ملخص نظري لأفكار الدرس الرئيسية.

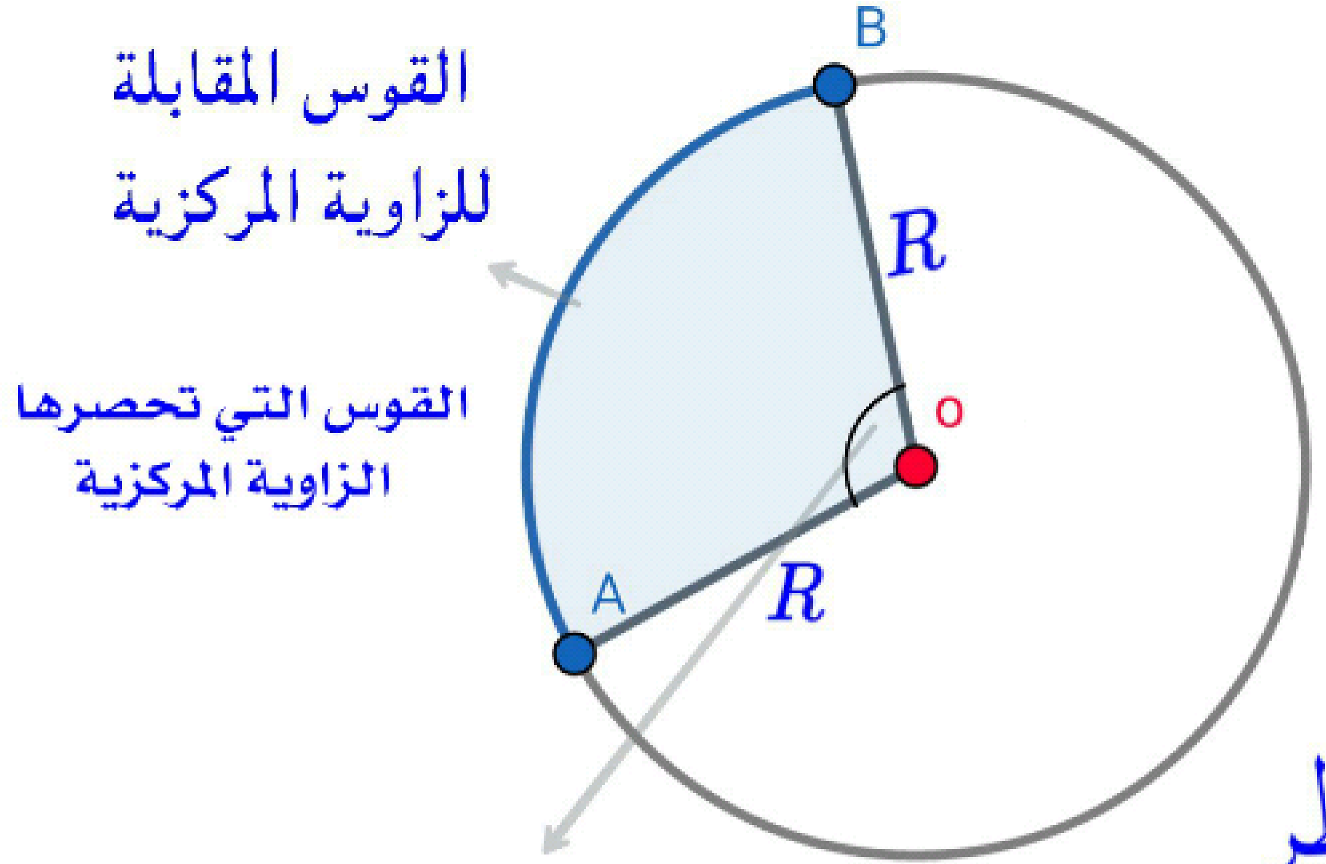
الزاوية المركزية
الزاوية المحيطية
الزاوية المماسية

