بنك أسئلة العقدية

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة العقدية

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

أ زياد داوود سلمية 0936834286

أ وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038

أ أحمد الشيخ عيسى الرقة 0998024183

م . مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 1 :

ليكن لدينا الأعداد العقدية التالية : $z_1 = -2+3i \, , z_2 = 3-i$ **أوجد كل مما يلي :**

$$-z_1 \;,\; |z_2| \;,\; \overline{z_1} \;,\; z_1+z_2 \;,\; z_1-z_2 \;,\; z_1\times z_2 \;,\; \frac{z_1}{z_2} \;,\; \frac{1}{z_2}$$

الحل :

$$\overline{z_1} = -2-3i$$
$$|z_2| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$-z_1 = 2-3i$$
$$z_1+z_2 = (-2+3i)+(3-i) = (-2+3)+(3-1)i = 1+2i$$
$$z_1-z_2 = (-2+3i)-(3-i) = (-2-3)+(3+1)i = -5+4i$$
$$z_1\times z_2 = (-2+3i)\times(3-i) = -6+2i+9i-3i^2 = -6+11i+3$$
$$= -3+11i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{3-i} = \frac{(-2+3i).(3+i)}{(3-i).(3+i)} = \frac{-6-2i+9i+3i^2}{9+1} = \frac{-9+7i}{10}$$
$$= -\frac{9}{10}+\frac{7}{10}i$$
$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i).(3+i)} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$
$$\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

التمرين 2 :

أكتب بالشكل الجبري كل من الاعداد التالية :

$$z_1 = \frac{cosx+isinx}{cosx-isinx} = \frac{(cosx+isinx)^2}{sin^2x+cos^2x} = cos^2x-sin^2x+2isinxcosx$$
$$= cos2x+isin2x$$
$$z_2 = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right) = 2\left(\frac{2-3i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$$
$$= 2\left(\frac{(1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\right) = 2\left(\frac{9+7i}{13}\right) = \frac{18}{13}+\frac{14}{13}i$$
$$z_3 = (1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = (2i)^4 = 16$$

وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية | زياد داوود 093683426 سلمية | أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة | مروان بجور 0930170828 حمص

التمرين 3 :

أكتب بالشكل المثلثي كل من الاعداد التالية :

1. $z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$
2. $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
3. $z_3 = 2\left(-\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$
4. $z_4 = (1+i)^{2016}$
5. $z_5 = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6$
6. $z_6 = \left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)^8$

الحل :

1. $z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

2. $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi))\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

3. $z_3 = 2\left(-\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2i\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$2(\cos(\pi) + i\sin(\pi))\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

4. $z_4 = (1+i)^{2016} \Longrightarrow z_4 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2016}$

$= 2^{1008}[\cos(504)\pi + i\sin(504)\pi]$

$= 2^{1008}[\cos(252)2\pi + i\sin(252)2\pi] = 2^{1008}[\cos(0) + i\sin(0)]$

5. $z_5 = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right)^6$

$= \left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)^6 = \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5} = \cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}$

6. $z_6 = \left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)^8 = \left(\frac{(3i-1)(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}{2+8}\right)^8 = \left(\frac{(3\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i)+(-\sqrt{2}+6\sqrt{2})}{10}\right)^8 =$

$\left(\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i}{10}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

التمرين 4 :

أكتب بالشكل الاسي كل من الاعداد التالية :

1) $z_1 = (1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) $z_2 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{\frac{\pi}{3}i}$

3) $z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

4) $z_4 = \left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)^5$

5) $z_5 = 1 + e^{\frac{\pi}{3}i}$

6) $z_6 = (1+i\sqrt{3})^4 e^{\frac{4\pi}{3}i}$

الحل :

1) $z_1 = (1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (\sqrt{2}-1)e^{i(\pi)}.e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

2) $z_2 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}.e^{i\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow z = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}.e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

3) $z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5 = \left(\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{i}\right)^5 = \left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\right)^5$

$= \left(\frac{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\right)^5 = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^5 = \left(2e^{i\left(-\frac{4\pi}{6}\right)}\right)^5 = \left(2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^5$

$= 32\left(e^{i\left(-\frac{10\pi}{3}\right)}\right) = 32\left(e^{i\left(-\frac{6\pi+4\pi}{3}\right)}\right) = 32\left(e^{i\left(-\frac{6\pi+4\pi}{3}\right)}\right)$

$= 32\left(e^{i\left(-2\pi-\frac{4\pi}{3}\right)}\right) = 32\left(e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}\right)$

4) $z_4 = \left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)^5 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5$

$= \left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}\right)\right)^5$

$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^5 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

5) $z_5 = 1 + e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{0i} + e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{i\left(\frac{-\pi}{6}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

6) $z_6 = (1+i\sqrt{3})^4 e^{\frac{4i\pi}{3}} = \left(2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^4 e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$= \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 e^{\frac{4i\pi}{3}} = \left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^4 e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$= 16.e^{i\frac{4\pi}{3}}.e^{\frac{4i\pi}{3}} = 16.e^{i\frac{8\pi}{3}} = 16.e^{i\frac{2\pi}{3}}$

التمرين 5 :

❶ ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أنّ: $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$

❷ اكتب بدلالة $\overline{z}$ مرافق العدد العقدي $z = \frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i}$

الحل :

❶ $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} + (z-z')\overline{(z-z')}$

$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) + (z-z')(\overline{z}-\overline{z'})$

$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = z.\overline{z} + z.\overline{z'} + z'.\overline{z} + z'\overline{z'} + z.\overline{z} - z.\overline{z'} - z'.\overline{z} + z'\overline{z'}$

$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2z\overline{z} + 2z\overline{z'} = 2|z|^2 + 2|z'|^2$

❷ $z = \frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i} \Rightarrow \overline{z} = \overline{\left(\frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i}\right)} = \frac{\overline{3z^2-2iz+4}}{\overline{2z-3i}} = \frac{3\overline{z}^2+2i\overline{z}+4}{2\overline{z}+3i}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 6 :

ليكن العدد العقدي $z = i\left(e^{i2\theta} - 1\right)$ حيث $\theta \in \left]-\pi, 0\right[$

أكتب علاقتي أويلر ثم استفد من ذلك في كتابة z بالشكل الأسي

الحل :

علاقتا أويلر : $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

نخرج $e^{i\theta}$ عامل مشترك $z = ie^{i\theta}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$ وحسب دستور أويلر $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

يكون : $z = ie^{i\theta}(2i\sin\theta) = 2i^2 \sin\theta . e^{i\theta} = -2\sin\theta . e^{i\theta}$

وبما أن $\theta \in \left]-\pi, 0\right[$ فإن $\sin\theta < 0$ وبالتالي $-2\sin\theta > 0$

التمرين 7 :

اذا علمت $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

❶ جد منشور $\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3$

❷ اكتب $\sin^3\theta$ عبارة خطية بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ

❸ احسب النهاية $\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 3\theta - 3\sin\theta}{\theta^3}\right)$

الحل

❶

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3$$

$$= \frac{-1}{8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}.e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}.e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}\right)$$

$$= \frac{-2}{8}\left(\frac{e^{3i\theta} - e^{3i\theta}}{2i} - \frac{3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}{2i}\right) = \frac{-1}{4}(\sin 3\theta - 3\sin\theta)$$

وذلك باستخدام أويلر مرّة ثانية .

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta - 3\sin\theta}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-4\sin^3\theta}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-4\sin^3\theta}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(-4\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\right) = -4$$

وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية | زياد داوود 0936834268 سلمية | أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة | مروان بجور 0930170828 حمص

التمرين 8 :

❶ ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن u عدداً عقدياً يحقق $|u| = 1 , u \neq 1$ أثبت أنّ:

$\frac{z-u\overline{z}}{1-u}$ عدد حقيقي

❷ نفترض أنّ $u \neq 1$ وأنّ $\frac{z-u\overline{z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي أثبت أنّه إمّا أن يكون z حقيقيّاً أو أن يكون $|u| = 1$

❸ ليكن z و w عددين عقديّين يحقّقان $|z| = 1$ و $|w| = 1$ و $z.w \neq -1$

أثبت أنّ العدد العقدي $Z = \frac{z-w}{1+zw}$ عددٌ تخيلي

الحل :

❶ بما أنّ طويلة u تساوي الواحد استنتجنا أنّ : $u.\overline{u} = |u|^2 = 1$

ومنه $\overline{u} = \frac{1}{u}$ بفرض $w = \frac{z-u\overline{z}}{1-u}$ وبالتالي :

$w = \frac{z-u\overline{z}}{1-u} \Rightarrow \overline{w} = \frac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \Rightarrow \overline{w} = \frac{\overline{z}-\frac{1}{u}z}{1-\frac{1}{u}} = \frac{u\overline{z}-z}{u-1} = \frac{z-u\overline{z}}{1-u} = w$ وبالتالي فإن w عدد حقيقي

❷ بما أن w حقيقي فإن :

$$w = \overline{w} \Rightarrow \frac{z-u\overline{z}}{1-u} = \frac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \Rightarrow (z-u\overline{z})(1-\overline{u}) = (\overline{z}-\overline{u}z)(1-u)$$

$$\Rightarrow z-\overline{u}z-u\overline{z}+|u|^2\overline{z}-\overline{z}+u\overline{z}+\overline{u}z-|u|^2z = 0$$

$$z(1-|u|^2)-\overline{z}(1-|u|^2) = 0$$

$$(z-\overline{z}).(1-|u|^2) = 0$$

وبالتالي إما أن يكون $(z-\overline{z}) = 0 \Rightarrow z = \overline{z}$ وهذا يعني أن z عدداً حقيقياً ،

أو أن تكون $(1-|u|^2) = 0 \Rightarrow 1 = |u|$ وهذا يعني أن طويلة u مساوية 1 .

❸ بما أنّ $|z| = 1$ و $|w| = 1$ و $z.w \neq -1$ فإن : $\overline{w} = \frac{1}{w}$, $\overline{z} = \frac{1}{z}$

$Z = \frac{z-w}{1+zw} \Rightarrow \overline{Z} = \frac{\overline{z}-\overline{w}}{1+\overline{z}\overline{w}} \Rightarrow \overline{Z} = \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{zw}} = \frac{w-z}{1+zw} = -\frac{z-w}{1+zw} = -Z$ وبالتالي z عدد تخيلي

وسيم فاطمة زياد داوود أحمد الشيخ عيسى مروان بجور
اللاذقية 0936497038 سلمية 0936834268 الرقة 0988024183 حمص 0930170828

التمرين 9 : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1. $2iz + \bar{z} = 3 + 3i$
2. $z^2 - 4z + 5 = 0$
3. $z^2 = -3 + 4i$
4. $z^3 = 1$
5. $z^2 - 2(cos\theta)z + 1 = 0 \ \ (\theta \in \mathbb{R})$
6. $iz^2 - 3z + 4i = 0$
7. $z^2 + (1 + 2i)z + \frac{1}{2} + i = 0$
8. $2iz^2 + (3 + 7i)z + 4 + 2i = 0$
9. $z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$ **إذا علمت أنّها تقبل حلاً تخيّلياً بحتاً**

الحل :

❶ **بفرض** $z = a + ib \Longrightarrow \bar{z} = a - ib$ **وبالتالي نعوض في المعادلة :**

$$2iz + \bar{z} = 3 + 3i \Longrightarrow 2i(a + ib) + (a - ib) = 3 + 3i \Longrightarrow$$

$$2ai - 2b + a - ib = 3 + 3i \Longrightarrow (a - 2b) + (2a - b)i = 3 + 3i \Longrightarrow$$

حسب تساوي عددين عقديين نجد :

$$\left.\begin{matrix} a - 2b = 3 \\ 2a - b = 3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} -2a + 4b = -6 \\ 2a - b = 3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow b = -1 \ , \quad a = 1 \ \Longrightarrow z = 1 - i$$

طريقة ثانية :

بأخذ مرافق الطرفين للمعادلة ① $2iz + \bar{z} = 3 + 3i$ **نجد :** ② $-2i\bar{z} + z = 3 - 3i$

نضرب الأولى بـ $2i$ **نجد** $2i\bar{z} - 4z = -6 + 6i$ **نجمعها مع المعادلة** ② **نجد :**

$$-3z = -3 + 3i \Longrightarrow \ z = 1 - i$$

❷

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \ , \ \Delta = b^2 - 4a.c = 16 - 4(1)(5) = -4 < 0 \Longrightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \ \ , \ \ z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

❸

سنبحث عن $z = x + iy$ بحيث $z^2 = -3 + 4i$

$$x^2 - y^2 + 2xy\, i = -3 + 4i \Longrightarrow$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad , \quad 2xy = 4$$

$$|z^2| = |w| \Longrightarrow x^2 + y^2 = 5$$

وبالتالي :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = -3 & (2) \\ xy = 2 & (3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $2x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm 1$

من المعادلتين (1) و (2) بالطرح : $2y^2 = 8 \Longrightarrow y = \pm 2$

من المعادلة (3) بما أن $x.y > 0$

نستنتج انّ للعددين نفس الإشارة فالحلول : $z_1 = 1 + 2i \quad , \quad z_2 = -1 - 2i$

❹

$$z^3 = 1$$

نضع $z = r.e^{i\theta}$ عندئذٍ الشرط $z^3 = 1$ يكافئ $r^3.e^{3\theta i} = e^{0i}$ ومنه نستنتج أنّ:

$$3\theta = 2\pi k \;\Longrightarrow\; \theta = \frac{2\pi}{3}k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$r^3 = 1 \;\Longrightarrow\; r = 1$$

