المسألة الشاملة في الأشعة للأستاذ غازي الحصيني

في مستوٍ منسوب إلى معلمٍ متجانس في الفراغ لدينا النقاط:

$$A(3,2,6),\quad B(1,2,4),\quad C(4,-2,5)$$

1) أثبت أن النقاط تُشكل مستوٍ أوجد معادلته الديكارتية ورمزه $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{AC}(1,-4-1)\,,\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$$

مركبات الشعاعين غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً أي النقاط لا تقع على استقامة واحدة .

بفرض $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(a,b,c)$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}.\overrightarrow{AB}=0 \quad\Rightarrow\quad -2a-2c=0 \;\Rightarrow a=-c$$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}.\overrightarrow{AC}=0 \quad\Rightarrow\quad a-4b-c=0 \quad\Rightarrow$$

بفرض $c=-2 \;\Rightarrow\; a=2\,,\; b=1 \;\Rightarrow$

الحل : م مروان بجور

$$\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 4 = 0$$

2) أحسب بُعد النقطة O عن المستوي $\mathcal{P}$ وأحسب حجم رباعي الوجوه

. $OABC$

$$\text{dist}(O, \mathcal{P}) = \frac{|4|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\overrightarrow{BC}(3, -4, 1) \implies \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$\implies BC^2 = AB^2 + AC^2 \implies$ فالمثلث ABC قائم في A

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.2\sqrt{2}.3\sqrt{2}=6$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} S_{ABC} . h = \frac{1}{3} . 6 . \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

الحل : م مروان بجور

3) أحسب إحداثيات النقطة $\mathcal{H}$ مسقط O على المستوي $\mathcal{P}$ وأحسب طول OH .

نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من O ويقبل $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ شعاع توجيه :

$$\Delta : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة المستوي $\mathcal{P}$ $\Longleftarrow$

$$2(2t) + t - 2(-2t) + 4 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 9t = -4 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{-4}{9} \qquad \Longrightarrow \mathbf{H}\left(\frac{-8}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

$$\|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{\frac{64+16+64}{81}} = \frac{\sqrt{144}}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

الحل : م مروان بجور

4) اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيمين $d: AB$, $\grave{d}: BC$ وادرس الوضع

النسبي لهما ثم احسب بُعد النقطة $M(1,1,1)$ عن المستقيم d .

$$d:\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2 \\ z = 2t+4 \end{cases} \quad t\epsilon\mathcal{R}\ , \quad \grave{d}:\begin{cases} x = 3s+1 \\ y = -4s+2 \\ z = s+4 \end{cases} \quad s\epsilon\mathcal{R}$$

بمساواة الإحداثيات في المعادلتين :

$$2t+1 = 3s+1 \quad \Longrightarrow 2t = 3s \ (1)$$

$$2 = -4s+2 \quad \Longrightarrow -4s = 0 \quad (2)$$

$$2t+4 = s+4 \quad \Longrightarrow 2t = s \quad (3)$$

من (2) نجد $s = 0 \Longleftarrow$ بالتعويض في (1) نجد $t = 0$

الحل : م مروان بجور

بالتعويض في (3) نجد أنها محققة. إذاً **المستقيمين متقاطعين ونقطة التقاطع هي**

$(1,2,4)$ وهي النقطة B .

نفرض $\grave{M}(x,y,z)$ المسقط القائم لـ M على d

$$\overrightarrow{M\grave{M}}(x-1,y-1,z-1)$$

نكتبها بدلالة t
$$\overrightarrow{M\grave{M}}(2t,1,2t+3)$$

$$\overrightarrow{M\grave{M}}.\overrightarrow{u_d}=0 \Longrightarrow 4t+4t+6=0$$

$$\Longrightarrow t=\frac{-3}{4} \quad \Longrightarrow \overrightarrow{M\grave{M}}\left(\frac{-3}{2},1\frac{3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{M\grave{M}}}\right\|=\sqrt{\frac{9}{4}+1+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{22}{4}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

الحل : م مروان بجور

5) ادرس الوضع النسبي للمستقيم $\grave{d}$ والمستوي $\mathcal{P}$.

