_{x\to 4}x^2-\lim_{x\to 4}6x+\lim_{x\to 4}3$

خاصيتا القوة والضرب في ثابت: $=\left(\lim_{x\to 4}x\right)^2-6\cdot\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}3$

نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة: $=4^2-6\cdot 4+3$

بسّط: $=-5$

تحقق يعزّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^2-6x+3$ هذه النتيجة.



b) $\lim_{x\to -2}\frac{4x^3+1}{x-5}$

خاصية القسمة: $\lim_{x\to -2}\frac{4x^3+1}{x-5}=\frac{\lim_{x\to -2}(4x^3+1)}{\lim_{x\to -2}(x-5)}$

خاصيتا المجموع والفرق: $=\frac{\lim_{x\to -2}4x^3+\lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}x-\lim_{x\to -2}5}$

خاصيتا القوة والضرب في ثابت: $=\frac{4\left(\lim_{x\to -2}x\right)^3+\lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}x-\lim_{x\to -2}5}$

نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة: $=\frac{4(-2)^3+1}{-2-5}$

بسّط: ≈ 4.4

تحقق كوّن جدولًا لقيم x التي تقترب من -2 من الجهتين.

x تقترب من -2 ← | x تقترب من -2 →

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

من الواضح أنه كلما اقترب x من العدد -2، فإن $f(x)$ تقترب من العدد 4.4

تنبيه!

خاصية الجذر النوني الزوجي تستخدم فقط إذا كان $\lim_{x\to c}f(x)>0$

c) $\lim_{x\to 3}\sqrt{8-x}$

خاصية الفرق: $\lim_{x\to 3}(8-x)=\lim_{x\to 3}8-\lim_{x\to 3}x$

عوّض: $=8-3$

بسّط: $=5>0$

خاصية الجذر النوني: $\lim_{x\to 3}\sqrt{8-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3}(8-x)}$

خاصية الفرق: $=\sqrt{\lim_{x\to 3}8-\lim_{x\to 3}x}$

نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة: $=\sqrt{8-3}$

بسّط: $=\sqrt{5}$

تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A) $\lim_{x\to 2}(-x^3+4)$ -4

1B) $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15}$ $\frac{1}{9}$

1C) $\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3}$ $\sqrt{2}$

لاحظ أن نهاية كل دالة في المثال أعلاه عندما تقترب x من c تساوي قيمة $f(c)$. ومع أن هذه الملاحظة ليست صحيحة في جميع الدوال، إلا أنها صحيحة في دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية التي مقاماتها لا تساوي صفرًا عندما $x=c$. كما هو موضح فيما يأتي:

138 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

إرشادات للدراسة

الدوال الجيدة السلوك

تُعدُّ الدوال المتصلة مثل دوال كثيرات الحدود ودالتي الجيب وجيب التمام دوالّ جيدة السلوك، إذ يمكن حساب نهاياتها من خلال التعويض المباشر، ويمكن إيجاد نهاية الدوال من خلال التعويض المباشر حتى وإن لم تكن الدالة جيدة السلوك على مجالها، بشرط أن تكون متصلة عند النقطة التي تحسب عندها النهاية.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

نهايات دوال كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإن $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ دالةً نسبية، وكان c عددًا حقيقيًّا، حيث $q(c) \neq 0$، فإن $\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$.

وبشكل مختصر، فإنه يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر**، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

مثال 2 — استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

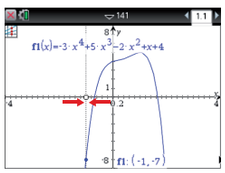
احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

a) $\lim_{x\to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

بما أن هذه نهاية دالة كثيرة حدود، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$
$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ هذه النتيجة.



[−4, 4] scl: 0.2 by [−8, 8] scl: 1

b) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامُها ليس صفرًا عندما $x = 3$، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{3 - (3)^2}$$
$$= \frac{48}{-6}$$
$$= -8$$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 1$، فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

d) $\lim_{x\to -6} \sqrt{x + 5}$

بما أن $\lim_{x\to -6} (x+5) = -6+5 = -1 < 0$، فلا يمكننا حساب $\lim_{x\to -6} \sqrt{x+5}$ بالتعويض المباشر.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

2A) $\lim_{x\to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$ — 3

2B) $\lim_{x\to -5} \frac{x+1}{x^2+3}$ — $\frac{-1}{7}$

2C) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

2D) $\lim_{x\to -8} \sqrt{x + 6}$

لنفترض أنك استعملت خاصية القسمة أو التعويض المباشر لحساب النهاية $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ بشكل خاطئ كما يلي:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x\to 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x\to 1} (x - 1)} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

وهذا ليس صحيحًا؛ لأن نهاية المقام تساوي 0.

2C) بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x=2$ فلا يمكننا حسابها بالتعويض المباشر.

2d) غير ممكن؛ لأنه إذا كانت $f(x) = x + 6$ فإن $f(-8) = -8 + 6 < 0$ إذن لا يمكن حساب $\lim_{x\to -8} \sqrt{f(x)}$

حساب النهاية عند نقطة

المثال 2 يُبيِّنُ كيفية استعمال التعويض المباشر في حساب النهايات.

مثال إضافي

2 احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim_{x\to 2} (-2x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 5)$

−3

b) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ — −2

c) $\lim_{x\to 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 10$ فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

d) $\lim_{x\to -4} \sqrt{x + 3}$

غير ممكن؛ لأنه إذا كانت $f(x) = x + 3$ فإن $f(-4) = -4 + 3 = -1 < 0$ بما أن $f(-4) < 0$ فلا يمكن حساب $\lim_{x\to -4} \sqrt{f(x)}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بحَلّ الأمثلة على السبورة التفاعلية، واحفظ ذلك في صفحات الملاحظات، ثم أرسلها للطلاب بوصفها مرجعًا إضافيًّا خارج الصف.

حساب النهاية عند نقطة

المثال 3 يُبيِّنُ كيفية استعمال التحليل؛ في حساب النهايات.

مثال إضافي

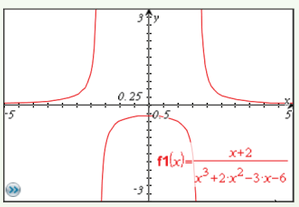
3 أحسب كل نهاية مما يأتي :

a $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$ 5

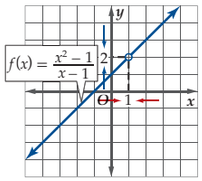
b $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+2x^2-3x-6}$ 1

إرشادات للمعلم الجديد

الحاسبة البيانية : قد يظهر في بعض الأحيان عند رسم منحنى دالة باستعمال الحاسبة البيانية أكثر من جزء للمنحنى كما في المثال الإضافي 3b.



لذا ذكّر الطلاب بأننا نهتم فقط بجزء المنحنى قرب النقطة التي نحسب النهاية عندها، أي عندما تقترب x من 2− في هذا المثال.



يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ **الصيغة غير المحددة**؛ لأنه لا يمكنك تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر في المقام، ومثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة، أو متباعدة نحو ∞ أو $-\infty$، ويُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ أن $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ موجودة وتساوي 2 .

على الرغم من أن الصيغة غير المحددة تظهر من خلال تطبيق خاطئ لخصائص النهايات، إلا أن الحصول على هذه الصيغة قد يرشدنا إلى الطريقة الأنسب لإيجاد النهاية.

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.

مـثال 3 استعمال التحليل لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي :

a $\lim_{x\to -4} \frac{x^2-x-20}{x+4}$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{(-4)^2-(-4)-20}{-4+4}=\frac{0}{0}$ ؛ لذا فإن علينا تحليل المقدار جبريًّا، واختصار أي عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

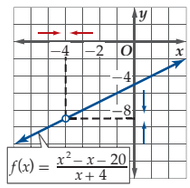
حلّل البسط: $\lim_{x\to -4} \frac{x^2-x-20}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x-5)(x+4)}{x+4}$

اختصر العامل المشترك: $= \lim_{x\to -4} \frac{(x-5)(\cancel{x+4})}{\cancel{x+4}}$

بسّط: $= \lim_{x\to -4} (x-5)$

عوّض وبسّط: $= (-4)-5 = -9$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-x-20}{x+4}$ هذه النتيجة.



b $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{3-3}{3^3-3(3)^2-7(3)+21}=\frac{0}{0}$.

أعد تجميع المقام: $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^3-3x^2)+(-7x+21)}$

أخرج العامل المشترك من الحدود المجمعة في المقام: $=\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2(x-3)-7(x-3)}$

أخرج العامل المشترك في المقام: $=\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^2-7)(x-3)}$

اختصر: $= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(x^2-7)(\cancel{x-3})}$

بسّط: $= \lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2-7}$

عوّض وبسّط: $= \frac{1}{(3)^2-7} = \frac{1}{2}$

تنبيه!

التحليل

عند اختصار البسط بأكمله، فإنه يصبح 1 وليس 0 .

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

3A $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$ 20

3B $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}$ $\frac{1}{5}$

ينتج عن اختصار العامل المشترك بين بسط ومقام الدالة النسبية دالة جديدة، ففي المثال 3a ينتج عن الاختصار بين بسط ومقام الدالة f دالة جديدة g، حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}\ ,\ g(x) = x - 5$$

إن قيم هاتين الدالتين متساوية لجميع قيم x إلا عندما $x = -4$، فإذا تساوت قيم دالتين إلا عند قيمة وحيدة c، فإن نهايتيهما عندما تقترب x من c متساويتان؛ لأن قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة عند النقطة التي تُحسبُ النهاية عندها؛ لذا فإن $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x \to -4} (x - 5)$.

والطريقة الأخرى لإيجاد نهايات ناتجِ التعويضِ فيها صيغة غير محددة، هي إنطاق البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.

مثال 4 استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

احسب $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$؛ لذا أنطق البسط، ومن ثم اختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$ اضرب كلًّا من البسط والمقام في $\sqrt{x} + 3$، والذي يمثل مرافق $\sqrt{x} - 3$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$ بسّط

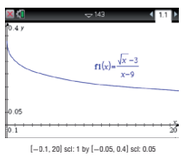
$$= \lim_{x \to 9} \frac{\cancel{x - 9}}{\cancel{(x - 9)}(\sqrt{x} + 3)}$$ اختصر العامل المشترك

$$= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$ بسّط

$$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$$ عوّض

$$= \frac{1}{6}$$ بسّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ في الشكل المجاور هذه النتيجة.



تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(4A) $\lim_{x \to 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$ 10

(4B) $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$ $-\frac{1}{4}$

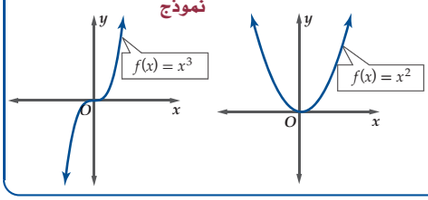
حساب النهايات عند المالانهاية: درست سابقًا أن لجميع الدوال الزوجية سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه، وكذلك الدوال الفردية لها جميعًا سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه.

مفهوم أساسي نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n،

- $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$، إذا كان n عددًا زوجيًّا.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$، إذا كان n عددًا فرديًّا.

نموذج



إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.

حساب النهاية عند نقطة

المثال 4 يُبيِّنُ كيفية استعمال فكرة إنطاق البسط أو المقام؛ في حساب النهايات .

مثال إضافي

4 احسب $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$. $\frac{1}{4}$

141 الدرس 2-8 حساب النهايات جبريًّا

حساب النهايات عند المالا نهاية

المثال 5 يُبيِّنُ كيفية إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود عند الاقتراب من ∞، −∞.

مثال إضافي

5 احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to-\infty}(2x^4+x^3-7)$ ∞

b) $\lim_{x\to-\infty}(x^5-x^2+8)$ −∞

c) $\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2+x-7)$ ∞

إرشادات للدراسة

الضرب في المالانهاية

$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ تعني أن الدالة تأخذ قيمًا موجبة ومتزايدة بشكل غير محدود، كلما اقتربت قيم x من العدد c؛ لذا فإن ضرب هذه القيم في عدد موجب لا يغير هذا السلوك، أما ضربها في عدد سالب، فإنه يعكس إشاراتها، وبذلك تقترب النهاية من $-\infty$ ، أي أنه إذا كان $a>0$ فإن:

$a(\infty)=\infty$,

$-a(\infty)=-\infty$

مفهوم أساسي نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن

$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n$ ، $\lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$

يمكنك استعمال هاتين الخاصيتين لحساب نهايات دوال كثيرات حدود عند المالانهاية. تذكَّر أن كون نهاية الدالة ∞ أو $-\infty$ لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلاحدود أو متناقصًا بلا حدود.

مثال 5 نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$

$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=-\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

b) $\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)$

$\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)=\lim_{x\to\infty}-x^2$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=-\lim_{x\to\infty}x^2$ — خاصية الضرب في ثابت

$=-\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

c) $\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)$

$\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)=\lim_{x\to-\infty}5x^4$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=5\lim_{x\to-\infty}x^4$ — خاصية الضرب في ثابت

$=5\times\infty=\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

5A) $\lim_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)$ −∞ **5B)** $\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$ ∞ **5C)** $\lim_{x\to-\infty}(2x-6x^2+4x^5)$ −∞

ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

مراجعة المفردات

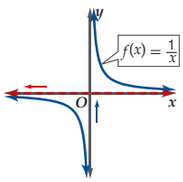
دالة المقلوب

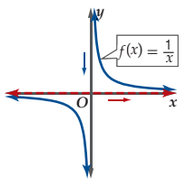
تذكر أن دالة المقلوب هي $f(x)=\frac{1}{a(x)}$ ، حيث $a(x)$ دالة خطية، و $a(x)\neq0$.

مفهوم أساسي نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

التعبير اللفظي: إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

الرموز: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

ويمكننا استعمال هذه الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على أعلى قوة لمتغير الدالة.

142 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

حساب النهايات عند المالا نهاية

المثال 6 يُبيِّنُ كيفية إيجاد نهايات دوال نسبية عند المالانهاية.

مثال إضافي

6 أوجد قيمة كل نهاية فيما يأتي:

a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{3x-4}$ $\frac{2}{3}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{3x^2-1}$ ∞

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-x+1}{2x^3-x^2+3x-2}$ 2.5

المحتوى الرياضي

نهاية الدوال النسبية توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية .

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو $-\infty$، بحسب إشارة الحد الرئيس في كلٍّ من البسط والمقام.

2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.

3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام ، فإن النهاية صفر.

إرشادات للمعلم الجديد

صفر المقام إذا كان المقام صفرًا عند حساب نهاية، وكان البسط عددًا غير الصفر، فإن النهاية إما ∞ أو $-\infty$.

مثال 6 نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{8x-3}$

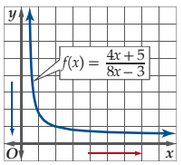
$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{8x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$ بسّط

$=\frac{\lim_{x\to\infty}4+5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty}8-3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$=\frac{4+5\cdot0}{8-3\cdot0}=\frac{1}{2}$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{4x+5}{8x-3}$ المجاور هذه النتيجة. ✔



b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-x}{3x^3+1}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-x}{3x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^3

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$ بسّط

$=\frac{6\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty}3+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$=\frac{6\cdot0-0}{3+0}=0$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{9x^3+2x}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{9x^3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^4

$=\frac{\lim_{x\to\infty}5}{9\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$=\frac{5}{9\cdot0+2\cdot0}=\frac{5}{0}$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

وحيث إن نهاية المقام صفر، فإننا نكون قد طبقنا خطأً خاصية القسمة، إلا أننا نعلم أنه عند قسمة العدد 5 على قيم صغيرة موجبة تقترب من الصفر، فإن الناتج سيكون كبيرًا بشكلٍ غير محدود، أي أن النهاية هي ∞.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

6A) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x-10}$ 0

6B) $\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+7}{5x+1}$ $-\infty$

6C) $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$ 3.5

إرشادات للدراسة

نهاية الدوال النسبية

توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو −∞، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.

2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.

3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.

حساب النهايات عند المالا نهاية

المثال 7 يُبيِّنُ كيفية حساب نهاية متتابعة متقاربة.

مثال إضافي

7 احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

(a $a_n = \dfrac{2n+3}{n+4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

(b $b_n = \dfrac{3}{n^2}\left[\dfrac{(n+3)(n+4)}{9}\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$

درست سابقًا أن المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية؛ لذا فإن نهاية المتتابعة غير المنتهية هي نهاية دالة عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة، فإن قيمة هذه النهاية هي العدد الذي تقترب منه المتتابعة . فمثلًا يمكن وصف المتتابعة $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ بـ $a_n = \frac{1}{n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، فإن المتتابعة تقترب من الصفر .

مـثال 7 نهايات المتتابعات

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

(a $a_n = \dfrac{3n+1}{n+5}$

لحساب نهاية المتتابعة، أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{n+5}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$ — اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n

$= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$ — خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$= \dfrac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$ — نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 3 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 3 .

تحقق كوّن جدولًا، واختر قيمًا متعددة لِـ n.

n	1	20	40	60	80	90	100	1000	10000
a_n	0.6667	2.44	2.6889	2.7846	2.8353	2.8526	2.8667	2.9861	2.9986

نلاحظ أن حدود المتتابعة تقترب من العدد 3 كلما كبرت n .

(b $b_n = \dfrac{5}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي 1.8, 1.953, 2.222, 2.813, 5 . والآن أوجد نهاية المتتابعة

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$ — ربع ثنائية الحد

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$ — اضرب

$= \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + 10\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4}$ — اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n^4 ، ثم استعمل خصائص القسمة ، والمجموع، والضرب في ثابت

$= \dfrac{5}{4} = 1.25$ — نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 1.25 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 1.25.

تحقّق كوّن جدول قيم، واختر قيمًا كبيرة لـ n . قيم b_n في الجدول أدناه مقربة إلى أقرب جزء من مئة)

n تقترب من ∞ ←

n	10	100	1000	10000	100000
b_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

(7A $a_n = \dfrac{4}{n^2+1}$ 0

(7B $b_n = \dfrac{2n^3}{3n+8}$ ∞

(7C $c_n = \dfrac{9}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$ 3

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلاب بعد حَلّ كل مثال أن يعملوا من خلال مجموعات ثلاثية أو رباعية من طلاب متفاوتي القدرات؛ لحَلّ تدريبات تحقق من فهمك، وعند انتهاء المجموعة من الحَلّ، تقارن حلولها مع حلول المجموعات الأخرى، ثم تتم مناقشة النتائج مع الطلاب جميعًا، ومناقشة الأخطاء وتوضيح ما يلزم.

تدرب وحل المسائل

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي: (مثال 1)

1) $\lim_{x\to -3}(5x-10)$ **−25**

2) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+4x+13}{x-3}$ **29**

3) $\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{x}+2x+\sqrt{x}\right)$ **21.11**

4) $\lim_{x\to -4}[x^2(x+1)+2]$ **−46**

5) $\lim_{x\to 12}\frac{x^2-10x}{\sqrt{x+4}}$ **6**

6) $\lim_{x\to -6}\frac{x^4-x^3}{x^2}$ **42**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب: (مثال 2) **7, 10** انظر الهامش.

7) $\lim_{x\to 16}\frac{x^2+9}{\sqrt{x}-4}$

8) $\lim_{x\to 2}(4x^3-3x^2+10)$ **30**

9) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+9x+6}{x^2+5x+6}$ **2**

10) $\lim_{x\to 3}\sqrt{2-x}$

11) $\lim_{x\to 9}(3x^2-10x+35)$ **188**

12) $\lim_{x\to 10}(-x^2+3x+\sqrt{x})$ **−66.84**

13) **فيزياء:** بحسب نظرية آينشتاين النسبية، فإن كتلة جسم يتحرك بسرعة v تُعطى بالعلاقة $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء، m_0 كتلة الجسم الابتدائية أو كتلته عندالسكون. انظر الهامش.

أوجد $\lim_{v\to 0} m$، ووضّح العلاقة بين هذه النهاية و m_0. (مثال 2)

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 3, 4)

14) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ **3**

15) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+1}-1}$ **8**

16) $\lim_{x\to -5}\frac{4x^2+21x+5}{3x^2+17x+10}$ **1.46**

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$ **−12**

18) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-15}{x+3}$ **−8**

19) $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$ $\frac{1}{6}$

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 5, 6)

20) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}$ $\frac{3}{4}$

21) $\lim_{x\to\infty}(5-2x^2+7x^3)$ **∞**

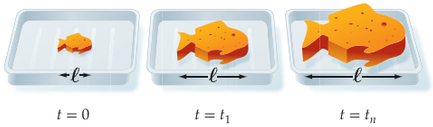
22) $\lim_{x\to\infty}(10x+14+6x^2-x^4)$ **$-\infty$**

23) $\lim_{x\to\infty}\frac{14x^3-12x}{4x^2+13x-8}$ **∞**

24) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x-11}{-x^5+17x^3+4x}$ **0**

25) $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ **2**

26) **إسفنج:** تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t)=\frac{105t^2}{10+t^2}+25$، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالملمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)



$t=0$ $t=t_1$ $t=t_n$

a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟ **25 mm**

b) ما نهاية الدالة عندما $t\to\infty$؟ **130 mm**

c) وضّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج.
لن يتعدى طول حيوان الإسفنج 130 mm

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 7)

27) $a_n=\frac{8n+1}{n^2-3}$ **0**

28) $a_n=\frac{-4n^2+6n-1}{n^2+3n}$ **−4**

29) $a_n=\frac{12n^2+2}{6n^2-1}$ **2**

30) $a_n=\frac{8n^2+5n+2}{3+2n}$ **∞**

31) $a_n=\frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$ $\frac{1}{4}$

32) $a_n=\frac{12}{n^2}\left[\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right]$ **∞**

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة مستخدمًا التعويض المباشر لحساب النهايتين من اليمين واليسار:

33) $\lim_{x\to -2}\begin{cases}x-3, & x\le -2\\ 2x-1, & x>-2\end{cases}$ **−5**

34) $\lim_{x\to 0}\begin{cases}5-x^2, & x\le 0\\ 5-x, & x>0\end{cases}$ **5**

35) $\lim_{x\to 2}\begin{cases}(x-2)^2+1, & x\le 2\\ x-6, & x>2\end{cases}$ **غير موجودة**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 32-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: عند إيجاد نهاية دالة نسبية، قد يستعمل بعض الطلاب التعويض المباشر، ويحدد خطأً نهاية الدالة بالقيمة $\frac{0}{0}$؛ لذا ذكِّرهم بتبسيط الدالة النسبية في هذه الحالة قبل إيجاد النهاية.

خطأ شائع: للتمارين 12–7، يجب أن يعرف الطلاب أنه ليس بإمكانهم استعمال التعويض المباشر إذا كانت النتيجة تتضمن صفرًا في المقام، أو إذا كان ما تحت الجذر عددًا سالبًا؛ لذا يجب عليهم في هذه الحالات. توضيح سبب عدم إمكانية حساب النهاية لهذه الدوال بالتعويض المباشر وعدم اللجوء إلى التبسيط.

خطأ شائع: للتمارين 39–37، ذكّر الطلاب بضبط الحاسبة البيانية على وضعية الراديان وليس الدرجات.

إجابات:

7) ليس ممكنًا؛ فالمقام يساوي صفرًا عندما $x=16$.

10) ليس ممكنًا؛ ، قيمة الدالة $f(x)=\sqrt{2-x}$، هي $\sqrt{-1}$ عندما $x=3$ وهي ليست معرفة.

13) $\lim_{v\to 0} m=m_0$. عندما تقترب سرعة الجسم من الصفر، فإن كتلته تقترب من كتلته الابتدائية، أو كتلته في وضع السكون.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	32–1 ، 48، 49 ، 61–51
ضمن ضمن المتوسط	37–1 فردي، 40، 47– 41 فردي، 48، 49، 61–51
فوق فوق المتوسط	61 – 33

4 التقويم

بطاقة مكافئة: اطلب إلى كل طالب كتابة توضيح مختصر للحالات التي يمكن فيها حساب نهاية دالة باستعمال التعويض المباشر دون تبسيط الدالة. إجابة ممكنة: يمكن حساب النهاية باستعمال التعويض المباشر. إذا كانت الدالة كثيرة حدود، أو نسبية لا تنتج صيغة غير محددة عند التعويض فيها.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 2-8, 1-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (68)

إجابات:

37) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\pi}{\pi}=\frac{0}{\pi}=0$

38) $\lim_{x\to0}(1+x+2^x-\cos x)=1+0+2^0-\cos 0=1$

39) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{x}=\frac{\tan\pi}{\frac{\pi}{2}}=0$

50) إذا كانت $m>n$، فإن النهاية تساوي 0.
إذا كانت $m=n$ فإن النهاية تساوي $\frac{a_n}{b_m}$.
إذا كانت $m<n$، فإن النهاية إما $+\infty$ أو $-\infty$.

51) صحيحة أحيانًا، تكون صحيحة إذا كانت $r(x)$ معرّفة عند c.

احسب كل نهاية مما يأتي، إذا كانت موجودة: **37-39)** انظر الهامش

37) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}$ **38)** $\lim_{x\to0}(1+x+2^x-\cos x)$ **39)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{x}$

40) $\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ -0.5

أوجد $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ لكل دالة مما يأتي:

41) $f(x)=2x-1$ 2 **42)** $f(x)=7-9x$ -9

43) $f(x)=\sqrt{x}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **44)** $f(x)=\sqrt{x+1}$ $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

45) $f(x)=x^2$ $2x$ **46)** $f(x)=x^2+8x+4$ $2x+8$

47) فيزياء: يمتلك الجسم المتحرك طاقةً تُسمى الطاقة الحركية؛ لأن بإمكانه بذل شغل عند تأثيره على جسم آخر. وتُعطى الطاقة الحركية لجسم متحرك بالعلاقة $k(t)=\frac{1}{2}m\cdot(v(t))^2$، حيث $v(t)$ سرعة الجسم عند الزمن t، و m كتلته بالكيلوجرام. إذا كانت سرعة جسم $v(t)=\frac{50}{1+t^2}$ لكل $t\geq0$، وكتلته 1 kg، فما الطاقة الحركية التي يمتلكها عندما يقترب الزمن من 100 s؟ 0.0000125

مسائل مهارات التفكير العليا

48) برهان: استعمل خصائص النهايات؛ لإثبات أنه لأي كثيرة حدود $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ ولأي عدد حقيقي c، فإن $\lim_{x\to c}p(x)=p(c)$ انظر ملحق الإجابات.

49) برهان: استعمل الاستقراء الرياضي؛ لإثبات أنه إذا كان $\lim_{x\to c}f(x)=L$، فإنه لأي عدد صحيح n $\lim_{x\to c}[f(x)]^n=[\lim_{x\to c}f(x)]^n=L^n$. انظر ملحق الإجابات.

50) تحدٍّ: احسب النهاية الآتية إذا كانت $a_n\neq0$, $b_m\neq0$:
$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}$
(إرشاد: افترض كلًّا من الحالات $(m<n, m=n, m>n)$ انظر الهامش.

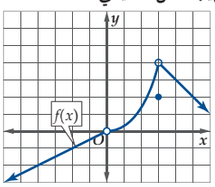
51) تبرير: إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل العلاقة $\lim_{x\to c}r(x)=r(c)$ صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش.

52) اكتب: استعمل جدولًا لتنظيم خصائص النهايات، وضمِّنه مثالًا على كل خاصية. انظر ملحق الإجابات.

53) اكتب: افترض أن $\frac{p(x)}{q(x)}$ دالة نسبية، وأن $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\infty}{\infty}$. تدّعي ليلى أن قيمة هذه النهاية هي 1. وضِّح سبب كونها مخطئة. وما الخطوات التي يمكن اتباعها لحساب هذه النهاية، إذا كانت موجودة؟ انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ أدناه لإيجاد كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-8)



54) $\lim_{x\to-2}f(x)$، $f(-2)$ -1، -1

55) $\lim_{x\to0}f(x)$، $f(0)$ 0، غير معرفة

56) $\lim_{x\to3}f(x)$، $f(3)$ 4، 2

أوجد $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$، $(f\cdot g)(x)$، $(\frac{f}{g})(x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، ثم حدِّد مجال الدالة الناتجة: (الدرس 1-6) 58, 59) انظر ملحق الإجابات.

57) $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=x+9$

58) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=x^2-1$

تدريب على اختبار

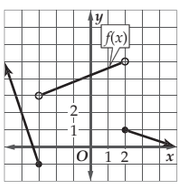
59) ما قيمة $\lim_{h\to0}\frac{2h^3-h^2+5h}{h}$؟ C

A 3 B 4 C 5 D غير موجودة

60) ما القيمة التي تقترب منها $g(x)=\frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0؟ A

A $-\pi$ B $-\frac{3}{4}$ C $-\frac{1}{2}\pi$ D 0

61) باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim_{x\to2^+}f(x)$؟ B



A 0 B 1 C 5 D غير موجودة

تنويع التعليم

فوق

توسّع أوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحققان العبارتين $\lim_{x\to7}f(x)=0$، $\lim_{x\to7}[f(x)\cdot g(x)]\neq0$.

إجابة ممكنة: $f(x)=49-x^2$, $g(x)=\frac{x+3}{x^2+x-56}$.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (10) — دون

الاسم: التاريخ:

8-2 تدريبات إعادة التعليم

حساب النهايات جبريًّا

حساب النهاية عند نقطة

مثال 1 أوجد: $\lim_{x\to -2}(-2x^4+3x^3-5x+3)$ باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا.