نعطي قيم لـ k:

$$k = 0 \;\Longrightarrow\; \theta = 0 \quad \in [0,2\pi[$$

$$k = 1 \;\Longrightarrow\; \theta = \frac{2\pi}{3} \;\in [0,2\pi[$$

$$k = 2 \;\Longrightarrow\; \theta = \frac{4\pi}{3} \;\in [0,2\pi[$$

$$k = 3 \;\Longrightarrow\; \theta = 2\pi \;\notin [0,2\pi[$$

إذاً مجموعة حلول المعادلة $z^3 = 1$ ضمن الشرط $\theta \in [0,2\pi[$ هي:

$$\mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$$

5

$$z^2-2(cos\theta)z+1=0 \Longrightarrow z^2-2(cos\theta)z+cos^2\theta-cos^2\theta+1=0$$

$$(z-cos\theta)^2+sin^2\theta=0 \Longrightarrow (z-cos\theta)^2-isin^2\theta=0 \Longrightarrow$$

$$(z-cos\theta-isin\theta)(z-cos\theta+isin\theta)=0$$

$$z_1=cos\theta+isin\theta=e^{i\theta} \quad , \quad z_2=cos\theta-isin\theta=e^{-i\theta}$$

طريقة ثانية :

$$\Delta=b^2-4ac=4cos^2\theta-4(1)(1)=4cos^2\theta-4=4(cos^2\theta-1)=-4sin^2\theta$$

$$\sqrt{-\Delta}=2sin\theta$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2cos\theta+i2sin\theta}{2}=cos\theta+isin\theta=e^{i\theta}$$

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2cos\theta-i2sin\theta}{2}=cos\theta-isin\theta=e^{-i\theta}$$

6

$$iz^2-3z+4i=0$$

$$a=i\,,b=-3\,,c=4i$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(i)(4i)=9+16=25$$

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+3+5}{2i}=\frac{8}{2i}=-4i \quad , \quad z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+3-5}{2i}=\frac{-2}{2i}=i$$

7

$$z^2+(1+2i)z+\frac{1}{2}+i=0$$

$$a=1\,,b=1+2i\,,c=\frac{1}{2}+i$$

$$\Delta=b^2-4ac=(1+2i)^2-4(1)\left(\frac{1}{2}+i\right)=-5$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-1-2i+\sqrt{5}i}{2}=\frac{-1}{2}-\frac{2-\sqrt{5}}{2}i \quad ,$$

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-1-2i-\sqrt{5}i}{2}=\frac{-1}{2}-\frac{2+\sqrt{5}}{2}i$$

❽

$2iz^2+(3+7i)z+4+2i=0$

$a=2i\,,b=3+7i\,,c=4+2i$

$\Delta=b^2-4ac=(3+7i)^2-4(2i)(4+2i)=-24+10i$

بفرض $w=x+iy$ وبالتالي سنبحث عن $w=x+iy$ بحيث $w^2=\Delta$

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} & (1)\\ x^2-y^2=a & (2)\\ 2xy=b & (3)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=26 & (1)\\ x^2-y^2=-24 & (2)\\ 2xy=10 & (3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $x_2=-1$, $x_1=-1$ $2x^2=2\Rightarrow$

من المعادلتين (1) و (2) بالطرح : $y=5$, $y=-5$ $2y^2=50\Rightarrow$

من المعادلة (3) بما أن $x.y=5>0$

فالعددين من إشارة واحدة وبالتالي جذور المميزΔ هي :

$w=1+5i\quad,\quad -w=-1-5i$

$$z_1=\frac{-b+w}{2a}\Rightarrow z_1=\frac{-3-7i+1+5i}{4i}=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$z_2=\frac{-b-w}{2a}\Rightarrow z_2=\frac{-3-7i-1-5i}{4i}=-3+i$$

❾ بفرض w هو الحل التخيّلي البحت وبالتالي : $\overline{w}=-w$

وبالتالي : ❶ $w^3-(3+4i)w^2-6(3-2i)w+72i=0$

بأخذ مرافق الطرفين نجد : $\overline{w}^3-(3-4i)\overline{w}^2-6(3+2i)\overline{w}-72i=0$

وبما أنّ $\overline{w}=-w$ فإن : ❷ $-w^3-(3-4i)w^2+6(3+2i)w-72i=0$

بجمع ❶ و ❷ نجد : $-6w^2+24iw=0$ ومنه $6w(-w+4i)=0$

إمّا $w=0$ وهو مرفوض أو $w=4i$

وبالقسمة الاقليديّة على $z-4i$ نجد: $(z-4i)(z^2-3z-18)=0$

وبالتالي : $(z-4i)(z-6)(z+3)=0$

إذاً مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{4i,6,-3\}$

التمرين 10 :

حلّ في $\mathbb{C}$ كلاً من جمل المعادلات الآتيتين بالمجهولين z و z' :

❶ $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

❷ $\begin{cases} 2z - z' = -3 \\ 2\overline{z} + \overline{z'} = -3 + i2\sqrt{3} \end{cases}$

الحل

❶ $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

بجمع المعادلتين ينتج $4z = -4i$ وبالتالي $z = -i$ نعوّض في الثانية ينتج $z' = 2 - 2i$.

❷ $\begin{cases} 2z - z' = -3 \\ 2\overline{z} + \overline{z'} = -3 + i2\sqrt{3} \end{cases}$

نأخذ مرافق الأولى

$$\begin{cases} 2\overline{z} - \overline{z'} = -3 \\ 2\overline{z} + \overline{z'} = -3 + i2\sqrt{3} \end{cases}$$

بالجمع نجد

$$4\overline{z} = -6 + i2\sqrt{3} \Longrightarrow \overline{z} = \frac{-6}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4}i \Longrightarrow \overline{z} = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow z = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

نعوّض في الأولى ينتج $z' = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

التمرين 11 :

❶ جد المجموع $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^6$ بدلالة α

❷ ليكن $\alpha = e^{2i\pi/7}$ أثبت أن $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^6 = 0$

❸ ليكن $\alpha = i$ أحسب $A = \frac{1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6}{1+i}$

الحل

❶ المجموع يمثل مجموع 7 حدود من متتالية هندسية أساسها α وحدها الأول1

$$S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^6 = \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{7}}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}}$$

❷

$$S = \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{7}}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbf{1} - \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^{\mathbf{7}}}{\mathbf{1} - \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)} = \frac{\mathbf{1} - e^{2i\pi}}{\mathbf{1} - \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)} = \frac{\mathbf{1} - 1}{\mathbf{1} - \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)} = 0$$

❸ $A = \frac{1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6}{1+i} = \frac{\frac{1-i^7}{1-i}}{1+i} = \frac{1-i^4\times i^3}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

التمرين 12 :

أوجد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $z^2+pz+q=0$ العددين $1+2i$ و $3-5i$ جذرين لها

الحل:

نعلم أنّ مجموع الجذرين $z_1+z_2=-p$ وكذلك جداء الجذرين $z_1.z_2=q$ لذلك:

$-p=4-3i$ **وبالتالي** $p=-4+3i$ **و** $q=(1+2i)(3-5i)=13+i$

التمرين 13 :

❶ **جد الجذرين التربيعين للعدد العقدي** $w=8-6i$

❷ **جد الجذور التكعيبية للعدد العقدي** $w=8$

الحل:

❶ **بفرض** $u=x+iy$ **وبالتالي سنبحث عن** $w=x+iy$ **بحيث** $u^2=$

$$w\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} & (1)\\ x^2-y^2=a & (2)\\ 2xy=b & (3)\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2+y^2=10 & (1)\\ x^2-y^2=8 & (2)\\ 2xy=-6 & (3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) **و** (2) **بالجمع :** $x_2=+3$, $x_1=-3$ $\Longrightarrow 2x^2=18$

من المعادلتين (1) **و** (2) **بالطرح :** $y=2$, $y=-2$ $\Longrightarrow 2y^2=8$

من المعادلة (3) **بما أن** $x.y=-6<0$

فالعددين من إشارتين متعاكستين وبالتالي جذور العدد العقدي هي :

$$u_1=-3+2i\quad,\quad u_2=+3-2i$$

❷ $z^3=8$

نضع $z=r.e^{i\theta}$ **عندئذٍ الشرط** $z^3=8$ **يكافئ** $r^3.e^{3\theta i}=8e^{0i}$ **ومنه نستنتج أنّ:**

$$3\theta=2\pi k\implies\theta=\frac{2\pi}{3}k\quad:\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$r^3=8\implies r=2$$

نعطي قيم لـ k:

$$k=0\implies\theta=0\quad\in[0,2\pi[$$

$$k=1\implies\theta=\frac{2\pi}{3}\in[0,2\pi[$$

$$k=2\implies\theta=\frac{4\pi}{3}\in[0,2\pi[$$

$$k=3\implies\theta=2\pi\notin[0,2\pi[$$

إذاً مجموعة حلول المعادلة $z^3=8$ **ضمن الشرط** $\theta\in[0,2\pi[$ **هي:**

$$\mathbb{U}_3=\left\{2,2e^{\frac{2i\pi}{3}},2e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$$

وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية | زياد داوود 0936834268 سلمية | أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة | مروان بجور 0930170828 حمص

التمرين 14 :

اذا كان $j \neq 1$ **جذر تكعيبي للعدد** 1

❶ **أحسب** j^3 **واحسب المجموع** $1+j+j^2$

❷ **جد قيمة العددين** α **و**β **:** $\alpha = j^4 + j^5 - 2$ **و** $\beta = \frac{3-2j-2j^2}{5}$

الحل

❶

نضع $z = r.e^{i\theta}$ **عندئذٍ الشرط** $h^3 = 1$ **يكافئ** $r^3.e^{3\theta i} = e^{0i}$ **ومنه نستنتج أنّ:**

$$3\theta = 2\pi k \implies \theta = \frac{2\pi}{3}k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$r^3 = 1 \implies r = 1$$

نعطي قيم لـ k:

$$k = 0 \implies \theta = 0 \quad \in [0,2\pi[$$
$$k = 1 \implies \theta = \frac{2\pi}{3} \in [0,2\pi[$$
$$k = 2 \implies \theta = \frac{4\pi}{3} \in [0,2\pi[$$
$$k = 3 \implies \theta = 2\pi \notin [0,2\pi[$$

إذاً مجموعة حلول المعادلة $j^3 = 1$ **ضمن الشرط** $\theta \in [0,2\pi[$ **هي:**

$$j_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$$

بفرض $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ **فإن** $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

❷ $j^4 = e^{\frac{8i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ و $j^5 = e^{\frac{10i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$$\alpha = j^4 + j^5 - 2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} - 2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 2 = -3$$

$$\beta = \frac{3-2j-2j^2}{5} = \beta = \frac{3 - 2e^{\frac{2i\pi}{3}} - 2\frac{4i\pi}{3}}{5} = \frac{3 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{5}$$
$$= \frac{3 - 1 - \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i}{5} = \frac{1}{5}$$

التمرين 15 :

بسّط كتابة العدد العقدي : $z = \frac{1+cosx-isinx}{1+cosx+isinx}$ **موضّحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً**

الحل:

نلاحظ أنّ طويلة المقام تساوي $(1+cosx)^2 + sin^2 x = 2(1+cosx)$ **فهو ينعدم فقط في حالة كون x من الشكل** $S = \{\pi + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. **إذاً يكون Z معرّفاً في حالة $x \notin S$ أو** $x \notin \{\pi(1+2k) : k \in \mathbb{Z}\}$ **عندئذٍ.**

❖ طريقة أولى :

$$Z = \frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}} = \frac{e^{-ix}\left(e^{ix}+1\right)}{1+e^{ix}} = e^{-ix}$$

❖ طريقة ثانية :

$$Z = \frac{1+cosx-isinx}{1+cosx+isinx} = \frac{(1+cosx-isinx)^2}{(1+cosx)^2+sin^2 x}$$

$$= \frac{(1+cosx)^2 - 2isinx(1+cosx) - sin^2 x}{(1+cosx)^2+sin^2 x}$$

$$= \frac{(1+cosx)^2 - 2isinx(1+cosx) - (1-cos^2 x)}{(1+cosx)^2+1-cos^2 x}$$

$$= \frac{(1+cosx)(1+cosx-2isinx-1+cosx)}{(1+cosx)(1+cosx+1-cosx)}$$

$$= \frac{1+cosx-2isinx-1+cosx}{2} = \frac{1}{2}[2cosx-2isinx] = e^{-ix}$$

❖ طريقة ثالثة :

$$Z = \frac{1+cosx-isinx}{1+cosx+isinx} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - 2isin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2} + 2isin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{cos\frac{x}{2} - isin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2} + isin\frac{x}{2}} = \frac{e^{i\frac{-x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} = e^{-ix}$$

Scanned with CamScanner

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 16 :

ليكن : $P(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

❶ تحقق أن $P(1) = 0$

❷ استنتج أن $P(z)$ يكتب بالصيغة : $P(z) = (z-1).Q(z)$

حيث $Q(z)$ كثير حدود من الدرجة الثانية يطلب تعيينه

❸ حل المعادلة $P(z) = 0$

❹ مثل جذور المعادلة في المستوي العقدي واثبت أنها تشكل رؤوس مثلث متساوي الساقين وقائم

الحل :

❶ نعوض (1) في علاقة $P(z)$ فنجد : $P(1) = 1 - 5 + 9 - 5 = 0$

❷ بما أن $P(1) = 0$ فإن : $P(z)$ يقبل القسمة على $(z-1)$ ويكون $Q(z)$ ناتج هذه القسمة

