المذاكرة التحريرية الأولى (٢٠٢٣ - ٢٠٢٤) الاسم :

النموذج الخامس المادة: رياضيات

الصف : الثالث الثانوي العلمي التاريخ : ١٩ / ١٠ / ٢٠٢٣

أجب عن كل من الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : (٦٠ درجة)

f تابع يحقق $|f(x)-4| \le \frac{x^2-2+2\cos x}{x^2}$ أيّاً يكن $x \in R^*$

ما نهاية f عند الصفر ؟

السؤال الثاني : (٦٠ درجة)

ليكن f تابع معرّف على $\mathbb{R}$ وِفق : $f(x)=\frac{1}{5+2\cos x}$

1. أثبت أن f تابع محدود .
2. استنتج $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{5+2\cos x}$

السؤال الثالث : (٤٠ درجة)

عيّن مجموعة الأعداد العقدية Z التي تجعل المقدار $(Z+1)(\bar{Z}-3)$ حقيقي .

حلّ كلاً من التمارين الآتية :

التمرين الأول : (٨٠ درجة)

لتكن $(U_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق $U_0=1$, $U_{n+1}=\frac{5\,U_n}{U_n+2}$

1. أثبت أنّ المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً .
2. $(V_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق $V_n=\frac{U_n-3}{U_n}$

أثبت أن $(V_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية , عيّن أساسها و حدّها الأول .

3. اكتب V_n ثم U_n بدلالة n .

التمرين الثاني : (٦٠ درجة)

ليكن : $Z=\frac{-\sqrt{3}\,i}{1+i}\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

1. اكتب Z بالشكل الأسي .
2. استنتج الشكل المثلثي لـ : $-Z$, $\bar{Z}$, Z^3

التمرين الثالث : (٤٠ درجة)

أثبت أن:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}-1\right)^2=0$$

حلّ كلاً من المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى : (١٠٠ درجة)

لتكن U_0 , U_1 , U_2 حيث $U_0 \neq 0$ ثلاثة حدود متعاقبة من المتتالية الهندسية $(U_n)_{n\geq 0}$ التي أساسها q حيث $0 < q < 1$

و لتكن V_0 , V_1 , V_2 ثلاثة حدود متعاقبة من المتتالية الحسابية $(V_n)_{n\geq 0}$

وتحقق $V_0 = U_0$, $V_1 = 2U_1$, $V_2 = 3U_2$

❶ احسب q أساس المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

❷ إذا علمت أن $U_0 = 3$ احسب U_1 , U_2 و استنتج قيمة V_0 , V_1 , V_2 .

❸ اكتب U_n , V_n بدلالة n .

❹ لتكن $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$\omega_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

عبّر عن S_n وَ ω_n بدلالة n .

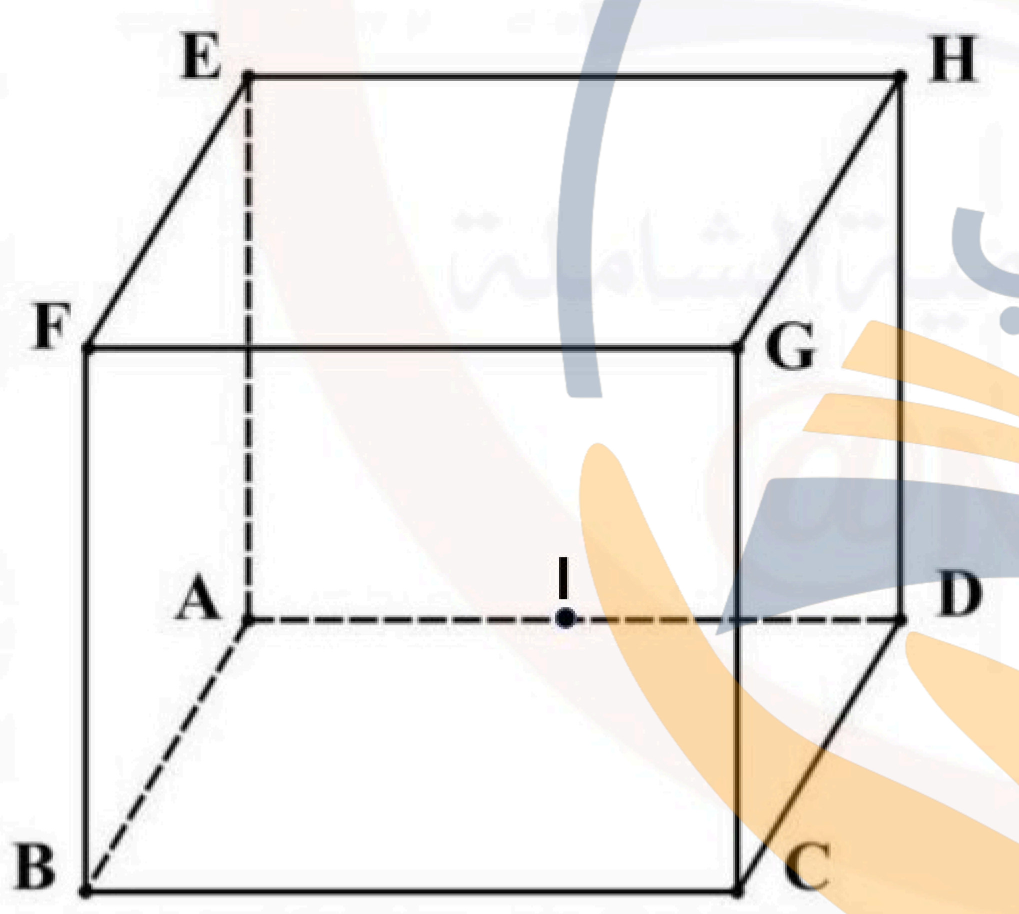
المسألة الثانية : (١٦٠ درجة)

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه :

$AB = AE = 1$ وَ $AD = 2$

و فيه I منتصف $[AD]$

و ليكن المعلم المتجانس $\left(A; \overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ و المطلوب :



❶ أعطِ إحداثيات رؤوس الشكل و النقطة I في هذا المعلم

❷ اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري للقطعة $[HB]$

❸ اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[HB]$

❹ احسب حجم الهرم $EABI$

❺ أثبت أنّ المثلث EBI متساوي الأضلاع و احسب مساحته .

❻ استنتج بُعد A عن المستوي (EBI) .

* انتهت الأسئلة *

المذاكرة التحريرية الأولى (٢٠٢٢ - ٢٠٢٣)		الاسم :
النموذج الأول	المادة : رياضيات	
	الصف : الثالث الثانوي العلمي	التاريخ : ١٥/ ١٠/ ٢٠٢٢

أجب عن كل من الأسئلة الآتية (لكل سؤال ٤٠ درجة) :

السؤال الأول :

أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{1-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3x-2}-1}$ عند $(+1)$

السؤال الثاني :

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها r و فيها c, b, a ثلاث حدود متعاقبة تحقق العلاقة $b^2-4-ac=0$

و المطلوب احسب r

السؤال الثالث :

ليكن Z عدد عقدي ما و ليكن ω عدد عقدي طويلته تساوي الواحد (1) و هو مختلف عن i

أثبت أن $Z=\frac{Z-i\,\omega\,\bar{Z}}{i-\omega}$ حقيقي .

السؤال الرابع :

ليكن Z عدد عقدي بحيث $\bar{Z}=\frac{9}{Z}$ $(Z\neq0)$ ولتكن $arg(2iZ)=-\frac{2\pi}{3}$

❶ اكتب Z بالشكل المثلثي .

❷ استنتج الشكل الجبري لـ Z .

حلّ كلاً من التمارين الآتية (لكل تمرين ٦٠ درجة) :

التمرين الأول :

في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقطتين : $A(1,0,1)$, $B(-1,1,0)$

و لتكن $M(x,y,z)$ مجموعة النقاط من الفراغ التي تحقّق : $2MA^2-MB^2=10$

❶ أثبت أن مجموعة النقط M تمثّل كرة ، عيّن مركزها Ω و نصف قطرها .

❷ لتكن النقطة $C(-3,1,0)$ احسب ΩC واستنتج وضع C بالنسبة للكرة .

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية : $(U_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وِفق : $U_0=\frac{1}{2}$, $U_{n+1}=\frac{U_n}{2-U_n}$

❶ أثبت أن $0<U_n<1$ أيّاً كان العدد الطبيعي n .

❷ أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $V_n=\frac{1-U_n}{U_n}$ متتالية هندسية .

❸ اكتب V_n ثم U_n بدلالة n

ثم احسب مجموع $S=V_1+V_2+\cdots+V_{10}$

التمرين الثالث :

في مجموعة الأعداد العقدية C

❶ حلّ المعادلة الآتية بالمجهول Z : $3(\overline{Z}-2i\overline{Z})=3+2i$

❷ عيّن مجموعة الأعداد العقدية Z التي تحقق $|Z+2i|^2+|Z-2i|^2=2|Z|^2+8+3i(Z-\overline{Z})$

التمرين الرابع :

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وِفق $f(x)=\frac{x^3+5-5\cos 3x}{x^2}$

❶ جد نهاية f عند (0) .

❷ جد نهاية f عند $+\infty$.

حل كلاً من المسألتين الآتيتين : (لكل مسألة ١٠٠ درجة)

المسألة الأولى:

أولاً: لتكن المتتالية : $(U_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وِفق : $U_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$

أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ متناقصة تماماً .

ثانياً: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وِفق $f(x)=\frac{x^2-1}{2x^3-x^2-1}$

جِد نهاية f عند أطراف مجالات تعريف التابع ثمّ استنتج معادلة كلّ مقارب أفقي أو شاقولي لِـ (C) .

ثم ادرس وضع (C) بالنسبة لمقارباته الأفقيّة.