نعوض إحداثيات $\grave{d}$ في المستوي $\mathcal{P}$ $\Leftarrow$

$$2(3s+1)+(-4s+2)-2(s+4)+4=0$$

$$6s+2-4s+2-2s-8+4=0 \implies 0=0$$

المعادلة محققة دوماً والمستقيم $\grave{d}$ محتوى في المستوي $\mathcal{P}$.

6) أوجد معادلة المستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين

. $\boldsymbol{E(0,-1,4)}$, $\boldsymbol{D(-1,5,3)}$

$$\overrightarrow{ED}(-1,6,-1)$$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0 \implies 2a+b-2c=0$$

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}.\overrightarrow{ED}=0 \implies -a+6b-c=0$$

الحل : م مروان بجور

وبفرض $c = 13$ $\Leftarrow$

$$2a + b - 26 = 0 \quad (1)$$

$$-a + 6b - 13 = 0 \quad (x2)$$

$$\Longrightarrow -2a + 12b - 26 = 0 \quad (2)$$

$13b = 52$ بالجمع

$$\Longrightarrow b = 4 \Longrightarrow a = 11$$

$$11x + 4y + 13z + d = 0$$

نعوض بإحداثيات E فنجد :

$$-4 + 52 + d = 0 \Longrightarrow d = -48 \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{Q : 11x + 4y + 13z - 48 = 0}$$

الحل : م مروان بجور

7) اكتب معادلة المستوي $\mathcal{R}$ الذي يمر من D ويقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظماً عليه ،

وادرس الوضع النسبي للمستويات $\mathcal{R}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{R}: \ -2x - 2z + d = 0$$

نعوض إحداثيات $d = 4 \Longleftarrow +2 - 6 + d = 0 \Longleftarrow D$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}: \ -2x - 2z + 4 = 0}$$

$$\begin{array}{ll}
2x + y - 2z + 4 = 0 & L_1 \\
11x + 4y + 13z - 48 = 0 & L_2 \\
-2x - 2z + 4 = 0 & L_3
\end{array}$$

$$11L_1 - 2L_2 \sim \grave{L}_2 \quad , \quad L_1 + L_2 \sim \grave{L}_3$$

$$\begin{array}{ll}
2x + y - 2z + 4 = 0 & L_1 \\
3y - 48z + 132 = 0 & \grave{L}_2 \\
-4z + 8 = 0 & \grave{L}_3
\end{array}$$

من $\grave{L}_3$ نجد $x = 18 \Longleftarrow y = -36 \Longleftarrow z = 2$

الحل : م مروان بجور

ومنه نقطة التقاطع $(\mathbf{18, -36, 2})$.

8) اكتب معادلة المستوي $\grave{\mathcal{P}}$ المار من E ويقبل $\vec{U}(1, 2, -2)$ و $\vec{V}(0, 3, 4)$ شعاعي توجيه له .

$$\overrightarrow{n_{\grave{\mathcal{P}}}}.\vec{U} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad a + 2b - 2c = 0$$

$$\overrightarrow{n_{\grave{\mathcal{P}}}}.\vec{V} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad 3b + 4c = 0$$

بوضع $a = 14, \quad b = -4 \qquad \Longleftarrow c = 3$

$$\mathcal{P} : 14x - 4y + 3z + d = 0$$

نعوض إحداثيات $d = -16 \Longleftarrow \ +4 + 12 + d = 0 \Longleftarrow E$

$$\boldsymbol{\grave{\mathcal{P}} : 14x - 4y + 3z - 16 = 0}$$

الحل : م مروان بجور

9) اكتب معادلة المستوي $\grave{\mathcal{R}}$ الموازي لـ $\mathcal{R}$ ويمر من A و أوجد البعد بينهما .

$$\overrightarrow{n_{\grave{\mathcal{R}}}} = \overrightarrow{n_{\mathcal{R}}} \quad \Longrightarrow \quad -2x - 2z + d = 0$$