وبالتالي يكتب بالشكل : $P(z) = (z-1).Q(z)$

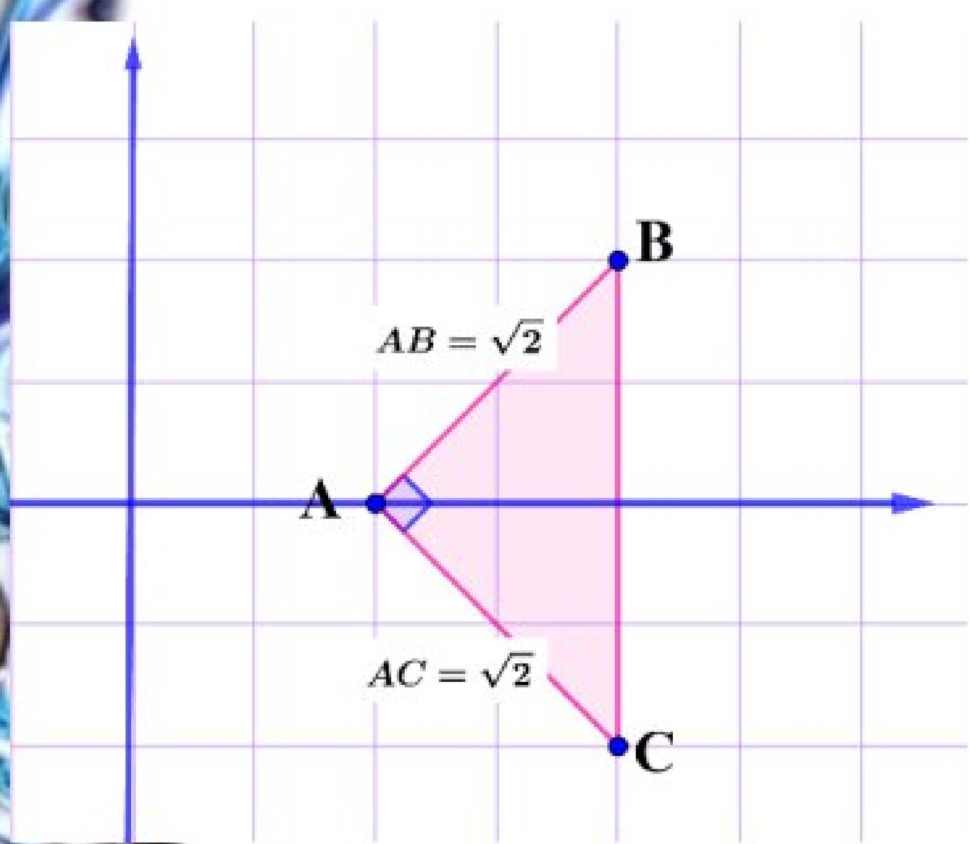
بإجراء القسمة الإقليدية نجد $Q(z) = z^2 - 4z + 5$ وبالتالي بتحليل $Q(z)$ بالإتمام الى مربع كامل :

$$P(z) = (z-1).(z^2 - 4z + 5) = (z-1).(z^2 - 4z + 4 - 4 + 5)$$
$$P(z) = (z-1).((z^2-2)^2 + 1) = (z-1).((z^2-2)^2 - i^2)$$
$$P(z) = (z-1).(z-2-i)(z-2+i)$$

❸

$$P(z) = 0 \Longrightarrow (z-1).(z-2-i)(z-2+i) = 0 \Longrightarrow (z-1) = 0 \Longrightarrow z = 1$$
$$(z-2-i) = 0 \Longrightarrow z = 2+i \quad , \quad (z-2+i) = 0 \Longrightarrow z = 2-i$$

❹



بفرض $A(1,0)$ النقطة الممثلة للعدد العقدي $z = 1$

بفرض $B(2,1)$ النقطة الممثلة للعدد العقدي $z = 2+i$

بفرض $C(2,-1)$ النقطة الممثلة للعدد العقدي $z = 2-i$

$AB^2 = 1 + 1 = 2$,
$AC^2 = 1 + 1 = 2$, $BC^2 = 0 + 4 = 4$

ومنه فالمثلث متساوي الساقين $AB = AC$

وأيضا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فحسب عكس فيثاغورث المثلث قائم في A

التمرين 17 : النموذج الوزاري الخامس

ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

❶ عيّن عددين a و b يحقّقان $P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

الحل

$$❶.\ P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$$
$$= z^4 + (a+b)z^3 + (2a + ab)z^2 + (a^2 + ab)z + a^2$$

بالمطابقة نجد: $a^2 = 4 \quad \& \quad a(a+b) = 10 \quad \& \quad 2a + ab = 10 \quad \& \quad a + b = 5$

من المعادلة الأخيرة نجد أنّ $a = 2$ او $a = -2$ وهو مرفوض لأنّه يتناقض مع الثالثة نعوّض في الأولى نجد أنّ $b = 3$ وهو يحقّق المعادلتين الثانية والثالثة.

$$P(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 3z + 2)$$
$$❷\ P(z) = 0 \implies (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 3z + 2) = 0$$
$$z^2 + 2z + 2 = 0 \implies (z+1)^2 + 1 = 0$$
$$(z+1)^2 - i^2 = 0 \implies \begin{cases} z + 1 = i & \implies z_1 = -1 + i \\ z + 1 = -i & \implies z_2 = -1 - i \end{cases}$$
$$z^2 + 3z + 2 = 0 \implies (z+2)(z+1) = 0 \implies \begin{cases} z_3 = -1 \\ z_4 = -2 \end{cases}$$

التمرين 18 :

لتكن M النقطة التي يمثّلها العدد العقدي $z = 1 + i$

جد العدد العقدي z' الممثّل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي :

❶ $\mathcal{T}$ الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$

❷ $\mathcal{H}$ التحاكي الذي مركزه O ونسبته 3

❸ $\mathcal{S}$ التناظر الذي مركزه $A(1 - 3i)$

❹ $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه $A(2 - i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

الحل: ❶ انطلاقاً من الصيغة العقديّة للانسحاب $z' = z + w$ يكون :

$$z' = 1 + i - 2 + 3i = -1 + 4i$$

❷ انطلاقاً من الصيغة العقديّة للتحاكي $z' = w + k(z - w)$ يكون :

$$z' = 0 + 3(1 + i - 0) = 3 + 3i$$

❸ حسب الصيغة العقديّة للتناظر الذي مركزه $\Omega(w)$ يكون لدينا $z' = -z + 2w$ يكون:

$$z' = -1 - i + 2(1 - 3i) = 1 - 7i$$

❹ حسب الصيغة العقديّة للدوران الذي مركزه $\Omega(w)$ يكون لدينا $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$ حيث :

$$z' - (2 - i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(1 + i - 2 + i)$$
$$z' = 2 - i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1 + 2i) = 2 - i + \frac{1}{2} - i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \sqrt{3} \implies$$
$$z' = \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right) - (2 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 19 :

فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a و b الممثلان للنقطتين A و B بالعلاقة المعطاة.

عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A في كل مما يأتي :

1. $b = a - 1 + 3i$
2. $b = 2a$
3. $b - 1 = -(a - 1)$
4. $b + 1 - i = e^{\frac{i\pi}{4}}(a + 1 - i)$

الحل

1. **نلاحظ أنّ:** $b = a - 1 + 3i = a + (-1 + 3i)$ **من الشكل :** $z' = z + w$

فالنقطة B هي صورة النقطة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$

2. **إنّ :** $b = 2a$ **يعني أنّ النقطة B هي صورة النقطة A وفق تحاكٍ مركزه O ونسبته** $k = 2$

3. **نلاحظ أنّ:** $b - 1 = -(a - 1) \Longrightarrow b = 1 - (a - 1)$ **من الشكل :** $z' = w - (z - w)$

هذا يعني أنّ النقطة B هي صورة النقطة A تناظر مركزي مركزه النقطة $w(1,0)$

4. $b + 1 - i = e^{\frac{i\pi}{4}}(a + 1 - i) \Longrightarrow b = (-1 + i) + e^{\frac{i\pi}{4}}\big(a - (-1 + i)\big)$

من الشكل : $z' = w + e^{i\theta}(z - w)$

هذا يعني أنّ النقطة B هي صورة النقطة A وفق دوران مركزه $\Omega(-1 + i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$

التمرين 20 :

لتكن النقاط $A\,,B\,,C,D$ التي تمثلها بالترتيب الأعداد العقدية التالية :

$$a=2+3i \quad , \quad b=1+2i \quad , \quad c=4+5i \quad , \quad d=3i$$

❶ وضع النقاط $A\,,B\,,C,D$ في شكل

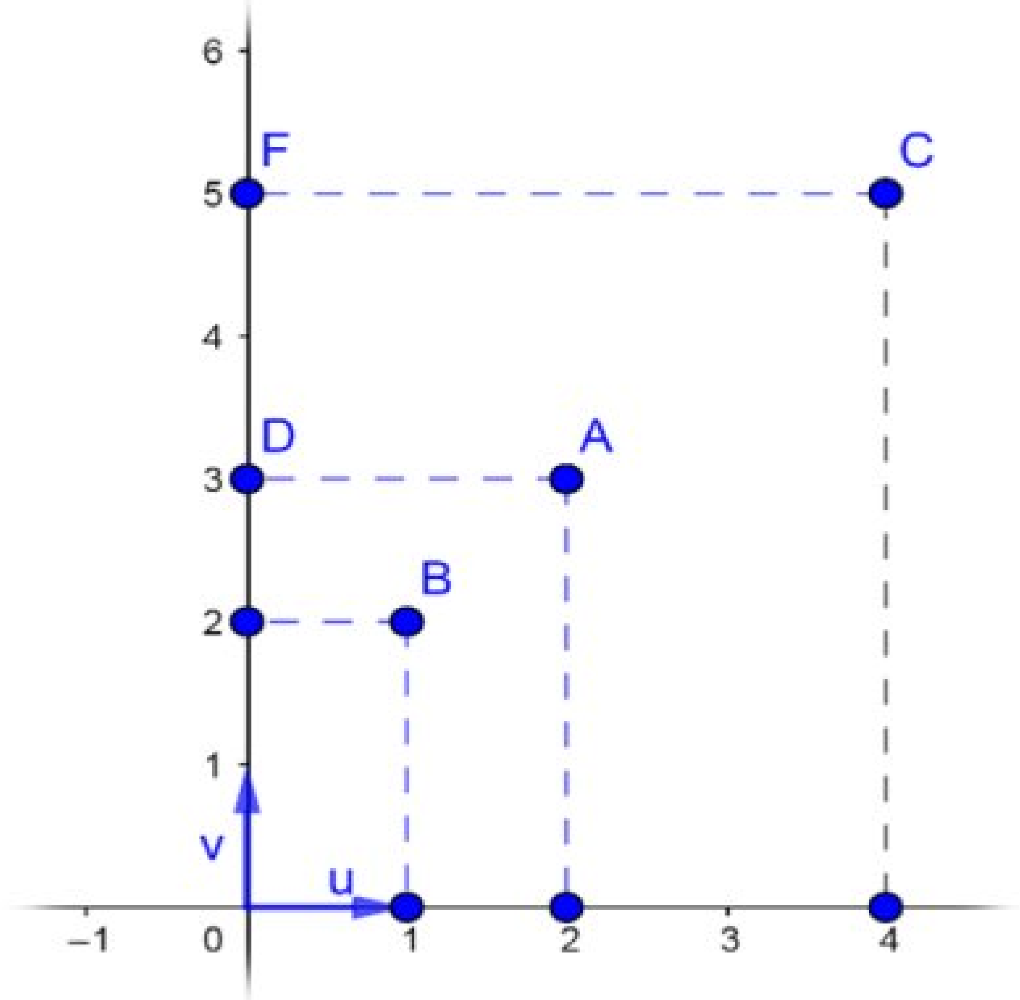
❷ أحسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة

❸ أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABD

❹ جد العدد العقدي a' الممثّل للنقطة A' صورة A وفق التناظر المركزي S الذي مركزه $C(4\,,5)$

الحل :

❶ الرسم



❷ $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

$$\Rightarrow z_{\overrightarrow{AB}}=(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)\Rightarrow z_{\overrightarrow{AB}}=-1-i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A\Rightarrow z_{\overrightarrow{AC}}=(x_C-x_A)+i(y_C-y_A)$$

$$\Rightarrow z_{\overrightarrow{AC}}=2+2i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}}=2+2i\Rightarrow z_{\overrightarrow{AC}}=-2(-1-i)\Rightarrow z_{\overrightarrow{AC}}=-2z_{\overrightarrow{AB}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$$

وبالتالي الشعاعين مرتبطين خطيا والنقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة

$$z'=-z+2w\Rightarrow z'=-2-3i+8+10i=6+7i$$

❸ $z_G=\frac{a+b+c}{3}=\frac{2+3i+1+2i+4+5i}{3}=\frac{7}{3}+\frac{10}{3}i$

❹ $a'-4-5i=-(a-4-5i)$

$$\Rightarrow a'=4+5i-(2+3i\;-4-5i)=6+7i$$

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

التمرين 21 : الاختبار 4

نتأمّل النقاط A و B و C و D الممثّلة للأعداد العقديّة $a = -1$ و $b = 2 + i\sqrt{3}$