المسألة الثانية:

في الشكل $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات $AB=2$, $AD=4$, $AE=2$

و النقطة I منتصف $[BC]$ و المطلوب :

❶ أثبت صحّة العلاقة الشعاعية :

$$\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{IA}=\vec{0}$$

❷ نعتبر معلماً متجانساً $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ و المطلوب :

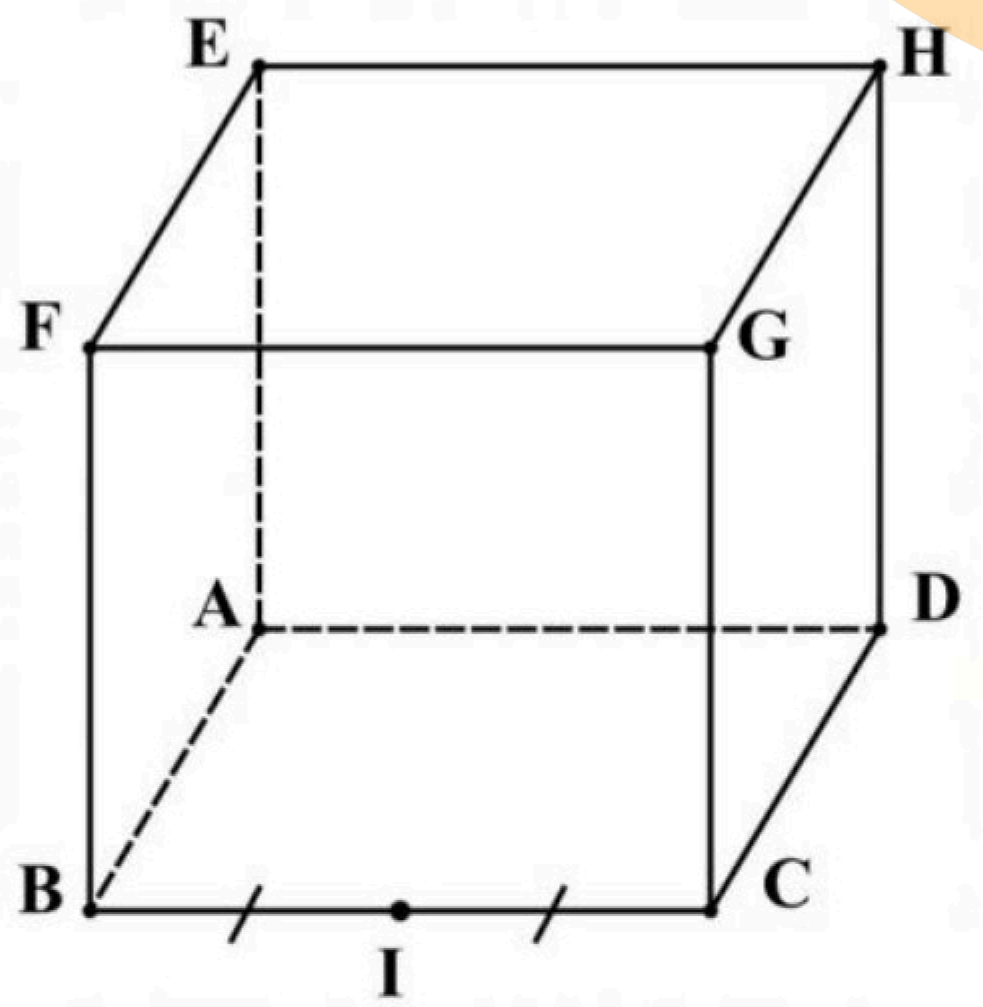
ⓐ جِد إحداثيّات رؤوس الشكل و النقطة I .

ⓑ اكتب معادلة المستوي المحوري P للقطعة $[EC]$.

ⓒ اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[BH]$.

ⓓ إذا علمت أن المستوي المحوري P يقطع الكرة وفق دائرة

و المطلوب : عيّن مركز الدائرة و نصف قطرها .



* انتهت الأسئلة *

المذاكرة التحريرية الثانية (٢٠٢٢ - ٢٠٢٣) الاسم :

النموذج الخامس المادة : رياضيات

الصف : الثالث الثانوي العلمي التاريخ : ٢٣ / ٢ /٢٠٢٣

أجب عن كل من الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : (٤٠ درجة)

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $]3,+\infty[$ وفق : $f(x)=x-2+\frac{ln(x-3)}{x+2}$

❶ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب للخط (C) .

❷ ادرس الوضع النسبي للخط (C) و المقارب Δ .

السؤال الثاني : (٨٠ درجة)

مركز طبي فيه أربع ممرضات و ثلاثة إداريين و طبيبين , نريد تشكيل لجنة مؤلفة من مدير و نائب و أمين سر :

❶ بكم طريقة يمكن تشكيل اللجنة ؟

❷ كم لجنة فيها طبيب واحد فقط ؟

❸ كم لجنة فيها ممرضتين على الأقل ؟

❹ كم لجنة مؤلفة من طبيب و ممرضة و إداري بحيث يكون أمين السر هو إداري ؟

السؤال الثالث : (٦٠ درجة)

أثبت أنه أيّاً كانت x من المجال $]-1,+\infty[$ كان $\frac{x}{1+x}\le ln(x+1)$

السؤال الرابع : (٦٠ درجة)

احسب قيمة كل من $r\ ,n$ بالحل المشترك للمعادلتين :

$$3\binom{n+1}{r+1}=4\binom{n}{r} \qquad \binom{n+1}{r}=2\binom{n}{r-1}$$

السؤال الخامس : (٦٠ درجة)

لتكن $(t_n)_{n\ge1}$ وَ $(s_n)_{n\ge1}$ المتتاليتان المعرفتان وفق : $t_n=\frac{3n-1}{n}$, $s_n=3+\frac{2}{n^2}$

أثبت أنهما متجاورتان .

السؤال السادس : (٦٠ درجة)

لتكن $(U_n)_{n\ge1}$ متتالية معرفة على $\mathbf{N}^*$ وفق : $U_n=ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$

❶ جِد نهاية هذه المتتالية .

❷ نضع $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$

ⓐ أثبت بالتدريج أن: $S_n=ln\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]$

ⓑ ما نهاية $(S_n)_{n\ge1}$ ؟

حلّ كلاً من المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى : (١٠٠ درجة)

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{2}{x\ln x}$

❶ جِد نهاية f عند أطراف مجالات تعريفه , ثم استنتج معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي لـ (C)

❷ ادرس تغيرات f و نظّم جدولاً بها و عيّن ما للتابع من قيم حديّة .

❸ أوجد المستقر الفعلي للتابع f .

❹ ارسم كلّ مقارب وجدته لـ (C) ثم ارسم (C) .

❺ استنتج رسم الخط البياني للتابع g المعين بالعلاقة $g(x)=\frac{2}{x\ln(-x)}$.

المسألة الثانية : (١٤٠ درجة)

في المعلم المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا المستويين :

$$P:\ x-2y+z+1=0$$

$$Q:\ x-y+2z=0$$

و النقطة $A(1,2,1)$ و المطلوب :

❶ أثبت أن Q,P متقاطعان بالفصل المشترك d , أعطِ تمثيلاً وسيطياً لِ d .

❷ أوجد إحداثيات النقطة B المسقط القائم للنقطة A على المستوي P .

❸ احسب بُعد النقطة A عن المستقيم d و استنتج إحداثيات $\acute{A}$ مسقط A على d .

❹ أعطِ المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري R للقطعة $[A\acute{A}]$.

❺ تحقق أن d يوازي تماماً المستوي R .

* انتهت الأسئلة *

المذاكرة التحريرية الأولى (٢٠٢٢ - ٢٠٢٣) الاسم :

النموذج الثالث المادة : رياضيات

الصف : الثالث الثانوي العلمي التاريخ : ٢٢ / ١٠ / ٢٠٢٢

أجب عن كل من الأسئلة الآتية (لكل سؤال ٤٠ درجة) :

السؤال الأول :

أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{2x^3-1}-1}$ عند (1)

السؤال الثاني :

c, b, a أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$ ، إذا علمت أن : c, b, a ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q

$b, c, 6a$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية احسب q

السؤال الثالث :

عيّن مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقّق الشرط: العدد $\omega=\frac{z+i}{1+3iz}$ تخيّلي بحت . (حيث $z \neq \frac{1}{3}i$)

السؤال الرابع :

حلّ في C المعادلة الآتية بالمجهول z : $iz+\bar{z}-2(z+\bar{z})=2-i$

حلّ كلاً من التمارين الآتية (لكل سؤال ٦٠ درجة) :

التمرين الأول :

لدينا العدد العقدي $Z=\frac{-\sqrt{8}}{2+2i}\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

❶ اكتب Z بالشكل الأسي و المثلثي .

❷ استنتج $arg(\bar{Z})$, $|\bar{Z}|$

❸ لدينا العدد العقدي $\acute{Z}=\left[-\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right]^5$ اكتب $\acute{Z}$ بالشكل المثلثي وهل $\acute{Z}=Z$ ؟ علّل إجابتك

التمرين الثاني :

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وِفق $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x$

❶ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

❷ ادرس وضع (C) مع Δ .

❸ أوجد نهاية التابع g المعيّن بالعلاقة $g(x)=\frac{f(x)}{2x-1}$ عند $+\infty$.

التمرين الثالث :

أولاً: f تابع يحقّق $|f(x)-3| \leq \frac{3+4\cos^2 x}{x-1}$ أيّاً كان $x>1$

ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

ثانياً: $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n-2 \end{cases}$

❶ أثبت أنّ المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $V_n=U_n+3$ هندسية

❷ احسب V_n ثم U_n بدلالة n

التمرين الرابع :

بفرض لدينا النقاط $C(-1, a, b)$, $B(1, 0, -1)$, $A(2, -1, 3)$

❶ جِد العددين الحقيقيين b, a حتى تكون النقاط C, B, A واقعة على استقامة واحدة .

❷ جِد إحداثيات النقطة M نظيرة A بالنسبة للنقطة B .

حل كلاً من المسألتين الآتيتين : (لكل مسألة ١٠٠ درجة)

المسألة الأولى :

أولاً: أثبت بالتدريج أنّه أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$ فإنّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

ثانياً: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$

❶ جِد نهاية f عند أطراف مجالات تعريف التابع ثمّ استنتج معادلة كلّ مقارب أفقي أو شاقولي لِ (C)