بالتعويض بإحداثيات $A \Longleftarrow$ $-6 - 12 + d = 0 \Leftarrow d = 18$

$$\grave{\mathcal{R}} : \; -2x - 2z + 18 = 0$$

$$\boldsymbol{\grave{\mathcal{R}} : \; x + z - 9 = 0}$$

بوضع $x = 1$ في معادلة المستوي $\mathcal{R}$ نجد

$$\mathcal{R} : \; -2x - 2z + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \; -2 - 2z + 4 = 0$$

$$\Longrightarrow 2z = 2 \; \Longrightarrow z = 1 \; \Longrightarrow \; (1,0,1) \in \mathcal{R}$$

$$\boldsymbol{dis}(\boldsymbol{\mathcal{R}}, \boldsymbol{\grave{\mathcal{R}}}) = dis(A, \grave{\mathcal{R}}) = \frac{|1 + 1 - 9|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

الحل : م مروان بجور

10) عيّن قيمة m ليكون المستوي

$$\grave{\mathcal{P}}: (m-1)x+2y-z+4=0$$

مُعامداً المستوي $\mathcal{P}$ ثم أوجد بُعد النقطة E عن فصلهما المشترك.

حتى يكون $\grave{\mathcal{P}}$ مُعامداً لـ $\mathcal{P}$ يجب أن يحقق $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}.\overrightarrow{n_{\grave{\mathcal{P}}}}=0$

$$2(m-1)+2+2=0 \implies m-1+2=0$$

$$\boldsymbol{m=-1} \implies \grave{\mathcal{P}}: -2x+2y-z+4=0$$

$$dis(E,\mathcal{P})=\frac{|-1-8+4|}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$$

$$dis\left(E,\grave{\mathcal{P}}\right)=\frac{|-2-4+4|}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$$

$$\mathbf{dis}\left(\mathbf{E},\mathcal{P},\grave{\mathcal{P}}\right)=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{29}}{3}$$

وذلك لأن المستويين متعامدين .

الحل : م مروان بجور

11) أوجد $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{AD}$ وأوجد $\cos\widehat{DEC}$.

$$\overrightarrow{EC}(4,-1,1)\ \ ,\overrightarrow{AD}(-4,3,-3)\ ,\overrightarrow{ED}(-1,6,-1)$$

$$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{AD}=-16-3-3=\mathbf{-22}$$

$$\cos\widehat{DEC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{ED}}.\overrightarrow{\mathrm{EC}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\|.\|\overrightarrow{\mathrm{EC}}\|}=\frac{-4-6-1}{\sqrt{18}.\sqrt{38}}$$

$$=\frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{12\sqrt{19}}}$$

12) أوجد معادلة الكرة التي تقبل DE قطراً لها.

نوجد إحداثيات منتصف $[ED]$ التي تمثل مركز الكرة المطلوبة

$$N\left(\frac{-1}{2},2,\frac{7}{2}\right)\ \Longrightarrow R=\frac{ED}{2}=\sqrt{\frac{19}{2}}\ \Longrightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{19}{2}$$

الحل : م مروان بجور

13) أوجد معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{R}$.

نحسب بُعد A عن $\mathcal{R}$

$$dis(A,\mathcal{R}) = \frac{|4+4+4|}{\sqrt{4+4}} = \frac{12}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

وهو يُمثل نصف قطر الكرة المطلوبة $\Leftarrow$

$$(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{2}+\boldsymbol{y}^{2}+(\boldsymbol{z}+\mathbf{2})^{2}=\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{2}}=\mathbf{18}$$

14) أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[ED]$.

منتصف $[ED]$ هي $N\left(\frac{-1}{2},2,\frac{7}{2}\right)$, $\overrightarrow{ED}(-1,6,-1)$ $\Leftarrow$

$$-x+6y-z+d=0 \Rightarrow \frac{1}{2}+12-\frac{7}{2}+d=0$$

$$1+24-7+2d=0 \quad \Rightarrow d-9 \quad \Rightarrow$$

معادلة المستوي المحوري $\mathbf{-x+6y-z-9=0}$

الحل : م مروان بجور

15) عيّن نقطة k من محور الفواصل متساوية البعد عن A , B .