الزاوية المركزية

هي زاوية رأسها يقع على مركز الدائرة

وكل ضلع من ضلعيها عبارة عن نصف قطر

في تلك الدائرة

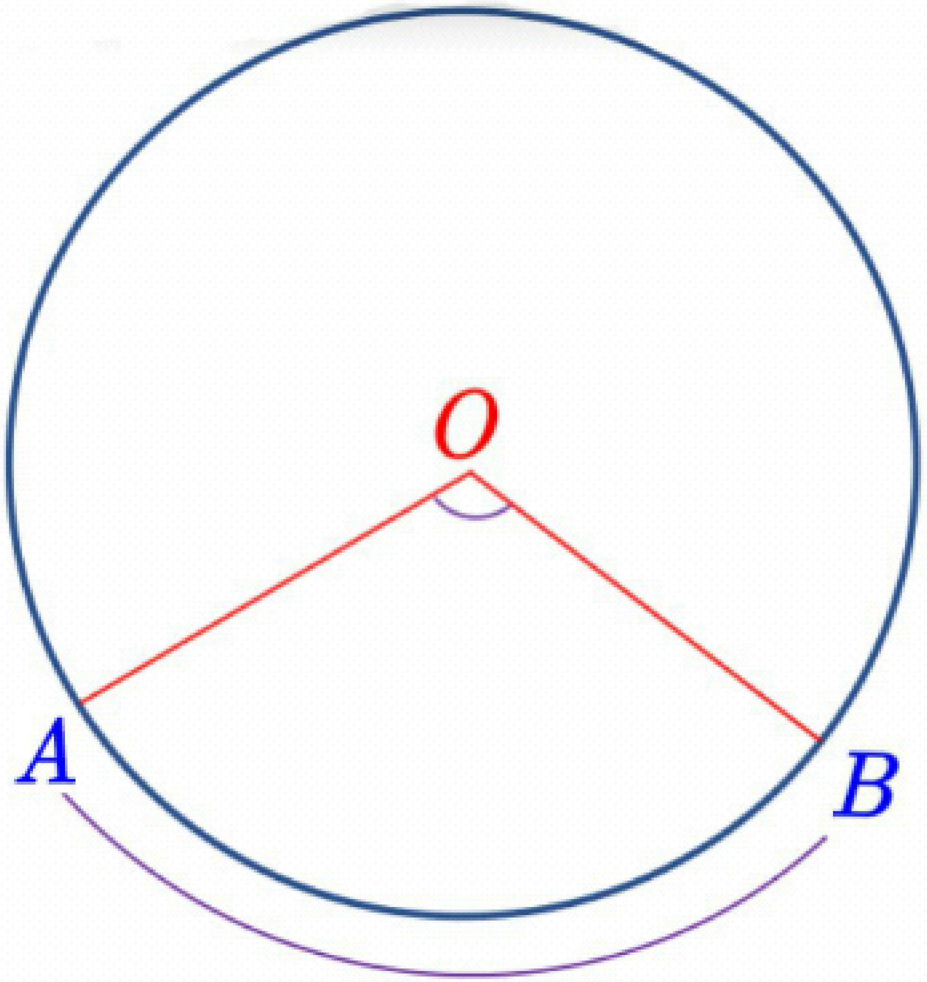


زاوية مركزية

$A\hat{O}B$ زاوية مركزية، قوسها $\overset{\frown}{AB}$

أ.ماهر بربر
0994830381

قياس الزاوية المركزية



كما قلنا الزاوية المركزية $A\hat{O}B$

تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$

وقياسها **من قياس القوس** اي ان

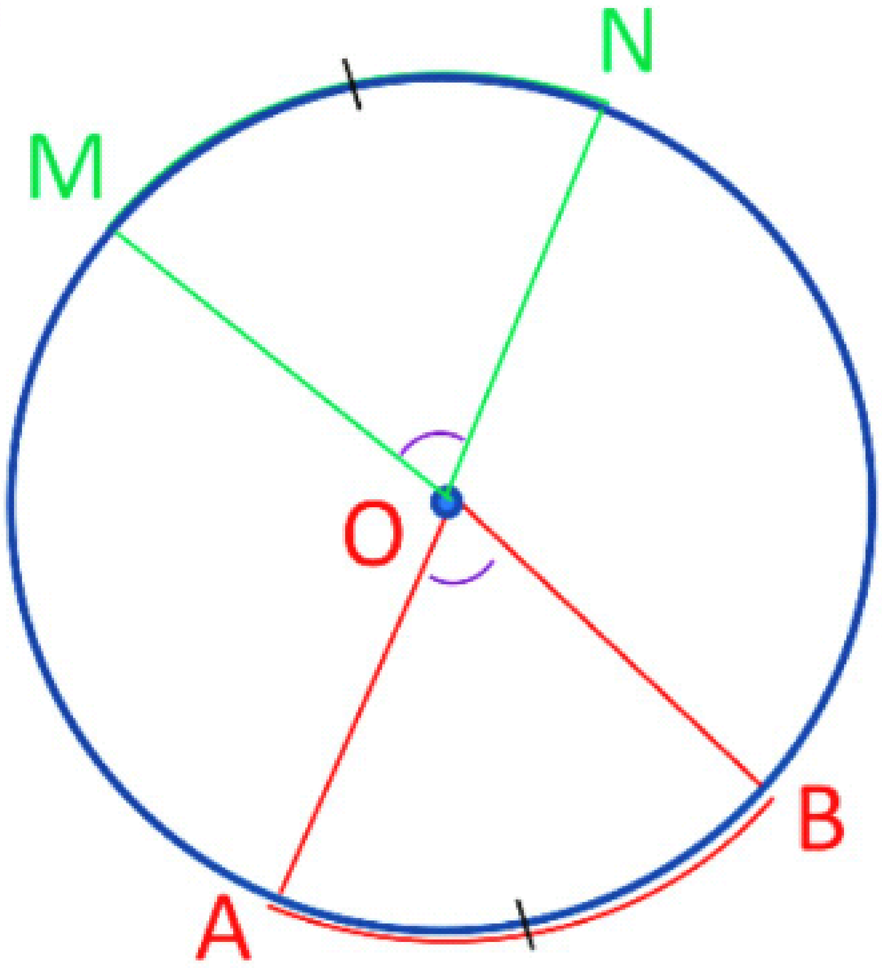
قياس الزاوية المركزية **يساوي**

قياس القوس التي تحصرها بالتالي:

