البرامج الخطية المرافقة

مقدمة:

من المفاهيم الأساسية في البرمجة الخطية مفهوم الترافق أو الثنائية حيث يعتمد هذا المفهوم على نظرية الترافق التي تشير إلى أن كل برنامج خطي يمتلك برنامجاً مرافقاً بحيث أنه إذا وجد حل لأحد البرنامجين فإن هناك حلاً للبرنامج الآخر وتتساوى قيمة تابع الهدف للبرنامجين عند الحل الأمثل، حيث تظهر الحاجة إلى النموذج المرافق عندما تكون m عدد القيود أكبر من n عدد المتغيرات (المتحولات).

البرامج الخطية المتناظرة:

تعريف:

نقول عن برنامج خطي أنه موضوع بصيغة متناظرة إذا كانت جميع المتحولات مقيدة بأن تكون غير سالبة وإذا أعطيت جميع القيود بشكل متراجحات (ويجب أن تكون متراجحات قيود مسألة الزيادة إلى الحد الأعظمي موضوعة بصيغة أقل من أو يساوي في حين أن متراجحات قيود مسألة الإنقاص إلى الحد الأصغري يجب أن تكون بصيغة أكبر من أو يساوي.

تشكيل البرنامج المرافق للبرنامج المتناظر:

يمكن تشكيل برنامج مرافق لكل برنامج خطي متناظر حيث أنه إذا كان لدينا برنامجاً خطياً يتكون من تابع هدف في صورة تعظيم وشروط في صورة أصغر من أو يساوي أي البرنامج الأصلي يأخذ الشكل التالي:

$$Max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + --- + c_nx_n$$

طبقاً للشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ---+ a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ---+ a_{2n}x_n \le b_2$$
$$-----------------$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ---+ a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, ---x_n \ge 0$$

والذي يكتب بالصورة المختصرة التالية:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

طبقاً للشروط:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad ; \quad i = 1,2,----m$$
$$x_1\ , x_2\ , x_3\ ,---x_n \ge 0$$

حيث a_{ij}, b_i, c_j ثوابت و x_j متغيرات القرار عندئذ يأخذ البرنامج المرافق الشكل:

$$Min \quad U = b_1 y_1 + b_2 y_2 + --- + b_n y_n$$

طبقاً للشروط:

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + --- + a_{m1}y_m \le c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + --- + a_{m2}y_m \le c_2$$
$$----------------------$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + --- + a_{mn}y_m \le c_n$$
$$y_1, y_2, ---, y_n \ge 0$$

والذي يكتب بالصورة المختصرة التالية:

$$Min \;\; U = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

طبقاً للشروط:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j$$

$$j = 1,2,--n$$

$$y_1, y_2, -- y_m \ge 0$$

وإذا كان البرنامج المتناظر معطى بالشكل المصفوفي التالي:

$$Z = CX$$

مع مراعاة القيود:

$$AX \le B$$

$$X \ge 0 \quad , \quad B \ge 0$$

عندها يكون البرنامج الخطي المرافق بالشكل المصفوفي التالي:

$$Min \; L = BY$$

مع مراعاة القيود:

$$AY \ge C$$

$$Y \ge 0$$

حيث:

A مصفوفة من القياس $m \times n$

B مصفوفة عمود أي من القياس $m \times 1$

C مصفوفة سطر من القياس $1 \times n$

X مصفوفة عمود من القياس $n \times 1$

Y مصفوفة سطر من القياس $1 \times m$

كما أنه يمكن اعتبار البرنامج المرافق برنامج أصلي وفي هذه الحالة يكون البرنامج الأصلي هو البرنامج المرافق.

تشكيل البرنامج المرافق للبرنامج غير المتناظر:

نحول النموذج الى الشكل المتناظر كما مر معنا سابقا ونوضح الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال: أوجد $MaxZ = 4x_1 + 5x_2$

ضمن القيود:

$$3x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$4x_1 - 3x_2 \ge 10$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

$x_1 \ge 0$ و x_2 غير مقيد

نحول النموذج السابق الى الشكل المتناظر (أي يجب أن تكون جميع القيود من نوع أقل أو يساوي لأن جميع تابع الهدف من نوع Max).

