• دراسة الوضع النسبي لمستقيم مع مستوٍ.

أ) نكتب المستقيم بالشكل الوسيطي.

ب) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي فنحصل على معادلة من الشكل

$$at = b$$

ونميز الحالات التالية.

1) $a \in \mathbb{R}^*$ $\quad b \in \mathbb{R}$

للمعادلة حل وحيد
أي أن المستقيم يقطع المستوي بنقطة واحدة.
ولإيجاد هذه النقطة نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية فنحصل على نقطة التقاطع.

2) $a = 0$ $\quad b \neq 0$

المعادلة مستحيلة الحل
أي أن المستقيم لا يقطع المستوي بأية نقطة فهو يوازيه.

3) $a = b = 0$

للمعادلة عدد لانهائي من الحلول.
فالمستقيم محتوى في المستوي.

• بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ

أ) نكتب المستقيم بالشكل الوسيطي.

ب) نختار نقطة K من المستقيم ونكتب احداثياتها من المعادلات الوسيطية

$$K(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$$

ج) نحسب المسافة بين النقطتين A , K.

$$AK = \sqrt{\quad}$$

د) نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية.

$$AK = \sqrt{a(t-b)^2+c}$$

هـ) نختار أصغر المسافات وذلك من أجل $t = b$ عندئذٍ $AK = \sqrt{c}$ وهو بعد A عن المستقيم.

نستخدم هذه الطريقة في حال كانت المسألة من الشكل

1) احسب البعد نقطة عن مستقيم

2) احسب البعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين متقاطعين

بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين متعامدين

في حال طلب السؤال حساب بعد نقطة عن فصل مشترك مستويين

نوجد $\vec{n_1} , \vec{n_2}$ ثم نوجد $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$:
- $\neq 0$ نستخدم الطريقة السابقة.
- $= 0$ نتبع ما يلي:

1) نوجد بعد النقطة عن المستوي الأول

$d_1 = dist$

2) نوجد بعد النقطة عن المستوي الثاني

$d_2 = dist$

3) إن بعد النقطة A عن الفصل المشترك d يحسب من العلاقة

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

معادلة السطح الأسطواني

- محور الدوران ox:

$$y^2 + z^2 = r^2$$

$$x_B < x < x_A$$

x_A: مركز القاعدة العليا

x_B: مركز القاعدة السفلى

ارتفاع الأسطوانة: $h = x_A - x_B$

- محور الدوران oy:

$$x^2 + z^2 = r^2$$

$$y_B < y < y_A$$

- محور الدوران oz:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$z_B < z < z_A$$

معادلة المخروط:

- محور الدوران ox:

$$y^2 + z^2 = \frac{r^2}{h^2} x^2$$

$$x_B < x < x_A$$

- محور الدوران oy:

$$x^2 + z^2 = \frac{r^2}{h^2} y^2$$

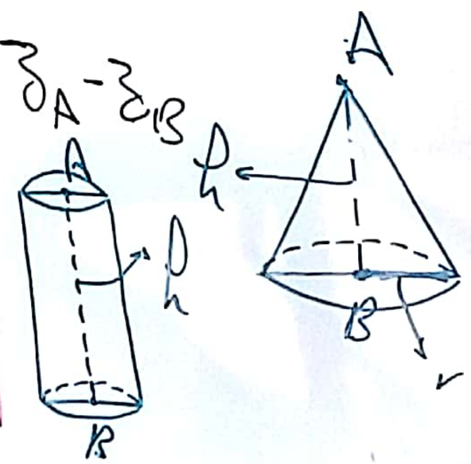
$$y_B < y < y_A$$

- محور الدوران oz:

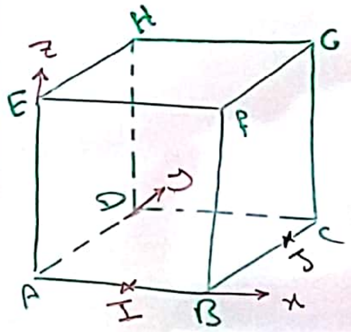
$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2$$

$$z_B < z < z_A$$

$$h = z_A - z_B$$



إيجاد إحداثيات رؤوس مكعب.