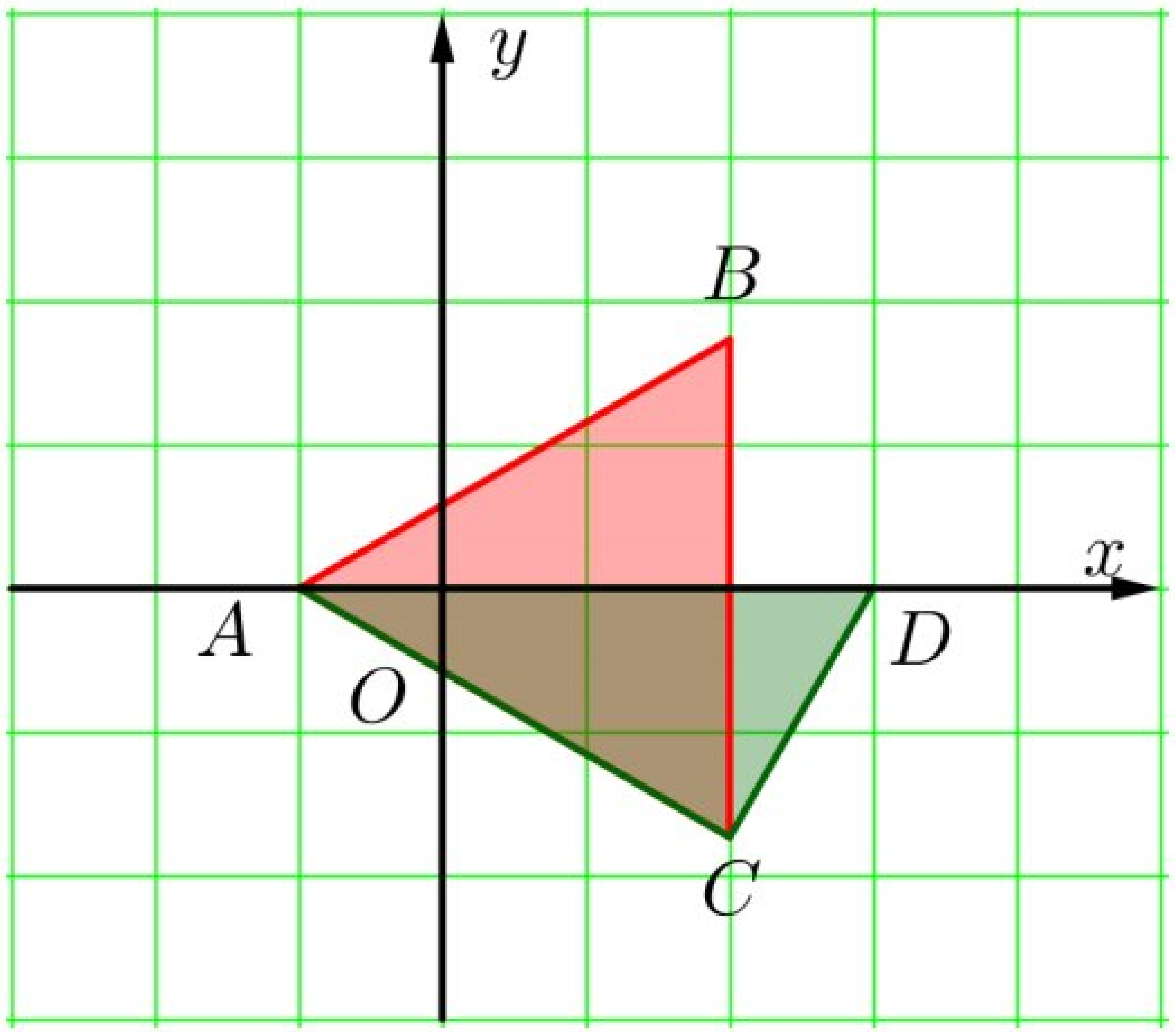
و $c = 2 - i\sqrt{3}$ و $d = 3$ بالترتيب المطلوب.

❶ ارسم النقاط A و B و C و D ، ثمّ احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلّث ABC.

❷ عيّن: $arg\,\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلّث DAC .

❸ أثبت أنّ D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$.

الحل



$$AB = |b-a| = \left|3 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |c-b| = \left|-2\sqrt{3}i\right| = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |c-a| = \left|3 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

نستنتج أنّ المثلّث ABC متساوي الأضلاع.

$$arg\,\frac{a-c}{d-c} = arg\,\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = arg\,\frac{3i^2+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = arg\;i\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$$

والمثلّث DAC قائم في C.

$$\frac{1a+2b+2c}{-1+2+2} = \frac{1+4+2\sqrt{3}i+4-2\sqrt{3}i}{3} = \frac{9}{3} = 3 = d$$

إذاً D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$.

التمرين 22 : النموذج الوزاري 2019

لتكن النقطتان A و B الممثّلة للأعداد العقديّة $z_A = -\sqrt{3} + i$ و $z_B = -2i$ بالترتيب.

❶ أثبت أنّ النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2.

❷ اكتب z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC

❸ أثبت أنّ $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلّث ABC.

الحل

❶ $|z_{OA}| = \sqrt{3+1} = 2$

$$|z_{OB}| = \sqrt{4} = 2$$

مما يعني أن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2.

$$z_A = -\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

❷

$$z_O = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \Rightarrow 0 = \frac{-\sqrt{3} + i - 2i + +z_C}{3} \Rightarrow z_C = \sqrt{3} + i$$

❸

$$z_C - z_A = +\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i = 2\sqrt{3}$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)(2i + \sqrt{3} - i) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - 3i)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} + i\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = z_C - z_A$$

وهذا يعن أن النقطة C هي صورة النقطة B وفق الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\left(+\frac{\pi}{3}\right)$

والمثلث ABC متساوي الاضلاع

التمرين 23 : دورة 2018 الأولى

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط M,C,B,A

التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $m=-1+i\,,\,c=2i\,,\,b=1-i\,,\,a=-1-i$

❶ مثل الأعداد $m=-1+i\,,\,c=2i\,,\,b=1-i\,,\,a=-1-i$

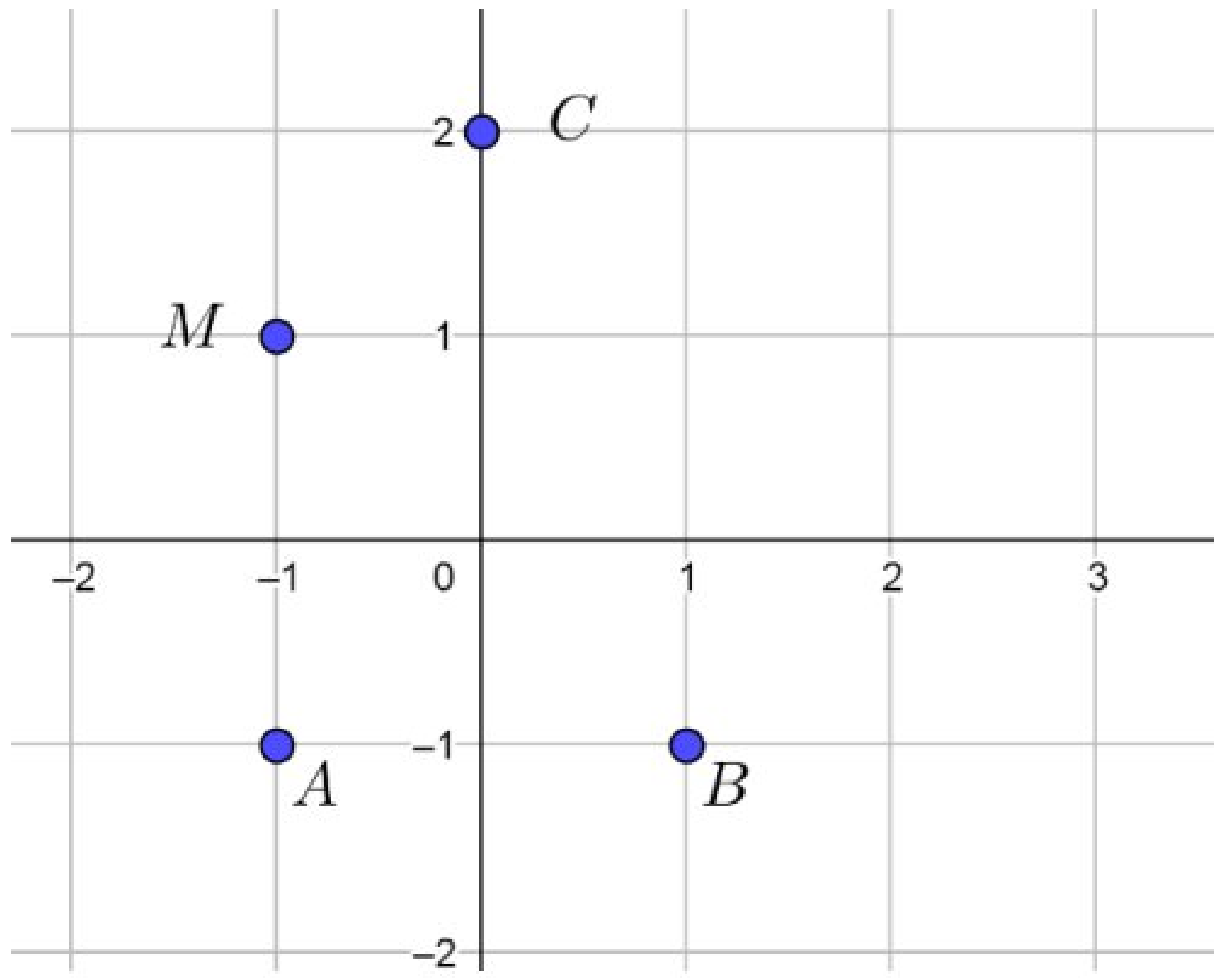
❷ احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

❸ أثبت أن النقاط M وO وB تقع على استقامة واحدة.

❹ احسب $arg\frac{c-d}{m}$ واستنتج أن (OM) و(DC) متعامدان

الحل

❶ الرسم



❷ $d=ic=i\times 2i=-2$

❸ $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right)=arg\left(\frac{m}{b}\right)$, يعطي $\frac{m}{b}=\frac{-1+i}{1-i}=-1$

$\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right)=arg(-1)=\pi$ وبالتالي $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}$ مرتبطان خطياً ومنه النقاط B,O,M تقع على استقامة واحدة.

❹ $\frac{c-d}{m}=\frac{2+2i}{-1+i}=\frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-4i}{2}=-2i$

ومنه $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{DC}\right)=arg\left(\frac{c-d}{m}\right)=-\frac{\pi}{2}$ ومنه (OM) و (DC) متعامدان.

التمرين 24 :

لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثّلها الأعداد العقديّة:

$$a = 2 - 2i \quad \& \quad b = -1 + 7i \quad \& \quad c = 4 + 2i \quad \& \quad d = -4 - 2i$$

❶ ليكن e العدد المُمثّل للنقطة E منتصف $[AB]$ احسب e وبرهن أنّ: $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

❷ ماذا يمثّل المستقيم (EA) في المثلّث DEC ؟

الحل

❶ حساب e العدد المُمثّل للنقطة E منتصف $[AB]$

$$e = z_E = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{3-9i}{-9-9i} = \frac{1-3i}{-3-3i}$$

$$= \frac{-3 + 3i + 9i + 9}{18} = \frac{1+2i}{3}$$

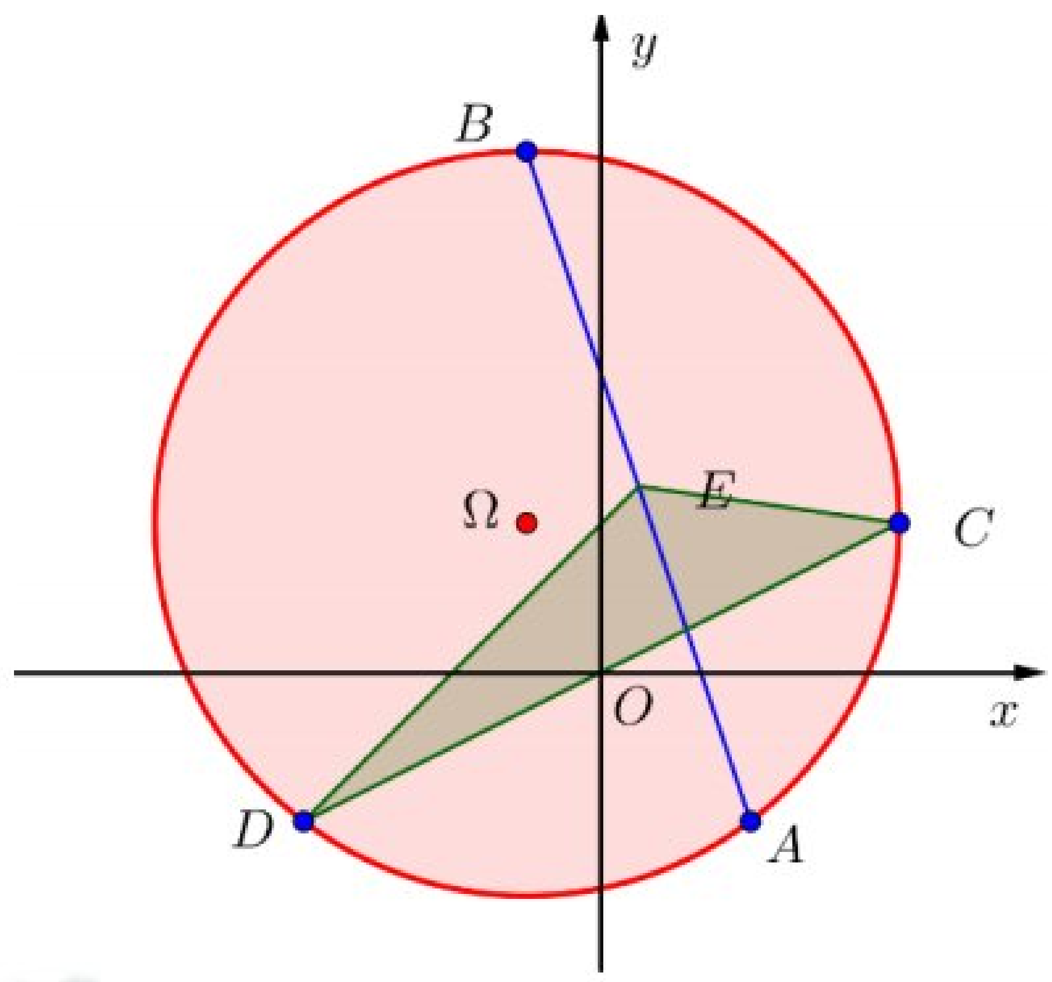
$$\frac{c-e}{a-e} = \frac{4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{7-i}{3-9i} = \frac{21 + 63i - 3i + 9}{90} = \frac{1+2i}{3}$$

ومنه نلاحظ أنّ:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

❷ يمثّل المستقيم (EA) هو منصّف للزاوية $\widehat{CED}$ في المثلّث DEC وذلك لأنّ:

$$arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right) \implies \widehat{AEC} = \widehat{AED}$$



التمرين 25 : دورة 2019 الأولى

لتكن النقطتان B, A اللتان يمثلهما على الترتيب العددان العقديان

$z_A = -1 + i \quad , \quad z_B = -3i$ **وليكن :** $p(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$

❶ **أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $p(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة**

❷ **جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$**

❸ **اكتب z_A بالشكل الأسي**

الحل

❶ **نعوض Z_A في المعادلة**

$$(-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i$$
$$= 1 - 2i + i^2 - 1 + i - 2i + 2i^2 + 3 + 3i$$
$$= -2i - 1 + i - 2i - 2 + 3 + 3i = 0$$

Z_A جذر للمعادلة

نعوض Z_B في المعادلة

$$(-3i)^2 + (1+2i)(-3i) + 3 + 3i$$
$$= -9 - 3i + 6 + 3 + 3i = 0 \Rightarrow$$

Z_B جذر للمعادلة

❷ **قانون الدوران** $Z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

$$Z' - Z_B = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_A - Z_B)$$
$$Z' + 3i = i(-1 + i + 3i) \Rightarrow Z' = -4 - 4i$$

❸ $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{-1}{r_2}$$
$$sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{1}{r_2}$$
$$\Rightarrow arg(Z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}$$
$$Z_A = r.e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

التمرين 26 : دورة 2019 الثانية

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A,B,C,

التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a=6-i$, $b=-6+3i$, $c=-18+7i$

❶ احسب العدد احسب $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن النقاط A,B,C تقع على استقامة واحدة.