لمّا كانت النهاية المطلوبة لكثيرة حدود، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -2}(-2x^4+3x^3-5x+3) = -2(-2)^4+3(-2)^3-5(-2)+3$$
$$= -32-24+10+3=-43$$

مثال 2 احسب: $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-9x+20}{x-4}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-9x+20}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-5)(x-4)}{(x-4)}$$ حلّل
$$=\lim_{x\to 4}(x-5)$$ اختصر العامل المشترك
$$=4-5=-1$$ عوّض وبسّط

مثال 3 احسب: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ينتج عن التعويض المباشر: $\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$، لذا اضرب في مرافق البسط قبل التحليل، واختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$ اضرب في المرافق
$$=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$ بسّط
$$=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$ اختصر العامل المشترك
$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{(\sqrt{x}+4)}$$ بسّط
$$=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$ عوّض وبسّط

تمارين

احسب كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x)$ — 3
2) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^3-4}$ — 11
3) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+9x+14}{x+2}$ — 5
4) $\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ — $\frac{1}{4}$
5) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{x}+x\right)$ — −4.25
6) $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-1)$ — 5

تدريبات إعادة التعليم (11) — دون

الاسم: التاريخ:

8-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حساب النهايات جبريًّا

حساب النهايات عند اللانهاية

دوال القوى	دوال كثيرات الحدود	دوال المقلوب
لأي عدد صحيح موجب n، تكون • $\lim_{x\to\infty}x^n=\infty$ • $\lim_{x\to-\infty}x^n=\infty$ إذا كان n عددًا زوجيًّا. • $\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ إذا كان n عددًا فرديًّا.	افترض أن p كثيرة حدود، $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ فإن: $\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n$ و $\lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$	لأي عدد صحيح موجب n، تكون $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$

مثال احسب كل نهاية مما يأتي.

a) $\lim_{x\to\infty}(x^3-6x+1)$

$\lim_{x\to\infty}(x^3-6x+1)=\lim_{x\to\infty}x^3$ — نهاية دالة كثيرة حدود عند اللانهاية
$=-\infty$ — نهاية دالة قوة عند اللانهاية

b) $\lim_{x\to\infty}(2x^4+5x^2)$

$\lim_{x\to\infty}(2x^4+5x^2)=\lim_{x\to\infty}2x^4$ — نهاية دالة كثيرة حدود عند اللانهاية
$=2\lim_{x\to\infty}x^4$ — خاصية الضرب في ثابت
$=\infty$ — نهاية دالة القوة عند اللانهاية

تمارين

احسب كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to\infty}(-2x^3+5x)$ — ∞
2) $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}$ — 0
3) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x-1}{10x+7}$ — $\frac{3}{5}$
4) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-2x}{x^3+1}$ — 0
5) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x^3-1}{2x^3+x^2-1}$ — ∞
6) $\lim_{x\to\infty}(3x^3+5x-1)$ — $-\infty$

تدريبات حل المسألة (12) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

8-2 تدريبات حل المسألة

حساب النهايات جبريًا

1) **بركة سباحة**، صُبَّ محلول يحتوي على 0.3 جرام من الكلورين لكل لتر ماء في بركة سباحة، إذا أُعطي تركيز الكلورين في البركة بالجرامات لكل لتر ماء بعد t ثانية بالمعادلة: $C(t)=\frac{0.3t}{1000+t}$. أوجد $\lim_{t\to\infty}C(t)$.
0.3 جرام/لتر

2) **تفوّت**، المعادلة $C=\frac{60000\,P}{100-P}$ تمثل تكلفة إزالة $P\%$ من الملوثات التي يتسبب فيها أحد المصانع، حيث $0\le p\le 100$، أوجد $\lim_{p\to 100^-}C$.
∞

3) **سيارات**، اشترى علي سيارة بسعر 24000 ريال، إذا كانت العلاقة $c(t)=24(0.90)^t$ تعبّر عن سعر السيارة بالآلاف بعد t سنة.

a) أكمل الجدول، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

السنة	1	3	5	6
القيمة	21.6	17.5	14.17	12.75

b) أوجد قيمة: $\lim_{t\to\infty}c(t)$
0

4) **القيادة الآمنة**، في أثناء قيادة السيارة، لا بد من الحفاظ على مسافة أمان بين سيارتك والسيارة التي تسير أمامك. افترض أن مسافة الأمان المقترحة بالياردة تتعين بالمعادلة $y(x)=0.005x^2+0.3x+3$، حيث x السرعة بالأميال لكل ساعة، فأوجد $\lim_{x\to 70}y(x)$.
48.5 ياردة

5) **تصنيع**، تمثل المعادلة $c(p)=3000+20P$ تكلفة إنتاج P قطعة منتج معين بالريالات.

a) أوجد تكلفة إنتاج 100 قطعة.
5000 ريال

b) بلغت تكلفة الإنتاج 21000 ريال في أحد الأيام. فكم عدد القطع التي أنتجها المصنع في ذلك اليوم؟
900

c) يمكن إيجاد متوسط تكلفة إنتاج القطعة بقسمة $c(p)$ على P، أوجد $\lim_{p\to 15000}\frac{c(p)}{p}$.
20.20

6) **أفران كهربائية**، الدالة $f(x)=\frac{250x+200000}{x}$ تمثل متوسط تكلفة الفرن الكهربائي عند إنتاج x فرنًا، أوجد $\lim_{x\to 2000}f(x)$.
350 ريالًا

التدريبات الإثرائية (13) — فوق

الاسم: التاريخ:

8-2 التدريبات الإثرائية

نظرية الشطيرة

في الدرس (1-8)، تعلمت أن $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ غير موجودة، وذلك بسبب تذبذب الدالة بين -1 و 1 كلما اقتربت x من 0.

ولكن، ماذا عن النهاية $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$؟ هل هذه النهاية غير موجودة لأن $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ غير موجودة؟ تساعد نظرية الشطيرة على الإجابة عن هذا السؤال.

نظرية الشطيرة

إذا كان: $h(x)\le f(x)\le g(x)$ لجميع قيم x في فترة مفتوحة تحوي c، مع إمكانية استثناء c، وكانت: $\lim_{x\to c}g(x)=\lim_{x\to c}h(x)=L$، فإن $\lim_{x\to c}f(x)$ موجودة وتساوي L.

لاحظ أن $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$ لجميع قيم x باستثناء $x=0$، اضرب المتباينة في x^2 لتحصل على $-x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$، ولتطبيق نظرية الشطيرة، افترض أن: $g(x)=x^2, f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}, h(x)=-x^2$. تعلمت في الدرس (2-8) أن كلًا من $\lim_{x\to 0}g(x)$ و $\lim_{x\to 0}h(x)$ تساوي 0؛ لذا فإن $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ حسب نظرية الشطيرة.

تمارين

1) إذا كانت: $2\sqrt{x-1}-1\le g(x)\le(2.7)^{x-2}$، فاستعمل نظرية الشطيرة لإيجاد $\lim_{x\to 2}g(x)$.
1

استعمل نظرية الشطيرة لإيجاد النهاية في كلٍّ مما يأتي:

2) $\lim_{x\to 0}x^4\sin\frac{1}{x}$
0

3) $\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$
0

4) $\lim_{x\to 0}|x|\sin\frac{\pi}{x}$
0

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 8

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (19)

دون ضمن فوق

8-2 حساب النهايات جبريًا

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

1) $\lim_{x\to 3}(x^2+3x-8)$ — 10

2) $\lim_{x\to -6}\frac{x^2-36}{x+6}$ — -12

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^2-9}{x}$ — 6

4) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2-2x+1}$ — 3

5) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$ — $\frac{1}{9}$

6) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2}{2+\sqrt{x-3}}$ — $\frac{9}{2}$

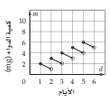
7) $\lim_{x\to\infty}(2-6x+5x^3)$ — ∞

8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-8x^2}{4x^5+3x}$ — $\frac{1}{4}$

9) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x+1}{5x^4-2x^2}$ — 0

10) $\lim_{x\to-\infty}(6x^7-x^2)$ — $-\infty$

11) **دواء:** يتناول عامر 2mg من الدواء يوميًّا، ويبيّن الشكل المجاور كمية الدواء $m(d)$ المتبقية في دمه بعد d يومًا. أوجد $\lim_{d\to 3^-}m(d)$ ، $\lim_{d\to 3^+}m(d)$.



4 mg, 2 mg

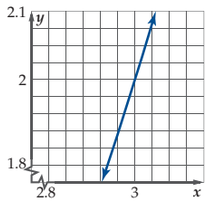
19

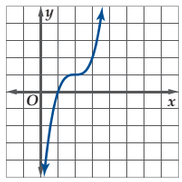
ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

الهدف
استعمال الحاسبة البيانية TI — nspire ؛ لتقدير ميل منحنى.

يعتبر ميل المستقيم بوصفه معدلًا ثابتًا للتغير مفهومًا واضحًا، إلا أن الميل ليس واضحًا بالنسبة للمنحنيات بصورة عامة؛ إذ يتغير ميل المنحنى عند كل نقطة عليه.





وبشكل عام فإن التمثيلات البيانية لمعظم الدوال تبدو خطيةً عند تفحُّصها على فترةٍ قصيرة جدًّا.

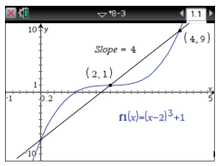
وبالنظر إلى القواطع المتتالية، يكون من الممكن تطبيق فكرة الميل على المنحنيات.

نشاط 1 خطوط القاطع

قدّر ميل منحنى الدالة $y = (x-2)^3 + 1$ عند النقطة (3, 2).

خطوة 1 أدخل $y = (x-2)^3 + 1$ في **f1**، ثم احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$، عندما $x = 2 , x = 4$. كما يلي:

- مثِّل الدالة بالضغط على (on) ، ثم اكتب الدالة واضغط (enter).
- حدِّد نقطتين على منحنى الدالة بالضغط على مفتاح (menu) واختيار 8: الهندسة، ثم 1: النقاط والمستقيمات واختيار 2: نقطة على المستقيم، ثم الضغط على المنحنى مرتين وستظهر نقطتان.
- ظلِّل إحداثيِّ x لكلا النقطتين واستبدلها بالإحداثيين $x = 2, x = 4$.
- ارسم القاطع المار بالنقطتين بالضغط على (menu)، واختيار 8: الهندسة، ثم 1: النقاط والمستقيمات ثم اختيار 4: مستقيم واضغط على النقطتين ثم اضغط (esc).



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

- أوجد ميل القاطع بالضغط على (menu)، واختيار 8: الهندسة، ثم 3: الميل، ثم اضغط على القاطع وسيظهر أن ميله يساوي 4.

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لتقدير ميل منحنى .

إرشادات التدريس

ذكِّر الطلاب بكيفية إيجاد ميل المستقيم، ثم اسألهم عن إمكانية استعمال فكرة ميل المستقيم؛ لإيجاد ميل منحنى دالة.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI-nspire

2 التدريس

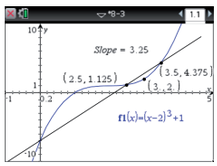
العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثلاثية، أو رباعية متفاوتة القدرات، و اطلب إليهم إكمال النشاط وتحليل نتائج السؤالين 5, 6.

تدريب اطلب إلى الطلاب حَلّ التمارين 1-4.

خطوة 2 احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 3.5$, $x = 2.5$.

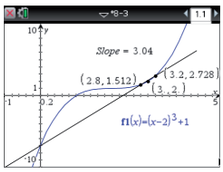
ظلِّل إحداثيِّ x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x=2.5, x=3.5$، فيكون ميل القاطع يساوي 3.25



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

خطوة 3 احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 3.2$, $x = 2.8$.

ظلِّل إحداثيِّ x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x=2.8, x=3.8$، فيكون ميل القاطع يساوي 3.04



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

خطوة 4 أوجد ميل 3 قواطع أخرى في فترات متناقصة حول النقطة (3, 2).

كلّما نقص طول الفترة حول النقطة (3, 2)، فإن ميل القاطع يقترب أكثر من العدد 3؛ لذا فإن ميل منحنى $y = (x-2)^3 + 1$ عند النقطة (3, 2) هو 3 تقريبًا.

تمارين :

قدِّر ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $y = (x+1)^2, (-4, 9)$ **−6**

2) $y = x^3 - 5, (2, 3)$ **12**

3) $y = 4x^4 - x^2, (0.5, 0)$ **1**

4) $y = \sqrt{x}, (1, 1)$ **0.5**

حلِّل النتائج **5, 6)** انظر الهامش.

5) حلِّل: صف ما يحدث لقاطع منحنى دالة عندما تقترب نقاط التقاطع من نقطة معطاة (a, b) على المنحنى.

6) خمِّن: صِف كيف يمكنك إيجاد القيمة الفعلية لميل منحنى عند نقطة معطاةٍ عليه.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 4 ؛ لتقويم مدى اتقان الطلاب لاستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لتقدير ميل دالة عند نقطة معطاة.

من المحسوس إلى المجرَّد

اسأل:

- كيف يرتبط ميل مماس منحنى دالة عند نقطة بالدالة عند تلك النقطة؟ يكون مساويًا لمعدل تغيّر الدالة عند تلك النقطة.

إجابات:

5) إجابة ممكنة:
كلما اقتربت نقاط تقاطع القاطع من نقطة (a, b)، على المنحنى، فإن القاطع يقترب أكثر فأكثر من المماس للمنحنى عند النقطة (a, b).

6) إجابة ممكنة: إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة.

المماس والسرعة المتجهة
Tangent Line and Velocity

فيما سبق:
درست إيجاد متوسط مُعدّل التغيّر باستعمال القاطع. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجدُ مُعدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- أجدُ السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.

المفردات:
المماس
tangent line
مُعدل التغيّر اللحظي
instantaneous rate of change
قسمة الفرق
difference quotient
السرعة المتجهة اللحظية
instantaneous velocity

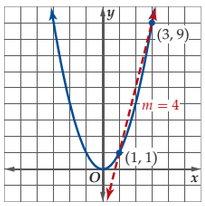
www.obeikaneducation.com

قراءة الرياضيات
اختصارات
يمكن اختصار الجملة ميل المماس لمنحنى الدالة بميل المنحنى.

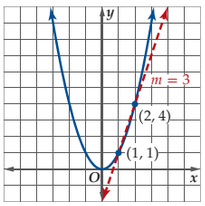
لماذا؟

عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

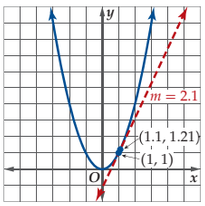
المماسات: تعلمت في الدرس 4-1 أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدّل تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال ميل القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة $(1, 1)$ ، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$ ، أو $(2, 4)$، أو $(1.1, 1.21)$ ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.



الشكل (1)

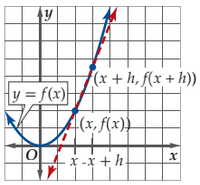


الشكل (2)



الشكل (3)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع ، زادت دِقَّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى في هذه الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطتا التقاطع متطابقتين كما في الشكل (3) أعلاه، فإننا نحصل على **مماس** للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمثِّل ميل هذا المستقيم ميل المنحنى عند نقطة التماس.



ولتعريف ميل المماس لمنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ فإنه يمكننا الرجوع إلى صيغة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة:

$$m = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

وتُسَمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$ ؛ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس وهو **مُعدل التغيّر اللحظي** للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

مفهوم أساسي — **مُعدل التغيّر اللحظي**

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويُعطى بالصيغة $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-8
إيجاد متوسط معدّل التغيّر باستعمال ميل القاطع.

الدرس 3-8
إيجاد معدّل التغيّر اللحظي لدالة عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللَّحظية.

ما بعد الدرس 3-8
استعمال المشتقات؛ في إيجاد السرعة المتجهة اللَّحظية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما شكل المنحنى الذي يُمثّل ارتفاع المظلي بوصفه دالة في الزمن قبل فتح المظلة؟
قطع مكافئ

- صِفْ معدل تغيُّر دالة الارتفاع قبل فتح المظلة وبعدها.
نلاحظ أن معدل تغير دالة الارتفاع يزداد قبل فتح المظلة، وذلك نتيجة تزايد سرعته حتى يفتح المظلة، وهذا يعني أن ميل المنحنى يزداد، أما بعد فتح المظلة، فإن معدل التغير سيقل بشكل كبير، وذلك نتيجة انعدام التسارع.

مصادر الدرس 3-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (152)	• تنويع التعليم، ص (152)	• تنويع التعليم، ص (154)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (20)	• كتاب التمارين، ص (20)	• كتاب التمارين، ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14, 15) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

المماسات

المثالان 1, 2 يُبيِّنان كيفية استعمال صيغة معدل التغيّر اللَّحظي؛ لإيجاد ميل منحنى دالة عند نقطة عليه، أو لإيجاد معادلة تُمكننا من حساب ميل منحنى دالة عند أي نقطة عليه، وذلك من خلال إيجاد ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1. أوجد ميل مماس منحنى $y=x^2+1$ عند النقطة $(2, 5)$. 4
2. أوجد معادلة ميل منحنى $y=x^2+2x$ عند أي نقطة عليه. $m = 2x + 2$

المحتوى الرياضي

المماسات تُعطي صيغة معدل التغيّر اللَّحظي عند نقطة ما، ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة. ويمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد معادلة لميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه.

إرشادات للمعلم الجديد

المماسات هندسيًّا، يقطع المماس الدائرة عند نقطة التماس فقط، ولا يقطعها مرة أخرى. والمماس هو مستقيم يلامس المنحنى، إلا أنه من الممكن أن يقطع المنحنى عند نقاطٍ أخرى.

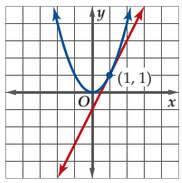
إرشادات للدراسة

مُعدل التغيّر اللحظي
عند حساب نهاية ميل المستقيم القاطع عندما $h \to 0$، فإن الحدود الباقية بعد إجراء الاختصارات، والتي تحتوي المتغير h ستصبح أصفارًا.

يمكنك استعمال صيغة معدل التغيّر اللحظي لإيجاد ميل مماس منحنى عند نقطة عليه.

مـثال 1 ميل المماس للمنحنى عند نقطة عليه

أوجد ميل مماس منحنى الدالة $y = x^2$ الممثَّلة بالشكل أدناه عند النقطة $(1, 1)$.



صيغة مُعدّل التغيّر اللحظي	$m = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$x = 1$	$= \lim_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
$f(1+h)=(1+h)^2$ ، $f(1)=1^2$	$= \lim_{h\to0} \frac{(1+h)^2-1^2}{h}$
فك المقدار $(1+h)^2$	$= \lim_{h\to0} \frac{1+2h+h^2-1}{h}$
بسّط	$= \lim_{h\to0} \frac{h(2+h)}{h}$
اقسم على h	$= \lim_{h\to0} (2+h)$
عوّض وبسّط	$=2+0=2$

أي أن ميل منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ هو 2.

تحقق: من خلال التمثيل البياني للمنحنى ومماسه عند النقطة $(1, 1)$ نلاحظ أن ميل المستقيم الذي يمثِّل المماس يساوي 2 .

تحقق من فهمك

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

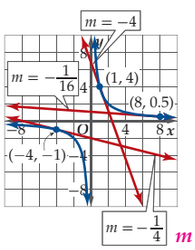
(1A) $y = x^2, (3, 9)$ 6 **(1B)** $y = x^2 + 4, (-2, 8)$ -4

كما يمكنك استعمال صيغة مُعدل التغيّر اللحظي لإيجاد معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه .

مـثال 2 ميل المنحنى عند أي نقطة عليه

أوجد معادلة ميل منحنى $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة عليه.

صيغة مُعدل التغيّر اللحظي	$m = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$f(x+h)=\frac{4}{x+h}$ ، $f(x)=\frac{4}{x}$	$m = \lim_{h\to0} \frac{\frac{4}{x+h}-\frac{4}{x}}{h}$
اطرح الكسرين في البسط، ثم التبسيط	$m = \lim_{h\to0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$
بسّط	$m = \lim_{h\to0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$
اقسم على h، ثم اضرب	$m = \lim_{h\to0} \frac{-4}{x^2+xh}$
عوّض	$m = \frac{-4}{x^2+x(0)}$
بسّط	$m = \frac{-4}{x^2}$



أي أن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه هو $m = -\frac{4}{x^2}$، والشكل المجاور يبين ميل المنحنى عند ثلاث نقط مختلفة.

تحقق من فهمك

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

(2A) $y = x^2 - 4x + 2$ $m = 2x - 4$ **(2B)** $y = x^3$ $m = 3x^2$

السرعة المتجهة اللحظية: تعلمت في الدرس 4-1 طريقة حساب السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة $f(t)$ في زمن مقداره t، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة المتجهة هي سرعة لها اتجاه. ويمكنك إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة بالطريقة نفسها التي أوجدت بها السرعة المتوسطة مع توضيح اتجاهها باستعمال الإشارة في الناتج، فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

إرشادات للدراسة

موقع الجسم

موقع الجسم عادة يعطى بالعلاقة $y = f(x)$ وذلك لتحديد الموقع في المستوى بدلالة الإحداثيين x, y، أما إذا أُعطي بوصفه دالة في الزمن t، فهذا يعني الإزاحة (محصلة المركبة x والمركبة y) لموقع الجسم عند اللحظة t، وإذا كانت الحركة على خط مستقيم فإن دالة الموقع تكون نفسها دالة المسافة مع أخذ الاتجاه بعين الاعتبار.

مفهوم أساسي — **السرعة المتوسطة المتجهة**

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال 3 من واقع الحياة — **السرعة المتوسطة المتجهة**

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالأميال، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعة باتجاه خط النهاية. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

أوجد أولًا المسافة الكلية التي قطعها العدَّاء عند الزمن $a = 2$, $b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$	$a = 2$, $b = 3$	$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$
$f(3) = 24.3$	بسّط	$f(2) = 18.8$

استعمل الآن صيغة السرعة المتوسطة المتجهة.

$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	صيغة السرعة المتوسطة المتجهة
$= \frac{24.3 - 18.8}{3 - 2}$	$f(b) = 24.3$, $f(a) = 18.8$, $b = 3$, $a = 2$
$= 5.5$	بسّط

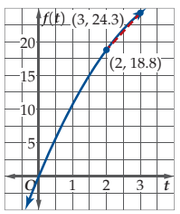
أي أن السرعة المتوسطة المتجهة للعدّاء بين الساعتين الثانية والثالثة هي 5.5 mi/h إلى الأمام.

الربط مع الحياة

أحرز العدّاء السعودي محمد شاوين ذهبية سباق 1500 m في دورة ألعاب آسيا المقامة في الصين عام 2010م، وفي المتوسط فقد قطع مسافة كيلومتر خلال 2:24:33 دقيقة تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) بالون: تمثِّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًّا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1$s ، $t = 2$s؟ **17 ft/s إلى الأعلى**



إرشادات للدراسة

سبق أن عرفت عند دراسة الإحداثيات القطبية أن الاتجاه له دلالة خاصة في المسافة المتجهة والزاوية المتجهة، كذلك فإن الاتجاه في السرعة المتجهة له دلالة خاصة.

إذا أمعنَّا النظر في إجابة المثال 3، نجد أنه تم حساب السرعة المتوسطة المتجهة من خلال إيجاد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين (2, 18.8) ، (3, 24.3) كما في الشكل المجاور. والسرعة المتجهة التي تم حسابها هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية، وليست **السرعة المتجهة اللحظية**، والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.

ولإيجاد سرعة العدّاء المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة t، فإننا نجد مُعدّل التغيّر اللحظي لمنحنى $f(t)$ عند تلك اللحظة.

مفهوم أساسي — **السرعة المتجهة اللحظية**

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

السرعة المتجهة اللحظية

المثال 3 يُبيِّن كيفية حساب السرعة المتوسطة المتجهة لجسم متحرك.

إرشادات للمعلم الجديد

السرعة والسرعة المتجهة يُستعملُ مصطلح "السرعة المتجهة" للتعبير عن قيمة السرعة واتجاهها. ويستعمل مصطلح "السرعة" للتعبير عن قيمة السرعة فقط.

مثال إضافي

3 فيزياء: قُذفت كرة إلى أعلى في تجربةٍ فيزيائية، وتمثِّل الدالة: $h(t) = -16t^2 + 95t + 15$ ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية، ما السرعة المتوسطة المتجهة للكرة في الفترة من $t = 1$s إلى $t = 2$s ؟ 47 ft/s

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: على الطلاب كتابة خطوات إيجاد ميل مماس منحنى دالة عند نقطة بالتفصيل على مدونة الصف. وعليهم توضيح كيفية استعمال صيغة معدل التغيّر اللَّحظي لإيجاد الميل، أو السرعة المتجهة اللَّحظية.

السرعة المتجهة اللحظية

المثالان 4, 5 يُبيِّنان كيفية استعمال صيغة السرعةالمتجهة اللَّحظية لإيجاد السرعة المتجهة اللَّحظية لجسم متحرك عند لحظة زمنية محددة، أو التوصل إلى معادلة نجد من خلالها السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما عند أي زمن.

مثالان إضافيان

4 بنايات: صعد سلمان إلى أعلى بناية ارتفاعها 30 ft ، ومن هناك رمى قطعة نقدية نحو الأرض. إذا كان ارتفاع القطعة النقدية عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من رميها يُعطى بالعلاقة: $h(t) = 30 - 16t^2$، فأوجد السرعة المتجهة اللحظية للقطعة النقدية بعد 2 s. $v(t) = -64$ ft/s

5 نحل: يُعطى بُعد نحلةٍ بالبوصات عن خَليَّتها بعد t ثانية بالعلاقة: $p(t) = 12t - 6t^3 + 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للنَّحلة عند أي زمن.
$v(t) = 12 - 18t^2$

إرشادات للمعلم الجديد

السرعة تأكد من فهم الطلاب للفرق بين السرعة المتوسطة المتجهة، والسرعة اللَّحظية المتجهة. فالسرعة المتوسطة المتجهة هي السرعة المتوسطة المتجهة بين نقطتين مختلفتين، أما السرعة اللَّحظية المتجهة، فهي السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة.

تنبيه!

التعويض

تذكر أن توزع الإشارة السالبة إلى يسار $f(t)$ على كل حد فيها.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 2000 ft ، وتمثِّل الدالة $f(t) = 2000 - 16t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5 s.

لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية، افترض أن $t = 5$ ، وطبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

صيغة السرعة المتجهة اللحظية
$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$f(5+h) = 2000 - 16(5+h)^2$, $f(5) = 2000 - 16(5)^2$
$$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{2000 - 16(5+h)^2 - [2000 - 16(5)^2]}{h}$$

فك المقدار $(5+h)^2$ واضرب وبسّط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-160h - 16h^2}{h}$$

حلّل
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-160 - 16h)}{h}$$

اقسم على h
$$= \lim_{h \to 0} (-160 - 16h)$$

عوّض وبسّط
$$= -160 - 16(0) = -160$$

أي أن سرعة الكرة بعد 5 s هي 160 ft/s، أما الإشارة السالبة فتعني أن الكرة تهبط لأسفل.

تحقق من فهمك

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7 s . **−224 ft/s**

يمكن إيجاد معادلة للسرعة المتجهة اللَّحظية عند أي زمن.

مثال 5 السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن .

طبِّق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

صيغة السرعة المتجهة اللحظية
$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$
$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$$

فك المقدار $(t+h)^3$ واضرب وبسّط
$$= \lim_{h \to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$$

حلّل
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$$

اقسم على h
$$= \lim_{h \to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$$

عوّض وبسّط
$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$$

بسّط
$$= 18 - 9t^2$$

أي أنَّ معادلة سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند أي زمن هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تحقق من فهمك

5) تمثِّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن . **$v(t) = 90 - 32t$**

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون: زوِّد مجموعات ثنائية من الطلاب بسلك وشريط لاصق، ثم اطلب إلى كل مجموعة تشكيل قطع مكافئ باستعمال السلك ولصقه على ورقة، ثم اطلب إليهم استعمال مسطرة لرسم مماس لهذا المنحنى. وتحديد ميل هذا المماس، ثم ناقشهم في العلاقة بين ميل المماس عند نقطة، ومعدل التغيّر اللَّحظي للدالة عند تلك النقطة.