$(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$

$D(0,1,0)$ $C(1,1,0)$

$E(0,0,1)$ $H(0,1,1)$

$F(1,0,1)$ $G(1,1,1)$

$I(\frac{1}{2},0,0)$ $\vec{BJ}=\frac{3}{4}\vec{BC}$

نفرض $J(x,y,z)$

$(x-1,y,z)=\frac{3}{4}(0,1,0)$

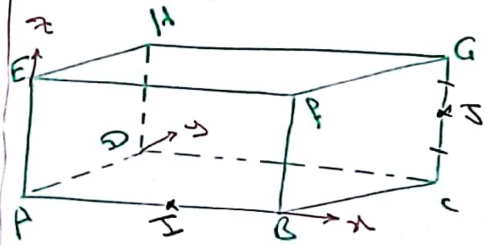
$=(0,\frac{3}{4},0)$

بالمطابقة $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$y=\frac{3}{4}$ $z=0$

$J(1,\frac{3}{4},0)$

19



$(A;\frac{1}{3}\vec{AB},\frac{1}{2}\vec{AD},\vec{AE})$

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $AE=1$

$AB=3$ $AD=2$

$A(0,0,0)$ $B(3,0,0)$

$D(0,2,0)$ $C(3,2,0)$

$E(0,0,1)$ $H(0,2,1)$

$F(3,0,1)$ $G(3,2,1)$

$I(\frac{3}{2},0,0)$ $J(3,2,\frac{1}{2})$

* إيجاد إحداثيات D' المسقط العمودي للنقطة D على (P)

نوجد المعادلات الوسيطية لمستقيم (DD') بحيث شعاع توجيهه هو $\vec{n}$

المستقيم هو ناظم المستوي والنقطة D

ثم نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم

في معادلة المستوي فنحصل على

قيمة t.

20

نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية

فنحصل على إحداثيات D'.

الحجم

حجم الهرم: $V=\frac{1}{3}S.h$

S: مساحة القاعدة (القاعدة)

h: بعد رأس الهرم عن القاعدة ويحسب من خلال dist

حجم المكعب: $V=a^3$

حجم متوازي المستطيلات: $V=a.b.c$ (طول، عرض، ارتفاع)

حجم الأسطوانة: $V=\pi r^2 h$

مساحة المثلث متساوي الأضلاع $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

مساحة المثلث القائم $\frac{1}{2}$ جداء طولي الضلعين القائمين

مساحة المعين $\frac{1}{2}$ جداء قطريه

مساحة شبه المنحرف $\frac{\text{القاعدة الكبرى}+\text{الصغرى}}{2}\times$ الارتفاع

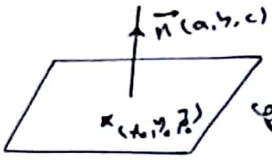
21

معادلة المستوي

$ax + by + cz + d = 0$

لإيجاد معادلة المستوي يلزمنا نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وناظم $\vec{n}(a, b, c)$

الناظم: هو الشعاع العامد للمستوي



• للمستوي عدة نواظم جميعها مرتبطة خطياً.

* طرائق إيجاد معادلة المستوي.

(1) المعطيات: نقطة (x_0, y_0, z_0) ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

بفك الأقواس نحصل على المعادلة

$ax+by+cz+d=0$

(2) المعطيات: نقطة (x_0,y_0,z_0) شعاعي توجيه غير مرتبطين خطياً $\vec{u}, \vec{v}$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ فنحصل على معادلة بثلاث مجاهيل a, b, c ... (1)

$\vec{n}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v}=0$ فنحصل على معادلة بثلاث مجاهيل a, b, c ... (2)

نفرض قيمة ما لأحد المجاهيل فنحصل على معادلتين بمجهولين نحلهما معاً

المعادلتين جملة مشتركة، فنحصل على الناظم $\vec{n}$ ولدينا نقطة. نعود للحالة الأولى.

(3) المعطيات: ثلاث نقط A, B, C

نشكل شعاعين غير مرتبطين خطياً $\vec{AB}, \vec{AC}$ ونعود للحالة الثانية.