❷ بفرض أن $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة النقطة A

وفق دوران مركزه O وزاويته θ أحسب θ

❸ جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً

الحل

❶ $\frac{b-a}{c-a}=\frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}=\frac{-12+4i}{-24+8i}$

$$=\frac{-12+4i}{2(-12+4i)}=\frac{1}{2}$$

$$arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)=arg\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$\Leftarrow$ النقاط A,B,C على استقامة واحدة

❷ $d-0=e^{i\theta}(a-0)$

$$d=e^{i\theta}a\Rightarrow\frac{d}{a}=e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow\theta=arg\left(\frac{d}{a}\right)$$

$$\frac{d}{a}=\frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)}=\frac{6+i+36i-6}{36+1}=\frac{37i}{37}=i$$

$$\Rightarrow\theta=arg\left(\frac{d}{a}\right)=\frac{\pi}{2}$$

❸ $z_{OA}=z_{DN}\Longrightarrow a-o=n-d\Longrightarrow n=a+d=6-i+1+6i=7+5i$

التمرين 27 : (للأستاذ القدير مازن الحمصي)

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نتأمل النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية

$d=-1+3i\,,\, c=3+3i\,,\, b=3+i\,,\, a=-1+i$

❶ تحقق أن $a+c=b+d$

❷ أثبت أن $b-a=-2i(d-a)$

❸ استنتج أن $ABCD$ مستطيل

الحل

❶

$$a+c=-1+i+3+3i=2+4i$$
$$b+d=3+i-1+3i=2+4i$$
$$\Rightarrow a+c=b+d$$

❷

$$b-a=3+i+1-i=4$$
$$-2i(d-a)=-2i(-1+3i+1-i)$$
$$=2i(2i)=4i^2=+4$$
$$\Rightarrow b-a=-2i(d-a)$$

❸

مما سبق نجد من ❶ أن الرباعي قطراه متناصفان فهو متوازي أضلاع ونجد من ❷ أن

$\frac{b-a}{d-a}=2i$ تخيلي بحت

$$(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})=arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}$$

أي $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ متعامدان

إذاً $ABCD$ مستطيل.

التمرين 28 :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقاط M,B,A التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية $m=1\,,b=1+i\,,a=\frac{\sqrt{3}+2}{2}+\frac{1}{2}i$

❶ جد العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة A وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

❷ جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة B وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(-1\,,0)$.

❸ أثبت أن العدد $\frac{d-c}{a-c}$ حقيقي واستنتج أن النقاط C,D,A تقع على استقامة واحدة

الحل :

$$c-m=i(a-m)$$

$$c-1=i\frac{\sqrt{3}+2}{2}-\frac{1}{2}-i$$

$$c-1=\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$c=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

حيث $a=\frac{\sqrt{3}+2}{2}+\frac{1}{2}i$

$$d=b-1\Rightarrow d=i$$

$$\frac{d-c}{a-c}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+i}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{-1-\sqrt{3}i+2i}{\sqrt{3}+1+i-\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{(-1-\sqrt{3}i+2i)(\sqrt{3}+1-i+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}+1)^2+(1-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}-1+i-\sqrt{3}i-3i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}+3+2\sqrt{3}i+2i+2-2\sqrt{3}}{8}$$

$$=\frac{4-4\sqrt{3}}{8}\epsilon R$$

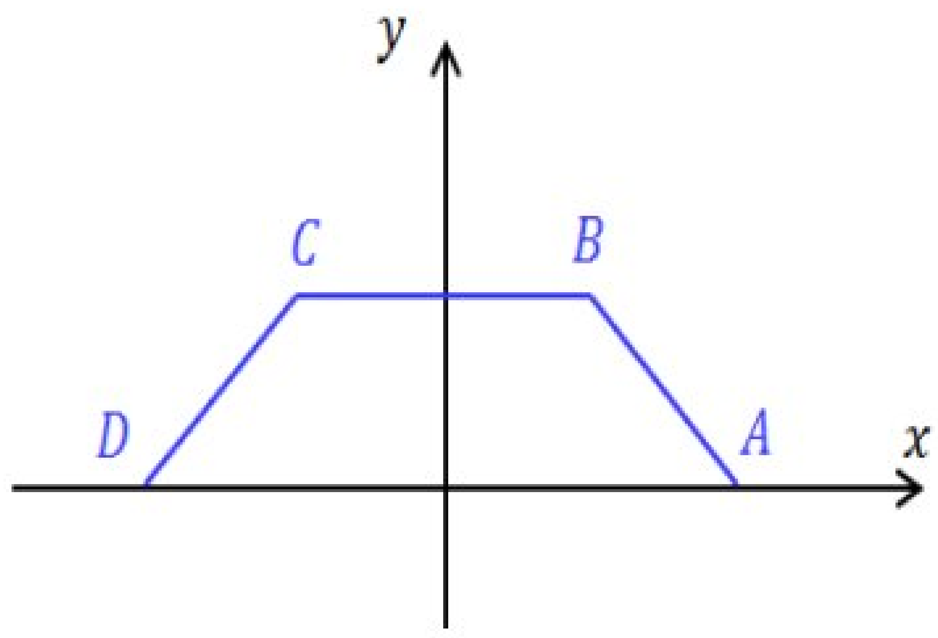
والنقاط C,D,A تقع على استقامة واحدة

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 29 :

في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس نصف مسدس منتظم $ABCD$

النقاط A, B, C, D تمثلها الاعداد العقدية a, b, c, d على الترتيب



❶ اذا علمت أن $a = 2$ أوجد الاعداد العقدية b, c, d

❷ أحسب $arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right)$ ثم استنتج نوع المثلث ACD

الحل:

$$d = -a = -2$$

$$b = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\, sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$c = -\bar{b} = -\left(\overline{1 + \sqrt{3}i}\right) = -(1 - \sqrt{3}i)$$

$$= -1 + \sqrt{3}i$$

$$\frac{d-c}{a-c} = \frac{-2 + 1 - \sqrt{3}i}{2 + 1 - \sqrt{3}i} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{(-1 - \sqrt{3}i)(3 + \sqrt{3}i)}{9 + 3} = \frac{-3 - \sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i + 3}{12}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}i}{12} = \frac{-1}{\sqrt{3}}i$$

إذاً تخيلي بحت

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{-2\sqrt{3}}{9}i\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$\Leftarrow$ ACDمثلث قائم في C

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 30 :

في كل من الحالات الآتية عيّن مجموعة النقاط M التي يحقّق العدد العقدي z الذي يمثلها الشرط المُعطى :

❶ $argz = \frac{\pi}{3}$, ❷ $argz = \pi$, ❸ $Im(z) = 1$, ❹ $Re(z) = -2$

الحل:

❶ $argz = \frac{\pi}{3}$

نصف مستقيم بدايته مبدأ الاحداثيّات ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل.

❷ $argz = \pi$

مجموعة الأعداد الحقيقيّة السالبة.

❸ $Im(z) = 1$

مستقيم يوازي محور الفواصل ويمر بالنقطة التي إحداثيّاتها $(0,1)$.

❹ $Re(z) = -2$

مستقيم يوازي محور التراتيب ويمر بالنقطة التي إحداثيّاتها $(-2,0)$.

التمرين 31 :

ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(z)$ في كل من الحالات التالية

❶ $|z| = 3$, ❷ $|z-3-2i| = 1$, ❸ $|z-1| = |z-3-2i|$, ❹ $|z-1|^2 = 2|z|^2$

الحل

❶ $|z| = 3$ **دائرة مركزها مبدأ الاحداثيّات ونصف قطرها 3**

❷ $|z-3-2i| = 1$

$|z-(3+2i)| = 1$ **تُكتب الشكل** $|z-z_B| = 1$ **حيث** $z_B = 3+2i$ **وبالتالي مجموعة النقاط هي دائرة مركزها** $B(3,2)$ **ونصف قطرها يساوي** 1.

$$|z-3-2i| = 1$$
$$|(x-3)+(y-2)i| = 1$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2 = 1$$

وهي معادلة دائرة مركزها $B(3,2)$ **ونصف قطرها يساوي** 1.

❸

طريقة أولى

نحوّل كل طرف إلى فرق عددين عقديين :

$$|z-1| = |z-(3+2i)|$$
$$|z-z_A| = |z-z_B|$$

حيث $z_A = 1$ **العدد العقدي الذي صورته النقطة** $A(1,0)$ **و** $z_B = 3+2i$ **العدد العقدي الذي صورته النقطة** $B(3,2)$

ومنه يكون: $MA = MB$ **وهي مجموعة النقاط** M **المتساوية البعد عن** $A(1,0)$ **و** $B(3,2)$ **فهي محور القطعة المستقيمة** $[AB]$

طريقة ثانية

$$|z-1| = |z-3-2i|$$
$$|x-1+iy| = |x-3+(y-2)i|$$
$$(x-1)^2+y^2 = (x-3)^2+(y-2)^2$$

بنشر الأقواس والتجميع نجد أنّ معادلة مجموعة النقاط هي:

$$4x+4y-12 = 0 \Rightarrow x+y-3 = 0$$

❹ $|z-1|^2 = 2|z|^2$

$$(z-1)(\overline{z}-1) = 2z\overline{z}$$
$$z\overline{z}-z-\overline{z}+1 = 2z\overline{z}$$
$$z+\overline{z}+z\overline{z}-1 = 0$$
$$x+iy+x-iy+x^2+y^2-1 = 0$$
$$x^2+2x+1+y^2-2 = 0$$
$$(x+1)^2+y^2 = 2$$

دائرة مركزها $\square(-1,0)$ **ونصف قطرها** $R = \sqrt{2}$

التمرين 32 :

عيّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى :

❶ **المقدار** $(z+1)(\bar{z}-2)$ **حقيقي .**

❷ **العدد z مختلف عن $4i$ و $\frac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي .**

الحل :

❶ **يكون المقدار $w=(z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقياً إذا و فقط إذا كان $\overline{w}=w$ أي :**

$$(z+1)(\bar{z}-2)=(\bar{z}+1)(z-2)$$
$$z.\bar{z}-2z+\bar{z}-2=z.\bar{z}-2\bar{z}+z-2$$
$$z=\bar{z}$$

و المعادلة الأخيرة تعني أنّ z يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية .

❷ **يكون المقدار $\frac{z+2i}{z-4i}$ حقيقياً إذا وفقط إذا كان $z\neq 4i$ و كان $\frac{z+2i}{z-4i}=\frac{\bar{z}-2i}{\bar{z}+4i}$**

بإجراء الضرب التقاطعي : $\bar{z}z+2i\bar{z}+4iz-8=\bar{z}z-2iz-4i\bar{z}-8$

بالإصلاح نجد : $z=-\bar{z}$ **و المعادلة الأخيرة تمثل مجموعة الأعداد التخيلة البحتة عدا $4i$.**

التمرين 33 :

نزوّد المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

نقرن كل نقطة $M(z)$ حيث $z\neq i$ بالنقطة $M(z')$ حيث $z'=\frac{z+2}{z-i}$

عيّن Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً حقيقيّاً.

عيّن Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً تخيّليّاً بحتاً.