تدرب وحل المسائل

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $y = x^2 - 5x$, $(1, -4)$, $(5, 0)$ — $-3, 5$

2) $y = 6 - 3x$, $(-2, 12)$, $(6, -12)$ — $-3, -3$

3) $y = \frac{3}{x}$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ — $-3, -\frac{1}{3}$

4) $y = x^3 + 8$, $(-2, 0)$, $(1, 9)$ — $12, 3$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (مثال 2)

5) $y = 4 - 2x$ — $m = -2$

6) $y = -x^2 + 4x$ — $m = -2x + 4$

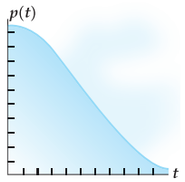
7) $y = 8 - x^2$ — $m = -2x$

8) $y = \frac{1}{x^2}$ — $m = -\frac{2}{x^3}$

9) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ — $m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

10) $y = -2x^3$ — $m = -6x^2$

11) **تزلج:** تمثِّل الدالة $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي بعد t ثانية من انطلاقه. (مثال 2)



a) أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن. $m = 0.18t^2 - 2.16t$

b) أوجد الميل عندما $t = 2\text{s}, 5\text{s}, 7\text{s}$. $-3.6, -6.3, -6.3$

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد t دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة. (تذكر بأن تحوِّل الدقائق إلى ساعات): (مثال 3)

12) $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$, $3 \le t \le 5$ — 45 mi/h تقريبًا

13) $s(t) = 1.08t - 30$, $4 \le t \le 8$ — 65 mi/h تقريبًا

14) $s(t) = 0.01t^3 - 0.01t^2$, $4 \le t \le 7$ — 49 mi/h تقريبًا

15) $s(t) = -0.5(t - 5)^2 + 3$, $4 \le t \le 4.5$ — 45 mi/h

16) تمثِّل المعادلة $f(t) = -16t^2 + 65t + 12$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت إلى أعلى، ما السرعة المتوسطة المتجهة للكرة بين $t = 15, 2t$. (مثال 3) $\frac{-64t^2+130t+2625}{2t-15}$

تمثِّل $f(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللَّحظية لهذا الجسم عند الزمن المُعطى: (مثال 4)

17) $f(t) = 100 - 16t^2, t = 3$ — -96 ft/s

18) $f(t) = 38t - 16t^2, t = 0.8$ — 12.4 ft/s

19) $f(t) = -16t^2 - 400t + 1700, t = 3.5$ — -512 ft/s

20) $f(t) = 1275 - 16t^2, t = 3.8$ — -121.6 ft/s

21) $f(t) = 73t - 16t^2, t = 4.1$ — -58.2 ft/s

22) $f(t) = -16t^2 + 1100, t = 1.8$ — -57.6 ft/s

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن : (مثال 5)

23) $s(t) = 14t^2 - 7$ — $v(t) = 28t$

24) $s(t) = t - 3t^2$ — $v(t) = 1 - 6t$

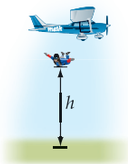
25) $s(t) = 5t + 8$ — $v(t) = 5$

26) $s(t) = 18 - t^2 + 4t$ — $v(t) = -2t + 4$

27) $s(t) = 12t^2 - 2t^3$ — $v(t) = 24t - 6t^2$

28) $s(t) = 3t^3 - 20 + 6t$ — $v(t) = 9t^2 + 6$

29) **قفز مظلي:** يمكنُ وصفُ ارتفاع مظلي بالأقدام عن سطح الأرض بعد t ثانية من قفزه بالدالة $h(t) = 15000 - 16t^2$. (الأمثلة 3, 4, 5)



a) أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للمظلي بين الثانيتين الثانية والخامسة من القفز. -112 ft/s

b) كم بلغت السرعة المتجهة اللحظية للمظَلِّي عند الثانية الثانية، وعند الثانية الخامسة؟ -64 ft/s, -160 ft/s

c) أوجد معادلة سرعة المظلي المتجهة اللحظية عند أي زمن. $v(t) = -32t$

30) **غوص:** يُبيِّنُ الجدول أدناه ارتفاع غواص d مقربًا لأقرب جزء من عشرة بالأمتار عن سطح الماء بعد t ثانية من قفزه من مكان مرتفع نحو الماء.

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.8	42.3	40.1	34	25.3	14.3	0.75

a) احسب السرعة المتوسطة المتجهة للغواص في الفترة الزمنية $0.5 \le t \le 1.0$. -7.4 m/s

b) إذا كانت معادلة المنحنى لنقاط الجدول هي $d(t) = -4.91t^2 - 0.04t + 45.06$ ، فأوجد معادلة سرعة الغواص المتجهة اللحظية $v(t)$ بعد t ثانية ، ثم استعمل $v(t)$ لحساب سرعته بعد 3s. $v(t) = -9.82t - 0.04$, -29.5 m/s

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-29 للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع للأسئلة 22–17، ذكِّر الطلاب باستعمال صيغة معدل التغيّر اللَّحظي، و ليس حساب $h(t)$ لقيمة t المعطاة؛ لأنها لا تساوي السرعة المتجهة اللحظية.

اكتشف الخطأ في السؤال 33، على الطلاب أن يتذكروا أن شكل منحنى دالة القيمة المطلقة شبيه بالحرف "V" ويَنْتُجُ عنه ميلان مختلفان. وبذلك تكون دالة الميل الناتجة ليست متصلة.

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–29 ، 33 ، 35–45
ضمن ضمن المتوسط	1–29 فردي، 30، 31، 33–45
فوق فوق المتوسط	30–45

4 التقويم

التسمية في الرياضيات اطلب إلى الطلاب توضيح العلاقة بين ميل مماس منحنى دالة عند نقطة، ومعدل تغيّر الدالة عند نفس النقطة. إجابة ممكنة: ميل مماس الدالة عند نقطة هو معدل تغيّر الدالة عند النقطة نفسها.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 3-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (68)

إجابات:

33) جميل؛ إجابة ممكنة: ميل المنحنى هو $1-$ عندما $x<0$، و 1 عندما $x>0$. لذا فإن التمثيل البياني للميل يتكون من مستقيمين أفقيين: $y=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$؛ ولذلك يكون غير متصل.

35) خاطئة؛ إجابة ممكنة: إذا لم يكن المنحنى دائرة فمن الممكن أن يقطع المماس هذا المنحنى في نقاط أخرى غير نقطة التماس، على سبيل المثال، المنحنى الذي يمثّل الدالة $y=\sin x$.

36) صح، إجابة ممكنة: بما أن $s(t)$ دالة خطية، فإن ميلها ثابت ويساوي a، وبذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا.

37) إجابة ممكنة: إذا مثلت دالة المسافة التي يقطعها جسم بيانيًّا، فإن المماس عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى) يكون أفقيًّا؛ أي موازيًا للمحور x، وميله يساوي صفرًا. ولذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية تساوي صفرًا عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى).

31) كرة القدم: ركل سلمان كرة بسرعة رأسية قدرها 75 ft/s. افترض أن ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية مُعطى بالدالة $f(t)=-16t^2+75t+2.5$.

a) أوجد معادلة سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$. $-32t+75$

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 s من ركلها؟ 59 ft/s

c) إذا علمت أن السرعة المتجهة اللحظية للكرة لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع هي صفر، فمتى تصل إلى أقصى ارتفاع؟ $t\approx 2.344$ s

d) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ 90.39 ft تقريبًا

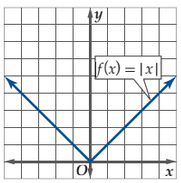
32) فيزياء: تعطى المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على مسار مستقيم بالمعادلة $d(t)=3t^3+8t+4$، حيث t الزمن بالثواني، و d المسافة بالأمتار.

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للجسم $v(t)$ عند أي زمن. $9t^2+8$

b) استعمل $v(t)$ لحساب سرعة الجسم المتجهة عندما $t=2\text{s}, 4\text{s}, 6\text{s}$ 44 m, 152 m, 332 m

مسائل مهارات التفكير العليا

33) اكتشف الخطأ: سُئل علي وجميل أن يصفا معادلة ميل مماس منحنى الدالة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور عند أي نقطة على منحناها. فقال علي: إن معادلة الميل ستكون متصلة؛ لأن الدالة الأصلية متصلة، في حين قال جميل: إن معادلة الميل لن تكون متصلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش.



34) تحدٍّ: أوجد معادلة ميل مماس منحنى $f(x)=2x^4+3x^3-2x$ عند أي نقطة عليه. $m=8x^3+9x^2-2$

35) تبرير: هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة "يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط"؟ برّر إجابتك. انظر الهامش.

36) تبرير: صح أم خطأ: إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم بعد t ثانية بـ $s(t)=at+b$، فإن السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا. برّر إجابتك. انظر الهامش.

37) اكتب بيّن لماذا تكون السرعة المتجهة اللحظية لجسم متحرك صفرًا عند نقطة القيمة العظمى والصغرى لدالة المسافة. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 2-8)

38) $\lim_{x\to 4}(x^2+2x-2)$ 22

39) $\lim_{x\to -1}(-x^4+x^3-2x+1)$ 1

40) $\lim_{x\to 0}(x+\sin x)$ 0

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 2-8)

41) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{2x^2+5}$ $\frac{3}{2}$

42) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+2}{x^4+x^3+3x}$ 0

تدريب على اختبار

43) ما معادلة ميل منحنى $y=2x^2$ عند أي نقطة عليه؟ A

A $m=4x$ B $m=2x$
C $m=x$ D $m=-4x$

44) سقطت كرة بشكل رأسي، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بالدالة $d(t)=16t^2$. إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{d(2+h)-d(2)}{h}$ تمثّل السرعة المتجهة للكرة بعد 2 s، فكم تساوي هذه السرعة؟ C

A 46 ft/s B 58 ft/s
C 64 ft/s D 72 ft/s

45) ماميل مماس منحنى $y=x^3+7$ عند النقطة $(3,34)$؟ C

A -9 B 9
C 27 D 34

تنويع التعليم

فوق

توسّع: أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $f(x)=3x^5-2x^3+x^2-6x+5$ عند أي نقطة عليه، واعتمد على إجابتك وإجابة السؤال 35؛ لوصف أي علاقة بين الدالة الأصلية، والمعادلة التي تصف ميل الدالة عند أي نقطة. $m=15x^4-6x^2+2x-6$ في كل حد اضرب المعامل في القوة، ثم اطرح 1 من القوة، واحذف الحد الثابت.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (14) دون ضمن

الاسم: التاريخ:

8-3 تدريبات إعادة التعليم

المماس والسرعة المتجهة

المماسات

معدل التغير اللحظي

يُعرَّف معدل التغير اللحظي لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(x,f(x))$ على أنه ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(x,f(x))$، ويُعطى بالصيغة: $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال 1 أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $y=3x^2+1$ عند أي نقطة عليه.

صيغة معدل التغير اللحظي $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f(x)=3x^2+1\ ,\ f(x+h)=3(x+h)^2+1$ $m=\lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2+1]-[3x^2+1]}{h}$

فُك الأقواس $m=\lim_{h\to 0}\frac{[3x^2+6hx+3h^2+1]-[3x^2+1]}{h}$

بسّط وحلّل $m=\lim_{h\to 0}\frac{3h(2x+h)}{h}$

اختصر h $m=\lim_{h\to 0}3(2x+h)$

خواص النهايات $m=6x$

أيّ أن معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة عليه هي $m=6x$.

تمارين

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

1) $y=x^3+1$ — $m=3x^2$

2) $y=4-7x$ — $m=-7$

3) $y=\frac{3}{x^2}$ — $m=\frac{-6}{x^3}$

4) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}$ — $m=\frac{-2}{x\sqrt{x}}$

تدريبات إعادة التعليم (15) دون ضمن

الاسم: التاريخ:

8-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المماس والسرعة المتجهة

السرعة المتجهة اللحظية:

السرعة المتجهة اللحظية،

إذا أُعطي موقع جسم متحرك $f(t)$ بوصفه دالة في الزمن، فإن سرعة الجسم المتجهة اللحظية $v(t)$ عند الزمن t تُعطى بالصيغة: $v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$، بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

مثال 2 أُسقط حجر من ارتفاع 1500 قدم، ويُعبِّر عن ارتفاعه بعد t ثانية من إسقاطه بالصيغة: $f(t)=1500-16t^2$ قدمًا، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ.

صيغة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

$f(4+h)=1500-16(4+h)^2, f(4)=1500-16(4)^2$ $=\lim_{h\to 0}\frac{[1500-16(4+h)^2]-[1500-16(4)^2]}{h}$

اضرب وبسّط $=\lim_{h\to 0}\frac{-128h-16h^2}{h}$

حلّل $=\lim_{h\to 0}\frac{h(-128-16h)}{h}$

اختصر وعوّض. $=-128-16(0)$

بسّط $=-128$

أي أن السرعة اللحظية بعد 4 ثوانٍ هي -128 قدمًا في الثانية.

تمارين

تمثل $s(t)$ بُعد جسيم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للجسيم عند الزمن المعطى في كلٍّ مما يأتي:

1) $s(t)=800-16t^2; t=3$ — $v(3)=-96\ ft/s$

2) $s(t)=-16t^2+1700; t=5$ — $v(5)=-160\ ft/s$

3) $s(t)=70t-16t^2; t=1$ — $v(1)=38\ ft/s$

4) $s(t)=-16t^2+90t+10; t=2$ — $v(2)=26\ ft/s$

تدريبات حل المسألة (16) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

8-3 تدريبات حل المسألة

المماس والسرعة المتجهة

1) **جسم ساقط،** أُسقطت منى كرةً من على سطح بناية ارتفاعها ft 800. والدالة: $s(t)=-16t^2+800$ تمثل ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من إسقاطها، أوجد السرعة المتجهة اللحظية لسقوط الكرة بعد ثانيتين؟

64 قدمًا/ ثانية إلى أسفل

2) **جسم ساقط،** أُسقط تامر حجرًا من ارتفاع ft 1200. والدالة: $s(t)=-16t^2+1200$ تمثل ارتفاع الحجر عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من إسقاطه.

a) ما السرعة المتجهة اللحظية للحجر بعد 4 ثوانٍ من إسقاطه؟

128 ft/s إلى أسفل

b) متى يصل الحجر إلى سطح الأرض؟

$5\sqrt{3}$ ثانية

c) أوجد صيغة لسرعة الحجر اللحظية في أي لحظة.

$v(t)=-32t$

d) أوجد سرعة الحجر عندما يصل إلى سطح الأرض.

$160\sqrt{3}\ ft/s$

3) **القفز البهلواني،** المعادلة: $h(t)=900-16t^2$ تمثل ارتفاع بهلوان عن سطح الأرض بعد قفزه من ارتفاع 900 قدم، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للبهلوان.

$v(t)=-32t$

4) **السقوط الحر،** المعادلة: $h(t)=15000-16t^2$ تمثل ارتفاع مقلِّ بالأقدام بعد t ثانية من قفزه من الطائرة.

a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للمظلي عند أي لحظة؟

$v(t)=-32t$

b) ما ارتفاع المظلي بعد ثانيتين؟

14936 قدمًا

c) ما السرعة المتجهة اللحظية للمظلي بعد 4 ثوانٍ؟

128 قدمًا/ثانية

5) **كرة قدم،** يركل لاعبٌ الكرةَ بسرعة ابتدائية قدرها $80\ ft/s$، فتصل ارتفاعًا (s) يُعبِّر عنه بالمعادلة: $s(t)=-16t^2+80t+6.5$ قدمًا بعد t ثانية.

a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية للكرة $v(t)$.

$v(t)=-32t+80$

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 ثانية؟

64 قدمًا/ث

c) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

2.5 ثانية

d) ما أقصى ارتفاع تبلغه الكرة؟

106.5 ft

التدريبات الإثرائية (17) ضمن فوق

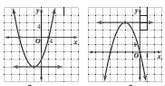
الاسم: التاريخ:

8-3 التدريبات الإثرائية

المماسات والرؤوس

هل يمكنك استعمال معادلة ميل القطع المكافئ الذي معادلته: $y=ax^2+bx+c$ عند أي نقطة لإيجاد رأس القطع؟

خطوة 1: مثّل قطعين مكافئين معادلتها $y=ax^2+bx+c$، بحيث يكون $a>0$ لأحدهما، و $a<0$ للآخر، ثم ارسم مماس القطع عند رأسه، واكتب معادلة كل قطع تحت تمثيله البياني.



$y=x^2+2x-3$ إجابة ممكنة: $y=-x^2-4x$

خطوة 2: أوجد ميل مماس كل قطع عند رأسه.

0

خطوة 3: أوجد معادلة ميل مماس كل قطع عند أي نقطة عليه.

$m=2x+2$ للقطع $y=x^2+2x-3$ ، $m=-2x-4$ للقطع $y=-x^2-4x$

خطوة 4: ساوِ كل معادلة ميل بالصفر، وحُلَّها بالنسبة لـ x، فيكون الحل هو الإحداثي x للرأس.

$2x+2=0$ $\quad x=-1$

$-2x-4=0$ $\quad -2x=4$ $\quad x=-2$

خطوة 5: عوِّض الإحداثي x للرأس في معادلة القطع لإيجاد الإحداثي y للرأس.

$y=x^2+2x-3$; $x=-1$ $\quad y=(-1)^2+2(-1)-3$ $\quad y=-4$

$y=-x^2-4x$; $x=-2$ $\quad y=-(-2)^2-4(-2)$ $\quad y=4$

خطوة 6: اكتب إحداثيَّ رأس كل قطع.

$y=x^2+2x-3$ للقطع $(-1,-4)$ و $y=-x^2-4x$ للقطع $(-2,4)$

تمارين

أوجد رأس القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي:

1) $y=2x^2-4x+2$ — $(1,0)$

2) $y=-x^2-6x-9$ — $(-3,0)$

3) $y=4x^2-25$ — $(0,-25)$

4) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$ — $(2,2)$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 8

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (20)

دون ضمن فوق

8-3 المماس والسرعة المتجهة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقطة المعطاة :

1) $y = x^2 - x, (3, 6)$ 5

2) $y = \frac{5}{x}, (-1, -5)$ -5

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

3) $y = -2x + 1$ $m = -2$

4) $y = x^3 - 2x^2$ $m = 3x^2 - 4x$

تمثّل $h(t)$ في كلٍّ مما يأتي، بُعد جسم متحرك بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى :

5) $h(t) = 300 - 16t^2, t = 2$ $v(2) = -64$ ft/sec

6) $h(t) = -16t^2 + 200t + 700, t = 3$ $v(3) = 104$ ft/sec

تمثل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن :

7) $h(t) = 17t^2 + 8$ $v(t) = 34t$

8) $h(t) = 5t^3 - 6t^2 + 4t + 1$ $v(t) = 15t^2 - 12t + 4$

9) $h(t) = \sqrt{t} - 2t^2$ $v(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t} - 4t$

10) $h(t) = \frac{3}{t} + 2t$ $v(t) = \frac{-3}{t^2} + 2$

11) **مظلّي:** يمكن تمثيل ارتفاع مظلّيّ عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية بالدالة $h(t) = 18000 - 16t^2$. أوجد سرعة المظلي المتجهة اللحظية $v(t)$. $v(t) = -32t$

12) **كرة قدم:** ركل علي كرةً بسرعة ابتدائية مقدارها 58 ft/sec. وتمثل الدالة $h(t) = -16t^2 + 58t + 6$ ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية.

a) أوجد سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$. $v(t) = -32t + 58$

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 1.5 sec ؟ 10 ft/s

20

الفصل الثامن النهايات والاشتقاق

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

اختبار منتصف الفصل

قدِّر كل نهاية مما يأتي: (الدرس 1-8)

1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ 1
2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ 1
3) $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-18}{x-3}$ 12
4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x}$ 0
5) $\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x^2+1}$ 0.66
6) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^3+3}$ 2
7) $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x+20}}{x}$ −1
8) $\lim_{x\to 3} \frac{|4-x|}{\sqrt{3x}}$ 0.33

9) تزداد قيمة تحفة فنية فريدة سنويًّا بحيث تُعطى قيمتها بآلاف الريالات بعد t سنة بالعلاقة $v(t) = \frac{400t+2}{2t+15}$. (الدرس 1-8) انظر الهامش.

a) مثِّل الدالة $v(t)$ بيانيًّا في الفترة $0 \le t \le 10$.

b) استعمل التمثيل البياني؛ لتقدير قيمة التحفة الفنية عندما $t = 2, 5, 10$. 42000, 80000, 115000 ريال

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} v(t)$. 200

d) وضّح العلاقة بين النهاية وسعر التحفة الفنية.
إن قيمة التحفة لن تزيد عن 200000 ريال.

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. (الدرس 2-8)

10) $\lim_{x\to 9} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-3}$ ليس ممكنًا؛ عندما $x = 9$، فإن المقام يساوي صفرًا.

11) $\lim_{x\to -2} (2x^3 + x^2 - 8)$ −20

12) **حياة برية:** يمكن تقدير عدد الغزلان بالمئات في محمية بالعلاقة $P(t) = \frac{10t^3 - 40t + 2}{2t^3 + 14t + 12}$، وذلك بعد t سنة، حيث $t \ge 3$. ما أكبر عدد للغزلان يمكن أن يوجد في هذه المحمية؟ (الدرس 2-8)
500 غزال

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الدرس 2-8)

13) $\lim_{x\to\infty} (15 - x^2 + 8x^3)$ ∞
14) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x - 2}{4x^3 + 5x^2}$ $\frac{1}{2}$
15) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{2x^4 - 14x^2 + 2}$ 0
16) $\lim_{x\to\infty} (10x^3 - 4 + x^2 - 7x^4)$ $-\infty$

17) **اختبار من متعدد:** قدِّر $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+5}{10-(2.7)^{\frac{16}{x}}}$ (الدرس 1-8) A

A غير موجودة
B $\frac{1}{2}$
C ∞
D $-\infty$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 3-8)

18) $y = x^2 - 3x$, $(2, -2)$, $(-1, 4)$ 1, −5
19) $y = 2 - 5x$, $(-2, 12)$, $(3, -13)$ −5, −5
20) $y = x^3 - 4x^2$, $(1, -3)$, $(3, -9)$ −5, 3

21) **ألعاب نارية:** انطلقت قذيفة ألعاب نارية رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 90 ft/s، وتمثِّل الدالة $h(t) = -16t^2 + 90t + 3.2$ الارتفاع الذي تبلغه القذيفة بعد t ثانية من إطلاقها. (الدرس 3-8)

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للقذيفة. $v(t) = -32t + 90$

b) ما السرعة المتجهة للقذيفة بعد 0.5 s من الإطلاق؟ 74 ft/s

c) ما أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة؟ 129.76ft تقريبًا

22) **اختبار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يمثِّل معادلة ميل منحنى $y = 7x^2 - 2$ عند أي نقطة عليه؟ (الدرس 3-8) B

A $m = 7x$
B $m = 14x$
C $m = 7x - 2$
D $m = 14x - 2$

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد t دقيقة بالدالة $s(t)$. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترة الزمنية المعطاة. تذكَّر أن تحول الدقائق إلى ساعات. (الدرس 3-8)

23) $s(t) = 12 + 0.7t$, $2 \le t \le 5$ 42 mi/h
24) $s(t) = 2.05t - 11$, $1 \le t \le 7$ 123 mi/h
25) $s(t) = 0.9t - 25$, $3 \le t \le 6$ 54 mi/h تقريبًا
26) $s(t) = 0.5t^2 - 4t$, $4 \le t \le 8$ 120 mi/h تقريبًا

أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة $h(t)$ في كل مما يأتي: (الدرس 3-8)

27) $h(t) = 4t^2 - 9t$ $v(t) = 8t - 9$
28) $h(t) = 2t - 13t^2$ $v(t) = 2 - 26t$
29) $h(t) = 2t - 5t^2$ $v(t) = 2 - 10t$
30) $h(t) = 6t^2 - t^3$ $v(t) = 12t - 3t^2$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 8-1, 8-2, 8-3	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (126)		

الدروس من 1-8 إلى 3-8

التقويم التكويني

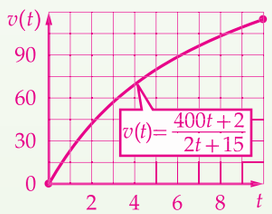
استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب. للأسئلة التي لم يجب عنها الطلاب بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدرس المشار إليه بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (70)

إجابات:

9a)



8-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-4

حساب ميل المماسات؛ لإيجاد معدل التغير اللَّحظي.

الدرس 8-4

إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.

استعمال قواعد الاشتقاق في إيجاد المشتقات.

ما بعد الدرس 8-4

استعمال قواعد الدالة الأصلية؛ في حساب تكاملات بعض الدوال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"، وذكِّرهم بمعادلة الحركة بتسارع ثابت، والتي درسوها في الفيزياء:

$h - h_0 = v_0 t - 16t^2$، حيث h_0 هو الارتفاع الذي قُذف منه الجسم، و v_0 السرعة الابتدائية، و t الزمن.

واسأل:

- ما الدالة التي تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية؟

$h(t) = -16t^2 + 65t + 3$

- استعمل الحاسبة البيانية؛ لإيجاد أعلى ارتفاع تصله الكرة. 69 ft تقريبًا
- هل يمكن أن تبلغ الكرة ارتفاع 68 ft؟ علِّل.

نعم، حيث ستصل الكرة إلى ارتفاع 69 ft تقريبًا.

قواعد أساسية

مثال 1 يُبيّن كيفية إيجاد مشتقة دالة باستعمال النهايات، وحساب قِيَمِها عند نقاط محددة؛ وذلك من خلال التعويض المباشر.

8-4 المشتقات
Derivatives

فيما سبق: درستُ حساب ميل المماسات لإيجاد مُعدّل التغيُّر اللحظي. (الدرس 3-8)

والآن:
- أجدُ ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
- أستعملُ قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.

المفردات:

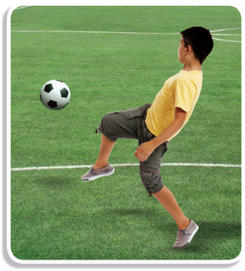
المشتقة
derivative

الاشتقاق
differentiation

المعادلة التفاضلية
differential equation

المؤثر التفاضلي
differential operator

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

ركل أحمد كرةً رأسيًّا إلى أعلى من ارتفاع 3 ft، فانطلقت بسرعة 65 ft/s. يمكنك استعمال معادلات الحركة بتسارع ثابت، التي درستها في الفيزياء لكتابة دالة تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية، ومن ثم تحديد ما إذا كانت الكرة ستبلغ ارتفاع 68 ft أم لا.

قواعد أساسية للاشتقاق: استعملت النهايات في الدرس 3-8 لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه، وتُسمى هذه النهاية **مشتقة الدالة** ويرمز لها بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة **الاشتقاق**، وتُسمَّى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

مثال 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1, 5$.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	صيغة المشتقة
$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$	$f(x+h) = 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8$, $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$
$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$	بسّط
$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h}$	حلّل
$= \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 5)$	اقسم على h
$= [8x + 4(0) - 5] = 8x - 5$	عوّض

أي أن مشتقة $f(x)$ هي $f'(x) = 8x - 5$. احسب $f'(x)$ عندما $x = 1, 5$.

المعادلة الأصلية	$x = 1$	$x = 5$
$f'(x) = 8x - 5$	$f'(1) = 8(1) - 5$	$f'(5) = 8(5) - 5$
بسّط	$f'(1) = 3$	$f'(5) = 35$

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة: $f'(x) = -10x + 2$, $f'(1) = -8, f'(4) = -38$

(1A) $f(x) = 6x^2 + 7, x = 2, 5$

(1B) $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1, 4$

يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$, y', $\frac{df}{dx}$، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

قراءة الرياضيات

المشتقات
يُقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة f بالنسبة للمتغير x، أو f prime of x.

تاريخ الرياضيات

شرف الدين الطوسي
العالم المسلم شرف الدين الطوسي (المتوفى عام 610هـ) من خلال دراسته المعادلات التي درجتها ≤3 استعمل في حل هذه المعادلات، القيمة العظمى للعبارات الجبرية، وأخذ" المشتق الأول "لهذه العبارات من دون أن يستعمل اسمه (المشتق الأول)، وبرهن على أن جذر المعادلة التي يحصل عليها إذا ما عُوّض به في العبارة الجبرية، أعطى القيمة العظمى للعبارة.

(1A) $f'(x) = 12x$, **(1B)** $f'(2) = 24, f'(5) = 60$

مصادر الدرس 8-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (161)	• تنويع التعليم، ص (161)	• تنويع التعليم، ص (161, 163)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (21)	• كتاب التمارين، ص (21)	• كتاب التمارين، ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18, 19) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

حتى هذه اللحظة استعملت النهاية؛ لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدُّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات من دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولةً ودقة.

مفهوم أساسي — **قاعدة مشتقة القوة**

التعبير اللفظي: قوة x في المشتقة أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 2 — **قاعدة مشتقة القوة**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = x^9$

$f(x) = x^9$	الدالة المعطاة
$f'(x) = 9x^{9-1}$	قاعدة مشتقة القوة
$= 9x^8$	بسّط

(b $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$	الدالة المعطاة
$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$	أعد كتابة الدالة كقوّة نسبية
$g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}$	قاعدة مشتقة القوة
$= \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$	بسّط

(c $h(x) = \frac{1}{x^8}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$	الدالة المعطاة
$h(x) = x^{-8}$	أعد كتابة الدالة كقوّة سالبة
$h'(x) = -8x^{-8-1}$	قاعدة مشتقة القوة
$= -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$	بسّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(2A $j(x) = x^4$ $j'(x) = 4x^3$ **(2B** $k(x) = \sqrt{x^3}$ $k'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(2C $m(x) = \frac{1}{x^5}$ $m'(x) = -\frac{5}{x^6}$

تنبيه!

مشتقات القوى السالبة

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدًا من الأس ؛ لنحصل على: $-4-1=-4+(-1)=-5$ ؛ لذا فإن $f'(x) = -4x^{-5}$.

هناك العديد من قواعد الاشتقاق الأخرى المهمة التي تفيد في إيجاد مشتقات الدوال التي تحوي أكثر من حدٍّ.