صيغة السؤال: اثبت أن النقاط A, B, C تحدد مستوي. ثم أوجد معادلة هذا المستوي.

تحدد ثلاث نقط مستوي إذا كان الشعاعين المشكلين من هذه النقاط A, B, C غير مرتبطين خطياً.

(4) المعطيات: معادلة مستوي Q ونقطتين A, B

وتكون صيغة السؤال: أوجد معادلة المستوي P المار بالنقطتين A, B والعامد Q.

خطوات الحل: 1) نفرض $\vec{n}_P(a,b,c)$

2) $P \perp Q \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$

فنحصل على معادلة بثلاث مجاهيل.

3) $\vec{n}_P \perp P \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{AB} = 0$

فنحصل على معادلة بثلاث مجاهيل

نفرض قيمة ما لأحد المجاهيل فنحصل على (a, b, c) فنحصل على الناظم فيصبح لدينا نقطة هي A أو B وناظم نعود للحالة الأولى

البعد بين مستويين

$P: ax+by+cz+d=0$

$Q: a'x+b'y+c'z+d'=0$

البعد بين P و Q

شرط أساسي: المستويان متوازيان

الحل: • نعوض $x=y=0$ ونعوض في P فنحصل على النقطة $A(0,0,\frac{-d}{c})$ وهي نقطة من P

• نحسب بعد A عن Q فيكون هو البعد بين المستويين.

دراسة الوضع النسبي لمستويين.

$P: ax+by+cz+d=0$

$Q: a'x+b'y+c'z+d'=0$

نوجد $\vec{n}_P$, $\vec{n}_Q$ ونميز الحالات:

1) العوامل مرتبطة خطياً

المستويان منطبقان ← $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$

متوازيان ← $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$

2) العوامل غير مرتبطة خطياً:

المستويان متقاطعان ←

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0$ تقاطع مع تعامد

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q\neq 0$ تقاطع دون تعامد

ملاحظات...

1) إذا اشترك مستقيم مع مستوٍ ما نقطتين منه دخل كل المستقيم في هذا المستوي.

2) تقاطع مستويين يولد مستقيم يسمى بالفصل المشترك.

3) إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن الفصلين المشتركين متوازيان.

4) المستقيم العمودي على مستوٍ عمودي على أي مستقيم فيه.

مستقيم يعامد مستوي

1) شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع الناظم

2) شعاع توجيه المستقيم يعامد شعاعين من المستوي.

العمودي على مستقيمين متقاطعين عمودي على مستويهما

5) المستقيم الموازي لمستوٍ ما ليس بالضرورة أن يوازي أي مستقيم فيه.

مستقيم يوازي مستوٍ

1) شعاع توجيه المستقيم يعامد الناظم

2) شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي.

معادلة المستقيم في الهندسة المستوية :

• الشكل العام: $ax+by+c=0$

$m=\frac{-a}{b}$

• معادلة مستقيم مار بنقطة معلومة وميله معلوم:

$y-y_0=m(x-x_0)$

• ميل مستقيم مار بنقطتين:

$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$

• البعد نقطة عن مستقيم:

$dist(A,d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

معادلة مستقيم في الهندسة الفراغية

المعادلات الوسيطية...

يلزمنا نقطة + شعاع توجيه .

شعاع التوجيه: هو شعاع يوازي المستقيم أو ينطبق عليه .

ونرمز له بـ $\vec{u}$, $\vec{v}$

طرائق إيجاد المعادلات الوسيطية .

① المعطيات: نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$

شعاع توجيه $\vec{V}(a,b,c)$

$z=z_0+ct$ | $t\in$ $[0,+\infty[$ نصف مستقيم ، مستقيم ، $[0,1]$ قطعة مستقيمة

② المعطيات: نقطتين A ، B .

الشعاع $\vec{AB}$ هو شعاع توجيه له ولدينا نقطة A أو B نعود للحالة (1)

③ المعطيات: مستويين P ، Q .