ثم ادرس وضع (C) بالنسبة لمقارباته الأفقيّة

❷ جِد $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

❸ جِد عدداً حقيقياً A يحقّق الشرط: إذا كان $x > A$ كان $f(x) \in]2.9 , 3.1[$

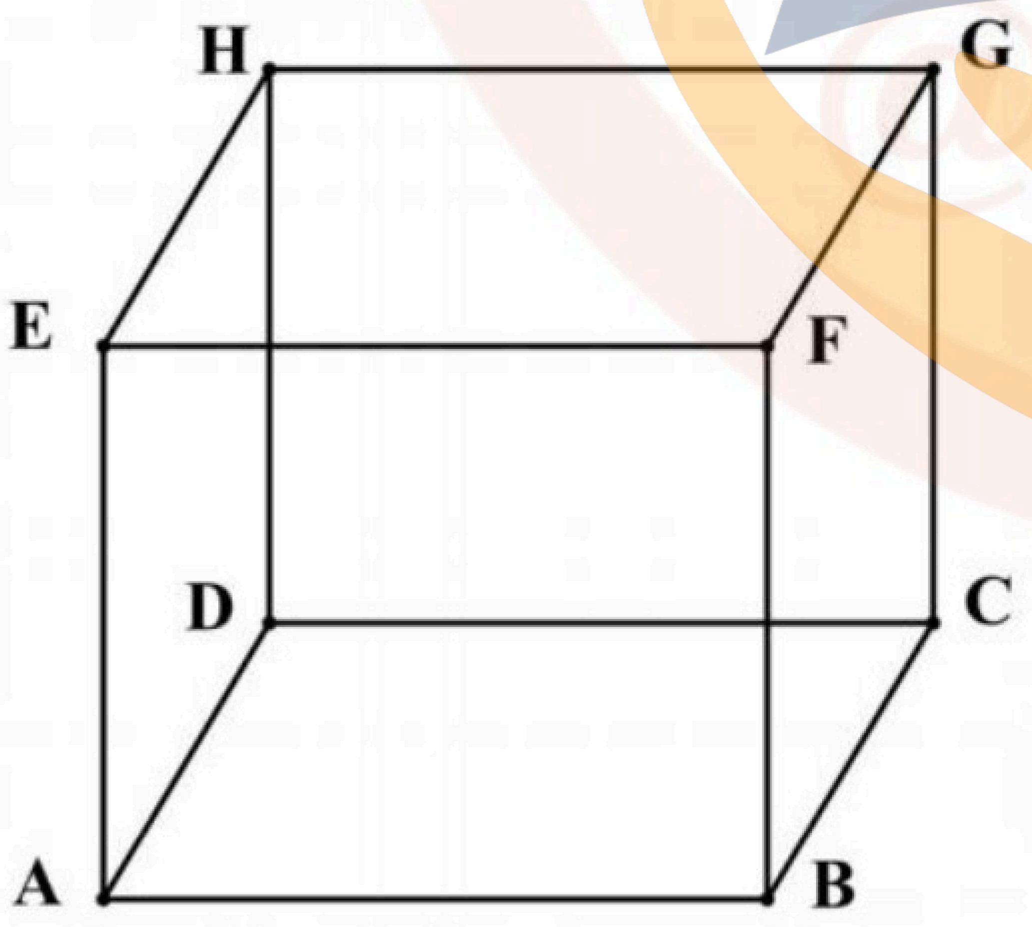
المسألة الثانية :

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AE = 2$, $AD = 1$, $AB = 3$

و النقطة I مركز ثقل المثلث EBG و بفرض N نقطة تحقّق $\overrightarrow{HN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$ و المطلوب :

أولاً: عيّن موضع النقطة M التي تحقّق المساواة $3\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{GC}$

ثانياً: باختيار المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$



❶ جِد إحداثيّات النقاط A, H, G, B, E, F, D, I .

❷ أثبت أنّ النقاط I, F, D واقعة على استقامة واحدة .

❸ جِد إحداثيات النقطة L التي تجعل الرباعي $DHIL$ متوازي أضلاع

❹ اكتب معادلة للأسطوانة التي محورها منطبق على (AE)

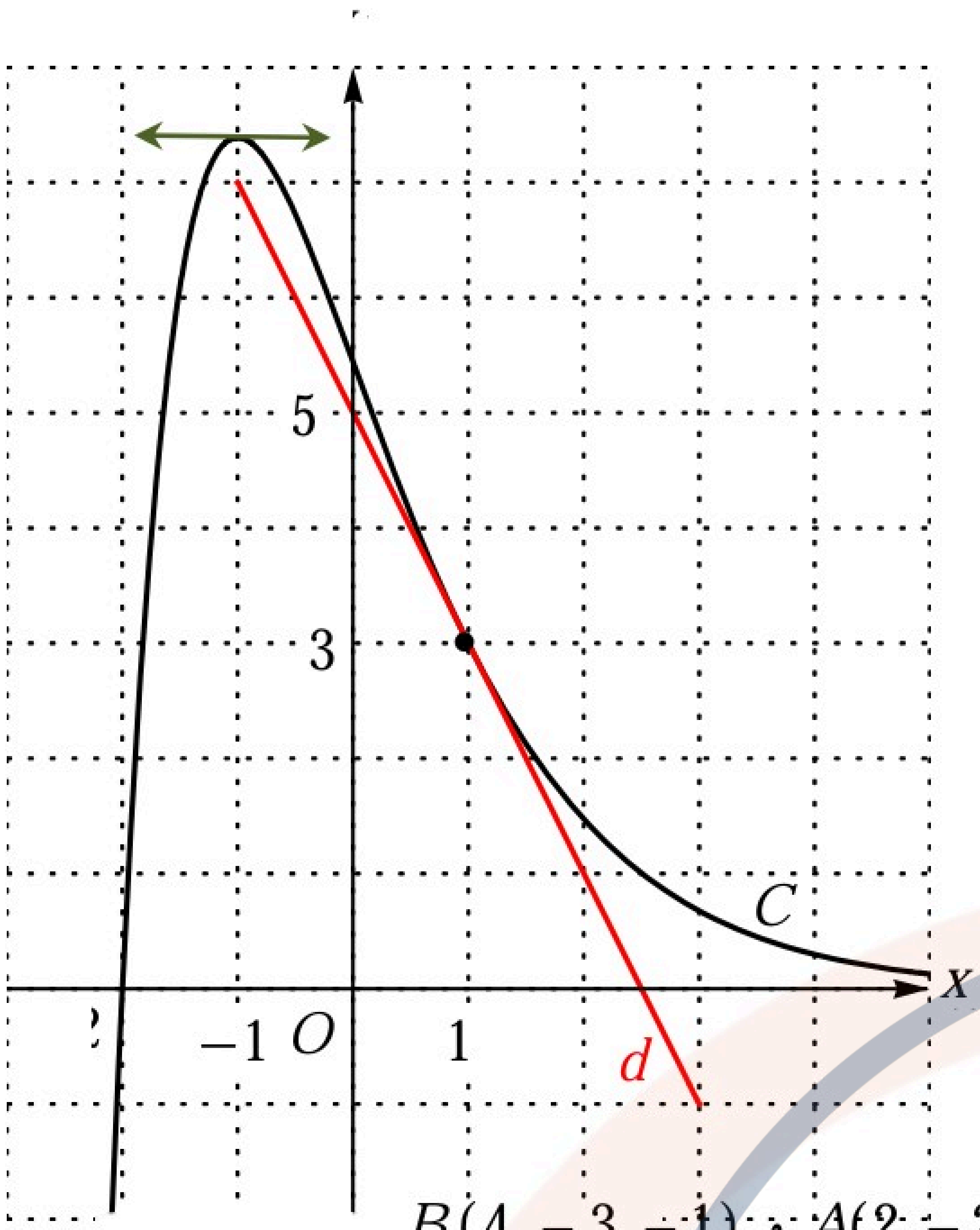
و مركزي قاعدتيها هما النقطتان A وَ E

و النقطة H من سطح الأسطوانة

و بيّن إذا كانت النقطة $J\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ تنتمي للأسطوانة .

* انتهت الأسئلة *

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ المرسوم في الشكل المجاور :

حيث يقبل خطّه البياني C مماساً d في النقطة التي فاصلتها 1 .

❶ جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

❷ جِدْ $f'(-1)$ و $f(1)$ و $f'(1)$.

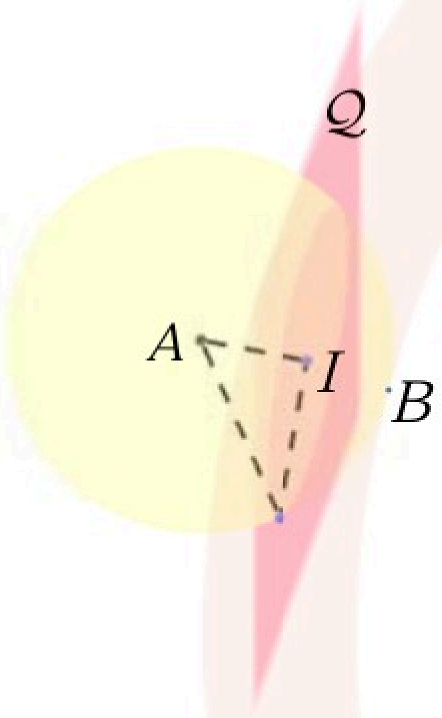
❸ ما حلول كلاً من المتراجحتين : $f(x) \geq 0$ و $f'(x) \leq 0$ ؟

❹ اكتب معادلة المماس d .

❺ باستخدام التقريب التآلفي المحلي جِدْ قيمة تقريبية لِ $f(0.8)$.

السؤال الثاني: في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقطتان : $A(2,-2,-3)$ و $B(4,-3,-1)$

والمستوي Q الذي معادلته $2x - y + 2z = 3$.



❶ اكتب معادلة الكرة S التي مركزها A ونصف قطرها AB

ثمّ اكتب معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الذي يمس S في النقطة B .

❷ أثبت أنّ المستوي Q يقطع الكرة S . ثمّ احسب نصف قطر الدائرة المقطع وعيّن مركزها .

السؤال الثالث : أجب عن السؤالين الآتيين :

❶ جِدْ الحل المشترك لجملة المعادلتين الآتيتين: $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ e^{2x} + e^{2y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

❷ احسب النهاية الآتية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x+2}$.

السؤال الرابع: ليكن لدينا $(x^2 - \dfrac{1}{x})^n$ حيث n عدد طبيعي

❶ ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي المنشور السابق على حد ثابت مستقل عن x ؟

❷ جِدْ الحد الذي يحوي x^5 في منشور $(x^2 - \dfrac{1}{x})^{10}$. وهل يوجد حد مستقل عن x في المنشور السابق ؟ معللاً إجابتك .

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = (x)^{\frac{1}{x}}$

❶ جِدْ التابع المشتق للتابع f . ونظّم جدولاً بجهة اطراده .

❷ لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ وفق العلاقة : $u_n = (n)^{\frac{1}{n}}$ استنتج جهة اطراد المتتالية ربّما بدءاً من حد معيّن .

❸ لنعرّف المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$ وفق : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ احسب S_1 و S_2 و S_3 ثمّ عيّن جهة اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثاني : يحوي صندوق خمس كرات خضراء و ست كرات حمراء . نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة .

❶ ما عدد النتائج الممكنة للسحب ؟

❷ ما عدد النتائج الممكنة للسحب حيث الكرة المسحوبة أولاً خضراء اللون ؟

❸ ما عدد النتائج التي تشتمل على ثلاث كرات خضراء اللون ؟

❹ ما عدد النتائج التي تشتمل على كرة حمراء اللون على الأقل ؟

التمرين الثالث : ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sin^2 x + \cos x$. خطّه البياني C .

❶ أثبت أنّ f دوري دوره 2π وأنّه تابع زوجي ثمّ استنتج أنّه يمكن دراسته على المجال $[0, \pi]$.

❷ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'(x) = \sin x \cdot (2\cos x - 1)$.

❸ ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0, \pi]$.

❹ ارسم C على المجال $[-2\pi, 2\pi]$.