مفهوم أساسي — **قواعد أخرى للاشتقاق**

مشتقة الثابت: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$ ، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوّة: إذا كانت $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

قواعد أساسية

الأمثلة 4-2 تُبيّن كيفية استعمال قواعد الاشتقاق؛ في إيجاد مشتقات دوال مختلفة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثالٍ؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد مشتقة:
$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 7x + 12$
باستعمال النهايات. ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1, 4$.
$f'(x) = 6x^2 + 4x - 7, f'(1) = 3,$
$f'(4) = 105$

2 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

(a $f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$

(b $g(x) = \sqrt[4]{x^6}$ $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(c $h(x) = \frac{1}{x^{10}}$ $h'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$

مثال 3 قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a $f(x) = 5x^3 + 4$

$f(x) = 5x^3 + 4$	الدالة المعطاة
$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع
$= 15x^2$	بسّط

b $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$	الدالة المعطاة
$g(x) = 2x^8 + 4x^5$	خاصية التوزيع
$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$	قاعدتا مشتقتي مضاعفات القوى، والمجموع
$= 16x^7 + 20x^4$	بسّط

c $h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$	الدالة المعطاة
$h(x) = \dfrac{5x^3}{x} - \dfrac{12x}{x} + \dfrac{6\sqrt{x^5}}{x}$	اقسم كل حدٍّ في البسط على x
$h(x) = 5x^2 - 12 + 6x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$
$h'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} - 0 + 6 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع والفرق
$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}} = 10x + 9\sqrt{x}$	بسّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

3A $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$ **3B** $g(x) = 3x^4(x + 2)$ **3C** $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

إرشادات للدراسة

المشتقات

إذا كانت $f(x) = x$، فإن $f'(x) = 1$، وإذا كانت $f(x)$ $= cx$، فإن $f'(x) = c$.

تنبيه!

للتسهيل يمكنك إيجاد كلٍّ من ميل المماس لمنحنى الدالة، والسرعة المتجهة اللحظية، ومشتقة الدالة، باستخدام القواعد ما لم يُطلب منك استخدام النهايات لإيجاد أيٍّ منها.

الآن، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى، أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل، ففي مثال 5 من الدرس 3–8، أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسمٍ متحركٍ، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة: $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم.

السرعة المتجهة اللحظية للجسم هي $s'(t)$.

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	الدالة المعطاة
$s'(t) = 18 \cdot 1t^{1-1} - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بسّط

أي أن سرعة الجسم المتجهة اللحظية هي: $v(t) = 18 - 9t^2$، لاحظ أن هذه الإجابة مكافئة لتلك التي حصلت عليها في المثال 5 من الدرس 3-8.

تحقق من فهمك

4) الدالة: $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثِّل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قُذِفت رأسيًّا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن. $v(t) = 55 - 32t$

مثالان إضافيان

3 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a $f(x) = 6x^2 - 3$ $f'(x) = 12x$

b $g(x) = 2x^3(5x - 3)$

$g'(x) = 40x^3 - 18x^2$

c $h(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x}{x}$

$h'(x) = 6x - 2$

4 **حركة:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم بالملمترات بعد t ثانية بالدالة: $s(t) = 6t - 2t^3 + 4$، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللَّحظية $v(t)$ للجسم. $v(t) = 6 - 6t^2$

التعليم باستعمال التقنيات

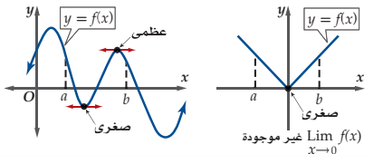
الكاميرا التوثيقية: اختر مجموعة من الطلاب ليقوموا بتوضيح كيفية استعمال قواعد الاشتقاق لبقية طلاب الصف باستعمال الكاميرا التوثيقية.

النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة تُسمَّى نقطةً حرجةً للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدثُ عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير موجود.

مفهوم أساسي

نظرية القيمة القصوى

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند أحد طرفَي الفترة أو عند إحدَى النقاط الحرجة.



غير موجودة $\lim_{x \to 0} f(x)$

لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة، لا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

مثال 5 من واقع الحياة

القيمتان العظمى والصغرى لدالة

أفعوانية : الدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ تمثِّل ارتفاع إبراهيم بالأقدام في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية $[1, 12]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ الدالة المعطاة

$h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^{3-1} + 4 \cdot 2t^{2-1} + 0$ قواعد اشتقاق الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع، والفرق

$= -t^2 + 8t$ بسّط

أوجد النقاط الحرجة بحل المعادلة $h'(t) = 0$.

$h'(t) = 0$

$-t^2 + 8t = 0$ اكتب المعادلة $h'(t) = -t^2 + 8t$

$-t(t - 8) = 0$ حلّل

إذن: $t = 8$ أو $t = 0$ ، وحيث إن $t = 0$ لا تقع في الفترة $[1, 12]$ ، فإن للدالة نقطة حرجة واحدة عند $t = 8$ ؛ لذا نَحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 1, 8, 12$.

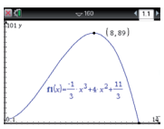
$h(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 + \frac{11}{3} \approx 7.33$

$h(8) = -\frac{1}{3}(8)^3 + 4(8)^2 + \frac{11}{3} = 89$ قيمة عظمى

$h(12) = -\frac{1}{3}(12)^3 + 4(12)^2 + \frac{11}{3} \approx 3.67$ قيمة صغرى

أي أن أقصى ارتفاع يبلغه إبراهيم هو 89 ft، وذلك بعد 8 s، في حين أن أدنى ارتفاع هو 3.67 ft تقريبًا بعد 12 s.

التحقق من الحل التمثيل البياني للدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ المجاور على الفترة $[1, 12]$ باستعمال الآلة البيانية يعزِّز هذه النتيجة ، حيث يبيِّن التمثيل البياني أن أعلى ارتفاع يساوي 89 ft ، ويكون عندما $t = 8$ s. وأدنى ارتفاع يساوي 3.67، ويكون عندما $t = 12$ s ✓



تحقق من فهمك

5) رياضة القفز: الدالة: $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ تمثِّل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبل مطاطيٍّ)، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

5) أقصى ارتفاع وقدره 330 ft ، وذلك عند 0 s، وأدنى ارتفاع 10 ft عند 4 s.

الربط مع الحياة

ازدادت سرعة الأفعوانيات حديثًا لتصل إلى 120 mi/h ، وكذلك ازدادت ارتفاعاتها لتبلغ 450 ft.

إرشادات للدراسة

دالة كثيرة الحدود

مجال تعريف دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية لذلك إذا كانت المشتقة دالة كثيرة حدود، فإن النقاط الحرجة توجد فقط عندما تكون المشتقة صفرًا.

ولذلك عند إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة كثيرة حدود $f(x)$ على فترة $[a, b]$، نجد قيم الدالة عند طرفَي الفترة وعند أي قيمة لـ x تكون عندها $f'(x) = 0$.

قواعد أساسية

المثال 5 يُبيّن كيفية استعمال النقاط الحرجة وأطراف الفترات؛ في إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة معرفة على فترة مغلقة.

مثال إضافي

5 **الألعاب البهلوانية :** الدالة $h(t) = 4 + 5t - 2t^2$ تُمثّل ارتفاع لاعبٍ بهلواني بالأقدام بعد قفزه من على منصة إلى أخرى في الفترة الزمنية $[0, 3]$، حيث t الزمن بالثواني. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يصله اللاعب.

أقصى ارتفاع هو 7.125 ft بعد 1.25 s ، وأدنى ارتفاع يساوي 1 ft بعد 3 s.

قاعدتا مشتقَتَي الضرب والقسمة : تعلَّمت في هذا الدرس أن مشتقة مجموع دالَّتين تساوي مجموع مشتقَّتَي الدالَّتين، فهل تكون مشتقة ناتج ضرب دالتين مساويةً لناتج ضرب مشتقتَي الدالتين؟ افترض أن:
$f(x) = x$, $g(x) = 3x^3$.

مشتقة الضرب	ضرب المشتقات
$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3]$	$\frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3)$
$= \frac{d}{dx}(3x^4) = 12x^3$	$= 1 \cdot 9x^2 = 9x^2$

يتضح من هذا المثال أن مشتقة ناتج ضرب دالَّتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقتَي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالَّتين.

مفهوم أساسي — **قاعدة مشتقة الضرب**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f وَ g موجودة عند x ، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

ستبرهن قاعدة مشتقة الضرب في التمرين 48

مثال 6 — **قاعدة مشتقة الضرب**

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(a) $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 2x + 7$, $g(x) = 3x^2 - 5$ ، أي أن: $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$ — من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 2$ — قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 3x^2 - 5$ — من الفرض

$g'(x) = 6x$ — قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ — قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$ — عوّض

$= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x$ — خاصية التوزيع

$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$ — بسّط

(b) $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$, $g(x) = 6x^2 - x - 2$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ — من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$ — قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 6x^2 - x - 2$ — من الفرض

$g'(x) = 12x - 1$ — قواعد مشتقات ومضاعفات القوى، والقوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$ عوّض

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة الضرب

ينتج عن قاعدة مشتقة الضرب مقدار يمكن تبسيطه. ويمكنك أيضًا تركه على حاله من دون تبسيط، ما لم تكن في حاجة إلى تبسيطه.

تحقق من فهمك 6A-B) انظر الهامش

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(6A) $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$ **(6B)** $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

قاعدتا مشتقتَي الضرب والقسمة

المثال 6 يُبيّن كيفية استعمال قاعدة مشتقة الضرب؛ في إيجاد مشتقة حاصل ضرب دالتين.

مثال إضافي

6 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $h(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^3 - 4)$

$h'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 8$

b) $h(x) = (x^4 - x^2 + 2) \cdot (x^3 - x + 1)$

$h'(x) = (4x^3 - 2x)(x^3 - x + 1) + (x^4 - x^2 + 2)(3x^2 - 1)$

المحتوى الرياضي

قاعدة مشتقة الضرب لاحظ أن قاعدة مشتقة مضاعفات القوى هي حالة خاصة من قاعدة مشتقة الضرب، حيث يُعَدُّ الثابت عاملًا، كما أنه بإمكاننا تعميم قاعدة مشتقة الضرب لأكثر من دالتين. فمثلًا:

$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)\,h(x)] = f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) + f(x)\,g(x)\,h'(x)$.

إرشادات للمعلم الجديد

رمز المشتقة : رمز المشتقة $\frac{dy}{dx}$ يُعبّر عن "التغيُّر في y مقسومًا على التغيّر في x" والحرف d هو اختصار للحرف اليوناني دلتا (delta) ، والذي يُستعمل للتعبير عن فرق القيم، أو التغيّر في القيم.

إجابات (تحقق من فهمك) :

(6A) $h'(x) = (5x^4 + 26x)(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)(21x^2 - 10x)$

(6B) $h'(x) = (2x + 3x^2 + 1)(8x^2 + 3) + (x^2 + x^3 + x)(16x)$

بطريقة التبرير نفسها في مشتقة الضرب، يمكنك ملاحظة أن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقتَي الدالتين، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة القسمة**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g موجودة عند x، وكان $g(x) \neq 0$، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ستبرهن قاعدة مشتقة القسمة في التمرين 50

مثال 7 **قاعدة مشتقة القسمة**

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(a $h(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$

افترض أن: $f(x) = 5x^2 - 3, g(x) = x^2 - 6$ ؛ أي أن: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ من الفرض

$f'(x) = 10x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

$g(x) = x^2 - 6$ من الفرض

$g'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$ عوّض

$= \dfrac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$ خاصية التوزيع

$= \dfrac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$ بسّط

(b $h(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$

افترض أن: $f(x) = x^2 + 8\,,\ g(x) = x^3 - 2$.

$f(x) = x^2 + 8$ من الفرض

$f'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والمجموع

$g(x) = x^3 - 2$ من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ قواعد مشتقات القوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$ عوّض

$= \dfrac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$ فك الأقواس، ثم بسّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(7A $j(x) = \dfrac{7x - 10}{12x + 5}$ $\dfrac{155}{(12x + 5)^2}$

(7B $k(x) = \dfrac{6x}{2x^2 + 4}$ $\dfrac{-12x^2 + 24}{(2x^2 + 4)^2}$

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة القسمة

يُعدّ تبسيط ناتج مشتقة القسمة مهمًّا في كثير من التمارين، إلا أنه ليس من الضروري فك أقواس المقام، ما لم ينتج عن ذلك تبسيط أكثر.

قاعدتا مشتقتَي الضرب والقسمة

المثال 7 يُبيّن كيفية استعمال قاعدة مشتقة القسمة في إيجاد مشتقة ناتج قسمة دالتين.

مثال إضافي

7 أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(a $h(x) = \dfrac{4x^3}{x^2 - 2}$

$h'(x) = \dfrac{4x^4 - 24x^2}{x^4 - 4x^2 + 4}$

(b $h(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

$h'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 8x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

إرشادات للمعلم الجديد

المشتقات: السرعة المتجهة اللّحظية، والمشتقة وميل المماس مصطلحات متكافئة. والمشتقات هي أسهلها حسابًا. ولكن من الضروري أن يفهم الطلاب العلاقة بين هذه المصطلحات الثلاثة.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون اللغويون: نظِّم الطلاب في مجموعات مكونة من خمسة إلى ثمانية طلاب، ثم اطلب إلى كل مجموعة كتابة قواعد الاشتقاق بأسلوبهم الخاص، ثم اطلب إلى كل مجموعة عرْض ما كتبوه على المجموعات الأخرى، بحيث يتم التحقق من سلامة اللغة المُستعملة في صياغة القواعد. قم بعد ذلك بالتحقق من كتابات الطلاب.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 34-1 ؛ للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: في الأسئلة 28–22، ذكّر الطلاب بأن مشتقة حاصل ضرب دالتين لا تساوي حاصل ضرب مشتقتيهما، إلا أنها تساوي حاصل جمع كل دالة في مشتقة الدالة الأخرى.

إجابات:

6 $y'(f) = -11$

7 $z'(n) = 4n + 7$

8 $g'(h) = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{h^{\frac{2}{3}}} - 3h^{\frac{1}{2}}$

9 $b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}}$

10 $n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4}$

11 $f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

12 $q'(c) = 9c^8 - 15c^4 + 10c - 3$

13 $p'(k) = 5.2k^{4.2} - 38.4k^{3.8} + 3$

40a $f''(x) = 80x^3 - 12x$

40b $g'''(x) = -420x^4 + 96x - 42$

40c $h^{(4)}(x) = 1080x^{-7} + 240x^{-6}$

تدرب وحل المسائل

أوجد مشتقةَ كلِّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة: (مثال 1) **1–5)** انظر ملحق الإجابات.

1) $f(x) = 4x^2 - 3, x = 2, -1$

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11, t = 5, 3$

3) $m(j) = 14j - 13, j = -7, -4$

4) $v(n) = 5n^2 + 9n - 17, n = 7, 2$

5) $r(b) = 2b^3 - 10b, b = -4, -3$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (المثالان 2, 3) **6-13)** انظر الهامش.

6) $y(f) = -11f$

7) $z(n) = 2n^2 + 7n$

8) $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$

9) $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$

10) $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$

11) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

12) $p(k) = k^{5.2} - 8k^{4.8} + 3k$

13) $q(c) = c^9 - 3c^5 + 5c^2 - 3c$

14) درجات حرارة: تُعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة: $f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ ، حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم. (مثال 4) **a-c)** انظر ملحق الإجابات.

a) أوجد معادلة تمثل مُعدّل التغيّر اللّحظي لدرجة الحرارة.

b) أوجد مُعدّل التغيّر اللحظي لدرجة الحرارة عندما: $h = 2, 14, 20$.

c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة: $0 \le h \le 24$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة. (مثال 5)

15-20) انظر ملحق الإجابات.

15) $f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0]$

16) $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2, [1, 4]$

17) $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115, [-6, -3]$

18) $f(x) = -5x^2 - 90x, [-11, -8]$

19) $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k, [0, 3]$

20) $c(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 6n + 8, [-5, 5]$

21) رياضة: عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. الدالة: $h(t) = 65t - 16t^2 + 3$ تمثل ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية، عندما $0 \le t \le 4$. (مثال 5)

a) أوجد $h'(t)$. $h`(t) = 65 - 32t$

b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة $h(t)$ في الفترة $[0, 4]$.

c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 68 ft ؟

b) (0, 3), (2.03, 69.02) تقريبًا **c)** انظر ملحق الإجابات.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (مثال 6) **22-28)** انظر ملحق الإجابات.

22) $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

23) $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$

24) $s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t)$

25) $g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$

26) $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$

27) $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$

28) $f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$

29-34) انظر ملحق الإجابات.

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي: (مثال 7)

29) $f(m) = \frac{3 - 2m}{3 + 2m}$

30) $r(t) = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$

31) $m(q) = \frac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$

32) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{-x^2 + 3}$

33) $q(r) = \frac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$

34) $t(w) = \frac{w + w^4}{\sqrt{w}}$

35) قام بائع ملابس بإيجاد العلاقة بين سعر قميص، وعدد القطع المبيعة منه يوميًّا، فوجد أنه عندما يكون سعر القميص d ريالًا ، فإن عدد القطع المبيعة يوميًّا يساوي $80 - 2d$.

a) أوجد $r(d)$ التي تمثل إجمالي المبيعات اليومية، عندما يكون سعر القميص d ريالًا. $r(d) = d(80 - 2d)$

b) أوجد $r'(d)$. $r'(d) = -4d + 80$

c) أوجد السعر d الذي تكون عنده قيمة المبيعات اليومية أكبر ما يمكن. 20 ريالًا

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مثِّل الدالة والمشتقة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه. **36-39)** للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

(إرشاد: يمكنك استعمال الحاسبة البيانية في التمثيل البياني)

36) $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ $f'(x) = 6x + 2$

37) $g(x) = \sqrt{x} + 4$ $g'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$

38) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 10x - 11$ $f'(x) = 20x^4 - 18x^2 + 10$

39) $g(x) = \frac{1}{x}$ $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

40) المشتقات العليا: لتكن $f'(x)$ مشتقة $f(x)$، إذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثانية للدالة f، ويُرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، أو الرمز $f^{(2)}(x)$ ، وكذلك إذا كانت مشتقة $f''(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثالثة للدالة f، ويرمز لها بالرمز $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$، وتسمى المشتقات على هذا النحو المشتقات العليا للدالة f. أوجد كلًا مما يأتي: **a-c)** انظر الهامش.

a) المشتقة الثانية للدالة: $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

b) المشتقة الثالثة للدالة: $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

c) المشتقة الرابعة للدالة: $h(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 4x^2$

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الواجب المنزلي
دون	1–34 ، 46، 48–62
ضمن	1–34 فردي، 45 ، 46، 48–62
فوق	35–62

41-44) انظر ملحق الإجابات.

مَثِّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

41) المشتقة تساوي 0، عندما $x = -1, 1$.

42) المشتقة غير معرَّفة، عندما $x = 4$.

43) المشتقة تساوي 2−، عندما $x = -1, 0, 2$.

44) المشتقة تساوي 0، عندما $x = -1, 2, 4$.

45) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين ستستكشف علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال. **b-e)** انظر ملحق الإجابات.

a) تحليليًّا: أوجد مشتقة صيغة مساحة الدائرة بالنسبة لنصف القطر r. $A' = 2\pi r$

b) لفظيًّا: وضِّح العلاقةَ بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع a.

c) بيانيًّا: ارسم مربعًا طول ضلعه $2a$، ومكعبًا طول ضلعه $2a$.

d) تحليليًّا: اكتب صيغةً تمثِّل مساحة المربع، وأخرى تمثِّل حجم المكعب بدلالة a، ثم أوجد مشتقتَي الصيغتين.

e) لفظيًّا: وَضِّح العلاقة بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع d.

مسائل مهارات التفكير العليا

46) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$، حيث كانت إجابة عبد الله: $144x^2 + 96x + 16$، في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات.

47) تحدَّ: أوجد $f'(y)$ علمًا بأن:
$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$
$f'(y) = 30x^2y^2 - 12xy - 11x^8z^7$

48) برهان: برهن صحة قاعدة مشتقة الضرب، بإثبات أن:
$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، وأضف $f(x)g(x+h)$ إلى البسط واطرحه منه). انظر ملحق الإجابات.

49) تبرير: بيِّن ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرِّر إجابتك.
"إذا كانت: $f(x) = x^{5n+3}$، فإن $f'(x) = (5n+3)\,x^{5n+2}$"
انظر ملحق الإجابات.

50) برهان: برهن صحة قاعدة مشتقة القسمة، وذلك بإثبات أن:
$$\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، ووحِّد المقامات في البسط، ثم أضف $f(x)\,g(x)$ إلى البسط واطرحه منه). انظر ملحق الإجابات.

51) اكتب: هل من الممكن أن يكون لدالَّتين مختلفتين المشتقة نفسها؟ عزِّز إجابتك بأمثلة. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 3-8)

52) $y = x^2 - 3x, (0, 0), (3, 0)$ $-3, 3$

53) $y = 4 - 2x, (-2, 8), (6, -8)$ $-2, -2$

54) $y = x^2 + 9, (3, 18), (6, 45)$ $6, 12$

احسب كل نهايةٍ ممَّا يأتي: (الدرس 2-8)

55) $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ -8

56) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$ $-\frac{1}{3}$

57) $\lim_{x \to 2} \frac{3x + 9}{x^2 - 5x - 24}$ $-\frac{1}{2}$

قدِّر كل نهايةٍ ممَّا يأتي: (الدرس 1-8)

58) $\lim_{x \to 4^+} \frac{x^2 - x - 12}{|x - 4|}$ 7

59) $\lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} + 2x + 3)$ 3

تدريب على اختبار

60) ما مشتقة: $h(x) = (-7x^2 + 4)\,(2 - x)$؟ D

A $h'(x) = -14x$

B $h'(x) = 14x$

C $h'(x) = -21x^2 - 28x + 4$

D $h'(x) = 21x^2 - 28x - 4$

61) ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة $(1, 2)$؟ C

A 1 C 4

B 2 D 8

62) ما مشتقة: $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$؟ F

F $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$ H $f'(x) = 225\,x^{\frac{5}{3}}$

G $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$ J $f'(x) = 225\,x^{\frac{8}{3}}$

تمثيلات متعددة

في التمرين 45 يستعمل الطلاب التحليل الجبري والتعبير اللفظي والتمثيل البياني؛ لاستكشاف علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال.

4 التقويم

تعلُّم سابق اطلب إلى الطلاب شرح كيف ساعدتهم أفكار الدرس السابق حول المماس والسرعة المتجهة، على تعلم فكرة المشتقة في هذا الدرس.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 46، على الطلاب أن يعرفوا أن: $[f'(x)]^2 = f'(x) \cdot f'(x)$، لاحظ أن قوة الحد الرئيس، يجب أن تكون زوجية في هذه الحالة؛ لذا فإن عبد الله محق.

تنويع التعليم فوق

توسَّع: أوجد القيمة أو القيم التي يكون عندها المماسان للمنحنيين: $f(x) = x, g(x) = x^2$ متوازيين. وضح إجابتك.

يكون المماسان متوازيين، إذا تساوى ميلاهما، ويعني أن $f'(x) = g'(x)$،
وبما أن $f'(x) = 1$، $g'(x) = 2x$، فإن $f'(x) = g'(x)$ فقط عندما $x = \frac{1}{2}$.

الدرس 4-8 المشتقات 163

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (18) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 تدريبات إعادة التعليم

المشتقة

المشتقات والقواعد الأساسية: استَعمَلْتَ النهايات في الدرس (3–8) لإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند أي نقطة عليه، وتُسمّى هذه النهاية **مشتقة الدالة**.

يُرمز إلى مشتقة الدالة $f(x)$ بالرمز $f'(x)$، ويُعبر عنها بالنهاية: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، بشرط وجود النهاية، وهناك العديد من قواعد الاشتقاق التي يمكن استعمالها لإيجاد مشتقة دالة تحتوي على أكثر من حد.

اسم القاعدة	القاعدة	مثال
مشتقة القوة	إذا كان $f(x)=x^n$، حيث n عدد حقيقيّ، فإن $f'(x)=nx^{n-1}$	إذا كان $f(x)=x^3$، فإن $f'(x)=3x^2$
مشتقة الثابت	مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا. إذا كان $f(x)=c$، فإن $f'(x)=0$	إذا كان $f(x)=-2$، فإن $f'(x)=0$.
مشتقة مضاعفات القوة	إذا كان $f(x)=cx^n$، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن $f'(x)=cnx^{n-1}$	إذا كان $f(x)=5x^3$، فإن $f'(x)=15x^2$.
مشتقة المجموع والفرق	إذا كان $f(x)=g(x)\pm h(x)$، فإن $f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$	إذا كان $f(x)=4x^2+3x$، فإن $f'(x)=8x+3$.

مثال أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a $f(x)=3x^2-2x+4$

$f(x)=3x^2-2x+4$	الدالة المعطاة
$f'(x)=2\cdot 3x^{2-1}-2\cdot 1x^{1-1}+0$	قواعد الاشتقاق
$=6x-2$	بسّط

b $f(x)=x^4(4x^3-5)$

$f(x)=x^4(4x^3-5)$	الدالة المعطاة
$f(x)=4x^7-5x^4$	خاصية التوزيع
$f'(x)=4\cdot 7x^{7-1}-5\cdot 4x^{4-1}$	قواعد الاشتقاق
$=28x^6-20x^3$	بسّط

تمارين

أوجد مشتقة الدالة $f(x)$، في كلٍّ مما يأتي، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة:

1) $f(x)=4x^2-5;\ x=3,-2$ — $f'(x)=8x;24,-16$
2) $f(x)=-8+3x-x^2;\ x=0,-3$ — $f'(x)=3-2x;3,9$
3) $f(x)=-x^3+5x^2;\ x=1,-4$ — $f'(x)=-3x^2+10x;7,-88$
4) $f(x)=3x^4+x^5-2;\ x=-1,2$ — $f'(x)=12x^3+5x^4;-7,176$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

5) $f(x)=6x^2-3x+4$ — $f'(x)=12x-3$
6) $f(x)=-x^{3.4}+3x^{0.2}$ — $f'(x)=-3.4x^{2.4}+0.6x^{-0.8}$
7) $f(x)=4x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}$ — $f'(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x}-\frac{9\sqrt{x}}{2}$
8) $f(x)=-4x^2+3x^3-14$ — $f'(x)=-8x+9x^2$

تدريبات إعادة التعليم (19) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المشتقة

قاعدتا الضرب والقسمة استعمِلْ القاعدتين الآتيتين؛ لإيجاد مشتقة حاصل الضرب أو القسمة.

قاعدة مشتقة الضرب	إذا كانت كلٌّ من الدالتين f، g قابلة للاشتقاق عند x، فإن $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
قاعدة مشتقة القسمة	إذا كانت كلٌّ من الدالتين f، g قابلة للاشتقاق عند x، وكان $g(x)\neq 0$، فإن: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

مثال 1 أوجد مشتقة الدالة: $h(x)=(x^2-2)(2x^3+5x)$

افترض أن $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=2x^3+5x$	
$f'(x)=2x$ قواعد الاشتقاق $g'(x)=6x^2+5$	
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	قاعدة مشتقة الضرب
$=(2x)(2x^3+5x)+(x^2-2)(6x^2+5)$	عوّض
$=4x^4+10x^2+6x^4+5x^2-12x^2-10$	خاصية التوزيع
$=10x^4+3x^2-10$	بسّط

مثال 2 أوجد مشتقة: $h(x)=\frac{(2x^2+4)}{(x^2-1)}$

افترض أن $f(x)=2x^2+4$ و $g(x)=x^2-1$	
$f'(x)=4x$ قواعد الاشتقاق $g'(x)=2x$	
$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	قاعدة مشتقة القسمة
$=\frac{4x(x^2-1)-(2x^2+4)2x}{(x^2-1)^2}$	عوّض
$=\frac{4x^3-4x-4x^3-8x}{(x^2-1)^2}$	خاصية التوزيع
$=\frac{-12x}{(x^2-1)^2}$	بسّط

تمارين

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

1) $h(x)=(-4+2x^2)(2x+3)$ — $12x^2+12x-8$
2) $m(x)=(3x-1)(x^2+5x)$ — $9x^2+28x-5$
3) $d(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$ — $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
4) $k(x)=\frac{3x^3+4}{2x^2-1}$ — $\frac{6x^4-9x^2-16x}{(2x^2-1)^2}$

تدريبات حل المسألة (20) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 تدريبات حل المسألة

المشتقة

1) **طيور،** يمكن تمثيل ارتفاع طائر بالأقدام بعد t ثانية من طيرانه بالمعادلة: $s(t)=\frac{-t^3}{3}+\frac{7}{2}t^2+18$ على الفترة $[1,10]$، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع للطائر.
أقصى ارتفاع: $75\frac{1}{6}$ ft؛ أدنى ارتفاع: $21\frac{1}{6}$ ft

2) **غطس،** قفز غطّاس من قمة منحدر ارتفاعه 192 قدمًا عن سطح الماء، ويعبّر عن ارتفاع الغطاس بعد t ثانية بالمعادلة: $h(t)=-16t^2+16t+192$ قدمًا.
a) أوجد سرعة الغطاس عند أي لحظة t.
$h'(t)=-32t+16$
b) أوجد سرعة الغطاس بعد ثانية واحدة من قفزه.
$h'(1)=-16$ ft/s
c) أوجد الزمن الذي يستغرقه الغطاس للوصول إلى سطح الماء.
4 ثوان
d) ما سرعة الغطاس عند وصوله سطح الماء؟
$h'(4)=-112$ ft/s

3) **هندسة،** الصيغة $V=\pi r^2 h$ تمثل حجم الأسطوانة التي طول نصف قطرها r وارتفاعها h، افترض أن أسطوانة ارتفاعها 10 in، وطول نصف قطرها متغير.
a) اكتب صيغة تمثل حجم الأسطوانة بدلالة طول نصف قطرها.
$V(r)=10\pi r^2$
b) أوجد صيغة تمثل معدل تغير حجم الأسطوانة بالنسبة إلى طول نصف قطرها.
$V'(r)=20\pi r$
c) أوجد $V'(r)$ عندما $r=3$ in.
60π

4) **حجم،** الصيغة $V=x^3$ تمثل حجم مكعب طول ضلعه x، افترض أن x تتغير.

a) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ عندما تتغير x من 3.2 in إلى 3.4 in
32.7
b) أوجد معدل تغير الحجم $V(x)$ اللحظيّ عندما $x=4$ in.
48
c) وضح العلاقة بين صيغة حجم المكعب ومشتقتها.
إجابة ممكنة: مشتقة صيغة الحجم هي نصف المساحة السطحية للمكعب ($3x^2$)

5) **حركة الكرة،** أُطلقت كرة إلى أعلى من نقطة ترتفع 6 ft عن سطح الأرض، بسرعة ابتدائية قدرها 80 ft/s، إذا كان ارتفاعها $h(t)=-16t^2+80t+6$ قدمًا بعد t ثانية.
a) أوجد سرعة الكرة عند أي لحظة t.
$v(t)=-32t+80$
b) أوجد السرعة اللحظية للكرة عندما $t=2$ ثانية.
16 ft/s

التدريبات الإثرائية (21) — فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-4 التدريبات الإثرائية

اشتقاق متسلسلات القوى

يمكن كتابة بعض الدوال المثلثية والأسية في صورة متسلسلة قوى، فمثلاً متسلسلة قوى الدالة الزوجية $y=\cos x$ تحتوي على القوى الزوجية لـ x.