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$

أ.ماهر بربر
0994830381

خواص مهمة:



1- الزوايا المركزية المتساوية تقابل أقواس طبوقة وبالعكس.

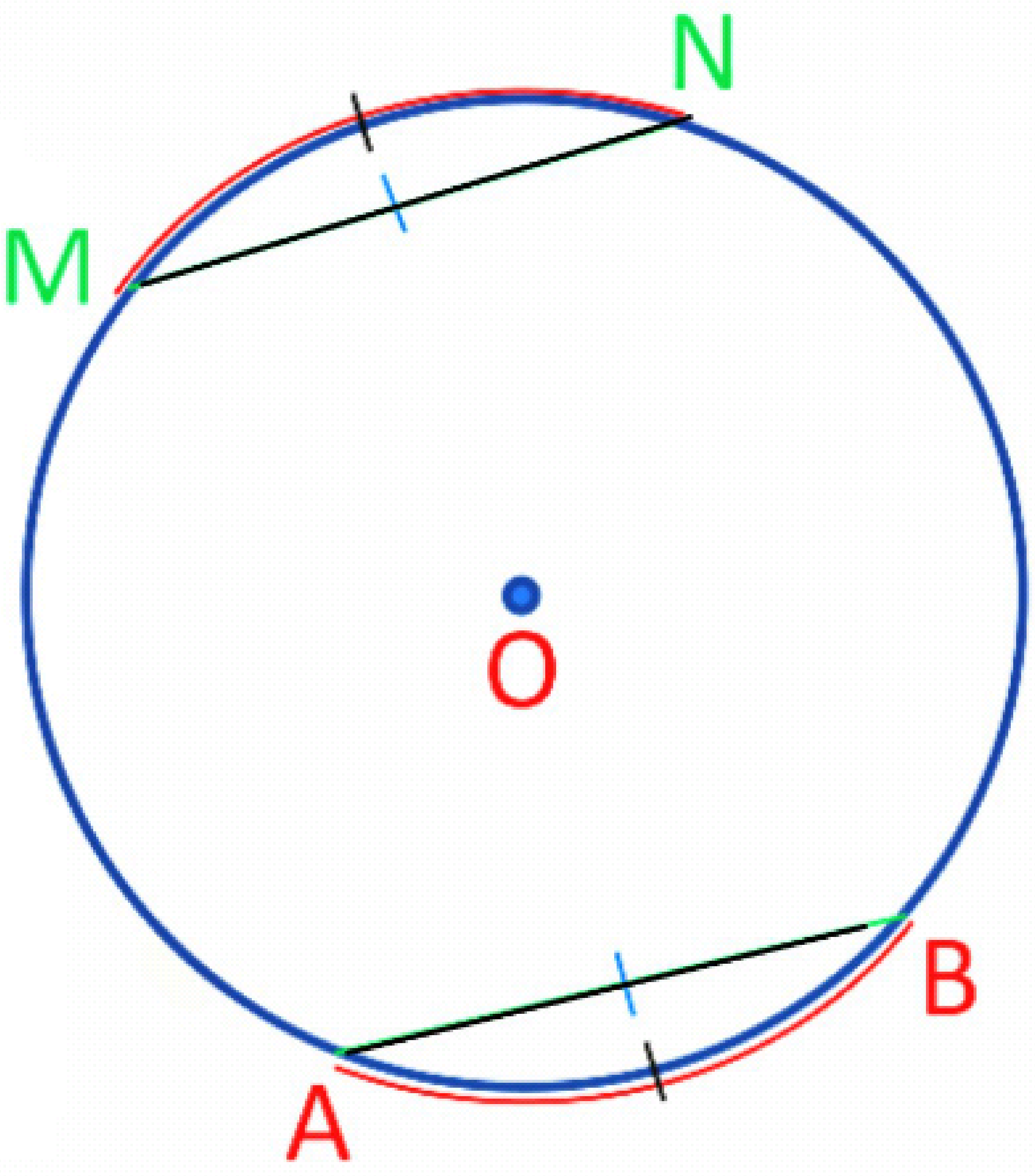
$$M\hat{O}N = A\hat{O}B \Rightarrow \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB}$$

وبالعكس.

$$M\hat{O}N = A\hat{O}B \Leftarrow \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB}$$

أ.ماهر بربر
0994830381

خواص مهمة:



2-الأوتار المتساوية تحدد أقواس طبوقة وبالعكس.