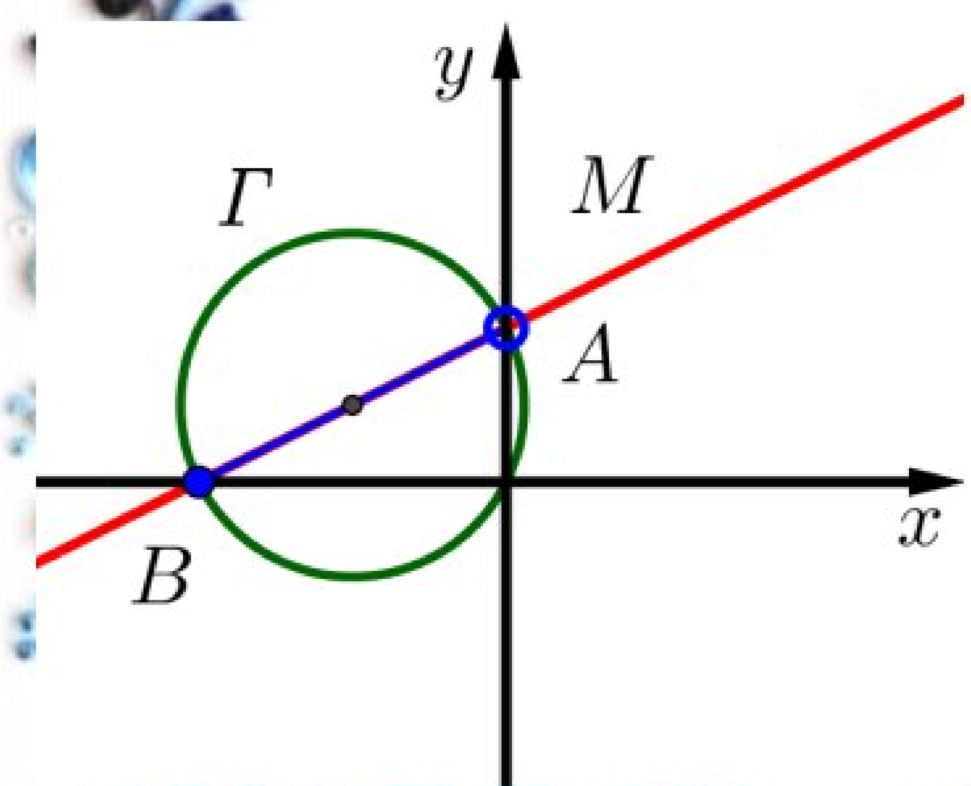
الحل :

نعرّف النقطتين $A(i)$ و $B(-2)$. عندئذٍيؤول العدد z' إلى الشكل

$$z'=\frac{z-z_B}{z-z_A}$$

تنتمي $M(z)$ إلى Δ إذا وفقط إذا كان $z=z_B$ وهذا يكافئ القول إنّ $M=B$ أو إنّ $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=0(\pi)$ أي أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطان خطياً، أو أنّ النقطة M تقع على المستقيم (AB) ومختلفة عن A إذاً $\Delta=(AM)\backslash\{A\}$.

بالمثل، تنتمي $M(z)$ إلى Γ إذا وفقط إذا كان $z=z_B$ وهذا يكافئ القول إنّ $M=B$ أو إنّ $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=+\frac{\pi}{2}(\pi)$ أي أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ متعامدان.



فالنقطة M تنتمي إلى مجموعة النقاط التي تُرى منها القطعة المستقيمة $[AB]$ تحت زاوية قائمة باستثناء النقطة A . هي إذاً الدائرة التي قطرها $[AB]$ محذوفاً منها النقطة A . وعليه Γ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ محذوفاً منها النقطة A .

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

طريقة ثانية

نفرض أنّ $z = x + iy$ وبالتالي :

$$z' = \frac{x+iy+2}{x+iy-i} = \frac{(x+2+iy)(x-(y-1)i)}{(x+(y-1)i)(x-(y-1)i)}$$
$$= \frac{x^2 - xyi + xi + 2x - 2yi + 2i + xyi + y^2 - y}{x^2+(y-1)^2}$$
$$= \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$$

- يكون z' عدداً حقيقيّاً اذا كان $x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

  بالتالي Δ تمثل المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 1$ عدا النقطة $(0,1)$

  أو $x + 2 + 2iy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ وتمثل النقطة $(-2,0)$

- يكون z' عدداً تخيّليّاً بحتاً اذا كان $x^2 + y^2 + 2x - y = 0$ وبالتالي

  $$(x^2+2x+1) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

  و Γ تمثل الدائرة التي مركزها $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $R = \frac{\sqrt{5}}{4}$ عدا النقطة $(0,1)$

  أو $x + 2 + 2iy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ وتمثل النقطة $(-2,0)$

التمرين 34 :

نعطى العددين العقديين $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - i$

❶ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

❷ اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$. ❸ استنتج $cos\frac{\pi}{12}$ و $sin\frac{\pi}{12}$

الحل :

❶ $$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{4} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

❷ $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \frac{i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \frac{i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

❸ بالمساواة بين الشكلين الجبري والمثلّثي ينتج :

$$sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

التمرين 35 :

ليكن العدد العقدي $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

❶ أثبت أن $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ثم أكتب z^2 بالشكل الأسي

❷ تحقق أن $z = e^{\frac{\pi}{12}i}$ و استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

الحل :

$$Z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$Z^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} - \frac{2-\sqrt{3}}{4} + 2i\frac{\sqrt{4-3}}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z = re^{i\theta} \Rightarrow Z^2 = e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow r^2e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$2\theta = \frac{\pi}{6} + 2Tk \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \pi k$$

حيث $k \in \{0,1\}$

$$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \Rightarrow Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{3\pi}{12}$$ مرفوض

لأن $(0 < x_Z)$

$$\Rightarrow Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$Z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

التمرين 36 :

ليكن $a = e^{2\pi i/5}$. **نضع** $A = a + a^4$ **و** $B = a^2 + a^3$.

❶ **أثبت أنّ** $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$

واستنتج أنّ A **و** B **هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية** (1) $x^2 + x - 1 = 0$

❷ **عبّر عن** A **بدلالة** $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ❸ **حل المعادلة** (1) **واستنتج قيمة** $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل :

❶ **هذا مجموع متتالية هندسية حدها الأوّل** 1 **وأساسها** a **إذاً:**

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = \frac{1 - a^5}{1 - a} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - a} = \frac{1 - 1}{1 - a} = 0$$

لإثبات أنّ A **و** B **جذوراً للمعادلة** $x^2 + x - 1 = 0$ **نلاحظ أنّ مجموع الجذرين** -1 **و جداء الجذرين** -1

$$A + B = (a + a^4) + (a^2 + a^3) =$$

$$A \times B = (a + a^4) \times (a^2 + a^3) = a^7 + a^6 + a^4 + a^3$$

وبملاحظة أنّ $a^5 = 1$ **نجد** $a^7 = a^2$ **و** $a^6 = a$ **ينتج**

$$A \times B = a^4 + a^3 + a^2 + a = -1$$

إذاً A **و** B **جذوراً للمعادلة** $x^2 + x - 1 = 0$

❷ **بملاحظة أنّ** $\overline{a} = e^{-2\pi i/5} = e^{8\pi i/5} = a^4$ **وبما أنّ:**

$$A = a + a^4 = a + \overline{a} = 2Re(a) = 2cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

❸ **بحساب جذور المعادلة** $x^2 + x - 1 = 0$ **نجد:** $\Delta = 1 + 4 = 5$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \& \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} > 0$$

التمرين 37 : الاختبار 2

❶ حل في مجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$ (لاحظ أنّ : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$)

❷ في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

لتكن النقطتان A و B الممثّلتان بالعددين العقديين

$z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$ و $z_B = \overline{z_A}$

بيّن أنّ : $\frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i}$ و استنتج زاوية العدد العقدي z_A

ثمّ استنتج : $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل:

❶ $\Delta = 4(1-\sqrt{3})^2 - 32 = 16 - 8\sqrt{3} - 32$

$= -4(4+2\sqrt{3}) = 4(1+\sqrt{3})^2 i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i(1+\sqrt{3})$

$$z_1 = \frac{2(1-\sqrt{3}) + 2(1+\sqrt{3})i}{2} = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$$

$$z_2 = \frac{2(1-\sqrt{3}) - 2(1+\sqrt{3})i}{2} = (1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i = \overline{z_1}$$

❷ $$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)i} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + 4i - (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+4i}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

نلاحظ أنّ z_A و z_B مترافقين وبالتالي لهما زاويتين متساويتين بالقيمة المطلقة ومتعاكستين بالإشارة وبالتالي ويكون قياس كل منهما:

$$\theta = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

$$z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

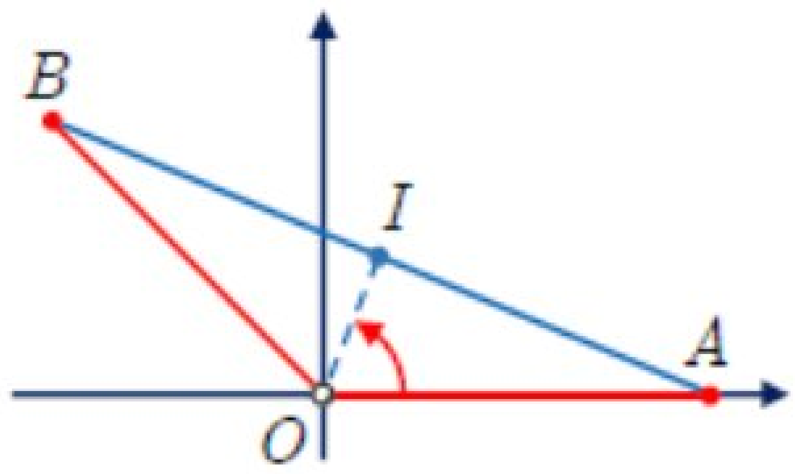
التمرين 38 :

نتأمّل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a = 2$ و $b = 2e^{3i\pi/4}$ وليكن I منتصف $[AB]$

❶ a . ارسم شكلاً مناسباً، وبيّن طبيعة المثلث OAB. b . استنتج قياساً للزاوية .

❷ a . احسب العدد العقدي z_i المُمَثّل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b استنتج كلاً من $cos\frac{3\pi}{8}$ و $sin\frac{3\pi}{8}$



الحل :

❶ المثلث OAB مثلث متساوي الساقين رأسه O .

المستقيم (OI) متوسط في هذا المثلث فهو منصف زاوية رأسه،

ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8}$

❷ هنا $z_I = \frac{1}{2}(a+b) = 1 + e^{3\pi i/4}$ إذن من جهة أولى لدينا $z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ومن جهة ثانية $z_I = |z_I|.e^{3i\pi/8} = \sqrt{2-\sqrt{2}}e^{3i\pi/8}$ وهكذا نجد أنّ :

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

أو $cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} + \frac{i}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$

ومنه بمقارنة الجزأين الحقيقيين والتخيليّن نجد $cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$ و $sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

التمرين 39 :

تأمّل الشكل واحسب المجموع $\alpha + \beta + \gamma$ ،

حيث γ و β و α

هي القياسات الأساسية للزوايا الموجّهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$

و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب

الحل :

نلاحظ أنّ كلاً من الزوايا γ و β و α أصغر من $\frac{\pi}{4}$. فمجموعها $\theta = \alpha + \beta + \gamma$ ينتمي إلى المجال $]0,\pi[$

الشعاع $\overrightarrow{OD}$ يمثله العدد العقدي $8 + i = \sqrt{65}e^{i\alpha}$ و الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يمثله العدد العقدي $5 + i = \sqrt{26}e^{i\beta}$

الشعاع $\overrightarrow{BD}$ يمثله العدد العقدي $2 + i = \sqrt{5}e^{i\alpha}$. وبالتالي :

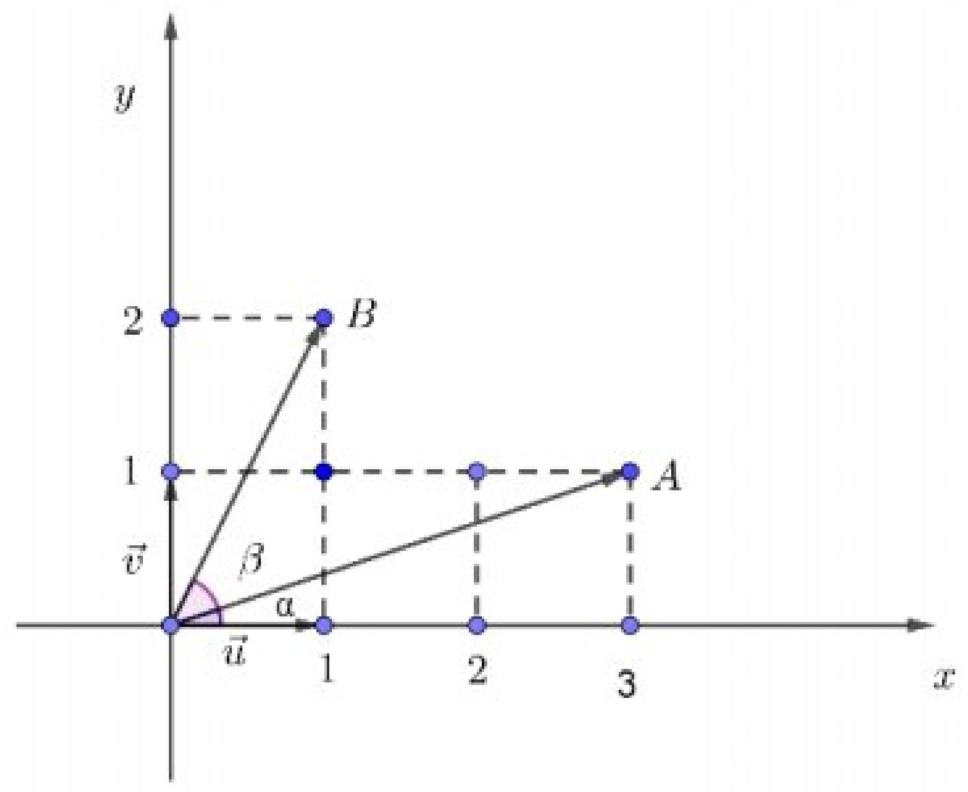
نستنتج إذاً:

$$\sqrt{65}e^{i\alpha}.\sqrt{26}e^{i\beta}.\sqrt{5}e^{i\alpha} = (8+i)(5+i)(2+i)$$
$$65\sqrt{2}e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = (39+13i)(2+i) \Rightarrow 65\sqrt{2}e^{i\theta} = 65(1+i)$$
$$\sqrt{2}(cos\theta + isin\theta) = 1 + i \Rightarrow cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ \& \ \ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبما أنّ $\theta \in]0,\pi[$ فإنّ $\theta = \frac{\pi}{4}$.