بما أن k تنتمي إلى محور الفواصل فإحداثياتها من الشكل $k(\alpha,0,0)$

$$\overrightarrow{kA}(3-\alpha,2,6) \quad , \quad \overrightarrow{kB}(1-\alpha,2,4)$$

$$\|\overrightarrow{kA}\| = \|\overrightarrow{kB}\| \quad \Rightarrow \quad kA^2 = kB^2$$

$$(3-\alpha)^2 + 4 + 36 = (1-\alpha)^2 + 4 + 16$$

$$9 - 6\alpha + \alpha^2 + 40 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 + 20$$

$$4\alpha = -28 \quad \Rightarrow \alpha = -7 \quad \Rightarrow \boldsymbol{k(-7,0,0)}$$

16) أوجد إحداثيات النقطة I نظيرة B بالنسبة لـ A و L التي تجعل $EADL$ متوازي أضلاع .

بما أن I نظيرة B بالنسبة لـ A $\Leftarrow$

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow$$

$$(x-1, y-2, z-4) = (-2,0,-2)$$

الحل : م مروان بجور

$$\begin{cases} x-1=-2 & \Rightarrow x=-1 \\ y-2=0 & \Rightarrow y=2 \\ z-4=-2 & \Rightarrow z=2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{I(-1,2,2)}$$

17) أوجد معادلة المستوي المار من A ويُعامد كلاً من $\mathcal{R}$, Q .

$$\vec{n}.\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}=0 \quad \Rightarrow \quad -2a-2c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{n_{Q}}=0 \quad \Rightarrow \quad 11a+4b+13c=0$$

بوضع $c=-1 \Leftarrow a=1 \Leftarrow$

$$11+4b-13=0 \Rightarrow 4b=-2 \Rightarrow b=\frac{-1}{2}$$

$$x-\frac{1}{2}y-z+d=0$$

نعوض بإحداثيات A

$$3-1-6+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=4 \quad \Rightarrow$$

الحل : م مروان بجور

معادلة المستوي المطلوب $\quad x - \frac{1}{2}y - z + 4 = 0$

18) أوجد معادلة الكرة التي تمر من A ومركزها O وعيّن مركز ونصف قطر دائرة تقاطعها مع $\mathcal{P}$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

ومن الطلب (2) وجدنا $\quad dist(O, \mathcal{P}) = \frac{4}{3} \subset 7$

المستوي $\mathcal{P}$ قاطع للكرة بدائرة نصف قطرها r ومركزها $\grave{O}$

$$r = \sqrt{49 - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{\sqrt{425}}{3} = \frac{5\sqrt{17}}{3}$$

لإيجاد مركزها نوجد المسقط القائم لـ O على $\mathcal{P}$ وقد أوجدنا سابقاً في الطلب

(3) وهي النقطة $H \Leftarrow \grave{O} = H\left(\frac{-8}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{8}{9}\right)$

الحل : م مروان بجور

19) لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,2),(B,1),(C,3)$

عيّن ما تمثله مجموعة النقط M :

$$\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$$

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}\quad\Longrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}-6\overrightarrow{MC}\quad\Longrightarrow$$

$$\left\|6\left(\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MC}\right)\right\|=\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|\quad\Longrightarrow$$

$$\left\|\overrightarrow{CG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$$

وهي تُمثل معادلة كرة مركزها منتصف $[CG]$

الحل : م مروان بجور

20) أوجد معادلة المستوي $\grave{\mathcal{R}}$ المعامد للمستقيم (BC) ويمر من D .

$$\grave{\mathcal{R}} :\ 3x - 4y + z + d = 0$$

نعوض بإحداثيات $D \Longleftarrow$

$$-3 - 9 + 3 + d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 9$$

$$\boldsymbol{\grave{\mathcal{R}} :\ 3x - 4y + z + 9 = 0}$$

الحل : م مروان بجور

الرياضيات مع الأستاذ غازي الحسيني

الحل : م مروان بجور