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB} \Leftarrow MN = AB$$

وبالعكس.

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow MN = AB$$

أ.ماهر بربر
0994830381

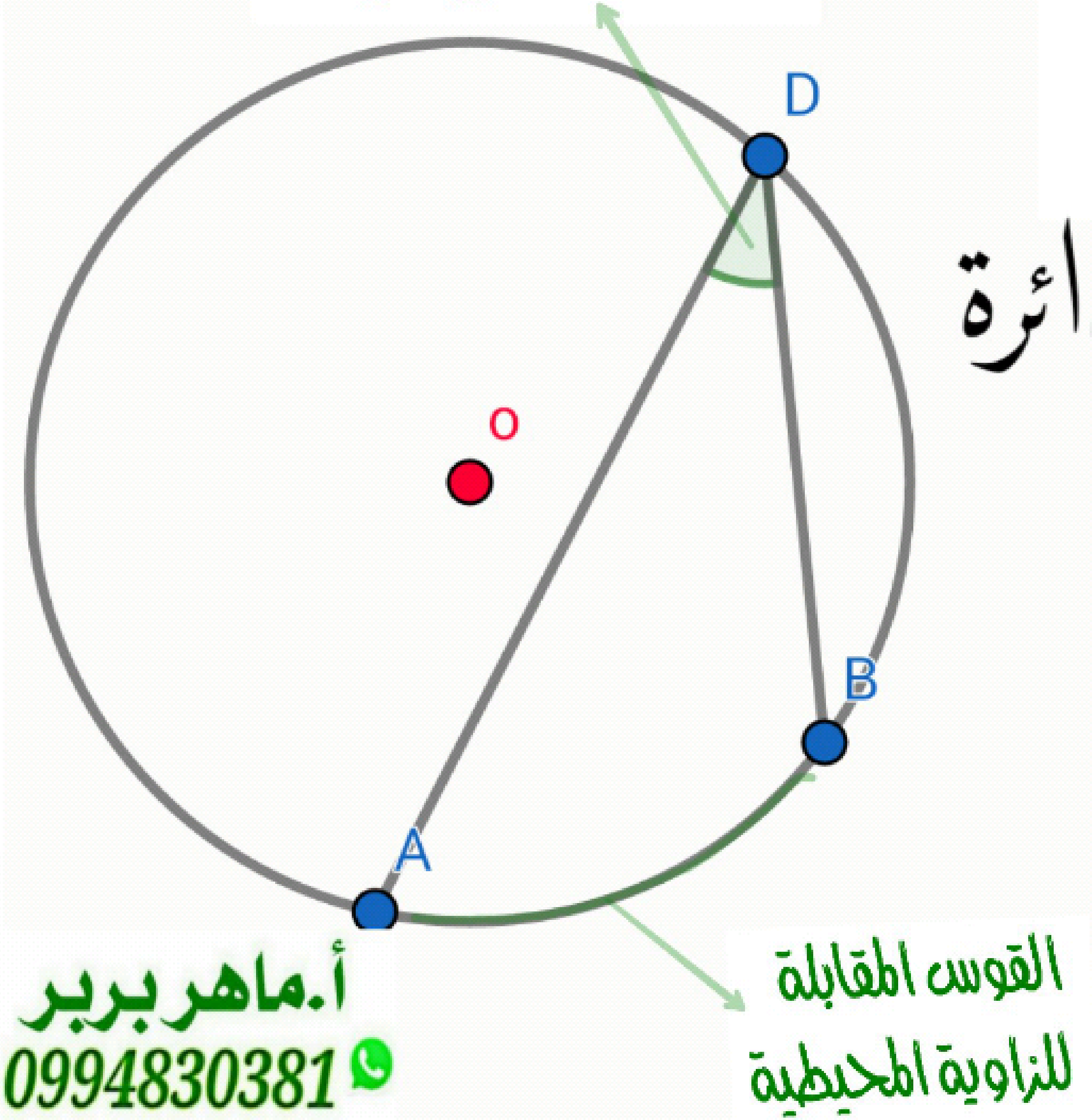
الزاوية المحيطية

هي زاوية رأسها يقع على محيط الدائرة

وكل ضلع من ضلعيها

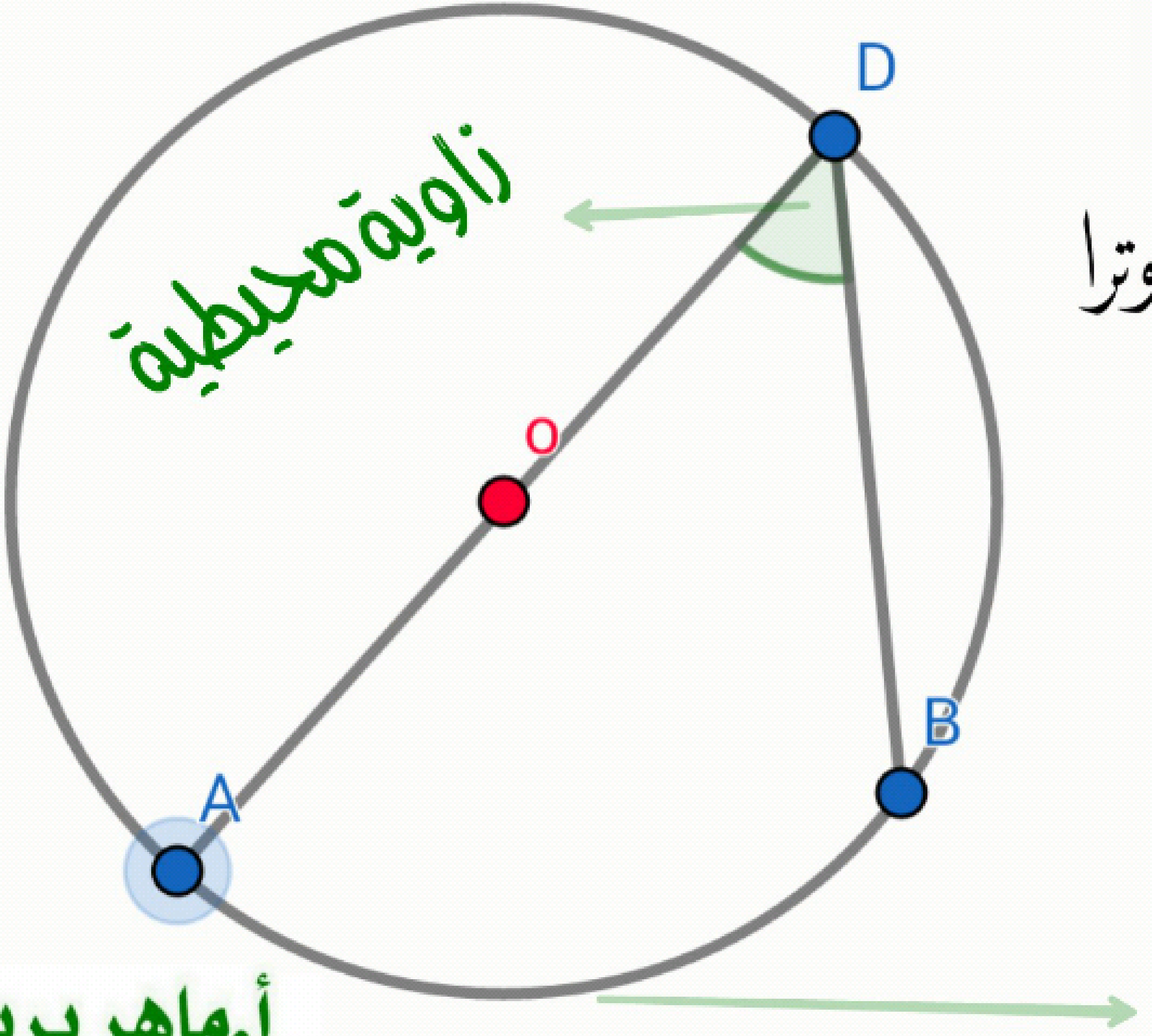
عبارة عن وتر في الدائرة

(في الحالة العامة)