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

التمرين 40 : دورة 2020 الأولى



نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$:

بفرض أن α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{oA})$

و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{oB})$.

❶ اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين Z_A و Z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B.

❷ اكتب العدد العقدي $\frac{Z_B}{Z_A}$ بالشكلين الجبري والأسي, ثم استنتج قيمة $\beta-\alpha$.

الحل

❶ $$A\,(3,1) \Longrightarrow Z_A = 3+i$$

$$B\,(1,2) \Longrightarrow Z_B = 1+2i$$

❷ $$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{5+5i}{10}$$

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{cases}|Z_B| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\\ |Z_A| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}arg(Z_B) = \beta\\ arg(Z_A) = \alpha\end{cases}$$

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{\sqrt{5}e^{\beta i}}{\sqrt{10}e^{\alpha i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)}$$

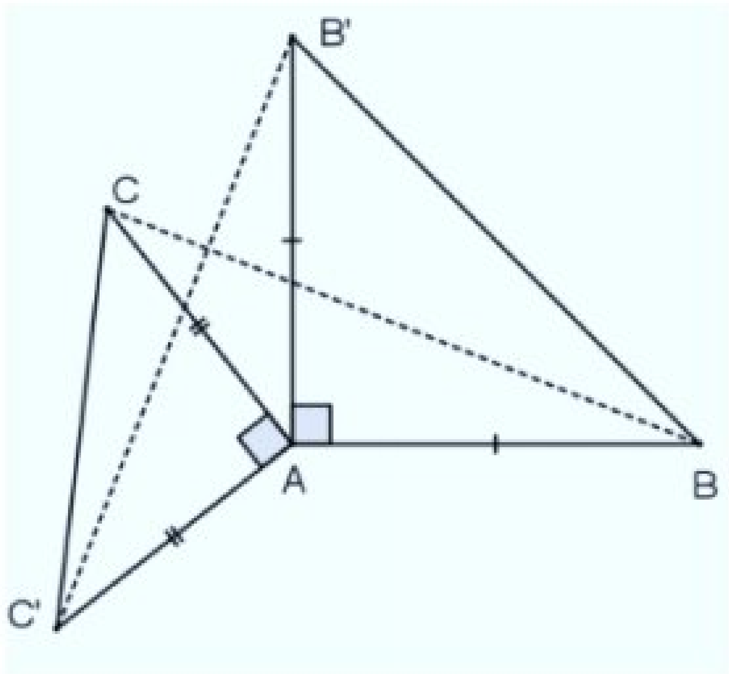
$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)}$$

أي $\beta-\alpha = \frac{\pi}{4}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 41 : النموذج الوزاري الأول 2020

في الشكل المجاور المثلثان ABB' و ACC' كل منهما قائم في A ومتساوي الساقين,



تأمل المعلم المتجانس والمباشر $(A,\vec{u},\vec{v})$, والمطلوب:

❶ اكتب $Z_{B'}$ بدلالة Z_B, و $Z_{C'}$ بدلالة Z_C.

❷ احسب $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}$

❸ استنتج أن $(BC) \perp (B'C')$ و $BC = B'C'$.

الحل

❶ النقطة B' صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}}Z_B$$
$$\Rightarrow Z_{B'} = iZ_B$$

النقطة C' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{2}}Z_C$$
$$\Rightarrow Z_{C'} = iZ_C$$

❷

$$\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = \frac{iZ_B-iZ_C}{Z_B-Z_C}$$
$$= \frac{i(Z_B-Z_C)}{Z_B-Z_C}$$
$$\Rightarrow \frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = i$$

❸ لدينا $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = i$

التعامد:

$$arg\left(\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$$
$$\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{C'B'}}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow CB \perp C'B'$$

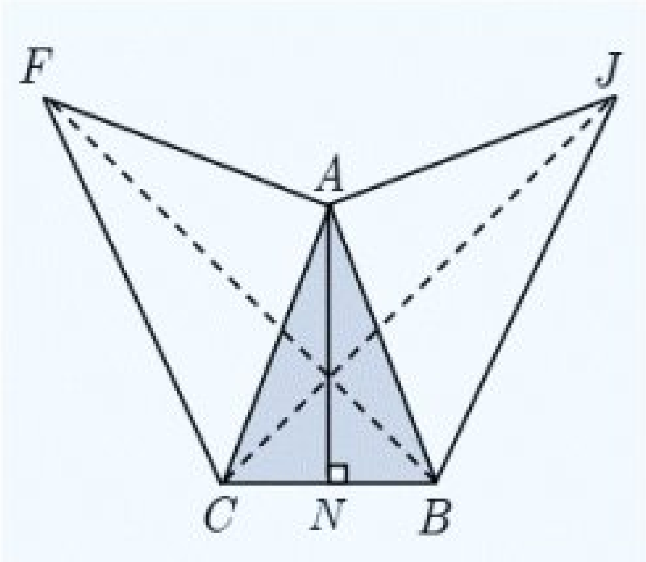
التساوي:

$$\left|\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}\right| = |i|$$
$$\frac{C'B'}{CB} = 1$$
$$\Rightarrow C'B' = CB$$

التمرين 42 : النموذج الوزاري الثاني 2020

ليكن ABC مثلثاً متساوي الساقين, رأسه A. ننشئ خارجه مثلثين قائمين ومتساويا الساقين ACF, ABJ.

لتكن الأعداد الحقيقية a, b, c, j, f الممثلة للنقاط A, B, C, J, F بالترتيب.



❶ **جد بدلالة c, b العددين f, c.**

❷ **اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري.**

❸ **أثبت أن $JC = BF$, وأن المستقيمين (CJ)و(BF) متعامدان.**

❹ **نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1),(C,1),(F,3),(J,2)$ احسب $\frac{c}{b}$**

الحل :

نختار معلم متجانس $(A: \vec{u}, \vec{v})$:

1 Jصورة B وفق دوران مركزه Aوزاوية $\frac{\pi}{2}$

$$j - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(b - a) \Longrightarrow j = ib$$

Fصورة Cوفق دوران مركزه Aوزاوية $-\frac{\pi}{2}$

$$f - a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c - a) \Longrightarrow f = -ic$$

2

$$\frac{f-b}{c-j} = \frac{-ic-b}{c-ib} \cdot \frac{i}{i} = \frac{c-bi}{(c-bi)i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} \frac{f-b}{c-j} = -i$$

3

$$\frac{f-b}{c-j} = -i$$

$$arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right) = arg(-i) \Longrightarrow (\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{BF}) = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{JC} \perp \overrightarrow{BF}$$

إذا المستقيمان متعامدان (JC)و(BF)

$$\left|\frac{f-b}{c-j}\right| = |-i| \Longrightarrow \frac{BF}{JC} = 1 \Longrightarrow BF = JC$$

4 **Aمركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة**

$$(B,1),(C,1),(F,3),(J,2)$$

$$a = \frac{b+c+3f+2j}{1+1+3+2} = \frac{b+c-3ci+2bi}{7}$$

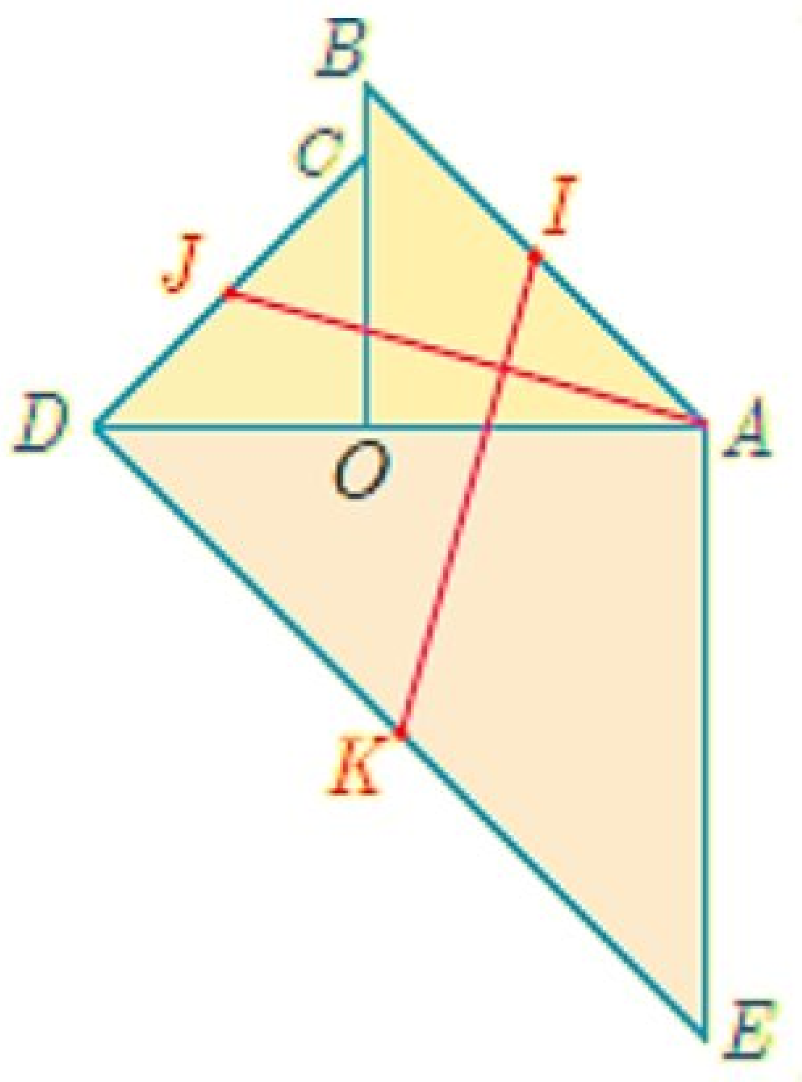
$$b + c - 3ci + 2bi = 0$$

$$c - 3ci = -b - 2bi$$

$$c(1-3i) = b(-1-2i)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{-1-2i}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{-1-3i-2i+6}{1+9} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

التمرين 43 :



نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور.

المثلثات OAB و OCD و ADE مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة.

النقاط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات.

نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O

ونرمز a و c إلى العددين العقديين المُمثّلين للنقطتين A و C .

❶ a . عبّر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط B و D و E

b . استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثّل النقاط I و J و K .

❷ أثبت أنّ $(z_K - z_I) = i(z_J - a)$.

❸ استنتج ان المستقيمين (AJ) و (IK) متعامدان وأنّ $IK = AJ$.

الحل:

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول O ،
الذي نرمزه $\mathcal{R}$ ، كان : $z' = e^{i\pi/2}z = iz$

لمّا كان $B = \mathcal{R}(A)$ و $D = \mathcal{R}(C)$ كان $b = ia$ و $d = ic$. ولأنّ E هي صورة D
وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول A كان $e - a = i(d - a)$ ومنه

$$e = a + i(ic - a) = (1 - i)a - c$$

إذاً:

$$z_I = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1+i}{2}a\,,\ z_J = \frac{1}{2}(c + d) = \frac{1+i}{2}c\ ,\ z_K = \frac{1}{2}(e + d) = \frac{1-i}{2}(a - c)$$

ومنه

$$z_K - z_I - i(z_J - a) = \frac{1-i}{2}(a - c) - \frac{1+i}{2}a - i\left(\frac{1+i}{2}c - a\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1 - i - 1 - i + 2i)a + \frac{1}{2}(-1 + i - i + 1)c = 0$$

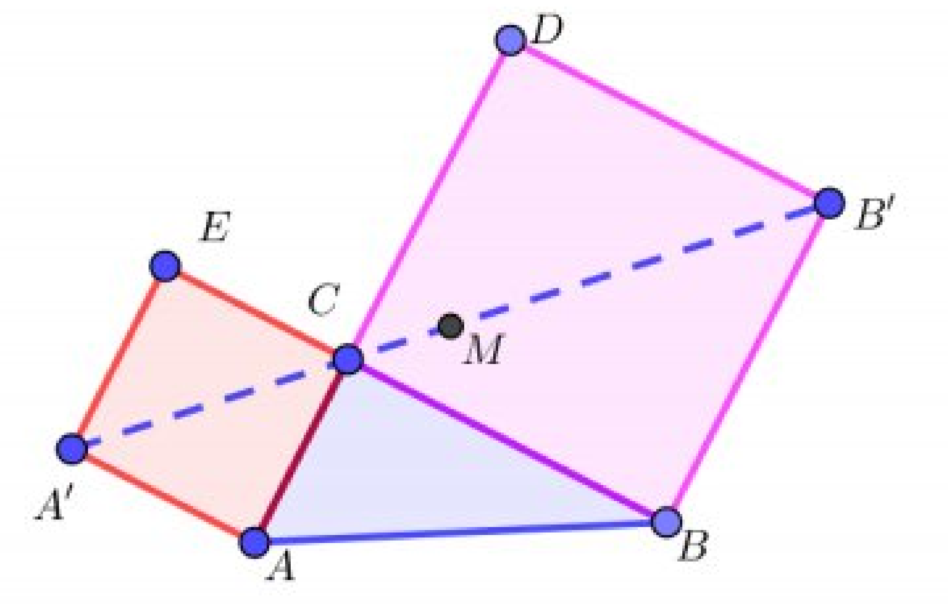
إذاً $z_K - z_I = i(z_J - a)$. وعليه.

$$arg\left(\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad |z_K - z_I| = |z_J - a|$$

أي $IK = AJ$ و $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{2}$ ، فالمستقيمان (AJ) و (IK) متعامدان.