التمرين الرابع: لدينا مجموعة الأرقام $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

❶ كم عدد مختلف الأرقام مؤلّف من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر Ω ؟

❷ كم عدد فردي ومختلف الأرقام مؤلّف من ثلاث منازل وأصغر من 300 يمكن تشكيله من عناصر Ω ؟

❸ كم عدد زوجي مؤلّف من ثلاث منازل وأصغر أو تساوي من 300 يمكن تشكيله من عناصر Ω ؟

ثالثًا: حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في مستوٍ منسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقطة $A(2, -3, 5)$ والمستويان :

$$\mathcal{P}: 2x - 2y - z + 4 = 0 \text{ و } \mathcal{Q}: 2x + y + 2z + 1 = 0$$

❶ بيّن أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان . ثمّ أثبت أنّ فصلهما المشترك d تمثيله الوسيطي هو:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \\ z = -2t - 2 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

❷ عيّن النقطة H المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d.

❸ اكتب معادلة المستوي R المار بالنقطة $\Omega(1, 4, 1)$ والموازي للمستوي $\mathcal{Q}$.

❹ بافتراض في المستوي R دائرة C مركزها Ω ونصف قطرها 3 . أثبت أنّ $B(3, 2, 0)$ هي نقطة من C .

❺ أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمماس T للدائرة C في النقطة B .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = (ax + b)e^{-x+1}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$

أولاً : عيّن العددين a و b إذا علمتَ أنّ للتابع f قيمة حدية محلياً مساويةً e^2 عند $x = -1$.

ثانياً : بافتراض $a = 1$ و $b = 2$ نحصل على التابع $f(x) = (x + 2)e^{-x+1}$.

❶ جِدْ نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتج معادلة مقاربه الأفقي .

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها .

❸ ارسم C . واستنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x) = (x + 3)e^{-x}$.

.... انتهت الأسئلة ....

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة للبنات

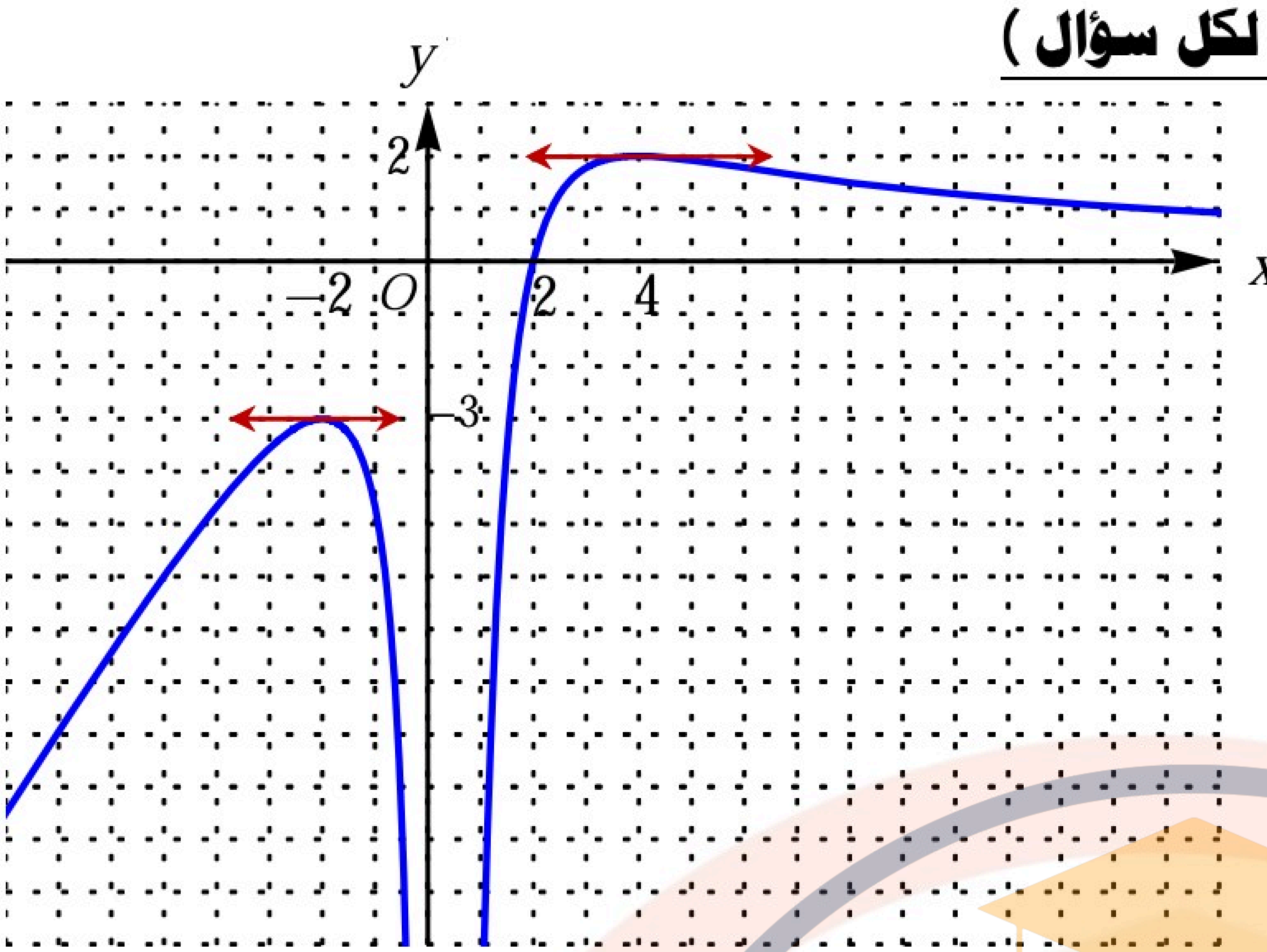
ورقة العمل الأولى في مادة الرياضيات

للصف الثالث الثانوي العلمي (□□□□-□□□□)

الاسم :.........

الدرجة: □□□

أولاً : أجيبي عن الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول : في الشكل المجاور :

C_f الخط البياني الممثل لتابع f

المعرّف على $I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

❶ أوجدي $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

❷ عيّني: a) $f(4)$ و $f(2)$. b) $f'(-2)$ و $f'(4)$

❸ ماعدد حلول كل من المعادلات الآتية :

a) $f(x) = 4$. b) $f(x) = -4$

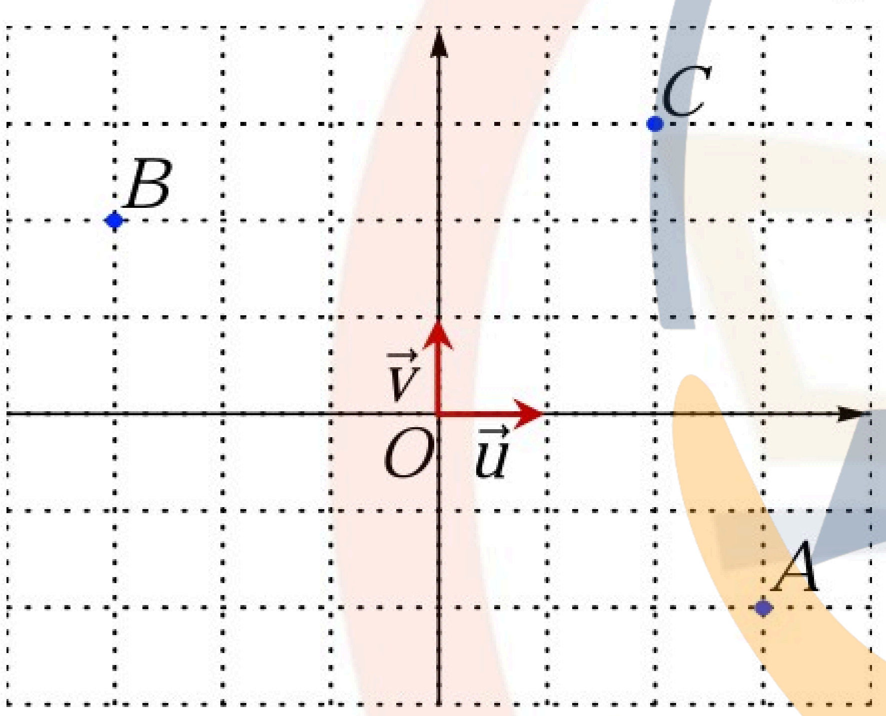
❹ حلّي المتراجحة الآتية : $f(x) > 0$.

❺ نظّمي جدولاً بتغيرات التابع f .

السؤال الثاني: ❶ حلّي المتراجحة الآتية : $\ln(5-x)(x-1) \geq \ln 3$.

❷ حلّي المعادلة الآتية : $\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) = \ln((2x-3)(8-x))$.

❸ حلّي المتراجحة الآتية : $2\ln^2 x - 3\ln x + 1 \leq 0$.



السؤال الثالث : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ اكتبي الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C الممثلة للنقاط A و B و C بالترتيب .

❷ احسبي $|z_A|$ و $|z_B|$ و $|z_C|$.

ثمّ استنتجي أن النقطة O هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC .

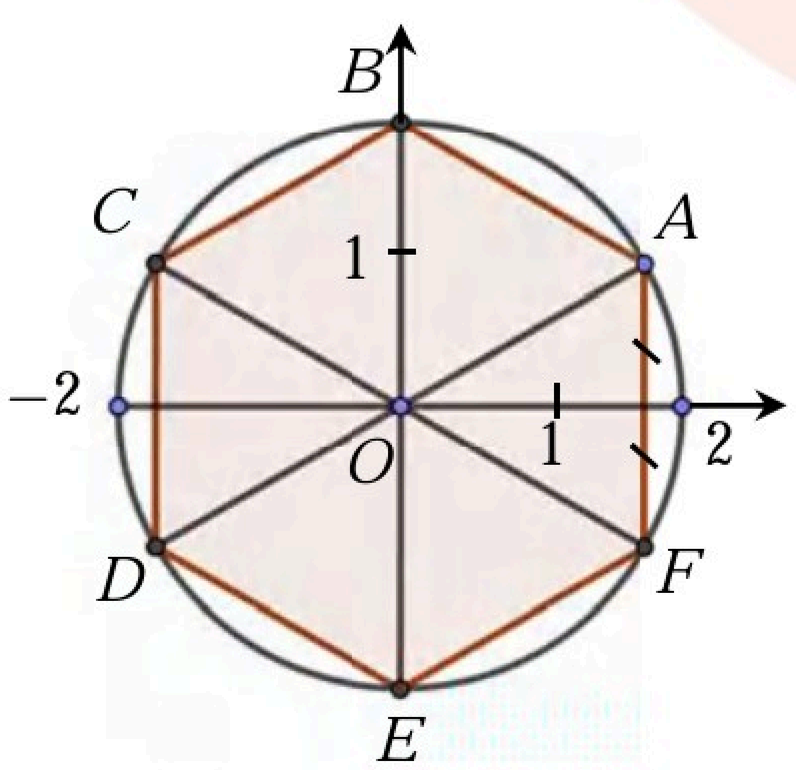
❸ احسبي $|z_A \cdot z_B|$ و $\left|\frac{z_A}{z_B}\right|$ و $|z_A^3|$.