أ.ماهر بربر
0994830381

الزاوية المحيطية



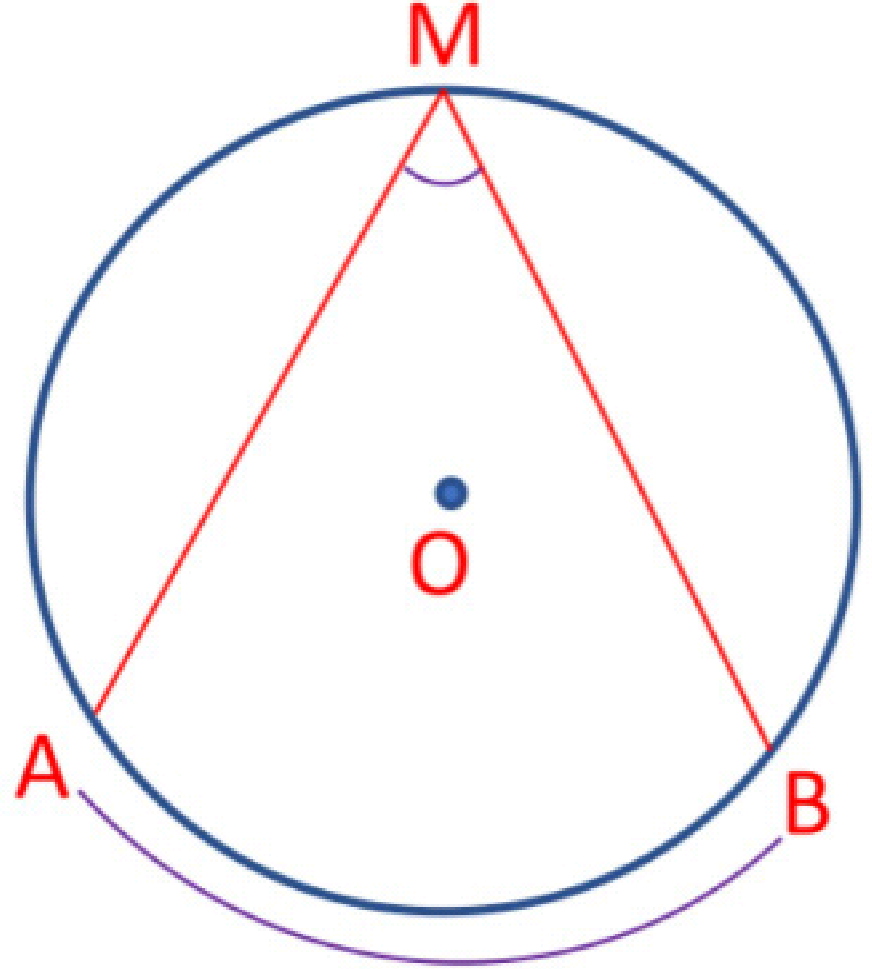
وقد يكون أحد اضلاعها **قطراً** وضلعها الآخر وترا في تلك الدائرة

ضلعا الزاوية المحيطية يحددان **قوساً** على الدائرة نسمية

القوس **المقابلة** للزاوية المحيطية

أ.ماهر بربر
0994830381

قياس الزاوية المحيطية



إن قياس الزاوية المحيطية يساوي **نصف** قياس القوس المقابلة لها

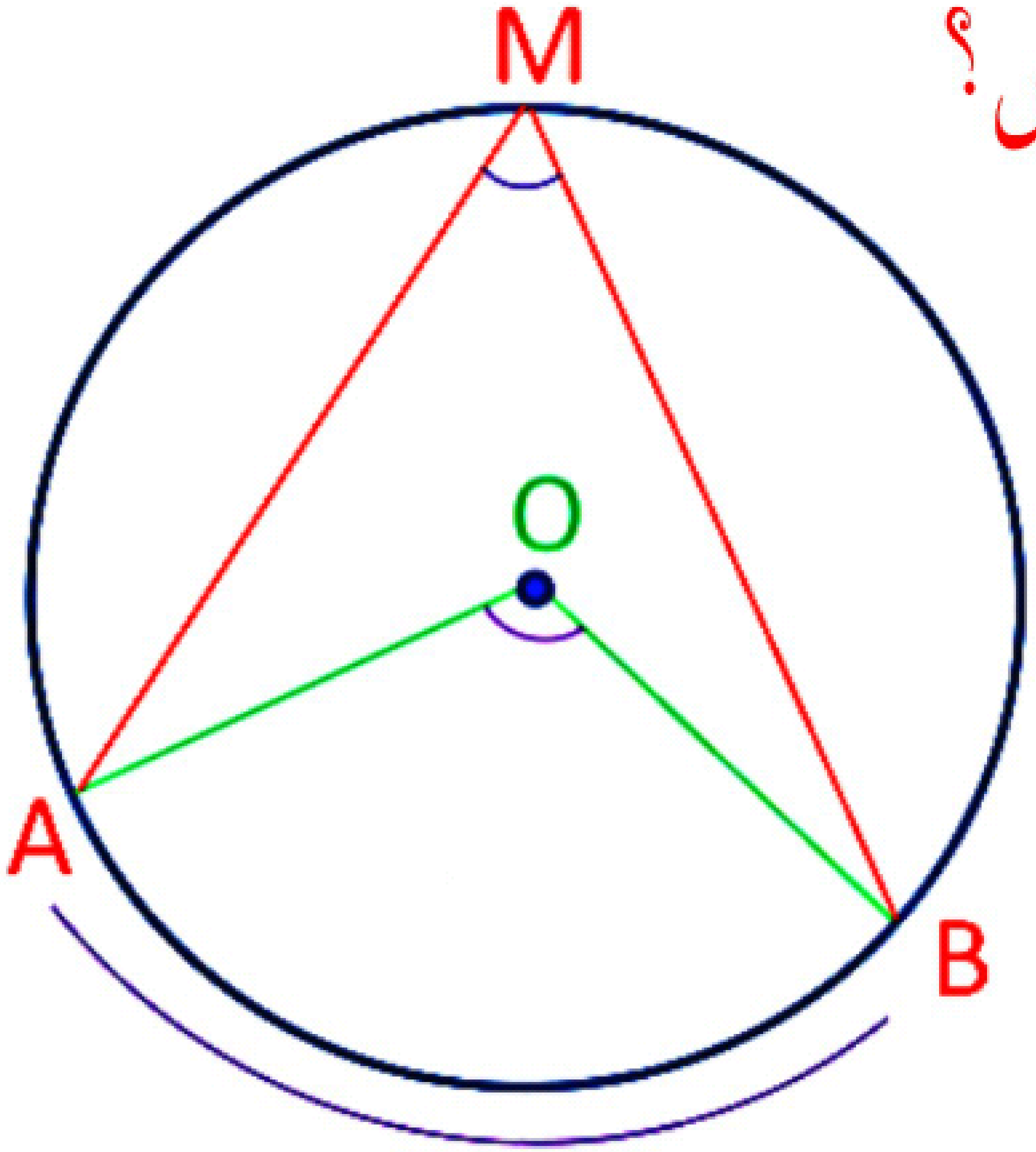
$$A\hat{M}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