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 44 : النموذج الوزاري الأول



ليكن المثلّث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربّعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشكل المجاور.

تمثّل الأعداد العقديّة $a\,,b\,,c\,,a',b'$ النقاط $A\,,B\,,C\,,A',B'$.

❶ B'هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عيّنه واكتب الصيغة العقديّة للعدد b' بدلالة b و c

❷ أثبت أنّ $a' = i(c-a)+a$.

❸ عيّن العدد العقدي m الممثّل للنقطة M منتصف $[A'B']$.

❹ كيف تتغيّر النقطة M عندما تتحوّل C في المستوي ؟

الحل :

❶ B' هي صورة C وفق دوران غير مباشر مركزه B وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ وبالتالي :

$$z' = w + e^{i\theta}(z-w) \Rightarrow b' = b + e^{i\frac{-\pi}{2}}(c-b) \Rightarrow b' = b - i(c-b)$$

❷ $AC = AA'\;,\;(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}}) = +\frac{\pi}{2}$ وبالتالي :

A' هي صورة C وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالتالي :

$$z' = w + e^{i\theta}(z-w) \Rightarrow a' = a + e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a) \Rightarrow a' = a + i(c-a)$$

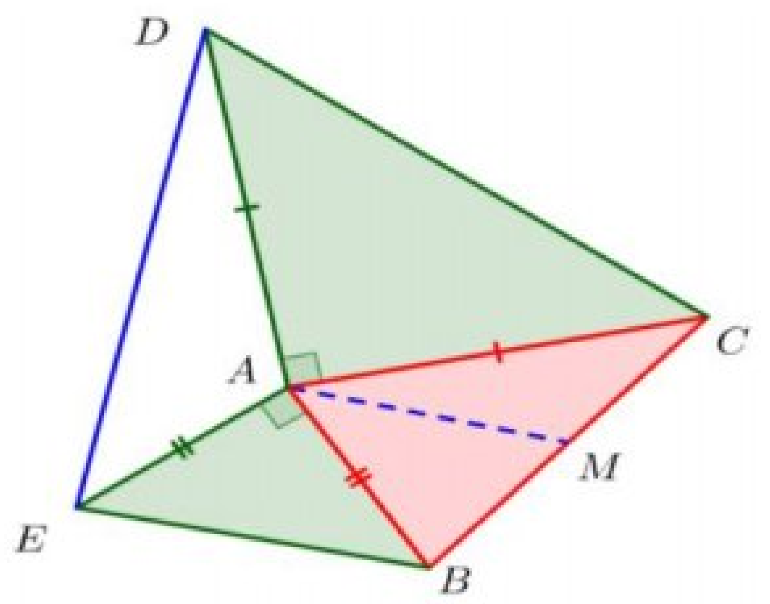
❸
$$m = \frac{a'+b'}{2} = \frac{a+i(c-a)+b-i(c-b)}{2} = \frac{a+ic-ia+b-ic+ib}{2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{a+b+i(b-a)}{2} \Rightarrow m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}i$$

❹ بما أن العدد العقدي m الممثل للنقطة M لا يتعلق بالعدد العقدي c الممثل للنقطة C

فإن النقطة M ثابتة مهما تحولت C في المستوي

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828



التمرين 45 : النموذج الوزاري الثاني

نتأمّل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفيّاً.

لتكن M منتصف $[BC]$,

وليكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A

ومتساويي الساقين مباشرين.

نحتار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A .

ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين

اللذين يمثّلان النقطتين B و C.

❶ احسب بدلالة b و c الأعداد العقديّة e و d و m الممثّلة للنقاط E و D و M بالترتيب.

❷ احسب $\frac{d-e}{m-a}$

ثمّ استنتج أنّ (AM) هو ارتفاع المثلّث AED وأنّ $ED = 2AM$.

❸ نفترض أنّ A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(D,2)$ و $(E,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$.

① احسب: $\frac{c-a}{b-a}$ ② استنتج قياس الزاوية: $\widehat{BAC}$.

الحل:

باعتبار A مركز للدوران نجد.

$$\mathbf{1}.\ \ e = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b) \Longrightarrow e = -ib$$

$$d = e^{i\frac{\pi}{2}}(c) \ \ \Longrightarrow d = ic \Longrightarrow m = \frac{b+c}{2}$$

$$2.\ \ \frac{d-e}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = 2i \Longrightarrow arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

بالتالي $AM \perp DE$ أي أنّ (AM) هو ارتفاع المثلّث AED

$$|d-e| = 2|m-a| \ \ \Longrightarrow \ \ ED = 2AM$$

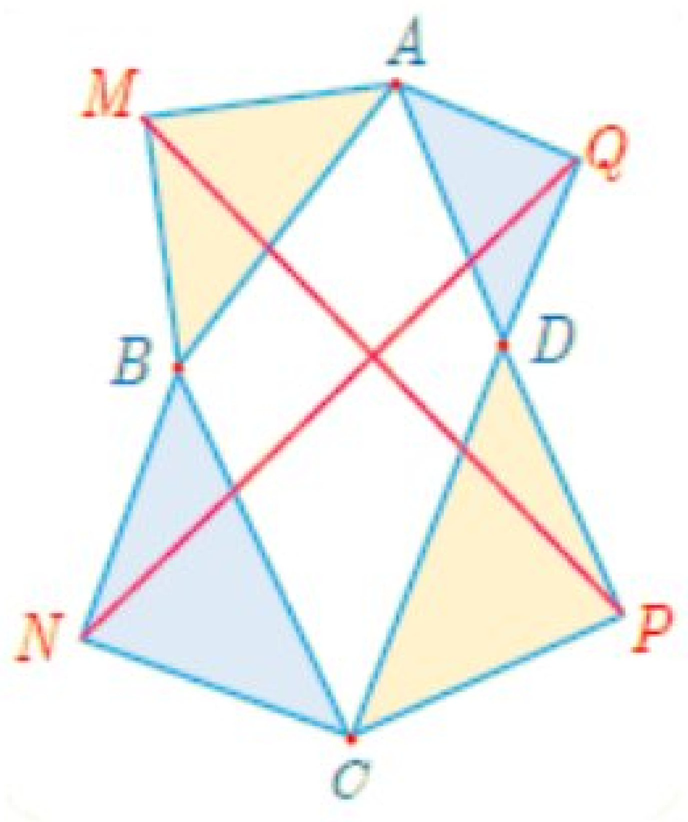
$$\mathbf{3}.\ \ a = \frac{2d+3e+c+b}{7} = \frac{2ic-3ib+c+b}{7} = \frac{(1+2i)c+(1-3i)b}{7} = 0$$

$$\Longrightarrow (1+2i)c+(1-3i)b = 0 \Longrightarrow c = -\frac{1-3i}{1+2i}b$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{b} = -\frac{1-3i}{1+2i} = -\frac{(1-3i)(1-2i)}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

التمرين 46 :



نتأمّل في المستوي الموجّه رباعياً محدّباً مباشراً $ABCD$.

ننشئ خارجه النقاط M و N و P و Q

التي تجعل المثلّثات MBA و NCB و PDC و DQA قائمة

في M و N و P و Q بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.

أثبت باستعمال الأعداد العقديّة أنّ $MP = NQ$

وأنّ المستقيمين (MP) وأنّ (NQ) متعامدان.

الحل

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول نقطة $\Omega(w)$ ، كان

$z' - w = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - w) = iz - iw$ **ومن ثمّ تتعيّن w من z و z' بالعلاقة:** $w = \frac{1}{2}(1+i)z' + \frac{1}{2}(1-i)z$

A هي صورة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول M ، إذاً: $m = \frac{1}{2}(1+i)a + \frac{1}{2}(1-i)b$

B هي صورة C وفق دوران ربع دورة مباشرة حول N ، إذاً: $n = \frac{1}{2}(1+i)b + \frac{1}{2}(1-i)c$

C هي صورة D وفق دوران ربع دورة مباشرة حول P ، إذاً: $p = \frac{1}{2}(1+i)c + \frac{1}{2}(1-i)d$

D هي صورة A وفق دوران ربع دورة مباشرة حول Q ، إذاً: $q = \frac{1}{2}(1+i)d + \frac{1}{2}(1-i)a$

وعليه نرى أنّ:

$$p - m = \frac{1+i}{2}(c-a) + \frac{1-i}{2}(d-b)$$

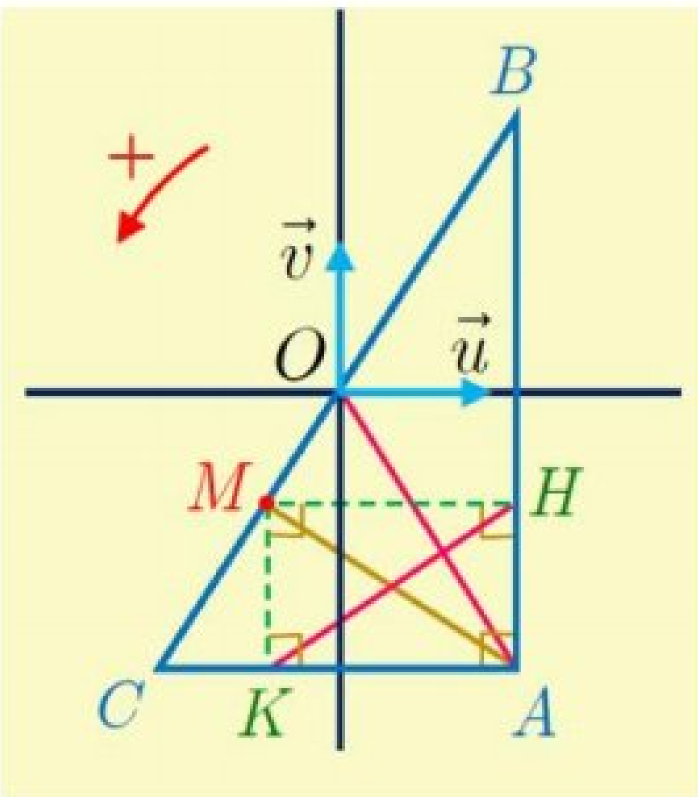
$$q - n = \frac{1+i}{2}(d-b) + \frac{1-i}{2}(a-c)$$

$$i(p-m) = \frac{i-1}{2}(c-a) + \frac{i+1}{2}(d-b) = \frac{1-i}{2}(a-c) + \frac{1+i}{2}(d-b)$$

إذاً $q - n = i(p-m)$ وهذه تعني أنّ:

$$|q-n| = |p-m| \quad \text{و} \quad arg\left(\frac{q-n}{p-m}\right) = \frac{\pi}{2}$$

إذاً $MP = NQ$ والمستقيمان (MP) و (NQ) متعامدان.



التمرين 47 :

نتأمل في المستوي الموجه مثلثا مباشرا ABC قائما في A النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) بالترتيب و H و K هما المسقطان القائمان للنقطة M على AB وعلى AC بالترتيب

نختار معلما متجانسا ومباشرا $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ مبدؤه النقطة O منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عموديا على (AB) و $\vec{v}$ شعاعا موجها للمستقيم (AB)

نرمز $a\,,b\,,c\,,h\,,k\,,m$ الى الاعداد العقدية التي تمثل النقاط $A\,,B\,,C\,,H\,,K\,,M$ والمطلوب :

❶ علل ما يأتي $a=\overline{b}$ و $a-m=\overline{h-k}$

❷ أثبت أن $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$ ❸ أثبت تعامد المستقيمين (OA) و (HK)

الحل:

❶ لأنّ B نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل استنتجنا أنّ $a=\overline{b}$. الرباعي $AHMK$ مستطيل.

فيكون لدينا $\overrightarrow{MA}=Re(a-m)\overrightarrow{u}+Im(a-m)\overrightarrow{v}$ إذاً :

$$\overrightarrow{HA}=\ Im(a-m)\overrightarrow{v}\ \ \&\ \ \overrightarrow{MH}=Re(a-m)\overrightarrow{u}$$

ومن جهة ثانية : $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}=\ Re(a-m)\overrightarrow{u}-Im(a-m)\overrightarrow{v}$

$$IM(h-k)=-\,Im(a-m)\ \ \&\ \ Re(h-k)=Re(a-m)$$

وهذا يكافئ $a-m=\overline{h-k}$.

❷ الشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان، أي $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MA}\right)=\pm\frac{\pi}{2}(2\pi)$ أو $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=\pm\frac{\pi}{2}(2\pi)$

أي $arg\left(\overline{\left(\frac{h-k}{a}\right)}\right)=\pm\frac{\pi}{2}(2\pi)$ ومن ثمّ $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\pm\frac{\pi}{2}(2\pi)$ أي

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{KH}\right)=\pm\frac{\pi}{2}(2\pi)$ فالمستقيمان (OA) و (HK) متعامدان.

طريقة ثانية :

❶ لأنّ B نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل استنتجنا أنّ $a=\overline{b}$. الرباعي $AHMK$ مستطيل.

بما أن كل من (MH) و (KA) يوازيان محور الفواصل فإن : $y_M=y_H$ و $y_K=y_A$

بما أن كل من (AH) و (KM) يوازيان محور التراتيب فإن : $x_A=x_H$ و $x_K=x_M$

بالتالي $a-m=(x_A-x_M)+i(y_A-y_M)=(x_H-x_K)+i(y_K-y_H)$

$$=(x_H-x_K)-i(y_H-y_K)=\overline{h-k}$$

❷ بما أن النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) فالشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان،

أي $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MA}\right)=-\frac{\pi}{2}$ بالتالي :

$$arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow arg\,\overline{\left(\frac{a-m}{b}\right)}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{KH}\right)=\frac{\pi}{2}$ فالمستقيمان (OA) و (HK) متعامدان.