الحل:

١ - نضرب المتراجحة الثانية بـ (-1) تصبح $-4x_1 + 3x_2 \le -10$

٢ - قيد المساواة يحول الى قيدين

$$x_1 + x_2 \ge 5$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$

ثم نحول القيد الى قيد أقل أو يساوي:

$$-x_1 - x_2 \le -5$$

بالنسبة للمتحول x_2 فهو غير مقيد في نص المسالة الأصلية نحوله إلى فرق بين متحولين x_4, x_3 مقيدين:

$$x_2 = x_3 - x_4 \quad ; \quad x_3 \geq 0 \quad , \quad x_4 \geq 0$$

عندها تصبح المسألة بالشكل التالي:

$$MaxZ = 4x_1 + 5x_3 - 5x_4$$

$$x_1, x_3, x_4 \geq 0$$

ضمن القيود:

$$3x_1 + 2x_3 - 3x_4 \leq 20$$
$$-4x_1 + 3x_3 - 3x_4 \leq -10$$
$$x_1 + x_3 - x_4 \leq 5$$
$$-x_1 - x_3 + x_4 \leq -5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

البرنامج المرافق:

$$MinL = 20y_1 - 10y_2 + 5\left(y_3^+ - y_3^-\right)$$

ضمن القيود:

$$3y_1 - 4y_2 + \left(y_3^+ - y_3^-\right) \geq 4$$
$$2y_1 + 3y_2 + y_3^+ - y_3^- \geq 5$$
$$-3y_1 - 3y_2 - y_3^+ + y_3^- \geq -5$$
$$y_1 \geq 0 , y_2 \geq 0$$

y_3 غير مقيد.

ملاحظة:

إذا كان تابع الهدف من نوع تعظيم وكان لدينا شرطا مقيدا أو أكثر من نوع أكبر أو يساوي فإننا نحوله إلى أصغر أو يساوي وذلك بضربه بـ (1-).

أما إذا كان تابع الهدف من نوع تقليل فإن القيود يجب أن تكون من نوع أكبر من أو يساوي وعليه أي قيد من نوع أصغر من أو يساوي يحول إلى قيد من نوع أكبر من أو يساوي بضربه بـ (-1).

ملاحظة:

كل قيد من نوع مساواة يعطي قيدين إحداهما من نوع أكبر من أو يساوي والآخر من نوع أصغر من أو يساوي وتحول المسألة تعظيم أو تقليل.

حيث نلخص طريقة إعداد البرنامج المرافق بالخطوات التالية:

١ – إذا كان تابع الهدف في البرنامج الأصلي في صورة تعظيم (تقليل) فإن تابع هدف البرنامج المرافق يكون في صورة تقليل (تعظيم).

٢ – يقابل كل قيد أو شرط في البرنامج الأصلي متغيراً في البرنامج المرافق ويقابل كل قيد أو شرط في البرنامج المرافق متغيراً في البرنامج الأصلي.

٣ – إذا كان تابع هدف في أي من البرنامجين في صورة تعظيم فإن القيود تكون في صورة أقل من أو يساوي وإذا كان تابع هدف في أي من البرنامجين في صورة تصغير فإن القيود تكون في صورة أكبر من أو يساوي.

٤ – معاملات تابع الهدف في البرنامج المرافق هي قيم الطرف الأيمن لمقيدات البرنامج الأصلي وقيم الطرف الأيمن لمقيدات البرنامج المرافق هي معاملات تابع الهدف في البرنامج الأصلي.

٥ – إذا كان عدد القيود (m) وعدد متغيرات القرار (n) فإن عدد متغيرات القرار تصبح (m) في البرنامج المرافق وعدد القيود تصبح (n).