نحل جملة معادلتي المستويين باعتبار أنه يوجد مجهولين بدلالة الثالث ثم نفرض هذا المجهول الثالث هو الوسيط (t ، λ ، ...) فنحصل على المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين P ، Q .

④ المعطيات: نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ ، معادلة المستوي P .

صيغة السؤال: أوجد المعادلات الوسيطية لمستقيم d المار بالنقطة A والعمودي على المستوي P .

إذاً ناظم المستوي هو شعاع توجيه للمستقيم ولدينا نقطة نعود للحالة الأولى .

دراسة الوضع النسبي لمستقيمين .

ع.١٨ / ٢

$A(2,1,3)$ $B(1,0,-1)$

$C(4,0,0)$ $D(0,4,0)$

$E(1,-1,1)$

① جد $\vec{CE}, \vec{CD}, \vec{AB}$

② بيّن أن C, D, E ليست على استقامة

③ $CDE \perp AB$

④ معادلة CDE

⑤ بعد B عن CDE

⑥ معادلة الكرة التي مركزها B وتمس CDE

أ) $\vec{AB} = -\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$

$\vec{CD} = -4\vec{i} + 4\vec{j}$

$\vec{CE} = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

٢) $\vec{CD}(-4,4,0)$, $\vec{CE}(-3,-1,1)$ $\Big\}$ $\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1}$

غير متوازيين ومنه E, D, C ليست على استقامة واحدة.

٣) نثبت أن $\vec{AB}$ عمودي على $\vec{CE}, \vec{CD}$

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 4 - 4 + 0 = 0$

$\vec{AB} \perp \vec{CD}$ ... ①

$\vec{AB} \cdot \vec{CE} = 3 + 1 - 4 = 0$

$\vec{AB} \perp \vec{CE}$ ... ②

من ① و ② ينتج: $CDE \perp AB$.

④ بما أن $AB \perp CDE$ فإن

$\vec{n} = \vec{AB}(-1,-1,-4)$

ومنه معادلة المستوي CDE

$-x - y - 4z + d = 0$

نعوض C

$-4 + 0 + 0 + d = 0$ $\boxed{d = 4}$

$-x - y - 4z + 4 = 0$

$$dist(B - CDE) = \frac{|a x_B + b y_B + c z_B + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|-1+0+4+4|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{18}} = \frac{7}{3\sqrt{2}}$$

⑥ $r = dist = \frac{7}{3\sqrt{2}}$

$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = \left(\frac{7}{3\sqrt{2}}\right)^2$

$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{18}$

نعوض $d=2 \xrightarrow{(1)} a=-1$

$\xrightarrow{(2)} b=-1$

$\xrightarrow{(3)} c=1$

$$\boxed{-x-y+z+2=0}$$

(٤)

$E(0,0,2)$

$C(2,2,0)$

$\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$

$x=0+2t$

$y=0+2t \quad t\in\mathbb{R}$

$z=2-2t$

نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي.

$-2t-2t+2-2t+2=0$

$6t=4 \Rightarrow \boxed{t=\frac{2}{3}}$

نعوض في معادلات المستقيم

$x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, $z=\frac{2}{3}$ $\quad N\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

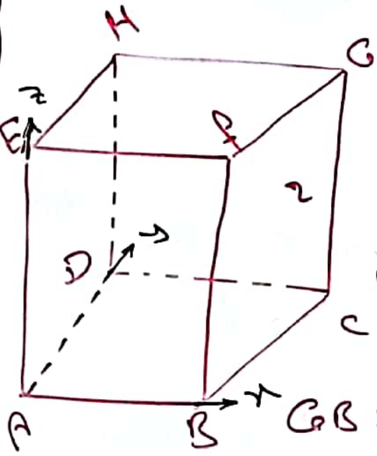
نفرض $M(x,y,z)$:

$(x,y,z-2)=\frac{1}{3}(2,2,-2)$

$(x,y,z-2)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

$x=\frac{2}{3}$ $\quad y=\frac{2}{3}$

س٦ $\quad z=\frac{4}{3}$ $\quad M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$