السؤال الرابع : ليكن f تابعاً معرّفاً على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ تتحقّق المتراجحة الآتية : $1 \leq f(x) \leq 2$.

ولنعرّف التابع g على المجال $]-\infty, 0[$ وفق العلاقة : $g(x) = \dfrac{2f(x)+1}{x}$.

❶ أثبتي أنّه أياً تكن $x \in]-\infty, 0[$ كان $\dfrac{5}{x} \leq g(x) \leq \dfrac{3}{x}$.

❷ أوجدي نهاية التابع g عند $-\infty$ و عند الصفر .



السؤال الخامس: $ABCDEF$ مسدس منتظم مرسوم في الشكل المجاور :

اكتبي الأعداد العقدية المقابلة لرؤوس هذا المضلع المنتظم بالشكل المثلثي .

ثمّ أثبتي أنّ مجموع هذه الأعداد يساوي الصفر .

السؤال السادس : ليكن العددان العقديان : $z_1 = -1 + i$ و $z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

❶ اكتبي كلاً من z_1 و z_2 و $\dfrac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي. ❷ اكتبي $\dfrac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري. ❸ استنتجي $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

ثانياً : **حلي التمارين الأربع الآتية** : (60 **درجة للأول و** 40 **للثاني و**60 **للثالث و**50 **للرابع**)

التمرين الأول : ادرسي نهايات كلاً من التوابع الآتية عند a الموافقة .

❶ $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$ عند $-\infty$. ❷ $f(x) = x - \cos^2 x$ عند $-\infty$.

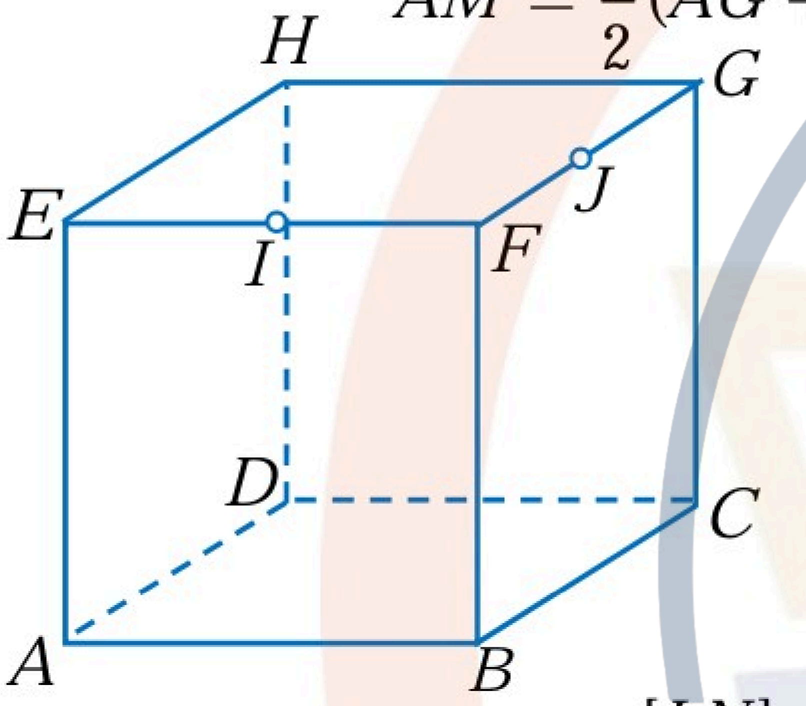
❸ $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{2 - \sqrt{x+2}}$ عند 2 . ❹ $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ و -1 و 1 .

التمرين الثاني : ❶ ليكن العدد العقدي $z = \dfrac{3+7i}{2-5i}$ احسبي z^5 بالشكل الجبري .

❷ ليكن العدد العقدي $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(1-i)^4}$ اكتبي z بالشكل الجبري .

❸ عيّني مجموعة النقاط M التي يحقّق العدد العقدي z الذي يمثّلها المساواة : $\arg(iz) = \dfrac{5\pi}{4}$.

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعب . I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$



❶ بيّني إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب . وعللي إجابتك . $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$ (a $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$ (b

❷ عبّري عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

❸ وضّعي النقطة P حيث $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

❹ باختيار المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: (a عيّني إحداثيات كلاً من رؤوس المكعب و L و N و R مراكز الأوجه $ABCD$ و $ADHE$ و $DCGH$ بالترتيب و Q منتصف $[LN]$.

(b أثبتي أنّ النقاط A و Q و R تقع على استقامةٍ واحدة .

التمرين الرابع: ❶ أثبتي أياً تكن $x \geq 0$ صحة المساواة الآتية : $\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

❷ عيّني مجموعة تعريف كلاً من التابعين الآتيين : $f(x) = \ln(x-2) - \ln|x+1|$ و $g(x) = \dfrac{2\ln x + 5}{\ln x - 1}$.

❸ f تابعٌ يحقّق المتراجحة : $|f(x)| \leq \sqrt{x^2+1} + x$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

ثالثاً: حلي المسألتين الآتيتين : (80 **درجة للأولى و**70 **للثانية**)

المسألة الأولى: في مستوٍ محدث بمعلمٍ متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط : $A(3,0,1)$ و $B(0,-1,2)$ و $C(1,-1,0)$

❶ أثبتي أنّ النقاط A و B و C لا تقع على استقامةٍ واحدة . ما نوع المثلث ABC ؟ واحسبي مساحته.

❷ أوجدي إحداثيات النقطة D حتى يكون الرباعي $ACBD$ مستطيلاً .

❸ لتكن النقطة $M(-3,9,-2)$. أوجدي إحداثيات النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة إلى C .

❹ هل النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[MN]$ ؟ عللي إجابتك .

المسألة الثانية: ليكن f التابع المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق $f(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

❶ أثبتي أنّ f اشتقاقي على I ، واحسبي تابعه المشتق $f'(x)$. ❷ نظّمي جدولاً يبيّن جهة اطراد f .

❸ استنتجي من الجدول السابق مجموعة حلول المتراجحة : $2x^2 + 1 > \ln x$.

❹ اكتبي معادلةً للمماس d للخط البياني للتابع f في نقطة منه $x = 1$.

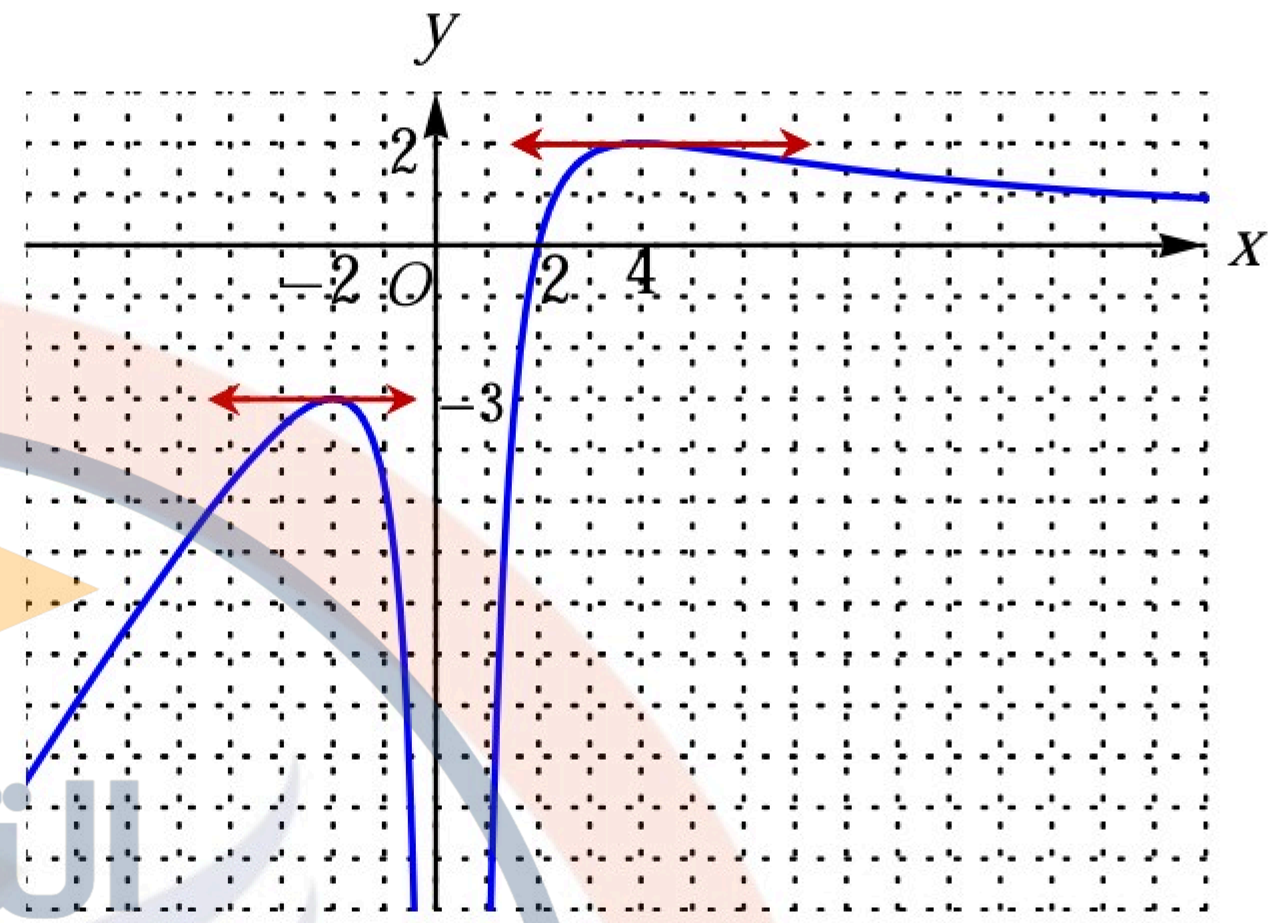
....انتهت الأسئلة...

أولاً : أجيبي عن الأسئلة الستة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : في الشكل المجاور :

C_f الخط البياني الممثل لتابع f

المعرّف على $I =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.



❶ أوجدي $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

❷ عيّني: a) $f(4)$ و $f(2)$. b) $f'(-2)$ و $f'(4)$

❸ ماعدد حلول كل من المعادلات الآتية ؟

a) $f(x) = 4$. b) $f(x) = -4$

❹ حلّي المتراجحة الآتية : $f(x) > 0$.