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$

وأن متسلسلة قوى الدالة الفردية $y=\sin x$ تحتوي على القوى الفردية لـ x:

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots$

يمكن اشتقاق متسلسلات القوى هذه.

1) a) أوجد $(\sin x)'$، وذلك باشتقاق حدود متسلسلة قوى $\sin x$ حدًّا حدًّا، ثم بَسّط النتيجة.
$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$
b) ما الدالة التي تمثلها المتسلسلة اللانهائية الجديدة؟
$\cos x$
c) أي أن: $(\sin x)'=$ **$\cos x$**

2) a) ماذا تتوقع أن تكون مشتقة الدالة $\cos x$؟ **تختلف الإجابات.**
b) أوجد $(\cos x)'$ مستعملًا متسلسلة قوى $\cos x$.
$-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\frac{x^9}{9!}+\cdots$
c) أي أن: $(\cos x)'=$ **$-\sin x$**

3) a) إذا كانت متسلسلة قوى الدالة $f(x)$ هي $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$، $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$، فأوجد $f'(x)$.
$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$
b) ما العلاقة بين $f'(x)$، $f(x)$؟ **متساويتان**
c) إذا عبرنا عن الدالة $f(x)$ بالشكل e^x، فأوجد $f'(x)$. **e^x**

استعمل النتائج التي حصلت عليها في المسائل 1–3؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

4) $f(x)=xe^x$ — **xe^x+e^x**
5) $f(x)=\sin x+\cos x$ — **$\cos x-\sin x$**
6) $f(x)=(\cos x)^2$ — **$-2\cos x\sin x$**

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 8

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (21)

دون | ضمن | فوق

8 - 4 المشتقات

أوجد مشتقة كلّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة :

1) $g(x) = 3x^2 - 5x, x = -2, 1$
$g'(x) = 6x - 5, g'(-2) = -17, g'(1) = 1$

2) $h(x) = 4x^3 - x^2, x = 3, 0$
$h'(x) = 12x^2 - 2x, h'(3) = 102, h'(0) = 0$

3) $f(x) = x^2 - 4x + 7, x = 2, -3$
$f'(x) = 2x - 4, f'(2) = 0, f'(-3) = -10$

4) $m(x) = -2x^2 - 6x + 1, x = 0, -3$
$m'(x) = -4x - 6, m'(0) = -6, m'(-3) = 6$

5) $q(x) = -1 + x^3 - 2x^4, x = -1, 3$
$q'(x) = 3x^2 - 8x^3, q'(-1) = 11, q'(3) = -189$

6) $t(x) = 3x^7 - 1, x = -1, 1$
$t'(x) = 21x^6, t'(-1) = 21, t'(1) = 21$

القسم الثاني: النهايات والاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

7) $f(x) = (x^2 + 5x)^2$
$f'(x) = 4x^3 + 30x^2 + 50x$

8) $f(x) = x^2(x^3 + 3x^2)$
$f'(x) = 5x^4 + 12x^3$

9) $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$
$f'(x) = \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$

10) $h(x) = -\frac{3}{x^6}$
$h'(x) = \frac{18}{x^7}$

11) $p(x) = -4x^5 + 6x^3 - 5x^2$
$p'(x) = -20x^4 + 18x^2 - 10x$

12) $n(x) = (3x^2 - 2x)(x^3 + x^2)$
$n'(x) = 15x^4 + 4x^3 - 6x^2$

13) $r(x) = \frac{3x - 1}{x^2 + 2}$
$r'(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 6}{(x^2 + 2)^2}$

14) $q(x) = \sqrt{x}(x^2 - 3)$
$q'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$

15) **فيزياء:** تسارع جسم متحرك هو مُعدّل تغيّر سرعته. تمثل الدالة $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$ سرعة جسم متحرك بالمتر لكل ثانية. أوجد تسارع الجسم بالمتر لكل ثانية تربيع بعد 5 sec (إرشاد: التسارع هو مشتقة السرعة).
$24\ m/s^2$

21

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-5

حساب النهايات جبريًّا باستعمال خصائصها.

الدرس 8-5

تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.

إيجاد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد .

ما بعد الدرس 8-5

استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد المساحة تحت منحنى.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إذا اعتبرنا دالة التكلفة الحقيقية $g(x)$ ، فما العلاقة بين $f(x), g(x)$؟
  $g'(x) = f(x)$
- هل بإمكانك تخمين الدالة $g(x)$ بخطوات عكسية لخطوات الاشتقاق؟ نعم.
- خمن دالةيمكن أن تمثل $g(x)$ ، وهل هي وحيدة؟
  إجابة ممكنة: $g(x)=10x-0.001\,x^2$.
  وهي ليست وحيدة

8-5

المساحة تحت المنحنى والتكامل

Area Under the Curve and Integration

فيما سبق:
درستُ حساب النهايات جبريًا باستعمال خصائصها. (الدرس 2–8)

والآن:
- أقرّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات:

التجزيء المنتظم
regular partition

التكامل المحدد
definite integral

الحد الأدنى
lower limit

الحد الأعلى
upper limit

مجموع ريمان الأيمن
right Riemann sum

التكامل
integration

www.obeikaneducation.com

تاريخ الرياضيات

ثابت بن قرة (221 هـ – 288 هـ)
من أوائل من وضع نواة علم التكامل من خلال نظريته" إذا ضوعف عدد أضلاع المضلع المنتظم، المرسوم بين محيطين أو مساحتين إلى ما لا نهاية، صغر الفرق تدريجيًا بين الأضلاع كلما اقترب من المركز، واقترب من الصفر حتى يفنى".

لماذا؟

التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُمثل الدالة $f(x) = 10 - 0.002x$ التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من كتاب ما بالريال .

المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، كما درست حساب مساحات بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلًا يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.

مثال 1 المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

مثّل الدالة والمستطيلات كما في الأشكال التالية، باتباع الخطوات التالية:

1) أوجد طول الفترة $[0, 12]$ بطرح بدايتها من نهايتها.

2) أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات، فمثلًا إذا كان عدد المستطيلات 4 نقسم: $12 \div 4 = 3$

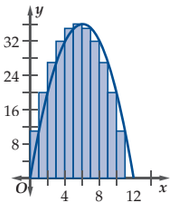
3) قسِّم الفترة $[0, 12]$ إلى 4 فترات (لأربعة مستطيلات) طول كل منها يساوي 3

4) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلًا أحد بعديه يساوي طول هذه الفترة، والبعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة.

فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) هي $f(12), f(9), f(6), f(3)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.

مصادر الدرس 8-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (166)		• تنويع التعليم، ص (170)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (22)	• كتاب التمارين، ص (22)	• كتاب التمارين، ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22، 23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

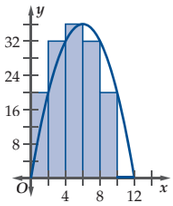


الشكل (3)

المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$
$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$
$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$
$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$
$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$
$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$
$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$
$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$
$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$
$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$
$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 286 وحدة مربعة.

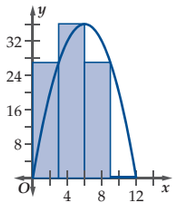


الشكل (2)

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$
$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$
$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$
$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$
$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$
$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 280 وحدة مربعة.



الشكل (1)

المساحة باستعمال 4 مستطيلات

$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$
$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$
$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$
$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 270 وحدة مربعة.

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

1) قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6، 8، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

المساحة باستعمال 6 مستطيلات = 2240 وحدة مربعة، المساحة باستعمال 8 مستطيلات = 2268 وحدة مربعة، المساحة باستعمال 12 وحدة مستطيلة = 2288 وحدة مربعة

لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثّل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة مستطيل لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لا تقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

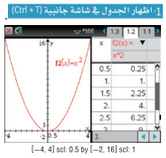
قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.

إرشاد تقني

جداول:
للحصول على ارتفاعات متعددة للمستطيلات، والتي تمثل بعض قيم $f(x)$ باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. مثّل الدالة باستعمال تطبيق الرسوم البيانية، وذلك بالضغط على on ثم كتابة الدالة $f(x) = x^2$. ويمكن توضيح ارتفاعات المستطيلات $f(x)$ باستعمال جدول، وذلك بالضغط على menu ومنها اختيار 7: الجدول

1: اظهار الجدول في شاشة جانبية [Ctrl + T]



[−4, 4] scl: 0.5 by [−2, 16] scl: 1

ويمكنك تعديل فترات قيم x في الجدول بالضغط على menu ومنها 2: الجدول ثم 5: تحرير إعدادات الجدول...

ثم حدد بداية الجدول والخطوة أو تدريج قيم x.

المساحة تحت منحنى

المثالان 1 , 2 يُبيّنان كيفية حساب المساحة التقريبية تحت منحنى دالة باستعمال مساحات مستطيلات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 18x$ والمحور x على الفترة $[0, 18]$ باستعمال 6 ، 9 ، 18 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لكل مستطيل؛ لتحديد ارتفاعه.

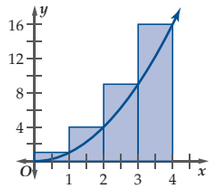
6 مستطيلات = 945 وحدة مربعة
9 مستطيلات = 960 وحدة مربعة
16 مستطيلًا = 969 وحدة مربعة

2 قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2 + 1$ ، والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدة منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات؛ لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

الأطراف اليمنى = 34 وحدة مربعة
الأطراف اليسرى = 18 وحدة مربعة
الوسط = 26 وحدة مربعة.

المحتوى الرياضي

التقريب باستعمال المستطيلات تم التعرف إلى طريقتين لتقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال الأطراف اليمنى، أو الأطراف اليسرى للمستطيلات، حيث يعطي الوسط للتقريبين تقريبًا أفضل للمساحة. وبإمكاننا أيضًا حساب المساحة باستعمال أصغر وأكبر ارتفاع لكل مستطيل، حيث يُعطي الوسط للتقريبين الأخيرين تقريبًا أفضل للمساحة الكلية.



الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

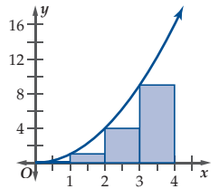
$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$

$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

2) قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 15.4 وحدة مربعة، الأطراف اليسرى = 25 وحدة مربعة، الوسط = 20.2 وحدة مربعة

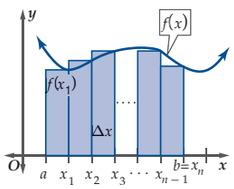
عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب $f(x_i)$ في Δx من $i = 1$ إلى $i = n$.



في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول، وتُسمَّى هذه التجزئة **التجزيء المنتظم**. إن طول الفترة الكلية من a إلى b هو $b - a$ ، وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل مستطيل من المستطيلات التي عددها n) هو $\frac{b-a}{n}$ ، ويُرمز له بالرمز Δx. وبما أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن لقاعدة المستطيل، فإن ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.

يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل من خلال ضرب Δx في ارتفاع ذلك المستطيل، أي أن مساحة المستطيل الأول هي $f(x_1)\,\Delta x$، ومساحة المستطيل الثاني هي $f(x_2)\,\Delta x$، وهكذا. وتُعطى المساحة الكلية A للمستطيلات بمجموع مساحاتها، ويمكن كتابتها باستعمال رمز المجموع.

اجمع المساحات $A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$

أخرج العامل المشترك Δx $A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$

استعمل رمز المجموع $A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

خواص رمز المجموع $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: احرص على حَلّ عدة أمثلة حول إيجاد المساحات تحت المنحنيات، ثم احتفظ بكل مثال على شكل ملاحظة، وأضف هذه الملاحظات إلى الصفحة الإلكترونية الخاصة بالصف، بحيث يستطيع الطلاب الاعتماد عليها بوصفها مرجعًا إضافيًّا .

إرشادات للمعلم الجديد

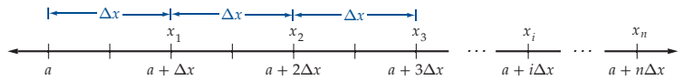
رمز التكامل نبِّه الطلاب إلى أن رمز التكامل هو شد للحرف S في كلمة *sum*.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى الطلاب أن يرسموا منحنى دالة في أحد الأمثلة على ورق مربعات كبير، ثم اطلب إليهم أن يقصُّوا المساحة المطلوبة، وأن يحدّدوا عدد الوحدات المربعة التي تحويها هذه المنطقة. والذي قد يتطلب تجميع أجزاء مختلفة من المساحات، ثم اطلب إليهم أن يقارنوا بين المساحة باستعمال التكامل وعدد الوحدات المربعة التي أوجدوها.

ولتسهيل الحسابات مستقبلًا، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. فبما أن عرض أيٍّ من المستطيلات هو Δx، ويساوي الفرق بين أي قيمتين متتاليتين من قيم x_i . وبالنظر إلى خط الأعداد أدناه:



يمكننا ملاحظة أن $x_i = a + i\Delta x$. ولهذه العلاقة أهميتها عند إيجاد المساحة تحت منحنى أي دالة لاحقًا.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمَّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

قراءة الرياضيات

رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x)dx$ التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$، $d(x)$

مفهوم أساسي **التكامل المحدد**

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\ ,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a الحد الأدنى، و b الحد الأعلى، وتُسمَّى هذه الطريقة مجموع ريمان الأيمن.

تنبيه!

المجموع

إن مجموع عدد ثابت c هو $\sum_{i=1}^{n} c = cn$، فمثلاً $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1866 – 1826). والذي يُعزى إليه إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وسنُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad ,\ c \text{ عدد ثابت}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

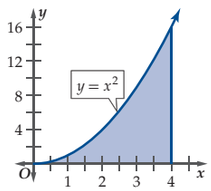
$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \quad ,\ c \text{ عدد ثابت} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

مثال 3 **المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل**

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$؛ أي $\int_0^4 x^2\,dx$.



ابدأ بإيجاد Δx، x_i .

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$= \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ $b = 4$, $a = 0$

$x_i = a + i\,\Delta x$ صيغة x_i

$= 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n}$ $a = 0$, $\Delta x = \frac{4}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يُعطي المساحة المطلوبة.

التكامل

الأمثلة 5-3 تُبيّن كيفية استعمال التكامل لإيجاد المساحة تحت منحنى دالة في فترة ما.

مثال إضافي

3 استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2 + 1$، والمحور x في الفترة $[0, 4]$، أو $\int_0^4 (x^2+1)\,dx$.

25.33 وحدة مربعة تقريبًا

إرشادات للمعلم الجديد

الدقة نبّه الطلاب إلى أهمية كتابة كل خطوة عند حساب التكامل؛ تجنبًا للوقوع في أخطاء غير مقصودة. كما يجب على الطلاب أن يكونوا حريصين في اختيار الصيغة المناسبة لمجاميعهم.

$$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$ تعريف التكامل المحدد

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\,\Delta x$$ $f(x_i) = x_i^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2\left(\frac{4}{n}\right)$$ $x_i = \frac{4i}{n}$, $\Delta x = \frac{4}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$$ وزّع القوة

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16n\,(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right)$$ اضرب ووزّع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$$ اضرب

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$$ اقسم

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right)$$ حلّل

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$ اقسم على n^2

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty}2+\left(\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right]$$ خصائص النهايات

$$= \frac{64}{6}[2+3(0)+0] = \frac{64}{3} \approx 21.33$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

النهايات

حلّل كل مجموع بحيث تتضمن العبارات الباقية إما أعدادًا ثابتة أو i فقط، ثم طبق صيغة المجموع المناسبة.

تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

3A) $\int_0^1 3x^2\,dx$ وحدة مربعة

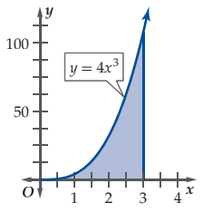
3B) $\int_0^3 x\,dx$ 4.5 وحدة مربعة

يمكننا أيضًا حساب مساحات المناطق باستعمال النهايات حال كون نقطة الأصل ليست حدًّا أدنى لها.

168 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

مثال 4 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x، في الفترة $[1, 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n} \qquad b = 3\,,\ a = 1$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \qquad \text{صيغة } x_i$$

$$= 1 + i\,\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n} \qquad a = 1\,,\ \Delta x = \frac{2}{n}$$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x \qquad f(x_i) = 4(x_i)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right) \qquad x_i = 1 + \frac{2i}{n}\,,\ \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n}\left[1 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right] \qquad \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \text{ مفكوك}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right) \qquad \text{بسّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{12i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^3}{n^3}\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\left(n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \qquad \text{صيغ المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n}{n} + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right) \qquad \text{وزّع واضرب}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(8 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right) \qquad \text{بسّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[8 + 24\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \qquad \text{اقسم}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8 + 24\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{خصائص النهايات}$$

$$= 8 + 24(1+0) + 16(2+0+0) + 16(1+0+0) = 80 \qquad \text{بسّط}$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(4A) $\int_1^3 x^2\,dx$ $\frac{26}{3}$ وحدات مربعة

(4B) $\int_2^4 x^3\,dx$ 60 وحدة مربعة

تنبيه!

النهايات

عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال المجاميع، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع Δx أو أي ثوابت أخرى.

مثال إضافي

4 استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^3 + 1$ والمحور x في الفترة $[2, 4]$، أو $\int_2^4 (x^3 + 1)\,dx$.

62 وحدة مربعة

الدرس 5-8 المساحة تحت المنحنى والتكامل 169

مثال إضافي

5 **أعمال:** ينتج مصنع 2000 قميصٍ يوميًّا. تُعطى تكلفة زيادة الإنتاج من 2000 قميص إلى 5000 قميص يوميًّا بالتكامل:

$\int_{2000}^{5000} (20 - 0.004x)\,dx$. ما قيمة الزيادة في التكلفة؟ 18000 ريال

إرشادات للمعلم الجديد

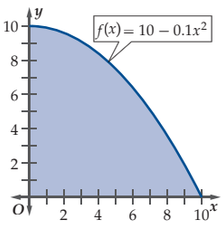
إجابة السؤال لجميع "مسائل من واقع الحياة" ، ذكّر الطلاب بأن عليهم التحقّق من أنهم قد أجابوا عن المطلوب في المسألة. ففي المثال 5، تحتاج الإجابة إلى ضرب المساحة في 2 لوجود ممرين متطابقين، ثم الضرب في 22.4 ريالًا .

الربط مع الحياة

الجرانيت

الجرانيت هو صخر ناري يتميز بنسيج خشن يكسبه مظهرًا فريدًا، وهو مقاوم لعوامل الأكسدة، لذلك يستعمل في تبليط الأرضيات.

مثال 5 من واقع الحياة — المساحة تحت منحنى



بلاط: يكلِّف تبليط القدم المربعة الواحدة من فناء منزل بالجرانيت 22.4 ريالًا. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت المساحة بالقدم المربعة لأيٍّ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10} (10 - 0.1x^2)\,dx$ ، فما تكلفة تبليط الممرين؟

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

صيغة Δx : $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$a = 0 , b = 10$: $= \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n}$

صيغة x_i : $x_i = a + i\,\Delta x$

$a = 0 , \Delta x = \frac{10}{n}$: $= 0 + i\frac{10}{n} = \frac{10i}{n}$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

تعريف التكامل المحدد: $\int_0^{10} (10 - 0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$f(x_i) = 10 - 0.1x_i^2$: $= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (10 - 0.1x_i^2)\Delta x$

$x_i = \frac{10i}{n} , \Delta x = \frac{10}{n}$: $= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[10 - 0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{10}{n}$

استعمل خصائص المجموع وبسّط: $= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(10 - \frac{10i^2}{n^2}\right)$

خصائص المجموع: $= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 10 - \sum_{i=1}^{n} \frac{10i^2}{n^2}\right)$

خصائص المجموع: $= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 10 - \frac{10}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$

صيغ المجموع: $= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \left(10n - \frac{10}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

خاصية التوزيع: $= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{100n}{n} - \frac{100n(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right)$

اقسم على n: $= \lim_{n\to\infty} \left(100 - \frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$

اقسم على n^2: $= \lim_{n\to\infty} \left[100 - \frac{50}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$

خصائص النهايات: $= \lim_{n\to\infty} 100 - \frac{50}{3} \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

بسّط: $= 100 - \frac{50}{3}(2 + 0 + 0) = 66\frac{2}{3} \approx 66.67$

أي أن مساحة أيٍّ من الممرين تساوي $66.67\ ft^2$ تقريبًا؛ لذا فإن تكلفة تبليط الممرين هي $(66.67 \times 2) \times 22.4$ ريال أو 2986.8 ريالًا تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ ft^2$ ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تُعطَى بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2)dx$ ؟ برِّر إجابتك.

5) لا؛ مساحة كل جزء من الجدار $16.67\ ft^2$ تقريبًا، بما أن المطلوب طلاء جزأين من الجدار، أي 2(16.67)، ويساوي $33.34\ ft^2$ تقريبًا.

إذن كمية الطلاء لا تكفي.

تنويع التعليم

فوق

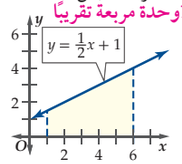
توسُّع: احسب $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$ من خلال التَّمثيل البياني للدالة ، وتحديد المساحة الدقيقة تحت المنحنى. وضِّح إجابتك.

6.28، المساحة الدقيقة تحت المنحنى هي 2π ؛ لأن المنطقة على شكل نصف دائرة طول نصف قطرها 2.

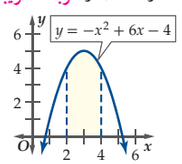
تدرب وحل المسائل

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملًا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كلٍّ من الأشكال أدناه: (مثال 1)

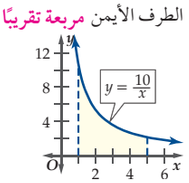
1) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن
15وحدة مربعة تقريبًا



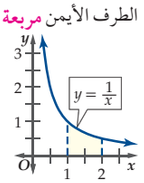
2) 4 مستطيلات 9.25وحدات
الطرف الأيسر مربعة تقريبًا



3) 8 مستطيلات 14.29 وحدة
الطرف الأيمن مربعة تقريبًا



4) 5 مستطيلات 0.65 وحدة
الطرف الأيمن مربعة تقريبًا

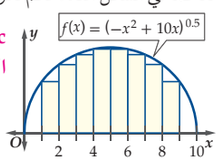


5) أرضيات: يرغب أحمد في تبليط جزء من فناء منزله على شكل نصف دائرة تمثله $f(x) = (-x^2 + 10x)^{0.5}$. (مثال 1)

a) قرِّب مساحة المنطقة نصف الدائرية باستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة.

b) إذا قرَّر أحمد تقريب المساحة باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى معًا كما في الشكل أدناه، فكم تكون المساحة؟

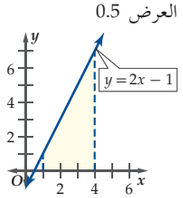
a–c) انظر ملحق الإجابات.



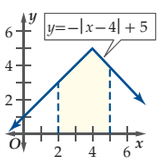
c) أوجد مساحة المنطقة باستعمال صيغة مساحة نصف الدائرة. أي التقريبين أقرب إلى المساحة الحقيقية؟ فسِّر إجابتك.

قرِّب مساحة المنطقة المظلَّلة تحت منحنى الدالة في كلٍّ من الأشكال الآتية مستعملًا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍّ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين: (مثال 2)

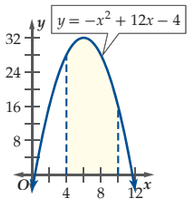
6) العرض 0.5



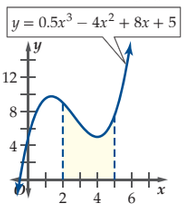
7) العرض 0.5



8) العرض 0.75



9) العرض 0.5



استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي: (المثالان 3, 4)

10) $\int_1^4 4x^2\,dx$ — 84 وحدة مربعة

11) $\int_0^2 6x\,dx$ — 12 وحدة مربعة

12) $\int_1^3 (2x^2 + 3)\,dx$ — $\frac{70}{3}$ وحدة مربعة

13) $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$ — $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة

14) $\int_3^4 (-x^2 + 6x)\,dx$ — $\frac{26}{3}$ وحدة مربعة

15) $\int_2^4 (-3x + 15)\,dx$ — 12 وحدة مربعة

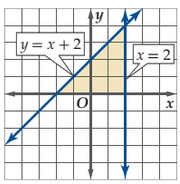
16) $\int_1^5 (x^2 - x + 1)\,dx$ — $\frac{100}{3}$ وحدة مربعة

17) $\int_1^3 12x\,dx$ — 48 وحدة مربعة

18) طباعة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميًّا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب، فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل

$\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\,dx$. (مثال 5) 3750 ريالًا

19) يمكن حساب التكاملات المحددة عندما يكون أحد حدي التكامل موجبًا والآخر سالبًا.



a) أوجد طول قاعدة وارتفاع المثلث، ثم مساحته باستعمال قانون مساحة المثلث. انظر الهامش.

b) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-2}^{2} (x + 2)\,dx$. 8 وحدات مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

20) $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$ — $\frac{2}{3}$ وحدة مربعة

21) $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx$ — 1.75 وحدة مربعة

22) $\int_{-4}^{-2} (-x^2 - 6x)\,dx$ — $\frac{52}{3}$ وحدة مربعة

23) $\int_{-3}^{-2} -5x\,dx$ — 12.5 وحدة مربعة

24) $\int_{-2}^{0} (2x + 6)\,dx$ — 8 وحدات مربعة

25) $\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x)\,dx$ — 0.75 وحدة مربعة

تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون	1–18 ، 31–33 ، 35–47
ضمن	1–29 (فردي)، 30–33، 35–47
فوق	19–47

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-18 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع في التمارين 4–1، قد ينسى الطلاب أن يضربوا في عرض المستطيلات؛ لذا ذكّرهم بضرورة الضرب في العرض الصحيح لهذه المستطيلات.

إجابات:

5c) 39.27 وحدة مربعة، التقريب الأول أفضل. إجابة ممكنة: المساحة الإضافية الواقعة خارج نصف الدائرة والمحتواه في التقريب الأول تساعد على حساب مساحة المنطقة التي لم تدخل في حسابات المستطيلات.

6) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 13.5 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 10.5 وحدات مربعة، الوسط للمساحة هو 12 وحدة مربعة.

7) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 12.75 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 12.25 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 12.5 وحدة مربعة.

8) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 162.94 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 171.94 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 167.44 وحدة مربعة.

9) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 18.91 وحدة مربعة.
المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 19.66 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 19.28 وحدة مربعة.

19a) الارتفاع = 4 وحدات،
القاعدة = 4 وحدات،
المساحة = 8 وحدات مربعة.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب الكتابة عن كيفية استعمال المستطيلات في إيجاد المساحة التقريبية تحت منحنى دالة ما.
إجابة ممكنة: أوجد مساحة كل مستطيل بضرب العرض في الطول الذي يُمثّل قيمة الدالة عند نقطة، ثم اجمع مساحات المستطيلات.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 8-4, 8-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (69)

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في التمرين 30 التمثيل البياني لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين، ثم حسابها جبريًّا.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في التمرين 31، على الطلاب إدراك أن التقريب الأكبر يتغيّر اعتمادًا على سلوك الدالة. إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى سيُعطي قيمة أكبر للمساحة. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات هو الذي يُعطي تقريبًا أكبر للمساحة.