٦ – معاملات المتغيرات في الشروط المقيدة (القيود) للبرنامج المرافق هي نفسها معاملات المتغيرات في الشروط المقيدة (القيود) للبرنامج الأصلي مع تبديل معاملات الأسطر والأعمدة هذا يعني أن معاملات السطر رقم (i) في الشروط المقيدة للبرنامج الأصلي هي نفسها معاملات العمود رقم (i) في الشروط المقيدة للبرنامج المرافق مع ملاحظة أن مرافق البرنامج المرافق هو البرنامج الأصلي.

مثال:

نفرض أنه لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

طبقاً للشروط التالية:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2 \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

لإيجاد البرنامج المرافق للبرنامج الخطي السابق نجد أن تابع الهدف في صورة تعظيم ولذلك يجب أن تكون جميع الشروط المقيدة في صورة متراجحات أقل من أو يساوي ولتحويل اتجاه المتراجحة في الشرط الثاني لصورة أقل من أو يساوي نضرب كل حد فيه بـ (1-) فنحصل على:

$$- a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \leq - b_2$$

والشرط الثالث على صورة معادلة يحل محله الشرطين التاليين:

$$\begin{aligned} &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \end{aligned}$$

ولتحويل اتجاه المتراجحة الأخيرة إلى صورة اقل أو يساوي نضرب كل حد فيها بـ (-1) نحصل على:

$$- a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leq - b_3$$

وتصبح الصورة المعدلة للبرنامج الأصلي هي:

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

طبقاً للشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$- a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \leq - b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$
$$- a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leq - b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نفرض أن (y_1, y_2, y_3^+, y_3^-) هي المتغيرات البديلة أو المرافقة المقابلة للقيود السابقة على الترتيب عندها يكون البرنامج المرافق:

$$MinU = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3y_3^+ - b_3y_3^-$$
$$MinU = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3(y_3^+ - y_3^-)$$
$$a_{11}y_1 - a_{21}y_2 + a_{31}\, y_3^+ - a_{31}\, y_3^- \geq c_1$$
$$a_{21}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}y_3^+ - a_{32}y_3^- \geq c_2$$
$$a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}\, y_3^+ - a_{33}\, y_3^- \geq c_3$$
$$y_1, y_2, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

وبوضع $y_3 = y_3^+ - y_3^-$ حيث y_3 متغير غير محدد الإشارة يصبح البرنامج السابق:

$$MinU = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3y_3$$

طبقاً للشروط:

$$a_{11}y_1 - a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1$$
$$a_{21}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geq c_2$$
$$a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \geq c_3$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

y_3 غير مقيد.

نظريات حول الترافق:

١ - إن النموذج المرافق للنموذج المرافق هو النموذج الأصلي.

٢ - إذا كان $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ حلاً مقبولاً للنموذج وكان $(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ حلاً مقبولاً للنموذج المرافق فإن قيمة تابع الهدف للنموذج الأصلي لا تتجاوز قيمة تابع الهدف للمرافق عند هذين الحلين أي أنه يكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

وذلك من أجل جميع الحلول المقبولة لكل من النموذجين (وبما في ذلك الحل المثالي).

٣ - إذا كان تابع الهدف في أحد النموذجين المترافقين غير محدود (ليس له حل مثالي) فان النموذج الأخر يكون قابل للحل لتعارض الشروط.

٤ - إذا كان لأحد النموذجين حل مثالي محدود فان للنموذج الأخر حل مثالي محدود وان قيمتي تابع الهدف الحديتين متساويتين.

$$Max\ Z = Min\ U$$

٥ – الشرط اللازم والكافي لكي يكون الحلان $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ حلين مثاليين للبرنامج الأصلي ومرافقه هو أن تكون قيمتا تابعي الهدف متساويتان وأن يحققا الشرطين التاليين:

$$x'_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y'_i - c_j\right) = 0 \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$i = 1,2,\dots,m \quad y'_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j - b_i\right) = 0$$

بمعنى أن يكون أحد الجدائين في العلاقتين السابقتين مساوياً للصفر.

– انتهت المحاضرة –

د. ميسم جديد