❺ نظّمي جدولاً بتغيرات التابع f .

الحل

3×3 ❶ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ و

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

3×2 ❷ a) $f(2) = 0$ و $f(4) = 2$.

3×2 b) $f'(-2) = 0$ و $f'(4) = 0$ (لأنّ المماس أفقياً في النقطتين اللتين فاصلتاهما $x = -2$ و $x = 4$)

3×2 ❸ a) لا يوجد أي حل للمعادلة $f(x) = 4$

b) للمعادلة $f(x) = -4$ ثلاثة حلول .

❹ مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $x \in]2, +\infty[$

❺

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

3
3
3
40

السؤال الثاني:

❶ حلّي المتراجحة الآتية :

$\ln(5-x)(x-1) \geq \ln 3$.

❷ حلّي المعادلة الآتية :

$\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) = \ln((2x-3)(8-x))$

❸ حلّي المتراجحة الآتية :

$2\ln^2 x - 3\ln x + 1 \leq 0$.

الحل

❶ $\ln(5-x)(x-1) \geq \ln 3$

☐ شرط الحل : $3 > 0$ وهذا محقق دوماً

$x \in]-\infty, +\infty[$

3 $D_1 =]-\infty, +\infty[$

☐ $(5-x)(x-1) \geq 3$ ومنه

$-x^2 + 6x - 8 \geq 0$

وبالتالي $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ ومنه

4 $(x-4)(x-2) \leq 0$ وهذا محقق عندما

$x \in [2, 4]$ ومنه $D_2 = [2, 4]$.

3 ☐ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي :

$x \in D_1 \cap D_2 = [2, 4]$ ومنه $S = [2, 4]$

❷

$\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) = \ln((2x-3)(8-x))$

☐ نوجد مجموعة تعريف المعادلة :

$(2x-3)(8-x) > 0$ و $x - 2 > 0$ و $2x - 3 > 0$

$x \in]\frac{3}{2}, 8[$ و $x \in]2, +\infty[$ و $x \in]\frac{3}{2}, +\infty[$

ومنه $x \in]\frac{3}{2}, 8[\cap]2, +\infty[\cap]\frac{3}{2}, +\infty[$ وبالتالي

3 $x \in]2, 8[$ ومنه $D_1 =]2, 8[$

❐ نطبق خواص اللوغاريتم :

$$\ln((2x-3)\cdot(x-2)^2) = \ln((2x-3)(8-x))$$

ومنه $(2x-3)\cdot(x-2)^2 = (2x-3)(8-x)$ 3

$(2x-3)\cdot(x-2)^2 - (2x-3)(8-x) = 0$ 3

$(2x-3)(x^2-4x+4-8+x) = 0$

$(2x-3)(x^2-3x-4) = 0$

$(2x-3)(x-4)(x+1) = 0$ 3

إما $2x-3=0$ ومنه $x=\dfrac{3}{2}\notin D_1$ مرفوض

أو $x-4=0$ ومنه $x=4\in D_1$ مقبول . 3

أو $x+1=0$ ومنه $x=-1\notin D_1$ مرفوض . 3

$S=\{4\}$

❸ $2\ln^2 x - 3\ln x + 1 \le 0$

المتراجحة معرّفة على $]0,+\infty[$

$2\ln^2 x - 3\ln x + 1 = 0$

$\Delta = b^2-4ac$ ومنه $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1 > 0$

$\ln x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+1}{4} = 1$ 3

ومنه $\boxed{x=e}$

أو $\ln x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ 3

ومنه $\boxed{x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}}$

x	0 $\quad$ $\sqrt{e}$ $\quad$ e $\quad$ $+\infty$
$2\ln^2 x - 3\ln x + 1$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
المتراجحة	غير محققة $\quad$ محققة $\quad$ غير محققة

3

فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي $x\in[\sqrt{e},e]$ 3

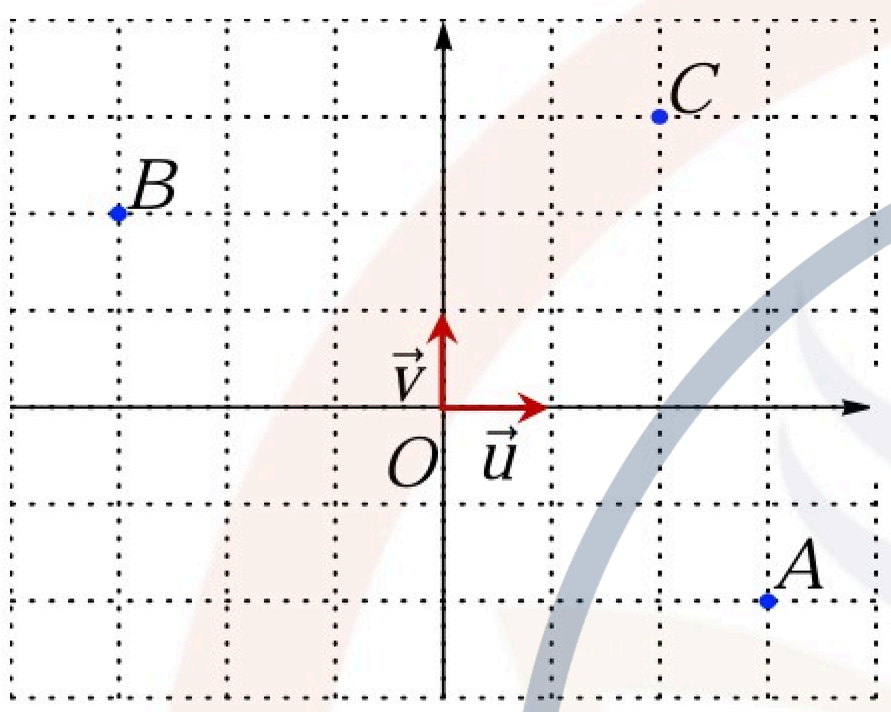
40

السؤال الثالث : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ اكتبي الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C الممثلة للنقاط A و B و C بالترتيب .

❷ احسبي $|z_A|$ و $|z_B|$ و $|z_C|$. ثمّ استنتجي أن النقطة O هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC .

❸ احسبي $|z_A\cdot z_B|$ و $\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right|$ و $|z_A{}^3|$.



الحل

❶ $z_A = 3-2i$ و $z_B = -3+2i$ و $z_B = 2+3i$ $\quad 4\times 3$

❷ $|z_A| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

$|z_B| = \sqrt{(-3)^2+(2)^2} = \sqrt{13}$ $\quad 4\times 3$

$|z_C| = \sqrt{(2)^2+(3)^2} = \sqrt{13}$

بما أنّ $|z_A| = |z_B| = |z_C|$ فإنّ $OA=OB=OC$

ومنه O مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC . $\quad 7$

❸ $|z_A\cdot z_B| = |z_A|\cdot|z_B| = \sqrt{13}\cdot\sqrt{13} = 13$

$\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right| = \dfrac{|z_A|}{|z_B|} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 1$ $\quad 3\times 3$

$|z_A{}^3| = |z_A|^3 = 13\sqrt{13}$

40

السؤال الرابع : ليكن f تابعاً معرّفاً على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ تتحقّق المتراجحة الآتية : $1 \le f(x) \le 2$

ولنعرّف التابع g على المجال $]-\infty, 0[$ وفق العلاقة : $g(x) = \dfrac{2f(x)+1}{x}$.

❶ أثبتي أنّه أياً تكن $x \in]-\infty, 0[$ كان $\dfrac{5}{x} \le g(x) \le \dfrac{3}{x}$.

❷ أوجدي نهاية التابع g عند $-\infty$ و عند الصفر .

الحل

❶ $1 \le f(x) \le 2$ ومنه $2 \le 2f(x) \le 4$ وبالتالي $3 \le 2f(x)+1 \le 5$ وبما أنّ $x \in]-\infty, 0[$ فإذا قسمنا المتراجحة على x سوف تتغير جهة التراجح

$\dfrac{3}{x} \ge \dfrac{2f(x)+1}{x} \ge \dfrac{5}{x}$ ومنه $\dfrac{3}{x} \ge g(x) \ge \dfrac{5}{x}$

أي $\dfrac{5}{x} \le g(x) \le \dfrac{3}{x}$

❷ عند $-\infty$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

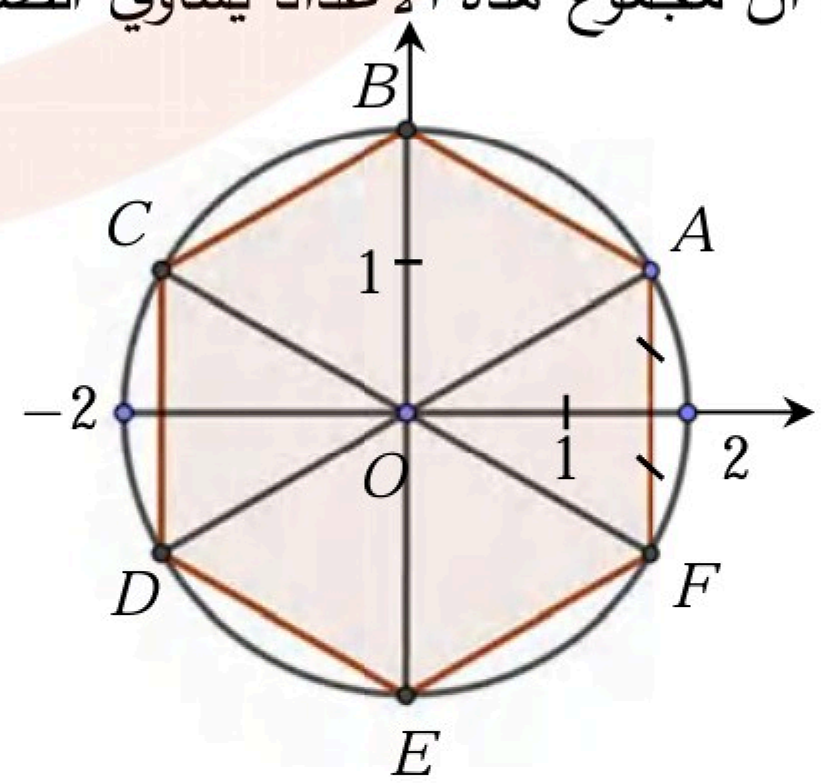
عند الصفر :

لدينا $g(x) \le \dfrac{3}{x}$ بما أنّ $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{3}{x} = -\infty$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (3) نجد $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -\infty$

السؤال الخامس : $ABCDEF$ مسدس منتظم مرسوم في الشكل المجاور : اكتبي الأعداد العقدية المقابلة لرؤوس هذا المضلع المنتظم بالشكل المثلثي .

ثمّ أثبتي أنّ مجموع هذه الأعداد يساوي الصفر .