إجابات:

32) إجابة ممكنة: يعطي التكامل مساحة كل مقطع عرضي، ونحصل على حجم النفق بضرب هذه المساحة في طول النفق.

35) إجابة ممكنة: يُعطي المثلث تقريبًا جيدًا للمساحة، وذلك اعتمادًا على شكل المنحنى كما هو مبين أدناه، أما إذا كان للدالة عدة نقاط حرجة، فإنه من الصعب استعمال المثلثات. أما الدوائر فيصعب استعمالها؛ وذلك لأنها تترك مساحات واسعة خارجها؛ لذا فإن المثلثات أسهل للاستعمال عند تقريب المساحة؛ بسبب مرونة التعامل معها مقارنة مع الدوائر.

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمُعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_{-3}^{-1}(-2x^2-7x)\,dx$ — $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة

27) $\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx$ — 4 وحدات مربعة

28) $\int_{-4}^{3}2\,dx$ — 14 وحدة مربعة

29) $\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx$ — 3.75 وحدات مربعة

30) تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة عملية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين. **a-e)** انظر ملحق الإجابات.

a) بيانيًا: مَثِّل منحنيي $f(x)=-x^2+4, g(x)=x^2$ في المستوى الإحداثي نفسه، وظلِّل المساحتين اللتين يمثلهما التكاملان $\int_0^1(-x^2+4)\,dx, \int_0^1 x^2\,dx$

b) تحليليًا: احسب $\int_0^1(-x^2+4)\,dx, \int_0^1 x^2\,dx$.

c) لفظيًا: وضّح لماذا تكون مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين مساويةً لـ $\int_0^1(-x^2+4)\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$. ثم احسب هذه القيمة باستعمال القيم التي أوجدتها في الفرع b.

d) تحليليًا: أوجد $f(x)-g(x)$، ثم احسب $\int_0^1[f(x)-g(x)]\,dx$

e) لفظيًا: خمِّن طريقة إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) اكتشف الخطأ: سُئل ماجد وخالد عن دقة تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات، فأجاب ماجد: إنه عند تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات اليمنى، فإن المساحة الناتجة تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. في حين أجاب خالد: إن المساحة المحسوبة باستعمال أطراف المستطيلات اليسرى تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات.

32) تبرير: افترض أن المقطع الرأسي العرضي لنفق يُعطى بالدالة f. اشرح كيف يمكن حساب حجم النفق باستعمال $\int_0^d f(x)\,dx$، حيث d عرض النفق، إذا كان طوله معلومًا. برِّر إجابتك. انظر الهامش.

33) اكتب: اكتب ملخصًا للخطوات المتبعة لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x على فترة معطاة.

34) تحدَّ: أوجد $\int_0^t(x^2+2)\,dx$. $\frac{t^3}{3}+2t$ انظر إجابات الطلاب.

35) اكتب: وضّح إمكانية استعمال المثلثات أو الدوائر في تقريب المساحة تحت المنحنيات. أي الشكلين يعطي تقريبًا أفضل برأيك؟ انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (الدرس 8-4) **36-38)** انظر الهامش.

36) $j(x)=(2x^3+11x)(2x^8-12x^2)$

37) $f(k)=(k^{15}+k^2+2k)(k-7k^2)$

38) $s(t)=(\sqrt{t}-7)(3t^8-5t)$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عندما $x=1$: (الدرس 8-3)

39) $y=x^3$ — 3

40) $y=x^3-7x^2+4x+9$ — −7

41) $y=(x+1)(x-2)$ — 1

أوجد كل نهاية مما يأتي (إن وجدت): (الدرس 8-2)

42) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$ — 3

43) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ — −1

44) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}$ — $\frac{2}{9}$

تدريب على اختبار

45) ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y=-x^2-3x+6$ والمحور x، في الفترة $[2, 6]$؟ A

A 93.33 وحدة مربعة تقريبًا

B 90 وحدة مربعة تقريبًا

C 86.67 وحدة مربعة تقريبًا

D 52 وحدة مربعة تقريبًا

46) أيٌّ مما يأتي يمثِّل مشتقة $n(a)=\frac{4}{a}-\frac{5}{a^2}+\frac{3}{a^4}+4a$؟ D

A $n'(a)=8a-5a^2+3a^4$

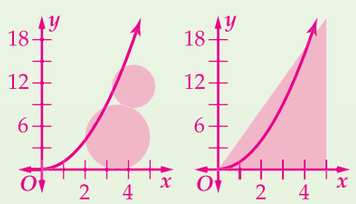
B $n'(a)=4a^2-5a^3+3a^4+4$

C $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{5}{a^3}-\frac{3}{a^5}+4$

D $n'(a)=-\frac{4}{a^2}+\frac{10}{a^3}-\frac{12}{a^5}+4$

47) ما قيمة $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-10}{x^2+5x+6}$؟ D

A $\frac{1}{15}$ **B** $\frac{2}{15}$ **C** $\frac{3}{15}$ **D** $\frac{4}{15}$



36) $j'(x)=(6x^2+11)(2x^8-12x^2)+(2x^3+11x)(16x^7-24x)$

37) $f'(k)=(15k^{14}+2k+2)(k-7k^2)+(k^{15}+k^2+2k)(1-14k)$

38) $s'(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^8-5t)+(\sqrt{t}-7)(24t^7-5)$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 8

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (22) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 تدريبات إعادة التعليم

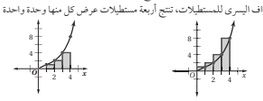
المساحة تحت المنحنى والتكامل

المساحة تحت منحنى، يمكنك استعمال مساحات مستطيلات لتقريب المساحة المحصورة بين منحنى دالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[a, b]$، الواقعة في مجال $f(x)$.

مثال

قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة؛ استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.

عند استعمال الأطراف اليمنى لقاعدات المستطيلات تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة. (الشكل A)، وعند استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، تنتج أربعة مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة (الشكل B).



الشكل A　　الشكل B

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى	المساحة باستعمال الأطراف اليسرى
$R_1 = 1 \cdot f(1) = 0.5$	$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 2$	$R_2 = 1 \cdot f(1) = 0.5$
$R_3 = 1 \cdot f(3) = 4.5$	$R_3 = 1 \cdot f(2) = 2$
$R_4 = 1 \cdot f(4) = 8$	$R_4 = 1 \cdot f(3) = 4.5$
المساحة الكلية = 15 وحدة مربعة	المساحة الكلية = 7 وحدة مربعة

أي أن المساحة باستعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى هي 15 أو 7 وحدة مربعة على الترتيب. وهذا يعطي تقديرًا أعلى وآخر أدنى للمساحة؛ $7 < \text{المساحة} < 15$. وبأخذ متوسط التقريبين، فإن 11 يُعدّ تقريبًا أفضل للمساحة.

تمارين

1) قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=3x^2+1$ والمحور x في الفترة $[0,4]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.
94 وحدة مربعة؛ 46 وحدة مربعة؛ 69.5 وحدة مربعة.

2) قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=-x^2+5x+6$ والمحور x في الفترة $[1,5]$، باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة. استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقاعدات المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين.
40 وحدة مربعة؛ 44 وحدة مربعة؛ 42 وحدة مربعة.

تدريبات إعادة التعليم (23) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المساحة تحت المنحنى والتكامل

التكامل

التكامل المحدد	مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x$، حيث a و b الحدان السفلي والعلوي على الترتيب. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، $x_i = a + i\Delta x$

مثال

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y=4x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 5]$ أي $\int_0^5 4x^2\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i

صيغة Δx	$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
$b=5, a=0$	$= \frac{5-0}{n}$
صيغة x_i	$x_i = a + i\Delta x$
$a=0, \Delta x=\frac{5}{n}$	$= 0 + i\frac{5}{n} = \frac{5i}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة المطلوبة.

تعريف التكامل المحدد $f(x_i)=4x_i^2$	$\int_0^5 4x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4x_i^2\,\Delta x$
$x_i = \frac{5i}{n}$ ، $\Delta x = \frac{5}{n}$ ، خصائص المجموع	$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\left(\frac{5i}{n}\right)^2\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{20}{n}\left(\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$= \lim_{n\to\infty}\frac{20}{n}\left(\frac{25}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$
بتبسط وأوجد المفكوك، ثم اقسم على n^2	$= \lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$
خصائص النهايات	$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{500}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty}2 + \left(\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right]$
بتبسط	$= \frac{500}{6}[2+3(0)+0] \approx 166.67$

تمارين

استعمل النهايات لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

1) $\int_0^2 x^3\,dx$ **4 وحدات مربعة**
2) $\int_2^4 (x^2+3)\,dx$ **$\frac{74}{3}$ وحدة مربعة**
3) $\int_4^6 (1+x)\,dx$ **12 وحدة مربعة**
4) $\int_1^3 4x^3\,dx$ **80 وحدة مربعة**

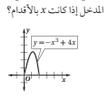
تدريبات حل المسألة (24) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 تدريبات حل المسألة

المساحة تحت المنحنى والتكامل

1) **مدخل،** مدخل باب لعبة له الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة المدخل إذا كانت x بالأقدام؟



4 أقدام مربعة

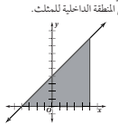
2) **مناجم،** يتخذ مدخل منجم للفحم الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة المدخل إذا كانت x بالأمتار؟

$5\frac{1}{15}$ أمتار مربعة

3) **سدود،** يتخذ سطح سد للماء الشكل الظاهر أدناه، فما مساحة سطح السد إذا كانت x بالكيلو متر؟

$1\frac{1}{3}$ كيلومتر مربع

4) **منطقة متقيئة،** ارسم المثلث المكون من المحور x والمستقيمين $x=5$ و $y=x+4$ على المستوى الإحداثي.
a) ظلّل المنطقة الداخلية للمثلث.



إجابة ممكنة:
b) أوجد طول القاعدة، وارتفاع المثلث، واستعملها لحساب مساحة المثلث.
9؛ 9؛ 40.5 وحدة مربعة
c) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-4}^{5}(x+4)\,dx$.
40.5 وحدة مربعة

5) **بذور،** ينوي علي زراعة حديقة منزله بالبذور، فإذا كانت مساحة الحديقة التي ينوي علي زراعتها بالأمتار المربعة، تتعين بالتكامل: $\int_1^7 (-x^2+8x-7)\,dx$ ، وكانت البذور التي بحوزته كافية لزراعة $35\,m^2$، فهل تكفي البذور لزراعتها؟ وضح إجابتك.
لا؛ إجابة ممكنة: يحتاج إلى المزيد من البذور لزراعة $36\,m^2$، في حين يوجد لديه بذور تكفي لزراعة $35\,m^2$ فقط.

التدريبات الإثرائية (25) — فوق

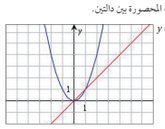
الاسم: _____ التاريخ: _____

8-5 التدريبات الإثرائية

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين:
تعلمت إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x.
أجب عن الأسئلة الآتية لإيجاد المساحة المحصورة بين دالتين.

1) مثّل كلًّا من الدالتين $y=x^2, y=x$



2) أوجد نقاط التقاطع بين الدالتين: $y=x^2, y=x$
(0, 0), (1, 1)

3) أي الدالتين أكبر في الفترة $(0, 1)$؟
$y=x$

4) أوجد كلًّا من $\int_0^1 x\,dx$ ، $\int_0^1 x^2\,dx$
$\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$

5) أوجد كلًّا من $\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$
$\frac{1}{6}$

6) ماذا يمثّل الناتج في سؤال 6؟
مساحة المنطقة المحصورة بين الدالتين.

7) أوجد $\int_0^1 (x-x^2)\,dx$
$\frac{1}{6}$
قارن بين الناتجين للسؤالين 5, 7
متساويان

8) لخّص الخطوات لإيجاد المساحة المحصورة بين دالتين.
انظر إجابات الطلاب

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 8

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (22) دون ضمن فوق

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x، على الفترة المعطاة في كلٍّ مما يأتي باستعمال الطرف المعطى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة:

1) $f(x) = x + 3$; $[1, 5]$; الطرف الأيسر — 22 وحدة مربعة

2) $f(x) = -x^2 + 6x - 4$; $[2, 5]$; الطرف الأيمن — 10 وحدات مربعة

3) $f(x) = 3x^3$; $[0, 4]$; الطرف الأيسر — 108 وحدات مربعة

4) $f(x) = 1 + x^2$; $[1, 6]$; الطرف الأيمن — 95 وحدة مربعة

الفصل الثامن النهايات والاشتقاق

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطى بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

5) $\int_0^2 x^2\,dx$ — $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة

6) $\int_1^6 6x^2\,dx$ — 430 وحدة مربعة

7) $\int_1^3 (x^2 - x)\,dx$ — $\frac{14}{3}$ وحدة مربعة

8) $\int_{-2}^1 (-x^2 - 2x + 11)\,dx$ — 33 وحدة مربعة

9) **تصميم وعمارة:** يصمم مهندس نافذة زجاجية يمكن نمذجتها بِـ $y = 5 - 0.05x^2$، والممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور. ما مساحة سطح النافذة؟

66.67 وحدة مربعة تقريبًا

22

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-6

استعمال النهايات؛ لإيجاد المساحات تحت منحنى دالة.

الدرس 8-6

إيجاد دوال أصلية.

استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

ما بعد الدرس 8-6

إيجاد تكاملات لدوال من غير كثيرات الحدود.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما علاقة الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم بالدالة التي تُمثّل ارتفاعه؟
  الدالة التي تُمثّل سرعة سقوط القلم هي مشتقة الدالة التي تُمثّل ارتفاعه.
  أو الدالة التي تُمثّل ارتفاع القلم هي الدالة الأصلية للدالة التي تُمثّل سرعته.
- ما الذي يحتاج إليه علي لتحديد الارتفاع الذي أسقط منه القلم؟ يحتاج لإيجاد الدالة الأصلية لدالة السرعة وتعويض عدد الثواني التي استغرقها القلم للوصول إلى سطح الأرض بدلًا من t.

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

The Fundamental Theorem of Calculus

فيما سبق:
درستُ استعمال النهايات لتقريب المساحة تحت منحنى دالة. (الدرس 5-8)

والآن:
- أجدُ دوال أصلية.
- أستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لأجد التكامل المحدد.

المفردات:

الدالة الأصلية
antiderivative

التكامل غير المحدد
indefinite integral

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
Fundamental Theorem of Calculus

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالقدم لكل ثانية تُعطى بـ $v(t) = -32t$، فمن الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-8 و4-8، أنَّه إذا أُعطيتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$، فإن العبارة التي تمثِّل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثِّل السرعة، وطُلِب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًّا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **دالة أصلية** للدالة f.

مثال 1 إيجاد الدوال الأصلية

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a $f(x) = 3x^2$

لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة دالة القوة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 3، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

إن x^3 ليست الدالة الوحيدة التي تحقق المطلوب، فمثلًا $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضًا؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

b $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8، وعليه تكون $F(x) = x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f، فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-9}$. $-8x^{-8-1} =$ لاحظ أن كلًّا من $G(x) = x^{-8} + 3$، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثِّل دالة أصلية للدالة f.

تحقق من فهمك

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

1A $2x$

1B $-3x^{-4}$

إجابة ممكنة: $x^{-3}, x^{-3} + 33, x^{-3} - 4, x^{-3} + 9$

إجابة ممكنة: $x^2, x^2 + 5, x^2 - 7, x^2 + 28$

في المثال 1 لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لدالَّةٍ أصلية ينتج عنه دالة أصلية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لدالة أصلية يُنتج دالة أصلية أخرى؛ لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لانهائيًّا من الدوال الأصلية لأي دالة. والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحوي الثابت C.

مصادر الدرس 8-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (177)	• تنويع التعليم، ص (177)	• تنويع التعليم، ص (177, 179)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (23)	• كتاب التمارين، ص (23)	• كتاب التمارين، ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26، 27) • تدريبات حل المسألة، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد

المثالان 1, 2 يُبيِّنان كيفية إيجاد دالة أصلية لدوال كثيرات الحدود ودوال القوى.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a $f(x) = 6x$

إجابة ممكنة: $3x^2$

b $f(x) = -6x^{-7}$

إجابة ممكنة: x^{-6}

2 أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a $f(x) = 3x^5$ $\frac{1}{2}x^6 + C$

b $f(x) = \frac{4}{x^6}$ $-\frac{4}{5x^5} + C$

c $f(x) = x^2 + 3x + 4$

$\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$

كما في المشتقات، فإن هناك قواعد لإيجاد الدالة الأصلية.

مفهوم أساسي قواعد الدالة الأصلية

قاعدة القوة إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق إذا كان لـ $f(x)$، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$، $G(x)$ على الترتيب، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

مثال 2 قواعد الدوال الأصلية

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a $f(x) = 4x^7$

الدالة المعطاة $f(x) = 4x^7$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$

بسّط $= \frac{1}{2}x^8 + C$

b $f(x) = \frac{2}{x^4}$

الدالة المعطاة $f(x) = \frac{2}{x^4}$

أعد كتابة الدالة بقوة سالبة $= 2x^{-4}$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$

بسّط $= -\frac{2}{3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$

c $f(x) = x^2 - 8x + 5$

الدالة المعطاة $f(x) = x^2 - 8x + 5$

أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x $= x^2 - 8x^1 + 5x^0$

قواعد الدالة الأصلية $F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$

بسّط $= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$

تحقق من فهمك

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

2A $f(x) = 6x^4$ $F(x) = \frac{6}{5}x^5 + C$

2B $f(x) = \frac{10}{x^3}$ $F(x) = \frac{-5}{x^2} + C$

2C $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ $F(x) = x^8 + 3x^2 + 2x + C$

يُعطى الشكل العام للدَّالة الأصلية باسم ورمز خاصَّين.

مفهوم أساسي التكامل غير المحدد

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$، و C ثابت.

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية
$F(x) = kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$، فمثلًا، إذا كان $f(x) = 3$، فإن $F(x) = 3x$.

ربط المفردات

التكامل غير المحدد
سبب تسمية التكامل غير المحدد بهذا الاسم أنه لا يُعبر عن دالة محددة، بل عن عدد لا نهائي من الدوال الأصلية.

174 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

مثال 3 من واقع الحياة — التكامل غير المحدد

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثالث الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن سطح الأرض بـ 30 ft، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$ العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة

$$= \int -32t\,dt$$ $v(t) = -32t$

$$= -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$$= -16t^2 + C$$ بسّط

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي، و 0 s للزمن الابتدائي.

$s(t) = -16t^2 + C$ الدالة الأصلية لـ $v(t)$

$30 = -16(0)^2 + C$ $s(t) = 30, t = 0$

$30 = C$ بسّط

أي أن دالة موقع الكرة هي $s(t) = -16t^2 + 30$.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

حُلّ المعادلة $s(t) = 0$.

$s(t) = -16t^2 + 30$ دالة موقع الكرة

$0 = -16t^2 + 30$ $s(t) = 0$

$-30 = -16t^2$ اطرح 30 من كلا الطرفين

$1.875 \approx t^2$ اقسم كلا الطرفين على -16

$1.369 \approx t$ خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

أي أن الكرة ستستغرق 1.369 s تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.

تحقق من فهمك

3) سقوط حُر: عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها. $s(t) = -16t^2 + 120$

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

3B) تصل المحفظة إلى سطح الأرض بعد 2.74 s.

الربط مع الحياة

السقوط الحر قبل أربعمائة عام تقريبًا، استنتج جاليليو جاليلي أن لجميع الأجسام التي تسقط سقوطًا حرًا التسارع نفسه، باهمال تأثير الهواء، وأن هذا التسارع لا يتأثر بأي من مادة الجسم الساقط أو وزنه أو الارتفاع الذي سقط منه.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهًا بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 5-8، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدَّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما: هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

مفهوم أساسي — النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$.

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد

المثال 3 يُبيّن كيفية إيجاد ثابت التكامل في مواقف خاصة.

مثال إضافي

3 القفز إلى الماء: تُمثّل الدالة $v(t) = -32t$ السرعة التي قفز بها شخص من فوق منحدر ارتفاعه 100 ft باتجاه سطح الماء، حيث $v(t)$ سرعة الشخص المتجهة اللحظية بالأقدام لكل ثانية t.

a) أوجد دالة موقع الشخص $s(t)$ بعد t ثانية من قفزه.

$s(t) = -16t^2 + 100$

b) أوجد الزمن الذي يستغرقه الشخص للوصول إلى سطح الماء. 2.5 s

إرشادات للمعلم الجديد

الدوال الأصلية أكد على الطلاب أن مصطلح الدالة الأصلية «مصطلح مضلل»، إذ توجد دوال أصلية عددها لانهائي، فلا نقول: أوجد الدالة الأصلية، إنما نقول: أوجد دالة أصلية، حيث إن وجود ال التعريف تعني واحدة فقط.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

المثال 4 يُبيّن كيفية استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد المساحة تحت منحنى دالة في فترة محددة.

مثال إضافي

4 استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في حساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x في الفترة المعطاة:

a) $y = 5x^4$ على الفترة $[2, 4]$؛ أي $\int_2^4 5x^4\,dx$. 992 وحدة مربعة

b) $y = -x^2 + 6x + 9$ على الفترة $[0, 6]$؛ أي $\int_0^6 (-x^2 + 6x + 9)\,dx$.

90 وحدة مربعة

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة على الطلاب إضافة مدخل يوضحون فيه مفهوم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل، وكيفية استعمالها في حساب المساحة تحت منحنى دالة في فترة محددة.

إرشادات للمعلم الجديد

دوال أصلية عند حساب تكامل ما، نبّه الطلاب إلى ضرورة إيجاد دالة أصلية أولًا ثم القيام بالتعويض.

تاريخ الرياضيات

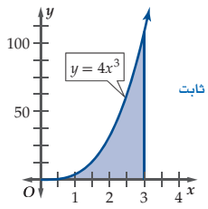
ماريا أجنسن (1799–1718)
عالمة إيطالية برعت في اللغات والفلسفة والرياضيات، ويُعدُّ كتابها *Analytical Institutions* أول كتاب ناقش حسابي التفاضل والتكامل معًا.

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد دوال أصلية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

مثال 4 المساحة تحت منحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= x^4 + C$ بسّط

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

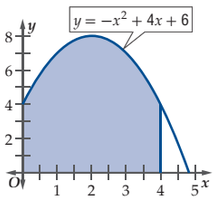
$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C)$ $a = 1, b = 3$

$= 81 - 1 = 80$ بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0, 4]$؛ أي $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx$



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$\int (-x^2 + 4x + 6)\,dx$

$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C$ بسّط

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) -$ $a = 0, b = 4$

$\left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right)$

$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67$ بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -x^2 + 4x + 6$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$ هي 34.67 وحدة مربعة تقريبًا.

تحقق من فهمك

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) $\int_2^5 3x^2\,dx$ 117

4B) $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$ 46

لاحظ أنه عند حساب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، وحساب الفرق بين القيمتين، فإن C لن تظهر في الناتج؛ وذلك لأن C موجودة في كلتا الدالتين الأصليتين، فإن الفرق بين قيمتي C يساوي صفرًا. لذا فإنه لحساب تكامل محدد باستعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل يمكنك إهمال الثابت C، وعدم كتابته في الدالة الأصلية.

176 الفصل 8 النهايات والاشتقاق

قبل حساب التكامل حدِّد ما إذا كان محددًا أو غير محدد.

تنبيه!

التكاملات

صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

مثال 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

a $\int (9x - x^3)\,dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$\int (9x - x^3)\,dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C$ بسّط

b $\int_2^3 (9x - x^3)\,dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$\int_2^3 (9x - x^3)\,dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right]$ $a = 2\,,\ b = 3$

$= 20.25 - 14 = 6.25$ بسّط

تحقق من فهمك

احسب كل تكامل مما يأتي:

5A $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$ $2x^3 + 4x^2 - 3x + C$

5B $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\,dx$ 15.6

لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي الدالَّة الأصلية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد الدالة الأصلية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة، وهي الدالة الأصلية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى؛ ليصبح التكامل عندها محددًا.

مثال 6 التكاملات المحددة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\,dx$.
ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

$\int_0^{0.5} 360x\,dx = 180x^2\Big|_0^{0.5}$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$ $a = 0\,,\ b = 0.5$

$= 45 - 0 = 45$ بسّط

أي أن الشغل اللازم هو 45 J.

تحقق من فهمك

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A $\int_0^{0.7} 476x\,dx$ 116.62 J

6B $\int_0^{1.4} 512x\,dx$ 501.76 J

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

المثالان 5, 6 يُبيّنان كيفية إيجاد التكاملات المحددة وغير المحددة.

مثالان إضافيان

5 أوجد كل تكامل مما يأتي:

a $\int (x^3 - 2x + 1)\,dx$

$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + C$

b $\int_1^4 (x^3 - 2x + 1)\,dx$

51.75

6 يُعطى الشغل اللازم لشد نابض من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{2.5} 60x\,dx$.
ما قيمة الشغل اللازم مقيسًا بوحدة الجول؟ 187.5 J

المحتوى الرياضي

التكاملات المحددة وغير المحددة

ينتج عن التكامل غير المحدد للدالة حد ثابت، إلا أن هذا الثابت يُحذف عند حساب التكامل المحدد؛ لأنه يُضاف إلى الحد العلوي، ويُطرح من الحد السفلي للتكامل.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون السمعيون: نظّم الطلاب في مجموعات ثنائية، واطلب إليهم كتابة فقرة يصفون فيها النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل واستعمالاتها. واطلب إليهم عرض أعمالهم أمام الطلاب الآخرين.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع: للأسئلة 8 و 12 و 13 ، ذكِّر الطلاب بإضافة الثابت C في إجاباتهم؛ لأن التكاملات غير محددة .

إجابات

1 $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$

2 $F(z) = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + C$

3 $Q(r) = \frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + C$

4 $W(u) = \frac{1}{9}u^6 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{5}u^2 + C$

5 $U(d) = -\frac{3}{d^4} - \frac{5}{2d^2} - 2d^3 + 3.5d + C$

6 $M(t) = 4t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 11t + C$

7a $s(t) = -16t^2 + C$

7b $s(t) = -16t^2 + 64$

7c $28ft$

22 $-x^3 - 4x^2 + 24$

23 $2x^5 - 4x^3 + 5x - 5775$

24 -92

25 $-3x^3 - 2x^2 - 576$

26 $4x^8 - 5x^6 - 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 7x$

27 $-7x^3 + 44x + 57$

تدرب وحل المسائل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي: (المثالان 1 , 2)

1 $f(x) = x^5$

2 $f(z) = \sqrt[3]{z}$

3 $q(r) = \frac{3}{4}r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8}r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$

4 $w(u) = \frac{2}{3}u^5 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{2}{5}u$

5 $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6d^2 + 3.5$

6 $m(t) = 16t^3 - 12t^2 + 20t - 11$

7 **سقوط حر:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أن القلم قد استغرق 2s حتى الوصول إلى سطح الأرض. (مثال 3)

a أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t\,dt$. **a–c) انظر الهامش.**

b احسب قيمة C عندما $t = 2\text{s}$ ، $s(t) = 0$.

c ما ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5s من سقوطه؟

احسب كل تكامل مما يأتي: (المثالان 4 , 5)

8 $\int (6m + 12m^3)\,dm$ — $3m^2 + 3m^4 + C$

9 $\int_1^4 2x^3\,dx$ — 127.5

10 $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\,da$ — 46.5

11 $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{5}h^4\right)dh$ — 7.99

12 $\int (3.4t^4 - 1.2t^3 + 2.3t - 5.7)\,dt$ — $0.68t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + C$

13 $\int (14.2w^{6.1} - 20.1w^{5.7} + 13.2w^{2.3} + 3)\,dw$ — $2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + C$

14 **حشرات:** تُعطى سرعة قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية. (مثال 6)

a أوجد دالة الموقع $s(t)$ للحشرة، ثم احسب قيمة الثابت C بفرض أنه عندما $t = 0$ ، فإن $s(t) = 0$. — $s(t) = -16t^2 + 34t$

b أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟ — 2.125 s

15 **هندسة:** صمَّم مهندس مدخل بناية على شكل قوس يمكن وصفه بـ $y = -\frac{x^2}{157.5} + 4x$ ، حيث x بالأقدام. احسب مساحة المنطقة تحت القوس. (مثال 6) — 264600 ft²

احسب كل تكامل مما يأتي:

16 $\int_{-3}^{1} 3\,dx$ — 12

17 $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\,dx$ — 27

18 $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\,dx$ — 16.4

19 $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4}\right)dx$ — 2.5

20 $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\,dx$ — 28.5

21 **مقذوفات:** تُعطى سرعة مقذوف بـ $v(t) = -32t + 120$ ، حيث $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية بعد t ثانية ، ويبلغ ارتفاعه 228 ft بعد 3 s .

a أوجد أقصى ارتفاع يصله المقذوف. — 237 ft

b أوجد سرعة المقذوف عندما يصل إلى سطح الأرض. — تقريبًا −123.16 ft/s

احسب كل تكامل مما يأتي: **22–27) انظر الهامش.**

22 $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\,dt$

23 $\int_5^x (10t^4 - 12t^2 + 5)\,dt$

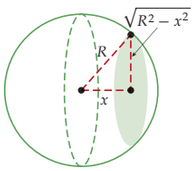
24 $\int_3^2 (4t^3 + 10t + 2)\,dt$

25 $\int_{-x}^{6} (-9t^2 + 4t)\,dt$

26 $\int_{2x}^{x+3} (3t^2 + 6t + 1)\,dt$

27 $\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)\,dt$

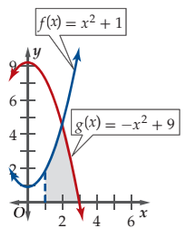
28 **حجم الكرة:** يمكن إيجاد حجم كرة طول نصف قطرها R بقصها إلى حلقات دائرية من خلال مستويات رأسية متوازية ثم إجراء تكامل لحساب مساحات الحلقات الدائرية.