$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$

$\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$

$\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$

(١) GBD

(٢) تمثيل وسيطي لـ EC

(٣) جد إحداثيات نقطة تقاطع GBD و EC

(٤) جد إحداثيات M بحيث $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

(٥) اثبت تعامد EC, HM

$G(2,2,2)$ $\quad B(2,0,0)$

$D(0,2,0)$

$\overrightarrow{BG}(0,2,2)$

$\overrightarrow{DG}(2,0,2)$ $\quad \frac{0}{2}\neq\frac{2}{0}$

بالتالي المتجهان غير مرتبطين خطياً

النقاط ليست على استقامة واحدة

معادلة المستوي: $ax+by+cz+d=0$

نعوض B: $2a+d=0$ ...(1)

نعوض D: $2b+d=0$ ...(2)

نعوض G: $2a+2b+2c+d=0$ ...(3)

س٥

$A(1,1,0)$ $\quad B(1,2,1)$ $\quad C(4,0,0)$ $\quad$ س١٨

(١) أثبت أن A, B, C ليست على استقامة واحدة

(٢) أثبت $x+3y-3z-4=0$ هي معادلة ABC

(٣) $P: x+2y-z-4=0$

$Q: 2x+3y-2z-5=0$

اثبت أن تقاطعهما هو

$x=t-2$

$y=3 \quad t\in\mathbb{R}$

$z=t$

الحل: (١)

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$

$\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$ $\quad \frac{0}{3}\neq\frac{1}{-1}$

المتجهان غير مرتبطين خطياً

إذاً النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

(٢) نعوض A: $1+3-0-4=0$ $\quad A\in ABC$

نعوض B: $1+6-3-4=0$ $\quad B\in ABC$

نعوض C: $4+0-0-4=0$ $\quad C\in ABC$

إذاً هي معادلة المستوي ABC

(٣) $t-2+6-t-4=0$ $\quad d\in P$

$2t-4+9-2t-5=0$ $\quad d\in Q$

إذاً d فصل مشترك للمستويين Q, P

س٤

$H(0,2,2)$

$\vec{HM}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

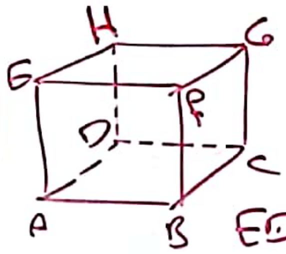
$\vec{EC}(2,2,-2)$

$\vec{HM}\cdot\vec{EC} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 0$

$\vec{HM} \perp \vec{EC}$

النموذج (٢) :

مكعب طول حرفه 3



١) D, B, E, G
٢) AG
٣) AG ناظم لـ EDB
٤) AG يقطع EDB في J
٥) J نقطة تلاقي ارتفاعات EDB
٦) حجم AEDB

١) $D(0,3,0)$ $B(3,0,0)$
$E(0,0,3)$ $G(3,3,3)$

٢) $\vec{AG}(3,3,3)$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

٣) $\vec{ED}(0,3,-3)$
$\vec{EB}(3,0,-3)$ $\quad \frac{0}{3} \neq \frac{3}{0}$

غير مرتبطين خطياً (مستقيمين متقاطعين)

$\vec{AG}\cdot\vec{ED} = 0$
$\vec{AG}\cdot\vec{EB} = 0$ $\quad \vec{AG} \perp EBD$

نحو ناظم له.

٢٧

٤) نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي

EBD معادلة $3x+3y+3z+d=0$

نعوض E $\quad d=-9$

$EBD: 3x+3y+3z-9=0$

$9t+9t+9t-9=0$

$3t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$

$J(1,1,1)$

٥) المثلث EDB هو مثلث متساوي الأضلاع لأن أضلاعه هي أقطار لمربعات متطابقة.

بفرض I هو مركز ثقل المثلث EDB

$I(1,1,1) = J$

منه نقطة تلاقي ارتفاعاته

٦) $V_{AEDB} = \frac{1}{3} S_{EDB} \cdot h$

$S_{EDB} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(18) = \frac{18\sqrt{3}}{4}$

$a = BE = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$h = dist(A, EBD) = \frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{9+9+9}}$

$= \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} \times \frac{18\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

٢٨