8

8

8

8

8

40

الحل

5 $z_A = 2(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$ و

5 $z_B = 2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}) = 2i$

5 $z_C = 2(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$ و

5 $z_D = 2(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} - i$

5 $z_E = \overline{z}_B = 2(\cos(-\dfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{2})) = -2i$ و

5 $z_F = \overline{z}_A = 2(\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{6})) = \sqrt{3} - i$

5 $z_A + z_B + z_C + z_D + z_E + z_F =$

10 $\sqrt{3} + i + 2i - \sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i - 2i + \sqrt{3} - i = 0$

السؤال السادس : ليكن العددان العقديان :

$z_1 = -1 + i$ و $z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

❶ اكتبي كلاً من z_1 و z_2 و $\dfrac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي.

❷ اكتبي $\dfrac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري.

❸ استنتجي $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

الحل

❶ $z_1 = -1 + i$

$r = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

ومنه $z_1 = \sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$.

$z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$r = |z_2| = \sqrt{(\dfrac{1}{2})^2 + (\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

4 $$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

ومنه $z_2 = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{1}(\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}))$$

4 $$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12}))$$

❷ $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(-1+i)(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

ومنه $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 وبالتالي $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

❸ بالمقارنة بين الشكل المثلثي والشكل الجبري نجد

4 $$\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

4 ومنه : $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

4 $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

40

ثانياً : حلي التمارين الأربعة الآتية :

التمرين الأول : ادرسي نهايات كلاً من التوابع الآتية عند a الموافقة .

❶ $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$ عند $-\infty$.

❷ $f(x) = x - \cos^2 x$ عند $-\infty$.

❸ $f(x) = \frac{x^3 - 8}{2 - \sqrt{x+2}}$ عند 2 .

❹ $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ و -1 و 1

الحل

❶ $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$

نلاحظ أنّ نهاية التابع f عند $-\infty$ هي حالة عدم

3 تعيين من الشكل $\infty + -\infty$ لإزالتها نكتب

3 ومنه $f(x) = x + \sqrt{x^2(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})}$

$f(x) = x + \sqrt{x^2}\sqrt{(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})}$

3 بما أنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ $\sqrt{x^2} = |x| = -x$

3 ومنه $f(x) = x - x\sqrt{(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})}$

3 $f(x) = x(1 - \sqrt{(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})})$

3 وبما أنّ $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^2}) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}(\frac{-1}{x}) = 0$ فإنّ

3 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

❷ $f(x) = x - \cos^2 x$ عند $-\infty$.

3 $0 \le \cos^2 x \le 1$ ومنه $0 \ge -\cos^2 x \ge -1$

وبالتالي $x \ge x - \cos^2 x \ge -1 + x$

3 $x \ge f(x) \ge -1 + x$

3 لدينا $f(x) \le x$

بما أنّ $\lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$ فاستناداً إلى

مبرهنة الإحاطة (3) نجد أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

❸ $f(x) = \frac{x^3 - 8}{2 - \sqrt{x+2}}$

نلاحظ أنّ نهاية التابع f عند 2 هي حالة عدم تعيين

3 من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها نكتب :

3 ومنه $f(x) = \frac{(x^3 - 8)(2 + \sqrt{x+2})}{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})}$

3 ومنه $f(x) = \frac{(x^3 - 8)(2 + \sqrt{x+2})}{(4 - (x+2))}$

$f(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(2 + \sqrt{x+2})}{(-x+2)}$

وبالتالي :

3 $f(x)=\dfrac{-(-x+2)(x^2+2x+4)(2+\sqrt{x+2})}{(-x+2)}$

ومنه $f(x)=-(x^2+2x+4)(2+\sqrt{x+2})$

3 وبالتالي $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-(12)(4)=-48$.

❹ $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+3}{x^2-1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ و -1 و 1

f معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ أي

$x\in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-5x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

3 عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

عند -1 :

3 $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$.

عند 1 : نلاحظ أنّ نهاية التابع f عند 1 هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ لإزالتها نكتب :

بفرض $p(x)=2x^3-5x+3$

3 نلاحظ أنّ $p(1)=0$ ومنه كثير حدود $p(x)=2x^3-5x+3$ يقبل القسمة على $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x+3 & x-1 \\ \mp 2x^3 \pm 2x^2 & 2x^2+2x-3 \\ \hline 2x^2-5x+3 & \\ \mp 2x^2 \pm 2x & \\ \hline -3x+3 & \\ \pm 3x \mp 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3

ومنه $p(x)=(x-1)(2x^2+2x-3)$ وبالتالي

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x^2+2x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x^2+2x-3}{x+1}$$

3 ومنه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

60

التمرين الثاني : ❶ ليكن العدد العقدي $z=\dfrac{3+7i}{2-5i}$ احسبي z^5 بالشكل الجبري .

❷ ليكن العدد العقدي $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(1-i)^4}$

اكتبي z بالشكل الجبري .

❸ عيّني مجموعة النقاط M التي يحقّق العدد العقدي z الذي يمثّلها المساواة : $\arg(iz)=\dfrac{5\pi}{4}$.

الحل

❶ $z=\dfrac{3+7i}{2-5i}$ ومنه $z^5=\left(\dfrac{3+7i}{2-5i}\right)^5$

4 ومنه

$$z^5=\left(\frac{(3+7i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}\right)^5=\left(\frac{6-35+15i+14i}{4+25}\right)^5$$

وبالتالي:

4 $z^5=\left(\dfrac{-29+29i}{29}\right)^5$

2 $=(-1+i)^5=(-1+i)^4(-1+i)$

$z^5=(2i)^2(-1+i)=-4(-1+i)=4-4i$.

❷ لدينا $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(1-i)^4}$

4 $\sqrt{3}+i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

4 $(\sqrt{3}+i)^8=2^8(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6})$

$(\sqrt{3}+i)^8=2^8(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$

$1-i=\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$

4 $(1-i)^4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

4 $z=2^6(\cos(\frac{4\pi}{3}-\pi)+i\sin(\frac{4\pi}{3}-\pi))$

2 ومنه $z=64(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$

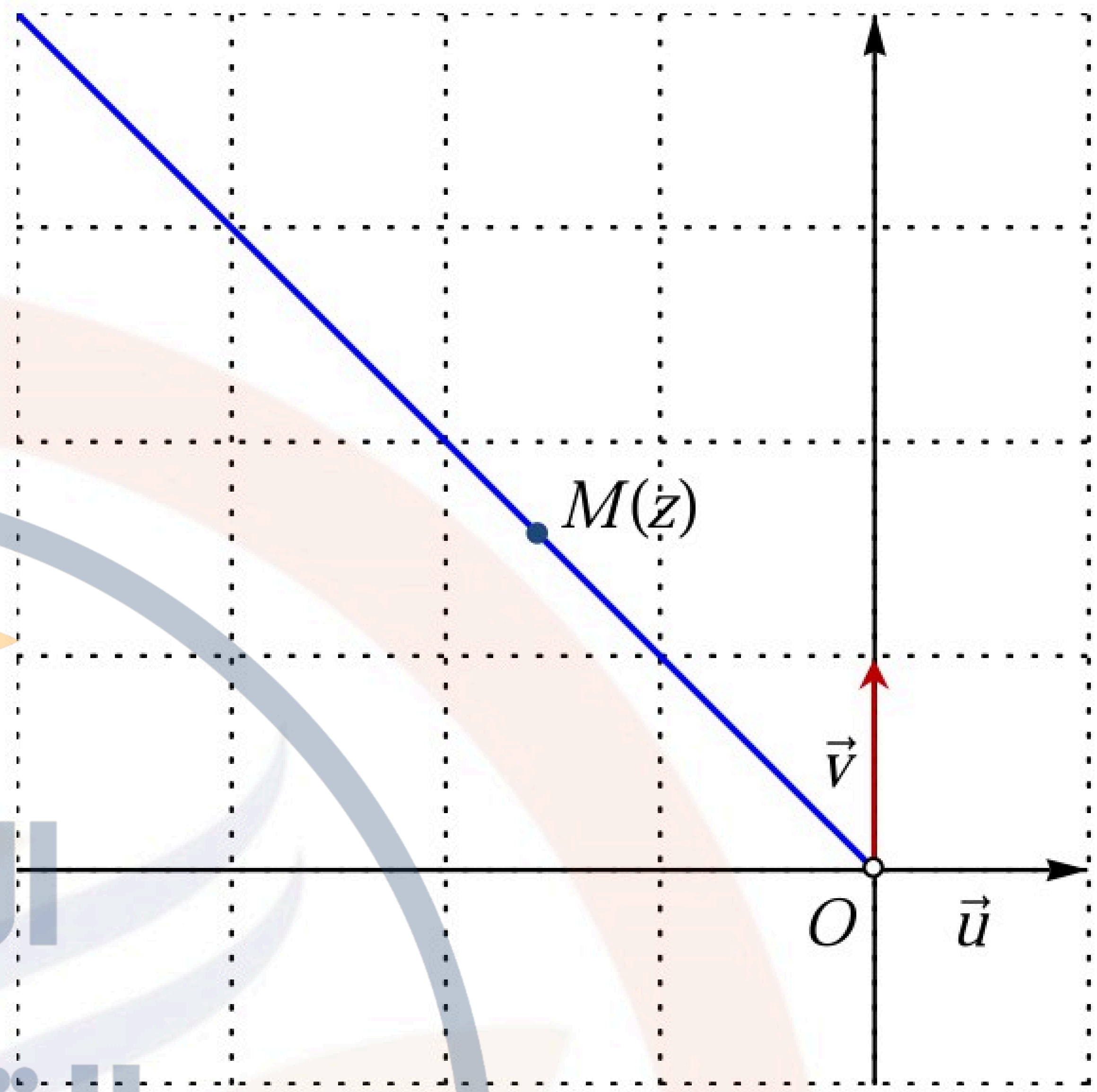
2 وبالتالي $z=64(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=32+i32\sqrt{3}$.

❸ $\arg(iz) = \dfrac{5\pi}{4}$

$\arg(i) + \arg(z) = \dfrac{5\pi}{4}$ 4

ومنه $\dfrac{\pi}{2} + \arg(z) = \dfrac{5\pi}{4}$ وبالتالي

$\arg(z) = \dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$ 4



فمجموعة النقاط $M(z)$ هي مجموعة نقاط نصف المستقيم المرسوم في الشكل المجاور

معادلته من الشكل : $y = -x$ حيث $x < 0$.

$\dfrac{2}{40}$

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعب . I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$

❶ بيّني إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب . وعللي إجابتك .