يبلغ طول نصف قطر كل حلقة $\sqrt{R^2 - x^2}$ ، أي أن مساحة كل حلقة هي $\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$.

أوجد $\int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)\,dx$ لحساب حجم الكرة . $\frac{4}{3}\pi R^3$

29 **مساحات:** احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ والمحور x ، في الفترة $1 \le x \le 3$. 6 وحدات مربعة



تنويع الواجبات المنزلية

دون ضمن فوق

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–15، 32–46
ضمن ضمن المتوسط	1–19 فردي، 21، 22–26 زوجي، 28، 29، 30، 32 – 46
فوق فوق المتوسط	16–46

30) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذه المسألة العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة، ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

a) هندسيًا: مثِّل الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ بيانيًا، وظلِّل المنطقة المحصورة بين $f(x)$ والمحور x، في الفترة $0 \le x \le 4$.

b) تحليليًا: احسب كلًّا من: $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$, $\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$ **4, −4**

c) لفظيًا: أعطِ تخمينًا حول مساحة المنطقة الواقعة فوق أو تحت المحور x .

d) تحليليًا أوجد التكامل على الفترة كاملة من خلال حساب $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$ ، ثم أوجد المساحة الكلية من خلال حساب $\left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right|$ **0, 8**

e) لفظيًا: أعطِ تخمينًا حول الفرق بين قيمة التكامل على الفترة كاملة والمساحة الكلية.

a, c, e) انظر ملحق الإجابات.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) تحدٍّ: احسب قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$. حيث r عدد ثابت. $\frac{1}{2}\pi r^2$

تبرير: حدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك: **32–34) انظر الهامش.**

32) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

33) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$

34) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{|b|}^{|a|} f(x)\,dx$

35) برهان: أثبت أنه لأي عددين ثابتين m ، n ، فإن $\int_a^b (n+m)\,dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$.

انظر ملحق الإجابات.

36) تبرير: صف قيم $\int_a^b f(x)\,dx$, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، عندما يقع التمثيل البياني للدالة f تحت المحور x في الفترة $a \le x \le b$.

انظر ملحق الإجابات.

37) اكتب: بيِّن لماذا يمكننا إهمال الحد الثابت C في الدالة الأصلية عند حساب التكامل المحدد. **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل في كل مما يأتي: **(الدرس 5-8)**

38) $\int_{-2}^{2} 14x^6\,dx$ **512**

39) $\int_0^6 (x+2)\,dx$ **30**

استعمل قاعدة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي: **(الدرس 4-8)**

40) $j(k) = \frac{k^8 - 7k}{2k^4 + 11k^3}$ $\frac{8k^{11} + 55k^{10} + 42k^4 + 154k^3}{(2k^4 + 11k^3)^2}$

41) $g(n) = \frac{2n^3 + 4n}{n^2 + 1}$ $\frac{2n^4 + 2n^2 + 4}{(n^2+1)^2}$

42) إذا كان $\lim_{x \to 1} (2x^2 + ax) = 8$ ، فأوجد قيمة a. **(الدرس 2-8)** **6**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: **(الدرس 3-8)**

43) $y = x^2 + 3$ $m = 2x$

44) $y = x^3$ $m = 3x^2$

تدريب على اختبار

45) إذا كان $\int_0^2 kx\,dx = 6$ ، فما قيمة k ؟ **C**

A 1

B 2

C 3

D 4

تنويع التعليم

فوق

توسَّع: افترض أن $f(x)$ دالَّة متصلة، وأن $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$. أثبت أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)]$$
$$= [F(c) - F(a)]$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx$$

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في التمرين 30 التمثيل البياني والتحليل الجبري، والتعبير اللفظي لاستكشاف العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى كل طالب كتابة كيفية استفادته من مفاهيم الدرس السابق عن التكامل في الدرس الجديد عن الدوال الأصلية.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 6-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69)

إجابات:

32) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: يؤدي تغيير ترتيب حدود التكامل إلى تغيير إشارته ما لم تكن قيمة التكامل صفرًا.

33) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فإن العبارة تكون صحيحة دائمًا.

34) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان $f(x)$ دالة زوجية وكل من a, b سالبًا.

37) إجابة ممكنة: إذا احتوت الدالة $F(x)$ على الثابت C ، فإنه سيظهر في كل من $F(b)$ و $F(a)$ ، ولأننا نطرح هاتين القيمتين، فإن C تحذف.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-6 تدريبات إعادة التعليم

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد،
يُقال إن الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة المعطاة $f(x)$، إذا كان $F'(x)=f(x)$.

قواعد الدوال الأصلية	
قاعدة القوة	إذا كان $f(x)=x^n$، حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1، فإن $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$.
ضرب القوة في عدد	إذا كان $f(x)=kx^n$، حيث n عدد حقيقي لا يساوي -1 و k ثابت، فإن $F(x)=\frac{kx^{n+1}}{n+1}+C$.
الجمع والطرح	إذا كان $F(x)$ و $G(x)$ دالتين أصليتين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ على الترتيب، فإن $F(x)\pm G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)\pm g(x)$.

مثال 1 أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x)=-3x^5$

الدالة المعطاة $f(x)=-3x^5$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد $F(x)=\frac{-3x^{5+1}}{5+1}+C$

بسّط $=-\frac{1}{2}x^6+C$

b) $f(x)=x^3+4x^2-2$

الدالة المعطاة $f(x)=x^3+4x^2-2$

إعادة كتابة الدالة $=x^3+4x^2-2x^0$

قواعد الدالة الأصلية $F(x)=\frac{x^{3+1}}{3+1}+\frac{4x^{2+1}}{2+1}-\frac{2x^{0+1}}{0+1}$

بسّط $=\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-2x+C$

تمارين
أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x)=2x^4+3x^2-5$ — $\frac{2}{5}x^5+x^3-5x+C$

2) $g(x)=\frac{2}{x^3}$ — $-\frac{1}{x^2}+C$

3) $t(x)=\frac{3}{4}x^6-\frac{1}{2}x^3$ — $\frac{3}{28}x^7-\frac{1}{8}x^4+C$

4) $n(x)=\sqrt[3]{x}-2$ — $\frac{5}{6}x^6-2x+C$

تدريبات إعادة التعليم (27) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل، يُعرَّف التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ على أنه $\int f(x)dx=F(x)+C$، حيث $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$، أي $F'(x)=f(x)$، و C ثابت.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل	إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$، ويمكن كتابة الطرف الأيمن للمعادلة في الصورة $F(x)\Big\vert_a^b$

مثال احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int(3x^2+4x-1)\,dx$

$\int(3x^2+4x-1)\,dx=\frac{3x^{2+1}}{2+1}+\frac{4x^{1+1}}{1+1}-\frac{x^{0+1}}{0+1}+C$ — قواعد الدالة الأصلية (ضرب القوة في عدد)

بسّط $=\frac{3x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-x+C$

بسّط $=x^3+2x^2-x+C$

b) $\int_2^4(x^3-1)\,dx$

$\int_2^4(x^3-1)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\Big\vert_2^4$ — النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$=\left(\frac{4^4}{4}-4\right)-\left(\frac{2^4}{4}-2\right)$

بسّط $=60-2=58$

$b=4\,;\,a=2$

تمارين
أوجد كل تكامل مما يأتي:

1) $\int(3x^2-x^2)\,dx$ — $\frac{3x^3}{3}-\frac{x^3}{3}+C$

2) $\int_1^2(x^2+1)\,dx$ — $\frac{10}{3}$

3) $\int_1^2(x^2-1)\,dx$ — $\frac{4}{3}$

4) $\int_{-1}^1(x^3-2x+1)\,dx$ — 2

تدريبات حل المسألة (28) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-6 تدريبات حل المسألة

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

1) **الوثب العالي،** تدرب محمود على الوثب العالي في حصة التربية الرياضية، فأمكن وصف سرعته في أثناء الوثبة بالدالة: $v(t)=-32t+24$، حيث t بالثواني والسرعة بالأقدام لكل ثانية.

a) أوجد دالة موقع محمود $s(t)$، مفترضًا أن $s(t)=0$، عندما $t=0$.

$s(t)=-16t^2+24t$

b) عندما وثب محمود، كم استغرق من الوقت للوصول إلى الأرض؟

1.5 ثانية

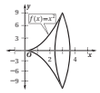
2) **إعلان،** الشكل أدناه يمثل شعارًا لشركة جديدة، ما المساحة التي سيستغلها الشعار إذا قررت الشركة وضعه على قمصان تابعة لها؟ علمًا بأن x بالبوصات وتقع بين 0 و 1؟

$\frac{8}{15}$ **بوصة مربعة**

3) **شد زنبرك،** يُعبِّر عن الشغل بالجول اللازم لشد زنبرك مسافة 36 in من وضعه الطبيعي بالمعادلة: $\int_0^3 80x\,dx$، فما الشغل اللازم؟

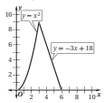
360 جول

4) **حجم،** في الشكل أدناه، أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران منحنى $f(x)=x^2$ حول محور السينات في الفترة $[0,3]$، إذا كان الحجم يُعبَّر عنه بالمعادلة: $\int_0^3 \pi(x^2)^2\,dx$



$\frac{243\pi}{5}$ **وحدة مكعبة**

5) **دعاية،** اشترت شركة لوحة إعلانية، وأمكن تمثيل هذه اللوحة بالشكل أدناه، حيث القياسات بالأقدام، فكم تبلغ مساحة اللوحة الإعلانية التي اشترتها الشركة؟



22.5 قدمًا مربعة

التدريبات الإثرائية (29) — فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

8-6 التدريبات الإثرائية

بعض خصائص التكامل

بعض خصائص التكامل،
اتبع الخطوات التالية للوصول إلى بعض خصائص التكامل المحدد:

1) أوجد كلًّا من التكاملات الآتية: $\int_1^2(2x^2+1)\,dx$، $\int_2^3(2x^2+1)\,dx$، $\int_1^3(2x^2+1)\,dx$
$\frac{17}{3}$، $\frac{41}{3}$، $\frac{58}{3}$

2) قارن النتائج في السؤال الأول.

$\int_1^2(2x^2+1)\,dx+\int_2^3(2x^2+1)\,dx=\int_1^3(2x^2+1)\,dx$

3) هل تعتقد أن هذه النتيجة صحيحة دائمًا؟
نعم

4) عمّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 2.

$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

5) أوجد $\int_2^1(2x^2+1)\,dx$، $\int_1^2(2x^2+1)\,dx$
$\frac{17}{3}$، $\frac{-17}{3}$

6) قارن القيمتين في السؤال 5

$\int_1^2(2x^2+1)\,dx=-\int_2^1(2x^2+1)\,dx$

7) عمّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 6

$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

8) أوجد $\int_2^2(2x^2+1)\,dx$
0

9) عمّم النتيجة التي توصلت لها في السؤال 8. $\int_a^a f(x)dx=0$

10) استخدم الخصائص الثلاث التي توصلت إليها لحساب قيمة: $\int_2^2(5x^3+7)\,dx+\int_1^3(2x+4)\,dx+\int_3^5(2x+4)\,dx$
40

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 8

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (23)

دون | ضمن | فوق

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي :

1) $f(x) = 4x^3$ $F(x) = x^4 + C$

2) $f(x) = 2x + 3$ $F(x) = x^2 + 3x + C$

3) $f(x) = x(x^2 - 3)$ $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + C$

4) $f(x) = 8x^2 + 2x - 3$ $F(x) = \frac{8}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$

احسب كل تكامل مما يأتي :

5) $\int 8\,dx$ $8x + C$

6) $\int (2x^3 + 6x)\,dx$ $\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + C$

7) $\int (-6x^5 - 2x^2 + 5x)\,dx$ $-x^6 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$

8) $\int_2^5 2x\,dx$ 21

9) $\int_{-5}^{-1} (-4x^3 - 3x^2)\,dx$ 500

10) $\int_{-2}^{1} (1 - x)(x + 3)\,dx$ 9

11) **فيزياء،** الشُّغل اللازم بوحدة الجول لضغط نابض مسافة ℓ قدم من وضعه الطبيعي يُعطى بالصيغة $W = \int_0^{\ell} 2x\,dx$ ، ما مقدار الشُّغل اللازم لضغط النابض مسافة 6 in من وضعه الطبيعي؟ 0.25 J

12) **أعمال النجارة،** افرض أن عدد الساعات التي يحتاج إليها نجار لصناعة p قطعة أثاث مُعطى بالتكامل $h = \int_0^{p} (30 - 3x)\,dx$ ، فكم ساعة يحتاج هذا النجار لصناعة 6 قطع أثاث؟ 126 h

23

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات للفصل 8، ص (71)

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تقدير النهايات بيانيًا (الدرس 8-1)

- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.
- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c غير موجودة إذا اقتربت $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين، أو عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو اليمين أو كليهما، أو عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من c.

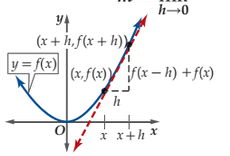
حساب النهايات جبريًا (الدرس 8-2)

- يمكن إيجاد نهايات كثيرات الحدود والدوال النسبية عادةً من خلال التعويض المباشر.
- إذا توصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ عند حساب نهاية دالة نسبية، فبَسِّط العبارة جبريًا من خلال تحليل كل من البسط والمقام أو إنطاق البسط أو المقام، ثم اختصار العوامل المشتركة.

المماس والسرعة المتجهة (الدرس 8-3)

- مُعدّل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



المشتقة (الدرس 8-4)

- يُرمز لمشتقة $f(x) = x^n$ بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة $f'(x) = n x^{n-1}$، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 8-5)

- تُعطى مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x بالصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

، حيث a، b هما الحدان الأعلى والأدنى للتكامل،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الدرس 8-6)

- الدالة الأصلية لـ $f(x) = x^n$ هي $F(x)$ وتُعطى بالصيغة $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$، حيث C عدد ثابت
- إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

المفردات

النهاية من جهة واحدة ص 130
النهاية من جهتين ص 130
التعويض المباشر ص 139
الصيغة غير المحددة ص 140
المماس ص 149
مُعدل التغيّر اللحظي ص 149
قسمة الفرق ص 149
السرعة المتجهة اللحظية ص 151
المشتقة ص 156
الاشتقاق ص 156
المعادلة التفاضلية ص 156
المؤثر التفاضلي ص 156
التجزيء المنتظم ص 166
التكامل المحدد ص 167
الحد الأدنى ص 167
الحد الأعلى ص 167
مجموع ريمان الأيمن ص 167
التكامل ص 167
الدالة الأصلية ص 173
التكامل غير المحدد ص 174
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل ص 175

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو معدل التغير اللحظي ، والذي يمكن تمثيله بميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.

2) يمكن إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x باستعمال التكامل المحدد.

3) يمكن إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية باستعمال التعويض المباشر، وذلك إذا كان مقام الدالة النسبية لا يساوي صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

4) إذا كان $F'(x) = f(x)$، فإن $F(x)$ تُسمى دالة أصلية لـ $f(x)$.

5) يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ بـ الصيغة غير المحددة.

6) تُسمى عملية إيجاد المشتقة بـ الاشتقاق .

7) إذا سُبقت دالة بـ المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

8) يطلق على السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة السرعة المتجهة اللحظية .

مراجعة الدروس

8-1 تقدير النهايات بيانيًّا (الصفحات 136 - 128)

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم:

9) $\lim_{x\to 3}(2x-7)$ **9, 10 انظر الهامش.**

10) $\lim_{x\to 1}(0.5x^4+3x^2-5)$

قدّر كل نهاية مما يأتي:

11) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ **5**

12) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x+20}{x-4}$ **غير موجودة**

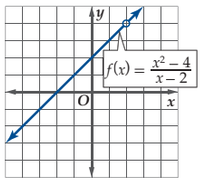
13) $\lim_{x\to 4}\frac{9}{x^2-8x+16}$ **∞**

14) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x-10}{x-2}$ **غير موجودة**

مثال 1

قدّر $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ أدناه أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من 4؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ بالعدد 4.



التعزيز عدديًّا: كوّن جدول قيم باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ← | → x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	**2**	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

يبيِّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4.

8-2 حساب النهايات جبريًّا (الصفحات 146-137)

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

15) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+2x+10}{x}$ **9**

16) $\lim_{x\to -1}(5x^2-2x+12)$ **19**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. **ليس ممكنًا؛ فالمقام يساوي صفرًا عند $x=25$.**

17) $\lim_{x\to 25}\frac{x^2+1}{\sqrt{x}-5}$

18) $\lim_{x\to 2}(-3x^3-2x^2+15)$ **−17**

احسب كل نهاية مما يأتي:

19) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-2x-8}$ $-\frac{1}{6}$

20) $\lim_{x\to\infty}(2-4x^3+x^2)$ **−∞**

مثال 2

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ذلك ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim_{x\to 2}(2x^3-x^2+4x+1)$

بما أن هذه نهاية كثيرة حدود؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 2}(2x^3-x^2+4x+1)=2(2)^3-2^2+4(2)+1$$
$$=16-4+8+1=21$$

b) $\lim_{x\to -4}\frac{2x-7}{2-x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها ليس صفرًا عندما $x=-4$؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -4}\frac{2x-7}{2-x^2}=\frac{2(-4)-7}{2-(-4)^2}=\frac{-8-7}{2-16}=\frac{15}{14}$$

مراجعة الدروس

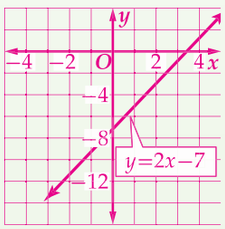
مراجعة: إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 8 ص (65)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

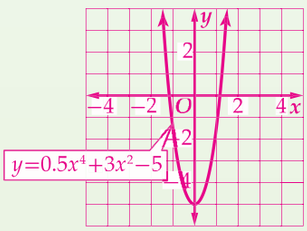
إجابات

9) −1



x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	-1.02	−1.002		−0.998	−0.998

10) −1.5



x	0.99	0.999	1	1.0001	1.001
$f(x)$	−1.579	−1.508		−1.499	−1.492

إجابات:

31 $p'(v) = -9$

32 $z'(n) = 8n + 9$

33 $t'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}}$

34 $g'(h) = 3h^{-\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}}$

8-3 المماس والسرعة المتجهة (الصفحات 154-149)

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة :

21 $y = 6 - x$, $(-1, 7)$, $(3, 3)$ — $-1, -1$

22 $y = x^2 + 2$, $(0, 2)$, $(-1, 3)$ — $0, -2$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

23 $y = -x^2 + 3x$ — $m = -2x + 3$

24 $y = x^3 + 4x$ — $m = 3x^2 + 4$

تمثِّل $s(t)$ في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد t ثانية . أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

25 $s(t) = 15t - 16t^2$, $t = 0.5$ — $v(0.5) = -1$ ft/s

26 $s(t) = -16t^2 - 35t + 400$, $t = 3.5$ — $v(3.5) = -147$ ft/s

تمثِّل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك . أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن:

27 $h(t) = 12t^2 - 5$ — $v(t) = 24t$

28 $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$ — $v(t) = -4t + 3$

مثال 3

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

صيغة مُعدّل التغير اللحظي $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$x = 2$ $= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$f(2+h) = (2+h)^2$, $f(2) = 2^2$ $= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$

فك الأقواس $= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$

بسّط، ثم حلّل $= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$

اقسم على h $= \lim_{h \to 0} (4 + h)$

عوّض $= 4 + 0 = 4$

أي أن ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4 .

8-4 المشتقات (الصفحات 163-156)

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

29 $g(t) = -t^2 + 5t + 11$, $t = -4, 1$ — $g'(t) = -2t + 5$, $g'(-4) = 13$, $g'(-1) = 3$

30 $m(j) = 10j - 3$, $j = 5, -3$ — $m'(j) = 10$; $m'(5) = 10$, $m'(-3) = 10$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: للتمارين 31-34 انظر الهامش.

31 $p(v) = -9v + 14$

32 $z(n) = 4n^2 + 9n$

33 $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6}$

34 $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}} + 5$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

35 $f(m) = \frac{5 - 3m}{5 + 2m}$ — $f'(m) = \frac{-25}{(5+2m)^2}$

36 $m(q) = \frac{2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$ — $m'(q) = \frac{4q^5 - 96q^3 + 6q}{(q^2 - 12)^2}$

مثال 4

أوجد مشتقة $h(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = x^3 + 2$. لذا، $h(x) = f(x)/g(x)$. أوجد مشتقة كل من $f(x)$, $g(x)$

من الفرض $f(x) = x^2 - 5$

قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة $f'(x) = 2x$

من الفرض $g(x) = x^3 + 2$

قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة $g'(x) = 3x^2$

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

قاعدة مشتقة القسمة $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

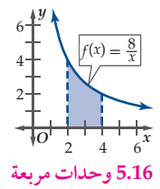
عوّض $= \frac{2x(x^3 + 2) - (x^2 - 5)3x^2}{(x^3 + 2)^2}$

بسّط $= \frac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}$

8-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل (الصفحات 172 - 164)

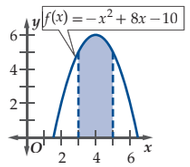
قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و 5 مستطيلات:

(37)



5.16 وحدات مربعة

(38)



11.28 وحدة مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(39) $\int_1^2 2x^2\,dx$ 4.67 وحدات مربعة تقريبًا

(40) $\int_0^3 (2x^3 - 1)\,dx$ 37.5 وحدة مربعة تقريبًا

(41) $\int_0^2 (x^2 + x)\,dx$ 4.67 وحدات مربعة تقريبًا

(42) $\int_1^4 (3x^2 - x)\,dx$ 55.5 وحدة مربعة تقريبًا

مثال 5

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2x^2$ والمحور x، في الفترة $[0, 2]$ أو $\int_0^2 2x^2\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx، x_i.

صيغة Δx $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$b = 2, a = 0$ $\quad \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$a = 0, \Delta x = \frac{2}{n}$ $\quad x_i = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$

$x_i = \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$ $\quad \int_0^2 2x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$

بسّط $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2}\right)$

صيغ المجموع $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

بسّط $\quad = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$

أخرج عاملًا مشتركًا، ثم اقسم على n^2 $\quad = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$

خصائص النهايات $\quad = \frac{16}{3} \approx 5.33$

8-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الصفحات 179 - 173)

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي: **43-46** انظر الهامش

(43) $g(n) = 5n - 2$

(44) $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$

(45) $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$

(46) $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$

احسب كل تكامل مما يأتي:

(47) $\int 8x^2\,dx$ $\frac{8}{3}x^3 + C$

(48) $\int (2x^2 - 4)\,dx$ $\frac{2}{3}x^3 - 4x + C$

(49) $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\,dx$ 2466.53 وحدة مربعة

(50) $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\,dx$ 3294 وحدة مربعة

مثال 6

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = \frac{4}{x^5}$

أعد كتابة الدالة المعطاة بقوة سالبة $\quad f(x) = 4x^{-5}$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $\quad F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$

بسّط $\quad = x^{-4} + C = -\frac{1}{x^4} + C$

(b $f(x) = x^2 - 7$

الدالة المعطاة $\quad f(x) = x^2 - 7$

أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x $\quad = x^2 - 7x^0$

قواعد الدالة الأصلية $\quad F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$

بسّط $\quad = \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$

إجابات:

(43) $G(n) = \frac{5}{2}n^2 - 2n + C$

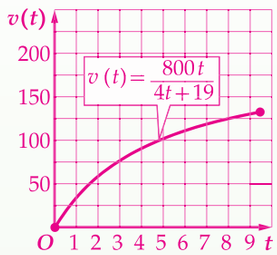
(44) $R(q) = -q^3 + \frac{9}{2}q^2 - 2q + C$

(45) $M(t) = \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + t^2 - 11t + C$

(46) $p(h) = h^7 + \frac{2}{3}h^6 - 3h^4 - 4h + C$

إجابات:

52a)

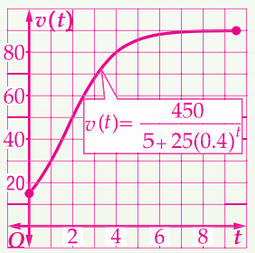


52d) لن تزيد قيمة التحفة عن 20000 ريال.

53a)

t	0	1	2	3
v	15	30	50	68.2

53b)



تطبيقات ومسائل

51) حيوانات: يُعطى عدد الحيوانات P في محميَّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بالدالة $P(t) = \frac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95}$ ، حيث $t \geq 5$. (الدرس 1-8)

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميَّة بعد 5 سنوات. **2966 حيوانًا**

b) أوجد $\lim_{t\to\infty} P(t)$ ؟ **800**

52) تحف فنية: لدى سلمان تحفة فنية يزداد سعرها كل سنة. افترض أن الدالة $v(t) = \frac{800t}{4t + 19}$ تمثِّل سعر التحفة بعد t سنة بمئات الريالات. (الدرس 1-8)

a) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0 \leq t \leq 10$. **انظر الهامش.**

b) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لتقريب سعر التحفة عندما $t = 3, 6, 10$. **7674, 11114, 13524**

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لحساب $\lim_{t\to\infty} v(t)$. **20000**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر التحفة. **انظر الهامش.**

e) بعد 10 سنوات، قدَّم أحد المعارض الفنية عرضًا لشراء التحفة من سلمان بسعر 30000 ريال، هل من الأفضل بيعها بهذا السعر؟ برِّر إجابتك. **نعم؛ العرض أفضل من قيمة التحفة.**

53) مبيعات: افترض أن الدالة $v(t) = \frac{450}{5 + 25(0.4)^t}$ تمثِّل سعر سلعة ما بالريالات بعد t سنة. (الدرس 2-8)

a) أكمل الجدول أدناه: **للتمارين a, b انظر الهامش.**

السنة	0	1	2	3
السعر				

b) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0 \leq t \leq 10$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} v(t)$ إذا كانت موجودة. **90**

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر السلعة.
إجابة ممكنة: أقصى سعر يمكن أن تصله السلعة هو 90 ريالًا

54) صواريخ: أُطلق صاروخ رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 150 ft/s. افترض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية يُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2$. (الدرس 3-8)

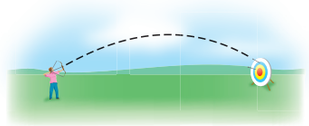
a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ. **$-32t + 150$**

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 s من إطلاقه؟ **102 ft/s**

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟ **≈4.69 s**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟ **≈359.8 ft**

55) رماية: أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/s باتجاه هدف. افترض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 35t + 1.5$. (الدرس 3-8)



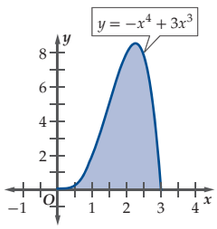
a) اكتب معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم. **$-32t + 35$**

b) ما سرعة السهم بعد 0.5 s من إطلاقه؟ **19 ft/s**

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟ **≈1.09 s**

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟ **≈20.64 ft**

56) تصميم: يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد يشبه المنطقة المظللة تحت المنحنى أدناه؛ حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار على قمصان لاعبي فريق رياضي ، ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعارًا إذا كانت x بالبوصات؟ (الدرس 6-8) **607.5 in²**



57) ضفادع: تمثِّل الدالة $v(t) = -32t + 26$ سرعة قفز ضفدع بالأقدام لكل ثانية ، حيث t الزمن بالثواني. (الدرس 6-8)

a) أوجد موقع الضفدع $s(t)$ ، على فرض أن $s(t) = 0$ عندما $t = 0$. **$s(t) = -16t^2 + 26t$**

b) ما الزمن الذي يستغرقه الضفدع في الهواء عند قفزه؟ **1.63 s**

58) طيور: سقطت حبة قمح من منقار حمامة تطير على ارتفاع 20 ft ، وتُعطى سرعة سقوط الحبة بالدالة $v(t) = -32t$ ، حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ بالأقدام لكل ثانية. (الدرس 6-8)

a) أوجد موقع الحبة $s(t)$ عند أي زمن. **$s(t) = -16t^2 + 20$**

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الحبة حتى تصل إلى سطح الأرض. **1.12 s**

الفصل 8 اختبار الفصل

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+4}-8$ **−6**
2) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ **8**
3) $\lim_{x\to 7}\frac{6}{x-7}$ **غير موجودة**
4) $\lim_{x\to\infty} x^3+5x^2-2x+21$ **∞**
5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالريال عند إنتاج x جهاز بالدالة $C(x)=\frac{100x+7105}{x}$.
   a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية. **100**
   b) فَسِّر الناتج في الفرع a. **انظر الهامش.**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2}{\sqrt{x-4}-2}$ **−25**
7) $\lim_{x\to 9}(2x^3-12x+3)$ **1353**
8) **نادٍ رياضي:** تُمثّل الدالة $S(t)=\frac{2000t^2+4}{1+10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد t يوم من افتتاحه.
   a) ما عدد المشتركين في البداية؟ **4**
   b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟ **200**

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x\to\infty}(x^2-7x+2)$ **∞**
10) $\lim_{x\to\infty}(2x^3-8x^2-5)$ **∞**
11) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x-1}{-x^4+7x^3+4}$ **0**
12) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25+x}-4}{x}$ **0**
13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$؟ **A**

A) $-\frac{1}{9}$ B) 0 C) $\frac{1}{9}$ D) غير موجودة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y=x^2+2x-8$, $(-5,7)$, $(-2,-8)$ **−8, −2**
15) $y=\frac{4}{x^3}+2$, $(-1,-2)$, $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ **$-12, -\frac{3}{4}$**
16) $y=(2x+1)^2$, $(-3,25)$, $(0,1)$ **−20, 4**

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t)=9t+3t^2$ **$v(t)=9+6t$**
18) $h(t)=10t^2-7t^3$ **$v(t)=20t-21t^2$**
19) $h(t)=3t^3-2+4t$ **$v(t)=9t^2+4$**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x)=-3x-7$ **$f'(x)=-3$**
21) $b(c)=4c^{\frac{1}{2}}-8c^{\frac{2}{3}}+5c^{\frac{4}{5}}$ **$b'(c)=\frac{2}{\sqrt{c}}-\frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}}+\frac{4}{c^{\frac{1}{5}}}$**
22) $w(y)=3y^{\frac{4}{3}}+6y^{\frac{1}{2}}$ **$w'(y)=4y^{\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{1}{2}}$**
23) $g(x)=(x^2-4)(2x-5)$ **$g'(x)=6x^2-10x-8$**
24) $h(t)=\frac{t^3+4t^2+t}{t^2}$ **$h'(t)=\frac{t^2-1}{t^2}$**
25) **صناعة:** تُعطى التكلفة الحدّية c بالريال لإنتاج x كرة قدم يوميًّا بالدالة $c(x)=15-0.005x$.
   a) أوجد دالة تمثّل التكلفة الحقيقية. **$C(x)=15x-0.0025x^2$**
   b) أوجد تكلفة زيادة الإنتاج اليومي من 1500 كرة إلى 2000 كرة. **3125 ريالًا**

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

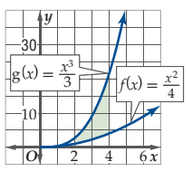
26) $\int_1^4 (x^2-3x+4)\,dx$ **10.5 وحدات مربعة تقريبًا**
27) $\int_3^8 10x^4\,dx$ **65050 وحدة مربعة تقريبًا**
28) $\int_2^5 (7-2x+4x^2)\,dx$ **156 وحدة مربعة تقريبًا**

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $d(a)=4a^3+9a^2-2a+8$ **$D(a)=a^4+3a^3-a^2+8a+C$**
30) $w(z)=\frac{3}{4}z^4+\frac{1}{6}z^2-\frac{2}{5}$ **$W(z)=\frac{3}{20}z^5+\frac{1}{18}z^3-\frac{2}{5}z+C$**

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int(5x^3-6x^2+4x-3)\,dx$ **$\frac{5}{4}x^4-2x^3+2x^2-3x+C$**
32) $\int_1^4 (x^2+4x-2)\,dx$ **45**
33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$، $g(x)$ في الفترة $2\le x\le 4$ في الشكل أدناه؟ **C**



A) $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة
B) $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة
C) $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة
D) 16 وحدة مساحة

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (72–79) .

إجابة:

5b) إجابة ممكنة: رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني، إلا أن متوسط التكلفة سيقترب من 100 ريال لكل جهاز.

مخطط المعالجة

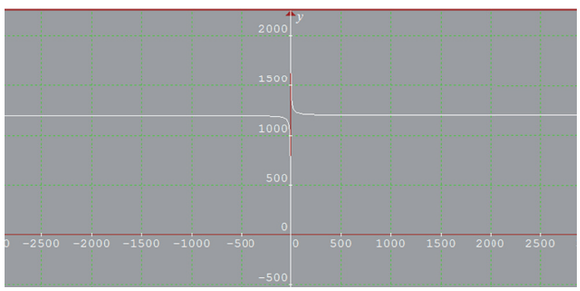
المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (134)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

التهيئة للفصل 8، ص 127

1) يظهر من المنحنى أن $q(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$، و $q(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$.

2) من المنحنى، يظهر أن $m(x) \to -5$ عندما $x \to \infty$، وأن $m(x) \to -5$ عندما $x \to -\infty$.

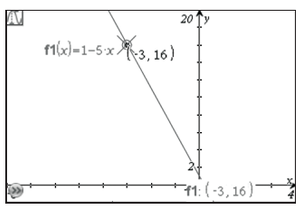
3)



تقترب قيمة $A(x)$ من 1200 عندما تقترب x من موجب مالانهاية.

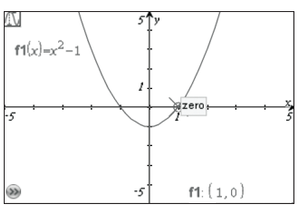
الدرس 1-8 (تحقق من فهمك)، ص (128, 130)

(1A)



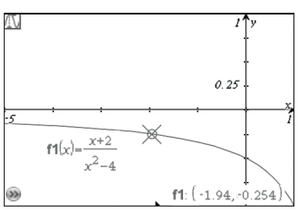
x	−3.01	−3.001	−3	−2.999	−2.99
$f(x)$	16.05	16.005		15.995	15.95

(1B)



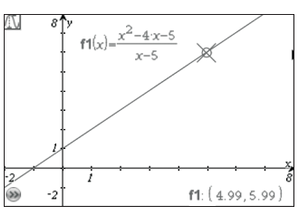
x	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	−0.0199	−0.001999		0.002001	0.0201

(2A)



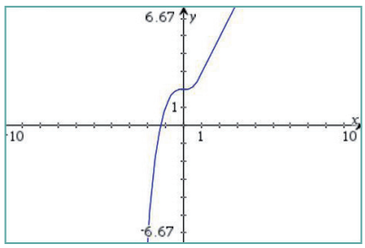
x	−1.99	−1.999	−2	−2.001	−2.01
$f(x)$	−0.2506	−0.2501		−0.2499	−0.2494

(2B)



x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	5.99	5.999		6.001	6.01

(3A)

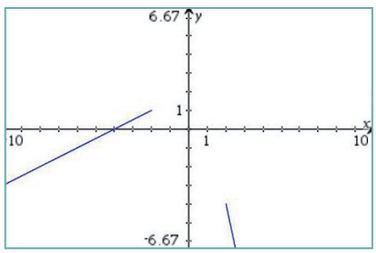


$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$,

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$,

$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

(3B)



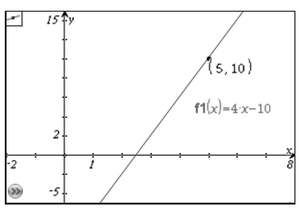
$\lim_{x \to -2^-} g(x) = 3$,

$\lim_{x \to -2^+} g(x) = -4$,

$\lim_{x \to -2} g(x)$ غير موجودة

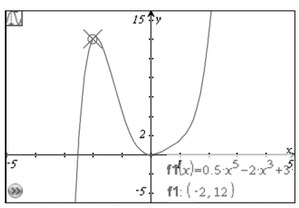
الدرس 1-8، ص (135, 136)

(1)



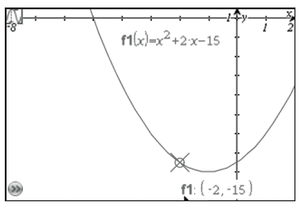
x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	9.96	9.996		10.004	10.04

(2)



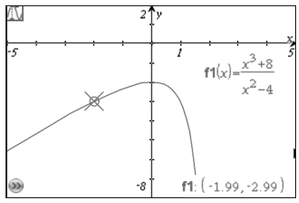
x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	11.72	11.972		12.028	12.28

(3)



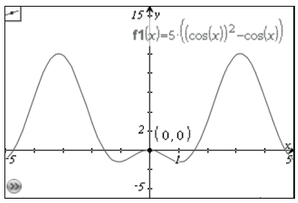
x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	−14.98	−14.998		−15.002	−15.02

(4)



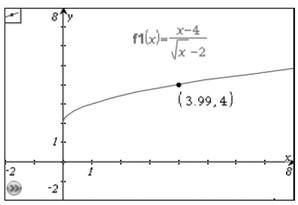
x	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99
$f(x)$	-3.008	-3.0008		-2.9993	-2.993

(5)



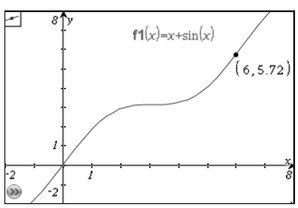
x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	-0.0002	-0.000002		-0.000002	-0.0002

(6)



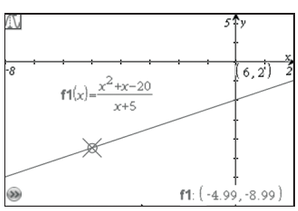
x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	3.997	3.9997		4.0002	4.002

(7)



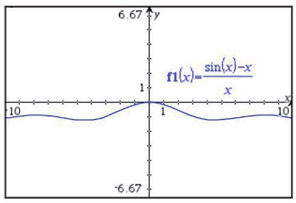
x	5.99	5.999	6	6.001	6.01
$f(x)$	5.70	5.719		5.723	5.74

(8)

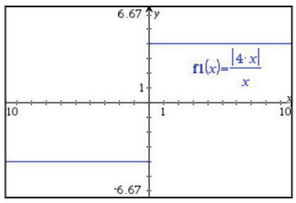


x	-5.01	-5.001	-5	-4.999	-4.99
$f(x)$	-9.01	-9.001		-8.999	-8.99

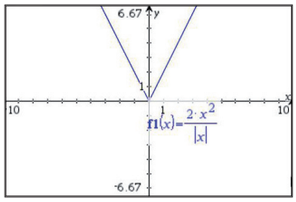
(9)



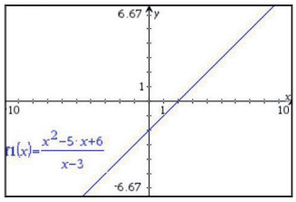
(10)



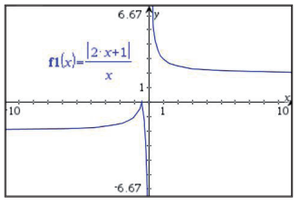
(11)



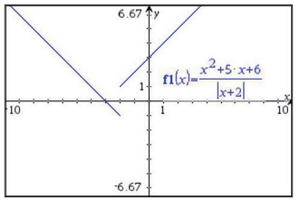
(12)



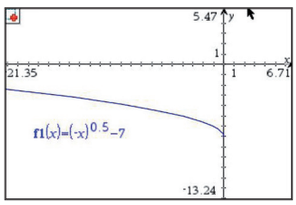
(13)



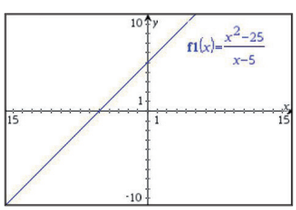
(14)



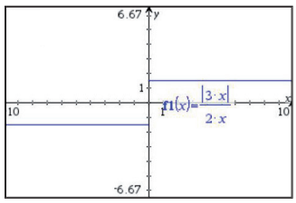
(15)



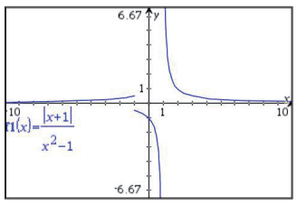
(16)



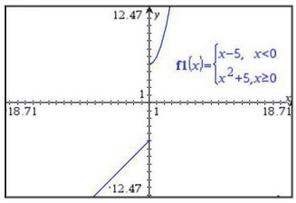
(17)



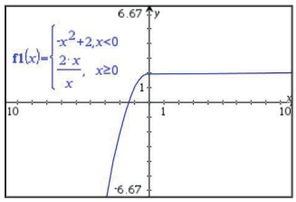
(18)



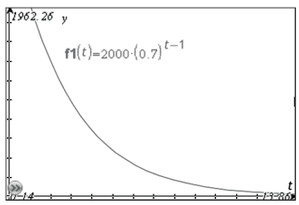
(19)



(20)



(37a)



(37b) 480.2 , 80.71 , 13.56

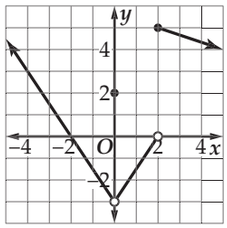
(37d) لا؛ مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية 6666.67 m تقريبًا، وهو أقل من 7000 m ، والذي يساوي بُعد المستشفى.

(49) إجابة ممكنة: $g(x)=\begin{cases}2x & ,\ x=0\\ x+1 & ,\ x>0\end{cases}$، $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

(50) $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة؛ $\lim_{x\to 2} g(x)$ غير موجودة؛ إجابة ممكنة: إذا كان مقام الدالة النسبية صفرًا، والبسط لا يساوي صفرًا عند نقطة معطاة، فإن النهاية غير موجودة.

(51) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c. فإذا كانت الدالة غير متصلة عند c ، وكان $f(c)=L$، فإن نهاية الدالة قد تكون قيمة مختلفة عن L.

(52) إجابة ممكنة:



(54) إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=a$، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض عن x بـ a في الدالة.

(55)

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\cos\theta\div\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$=\cos^2\theta$$

(56) الدالة متصلة عند جميع قيم x ما عدا عند $x=-5$

حيث أن: (غير معرّفة) $h(-5)=\frac{0}{0}$

لكن: $\lim_{x\to -5} h(x)=\lim_{x\to -5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)}=-10$

وبما أن $h(-5)$ غير معرّفة، $\lim_{x\to -5} h(x)$ موجودة فإنه يوجد نقطة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x=-5$.

الدرس 2-8، ص (146)

48) $\lim_{x\to c} p(x) = \lim_{x\to c} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$

$= \lim_{x\to c} a_n x^n + \lim_{x\to c} a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to c} a_2 x^2 + \lim_{x\to c} a_1 x + \lim_{x\to c} a_0$

$= a_n \lim_{x\to c} x^n + a_{n-1} \lim_{x\to c} x^{n-1} + \ldots + a_2 \lim_{x\to c} x^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0$

$= a_n \left(\lim_{x\to c} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to c} x\right)^{n-1} + \ldots + a_2\left(\lim_{x\to c} x\right)^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0$

$= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0$

$= p(c)$

49) أثبت أن العبارة صحيحة عندما $n = 1$،

$\lim_{x\to c} [f(x)]^1 = L^1 = L = \lim_{x\to c} [f(x)]$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = 1$. افترض أن العبارة صحيحة عندما $n = k$ حيث k عدد صحيح موجب أي : $\lim_{x\to c} [f(x)]^k = L^k$.
والمطلوب إثبات أن العبارة صحيحة عندما $n = k + 1$ أي

$\lim_{x\to c} [f(x)]^{k+1} = L^{k+1}$

$\lim_{x\to c} [f(x)]^{k+1} = \lim_{x\to c} [f(x)]^k \cdot \lim_{x\to c} [f(x)]^1 =$

$L^k \cdot L^1 = L^{k+1}$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = k + 1$. وبحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن العبارة صحيحة لأي عدد صحيح موجب n.

52) إجابة ممكنة :

الخاصية	التعريف	مثال
خاصية المجموع	$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} (x+5) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$
خاصية الفرق	$\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} (x-5) = \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 5$
خاصية الضرب في ثابت	$\lim_{x\to c} [kf(x)] = k \lim_{x\to c} f(x)$	$\lim_{x\to 2} 2x = 2 \lim_{x\to 2} x$
خاصية الضرب	$\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 2} [x^2(x-5)] = \left(\lim_{x\to 2} x^2\right)\left(\lim_{x\to 2} x - 5\right)$
خاصية القسمة	$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, if $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$	$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2}{(x-5)}\right] = \frac{\left(\lim_{x\to 2} x^2\right)}{\left(\lim_{x\to 2} x - 5\right)}$ حيث $\lim_{x\to 2} (x-5) \neq 0$
خاصية القوة	$\lim_{x\to c} [f(x)^n] = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$	$\lim_{x\to 2} [(x-5)^2] = [\lim_{x\to 2} (x-5)]^2$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ عندما n زوجي.	$\lim_{x\to 9} \sqrt{(x-5)} = \sqrt{\lim_{x\to 9} (x-5)}$

53) إجابة ممكنة: إذا كانت النهاية على الصورة $\frac{\infty}{\infty}$، فإنها لا تساوي 1؛ لأن ∞ ليس عددًا حقيقيًّا؛ بل يمثِّل رمزًا. حَلِّل هذه المسألة بتمثيل الدالة النسبية الأصلية بيانيًّا، وملاحظة سلوكها حول نقطة النهاية.

57)

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= x^2 - 2x + x + 9$

$= x^2 - x + 9$

المجال : $(-\infty,\infty)$ أو R

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$= x^2 - 2x - x - 9$

$= x^2 - 3x - 9$

المجال : $(-\infty,\infty)$ أو R

$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

$= (x^2 - 2x)\,.\,(x+9)$

$= x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 18x$

$= x^3 + 7x^2 - 18x$

المجال : $(-\infty,\infty)$ أو R

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-2x}{x+9}$

المجال : $\{x | x \neq -9, x \in \mathrm{R}\}$

(58

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= \frac{x}{x+1} + x^2 - 1$$
المجال : $\{x | x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= \frac{x}{x+1} - x^2 + 1$$
المجال : $\{x | x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= \frac{x}{x+1} \cdot (x-1)(x+1)$$
$$= x(x-1)$$
المجال : $\{x | x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x+1} \div (x^2 - 1)$$
$$= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2 - 1}$$
المجال : $\{x | x \neq -1, x \neq 1, x \in \mathbb{R}\}$

الدرس 4-8، ص (162, 163)

1) $f'(x) = 8x, f'(2) = 16, f'(-1) = -8$

2) $g'(t) = -2t + 2, g'(5) = -8, g'(3) = -4$

3) $m'(j) = 14, m'(-7) = 14, m'(-4) = 14$

4) $v'(n) = 10n + 9, v'(7) = 79, v'(2) = 29$

5) $r'(b) = 6b^2 - 10, r'(-4) = 86, r'(-3) = 44$

14a) $f'(h) = -0.0108h^2 - 0.02h + 2.04$

14b) $f'(2) \approx 1.96°F, f'(14) \approx -0.36°F, f'(20) \approx -2.68°F$

14c) $68.92°F$

15) نقطة حرجة $(-8, -2)$، صغرى $(-8, -2)$، عظمى $(-5, 10)$

16) لا يوجد نقاط حرجة في الفترة $[1, 4]$، صغرى $(1, 5)$، عظمى $(4, 350)$

17) نقطة حرجة $(-10, -5)$، صغرى $(-11, -6)$، عظمى $(-3, -2)$

18) نقطة حرجة $(-9, 405)$، صغرى $(-11, 385)$، عظمى $(-9, 405)$

19) نقطة حرجة $(1, 1)$، صغرى $(0, 0)$، عظمى $(3, 9)$

20) نقطتان حرجتان $(-3, 21.5)$ و $(2, 0.67)$، صغرى $(2, 0.67)$، عظمى $(5, 32.17)$

21c) نعم؛ أقصى ارتفاع يمكن أن تبلغه الكرة هو 69.02 ft تقريبًا. وهذا أعلى من 68 ft

22) $f'(x) = 4(x^2 + 9) + 2x(4x + 3)$

23) $g'(x) = (12x^3 + 2)(5 - 3x) - 3(3x^4 + 2x)$

24) $s'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^{11} - 4t) + (\sqrt{t} + 2)(33t^{10} - 4)$

25) $g'(x) = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2\right)\left(0.5x^4 - 3x\right) + \left(2x^3 - 3\right)\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)$

26) $c'(t) = (3t^2 + 2 - 7t^6)(t^6 + 3t^4 - 22t) + (t^3 + 2t - t^7) \cdot (6t^5 + 12t^3 - 22)$

27) $q'(a) = \left(\frac{9}{8}a^{\frac{1}{8}} - \frac{1}{4}a^{-\frac{5}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right) + \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}a^{\frac{1}{4}} - 13\right)$

28) $f'(x) = (7x^4 + 2.7)(7.3x^9 - 0.8x^5) + (1.4x^5 + 2.7x)(65.7x^8 - 4x^4)$

29) $f'(m) = -\frac{12}{(3 + 2m)^2}$

30) $r'(t) = \frac{10t}{(3 - t^2)^2}$

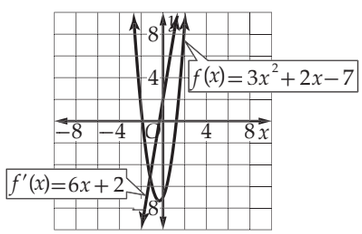
31) $m'(q) = \frac{q^6 - 2q^4 - 8q^3 - 9q^2 - 8q}{(q^3 - 2)^2}$

32) $f'(x) = \frac{4x^2 + 3x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{-1}{2}} + 12}{2(-x^2 + 3)^2}$

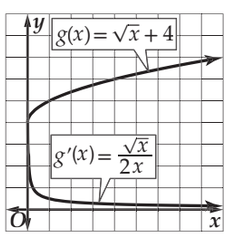
33) $q'(r) = \frac{r^2 - 15}{r^4}$

34) $t'(w) = \frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}w^{\frac{5}{2}}$

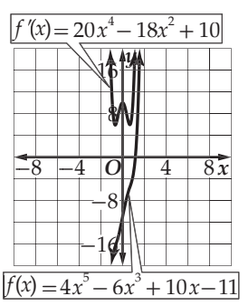
36)



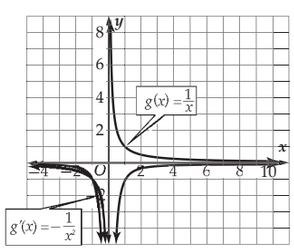
37)



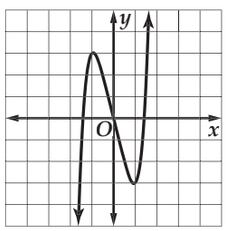
38)



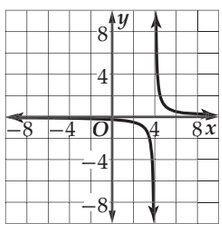
39)



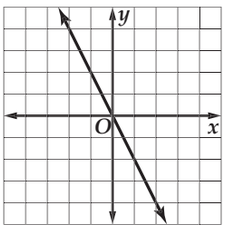
41) إجابة ممكنة :



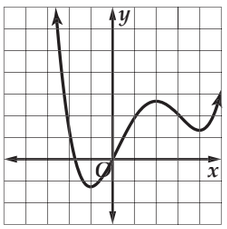
42) إجابة ممكنة:



43) إجابة ممكنة:

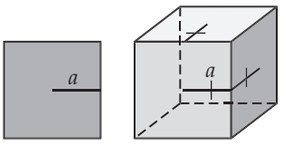


44) إجابة ممكنة:



45b) إجابة ممكنة: مشتقة صيغة مساحة الدائرة هي صيغة محيط الدائرة.

45c)



45d) $A = 4a^2,\ A' = 8a,\ V = 8a^3,\ V = 24a^2$

45e) عند كتابة مساحة المربع بدلالة بعد المركز عن الأضلاع، فإن مشتقة صيغة المساحة هي محيط المربع. وعند كتابة حجم المكعب بدلالة بعد المركز عن الأوجه، فإن مشتقة صيغة الحجم هي مساحة السطح الكلية للمكعب.

46) عبد الله، إجابة ممكنة: وجد عبدالله أن $f'(x) = 12x + 4$، ثم ربَّع الطرفين. أما أحمد فقد ربَّع الدالة الأصلية، ثم أوجد المشتقة.

48) إجابة ممكنة:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} +$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h)\right] + \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \left[\lim_{h\to 0} g(x+h)\right] +$$

$$f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

49) صحيحة: إجابة ممكنة: إنّ قوة $f(x)$ هي $5n + 3$. بحسب قاعدة مشتقة القوة، تصبح هذه القوة معاملًا في المشتقة. وتصبح القوة في المشتقة أقل بواحد من $5n + 3$ أي $(5n + 3) - 1$ أو $5n + 2$.

50) إجابة ممكنة:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - [g(x+h) - g(x)]f(x)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x) \lim_{h\to 0} g(x+h)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

51) إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون لدالتين مختلفتين المشتقة نفسها؛ لأن مشتقة أي ثابت هي 0، أي أنه لأي دالتين تختلفان بانسحاب رأسي، فإن لهما المشتقة نفسها. فمثلًا للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 3$ المشتقة نفسها وهي $2x$.

الدرس 5-8، ص (171, 172)

5a) طرفا منحنى نصف الدائرة هما طرفا الفترة $[1, 10]$، وباستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة نجد أن

$$R_1 = 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0$$
$$R_2 = 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3$$
$$R_3 = 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4$$
$$R_4 = 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58$$
$$R_5 = 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90$$
$$R_6 = 1 \cdot f(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5)^{0.5} = 5$$
$$R_7 = 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90$$
$$R_8 = 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58$$
$$R_9 = 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4$$
$$R_{10} = 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3$$

المساحة الكلية تساوي 37.96 وحدة مربعة تقريبًا.

5b) في هذا الجزء من السؤال، سوف نستعمل الأطراف اليمنى لمستطيلات، والأطراف اليسرى لمستطيلات أخرى.

$$R_1 = 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0$$
$$R_2 = 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3$$
$$R_3 = 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4$$
$$R_4 = 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58$$
$$R_5 = 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90$$
$$R_6 = 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90$$
$$R_7 = 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58$$
$$R_8 = 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4$$
$$R_9 = 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3$$
$$R_{10} = 1 \cdot f(10) = (-10^2 + 10 \cdot 10)^{0.5} = 0$$

المساحة الكلية تساوي 32.96 وحدة مربعة تقريبًا.

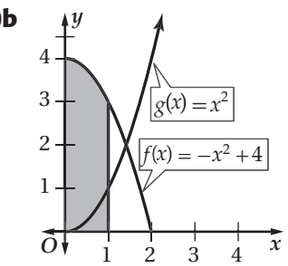
5c) نصف القطر يساوي 5 وحدات.

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$= \frac{1}{2}\pi 5^2$$
$$= 12.5\pi$$
$$\approx 39.27$$

التقريب الأول هو الأقرب إلى المساحة الحقيقية.

إجابة ممكنة: المساحات خارج نصف الدائرة، والمحتواة داخل مستطيلات التقريب الأول تعوِّض المساحة داخل نصف الدائرة، وغير المحصورة بالمستطيلات.

30a)



30b) $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx = 3\frac{2}{3}$,
$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

30c) إجابة ممكنة: إذا أردنا إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين، فإننا نبدأ بالتكامل $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx$ ، والذي يمثِّل المساحة الكلية بين $f(x)$ والمحور x. وبما أننا لا نحتاج للمساحة تحت $g(x)$ ، لذا فإننا نطرح المساحة الناتجة عن التكامل $\int_0^1 x^2\,dx$ من $\int_0^1 (-x^2+4)\,dx$ لنحصل على $3\frac{1}{3}$ أو 3.33 تقريبًا.

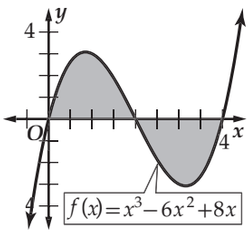
30d) $-2x^2+4$ ، $3\frac{1}{3}$.

30e) عند حساب المساحة المحصورة بين منحنَيي دالتين، بإمكاننا حساب المساحة المحصورة تحت كل منحنًى، ثم نطرح المساحة الصغرى من المساحة الكبرى، أو نطرح الدالة الصغرى من الدالة الكبرى، ونحسب تكامل الدالة الناتجة.

31) كلاهما خطأ؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى للمستطيلات سيُعطي مساحاتٍ أكبر من تلك المساحة تحت المنحنى، في حين يُعطي استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات مساحاتٍ أصغر. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، سيُعطي قيمةً أكبر للمساحة، ويُعطي استعمال الأطراف اليمنى قيمةً أصغر.

الدرس 6-8، ص (179)

30a)



30c) إجابة ممكنة: يظهر أن المساحة فوق المحور x موجبة، والمساحة تحت المحور x هي سالب التكامل.

30e) التكامل هو حاصل جمع التكاملين فوق وتحت المحور x . أما المساحة الكلية، فهي حاصل جمع القيم المطلقة للتكاملين.

35)

$$\int_a^b (n+m)dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$$
$$nx + mx\Big|_a^b = nx\Big|_a^b + mx\Big|_a^b$$
$$(nb+mb)-(na+ma) = (nb-na)+(mb-ma)$$
$$nb+mb-na-ma = nb+mb-na-ma$$

36) بما أن التمثيل البياني للدالة $f(x)$ يقع تحت المحور x، فإن إشارة $f(x)$ سالبة. وبما أن $f(x)$ سالبة و Δx موجبة، فإن كل حدٍّ في $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ سالب.

وعليه فإن المجموع سالب؛ لأن

$\int_a^b f(x)\,dx$ هو نهاية مجاميع سالبة، لذا يكون سالبًا.