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$ b) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

❷ عبّري عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد)

وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

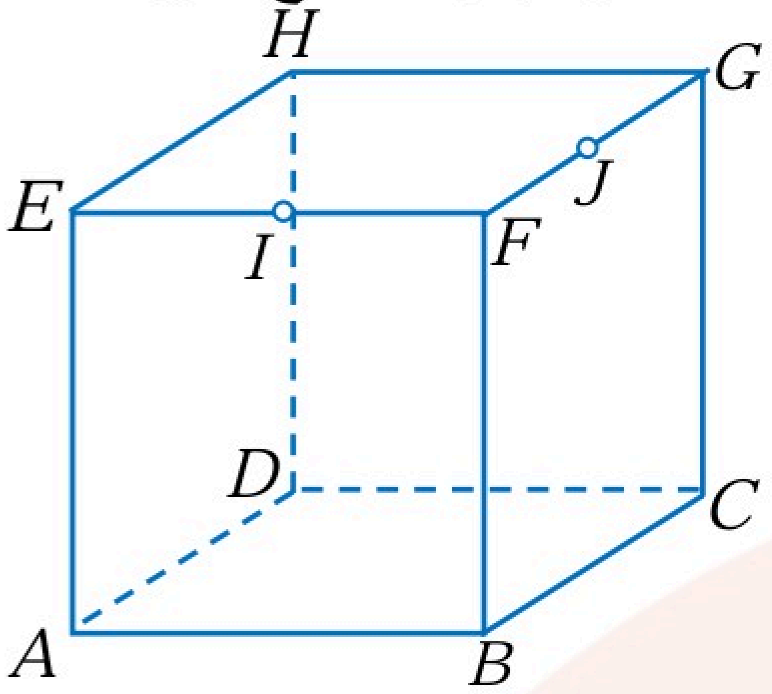
❸ وضّعي النقطة P حيث

$\overrightarrow{CP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. 4

❹ باختيار المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$:

a) عيّني إحداثيات كلاً من رؤوس المكعب و L و N و R مراكز الأوجه $ABCD$ و $ADHE$ و $DCGH$ بالترتيب و Q منتصف $[LN]$.

b) أثبتي أنّ النقاط A و Q و R تقع على استقامةٍ واحدة .



الحل

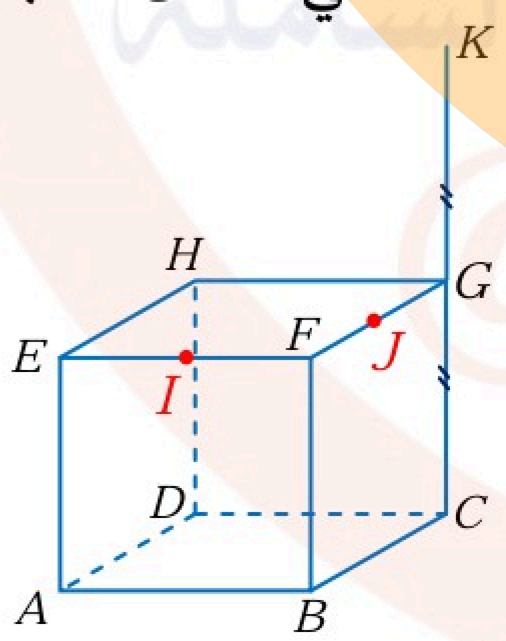
❶ a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$

4 كلّا، لا تقع : لنفرض نقطة K خارج المكعب بحيث $\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{CG}$ عندئذٍ استناداً إلى علاقة شال $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{BF}$ وبما أنَّ الشكل $FBCG$

4 مربع فإنَّ $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ ومنه

4 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AK}$

و منه $\boxed{M = K}$ لاحظي الشكل المجاور



4 b) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

باستخدام علاقة شال نجد:

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB})$

وبالاستفادة من أنّ جمع شعاعين متعاكسين يساوي

الشعاع الصفري نجد $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HG})$ ومن

تساوي الشعاعين $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$ نجد — 4

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}$. ومنه $\boxed{M=B}$.

❷ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AI}$

❸ $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ — 4

بما أنّ كل وجه من أوجه المكعب هو مربع فإنّ — 4

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ و $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ ومنه

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DO}$ — 4

حيث O مركز المربع $HEAD$ و منه : — 4

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CO}$. ومنه P تنطبق على O.

❹ باختيار المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$: — 4

a) $A(0,0,0)$ ، $E(0,0,1)$ — 4

$B(1,0,0)$ ، $F(1,0,1)$

$D(0,1,0)$ ، $H(0,1,1)$ — 4

$C(1,1,0)$ ، $G(1,1,1)$ — 4

$L(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ ، $N(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ، $Q(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ، $R(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

b) $\overrightarrow{AQ}(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ و $\overrightarrow{AR}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$ — 4

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{AQ}$ فالشعاعان $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{AQ}$ — 60

مرتبطان خطياً فالنقاط A و Q و R تقع على استقامةٍ

واحدة .

التمرين الرابع:

❶ أثبتي أياً تكن $x \geq 0$ صحة المساواة الآتية :

$\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=-\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

❷ عيّني مجموعة تعريف كلاً من التابعين الآتيين :

$f(x)=\ln(x-2)-\ln|x+1|$ و $g(x)=\dfrac{2\ln x+5}{\ln x-1}$

❸ f تابعٌ يحقّق المتراجحة : $|f(x)| \leq \sqrt{x^2+1}+x$ أياً

تكن $x \in \mathbb{R}$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

الحل

❶

$$L_1=\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

$$=\ln\left(\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)$$ — 5

$$=-\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=L_2$$ — 5

❷ $f(x)=\ln(x-2)-\ln|x+1|$

f معرّف عندما $|x+1|>0$ و $(x-2)>0$

وهذا محقّق عندما $x\neq -1$ و $x>2$ — 5

أي $x\in]2,+\infty[$

$g(x)=\dfrac{2\ln x+5}{\ln x-1}$ — 5

g معرّف عندما $x>0$ و $\ln x-1\neq 0$

أي $x>0$ و $\ln x\neq 1$ ومنه $x>0$ و $x\neq e$ — 5

وبالتالي $x\in]0,+\infty[\setminus\{e\}$

أي : $x\in]0,e[\cup]e,+\infty[$ — 5

❸ $|f(x)| \leq \sqrt{x^2+1}+x$

$|f(x)-0| \leq g(x)$

حيث $g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ — 5

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل

$+\infty-\infty$ لإزالتها نكتب

$$g(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}$$ — 5

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ — 5

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (2) نجد

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. — 5

50

ثالثاً: حلي المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى: في مستوٍ محدث بمعلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(3,0,1)$ و $B(0,-1,2)$ و $C(1,-1,0)$

❶ أثبتي أنّ النقاط A و B و C لا تقع على استقامةٍ واحدة . ما نوع المثلث ABC ؟ واحسبي مساحته.

❷ أوجدي إحداثيات النقطة D حتى يكون الرباعي $ACBD$ مستطيلاً .

❸ لتكن النقطة $M(-3,9,-2)$. أوجدي إحداثيات النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة إلى C .

❹ هل النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[MN]$ ؟ عللي إجابتك .

الحل

❶ نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AC}(-2,-1,-1)$ و $\overrightarrow{AB}(-3,-1,1)$ 5

الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة ($\frac{-3}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$) فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامةٍ واحدة . 5

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{11}$$

$$AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$ 5

$$BC = \sqrt{(1-0)^2+(-1+1)^2+(0-2)^2} = \sqrt{5}$$ 5

نلاحظ أنّ $BC^2+AC^2 = AB^2$ لأنّ 5

$(\sqrt{5})^2+(\sqrt{6}) = (\sqrt{11})^2$

$5+6=11$ محقّق

وبالتالي حسب عكس فيثاغورس نجد أنّ المثلث ABC قائم في C . 5

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$$ 5

❷ حتى يكون الرباعي $ACBD$ مستطيلاً يكفي أن يكون $ACBD$ متوازي أضلاع لأنّ المثلث ABC قائم في C لأنّه يصبح متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل .

أي يجب أن يتحقّق : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$

$(-2,-1,-1) = (0-x_D,-1-y_D,2-z_D)$ 5

ومنه $-2=-x_D$ وبالتالي $2=x_D$ 5

$-1-y_D=-1$ ومنه $y_D=0$

$2-z_D=-1$ و $z_D=3$ 5

ومنه : $D(2,0,3)$ 5

❸ $N(2x_C-x_M,2y_C-y_M,2z_C-z_M)$

$N(2+3,-2-9,0+2)$

ومنه $N(2+3,-2-9,0+2)$

$N(5,-11,2)$ 5

❹ 5

$BM = \sqrt{(0+3)^2+(-1-9)^2+(2+2)^2} = \sqrt{125}$

$BN = \sqrt{(5-0)^2+(-11+1)^2+(2-2)^2} = \sqrt{125}$ 5

ومنه $BM=BN$ 5

فالنقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[NM]$.

80

المسألة الثانية: ليكن f التابع المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق $f(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

❶ أثبتي أنّ f اشتقاقي على I، واحسبي تابعه المشتق $f'(x)$.

❷ نظّمي جدولاً يبيّن جهة اطراد f .

❸ استنتجي من الجدول السابق مجموعة حلول المتراجحة : $2x^2 + 1 > \ln x$.

❹ اكتبي معادلةً للمماس d للخط البياني للتابع f في نقطة منه $x = 1$.

الحل

❶ التابع $x \mapsto 2x^2 + 1$ كثير حدود اشتقاقي على $\mathbb{R}$

فهو اشتقاقي على $I =]0, +\infty[$ 5

التابع $x \mapsto -\ln x$ اشتقاقي على $I =]0, +\infty[$ حسب

تعريف التابع اللوغاريتمي . 5

فالتابع f اشتقاقي على $I =]0, +\infty[$ لأنّه عبارة عن 5

مجموع تابعين اشتقاقين على $I =]0, +\infty[$.

$f'(x) = 4x - \frac{1}{x}$ ومنه $f'(x) = \frac{4x^2 - 1}{x}$ 5

❷ $f'(x) = 0$ عندما $4x^2 - 1 = 0$ 5

وبالتالي $x^2 = \frac{1}{4}$ ومنه $x = \frac{1}{2}$ أو $x = -\frac{1}{2}$ مرفوض 5

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{4}) + 1 - \ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln 2$. 5

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$\frac{3}{2} + \ln 2$	$\nearrow$	

5

5

❸ $2x^2 + 1 > \ln x$

وهذا يكافئ $2x^2 + 1 - \ln x > 0$ 5

أي $f(x) > 0$ نلاحظ من جدول اطراد التابع f أنّ 5

$f(x) \geq \frac{3}{2} + \ln 2 > 0$ أياً تكن $x \in]0, +\infty[$

وهي مجموعة حلول المتراجحة المفروضة.

❹ $y = f'(1)\,(x - 1) + f(1)$

$f(1) = 3$ و $f'(1) = 3$ 5

$y = 3(x - 1) + 3$ 5

$\boxed{y = 3x}$ 5

70

انتهت الأجوبة