وبالتالي قياس القوس المقابلة

للزاوية المحيطية يساوي **ضعفي** قياس الزاوية المحيطية

$$\overset{\frown}{AB} = 2\,A\hat{M}B$$

أ.ماهر بربر
0994830381



ماعلاقة الزاوية المحيطية بالزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس ؟

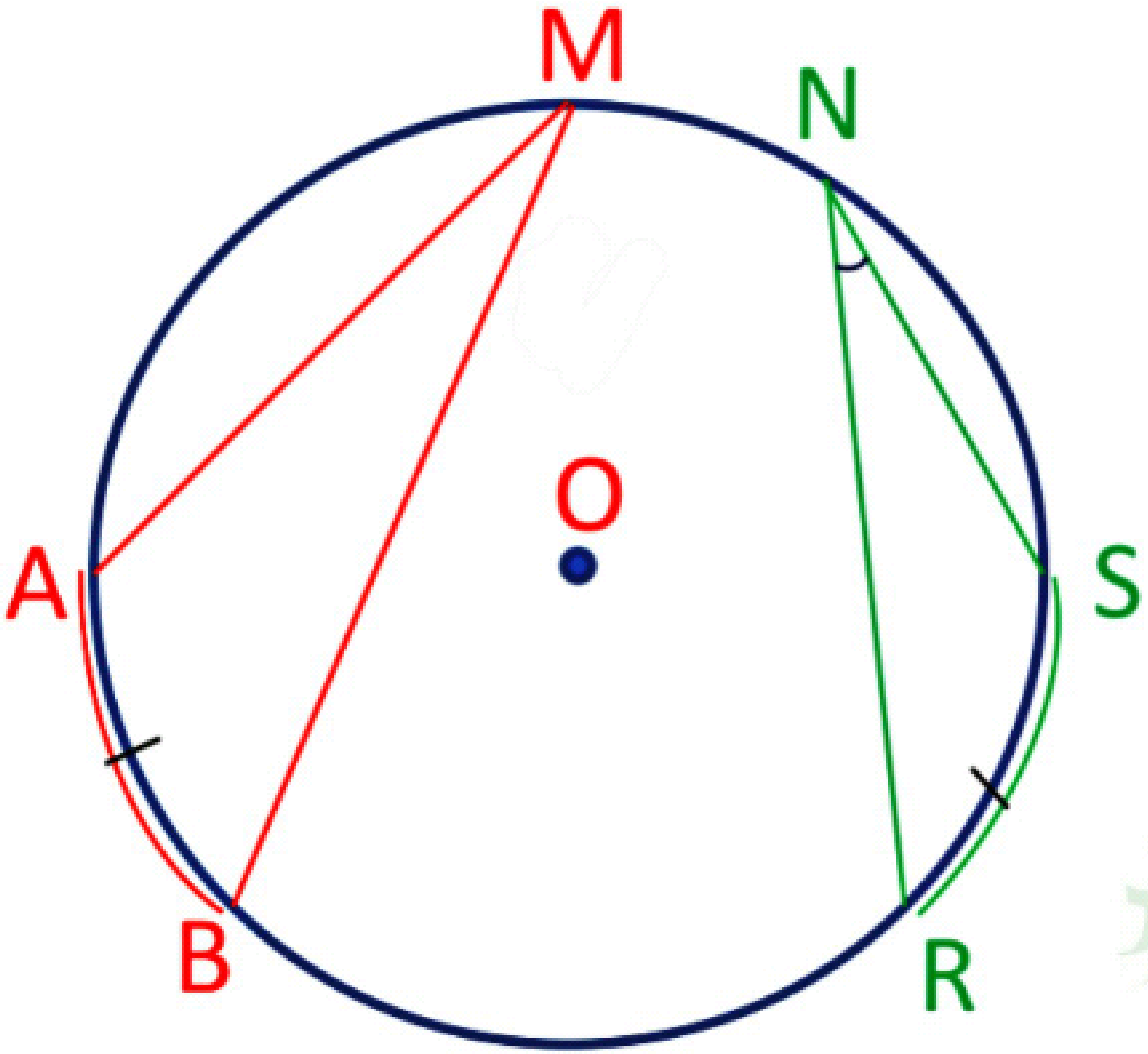
قياس الزاوية المركزية يساوي ضعفي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس

$$A\hat{O}B = 2\ A\hat{M}B$$

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس

$$A\hat{M}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$$

أ.ماهر بربر
0994830381



خواص مهمة

(1) الزوايا المحيطية المتساوية تحصر (تقابل) أقواس طبوقة وبالعكس

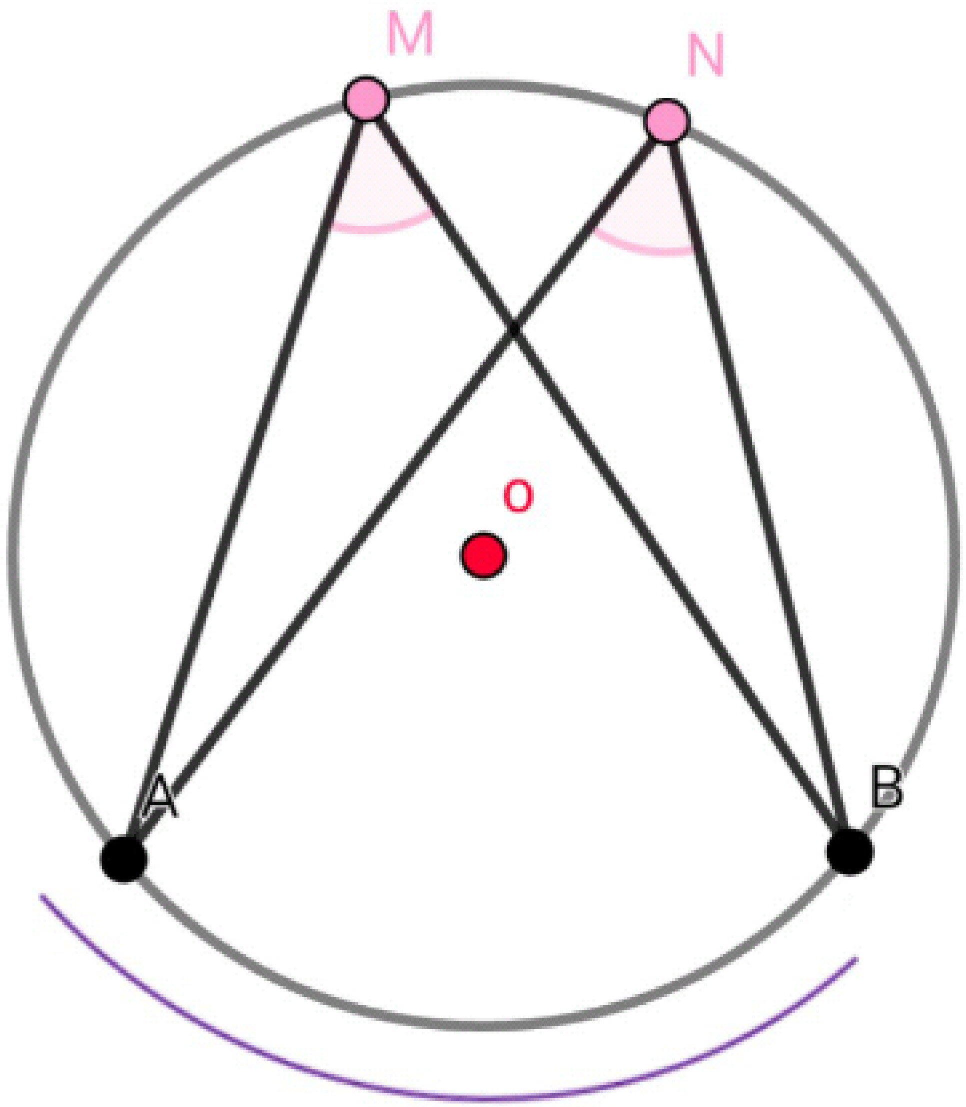
$$\hat{AMB} = \hat{RNS} \Longleftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{RS}$$

أ.ماهر بربر
0994830381

خواص مهمة

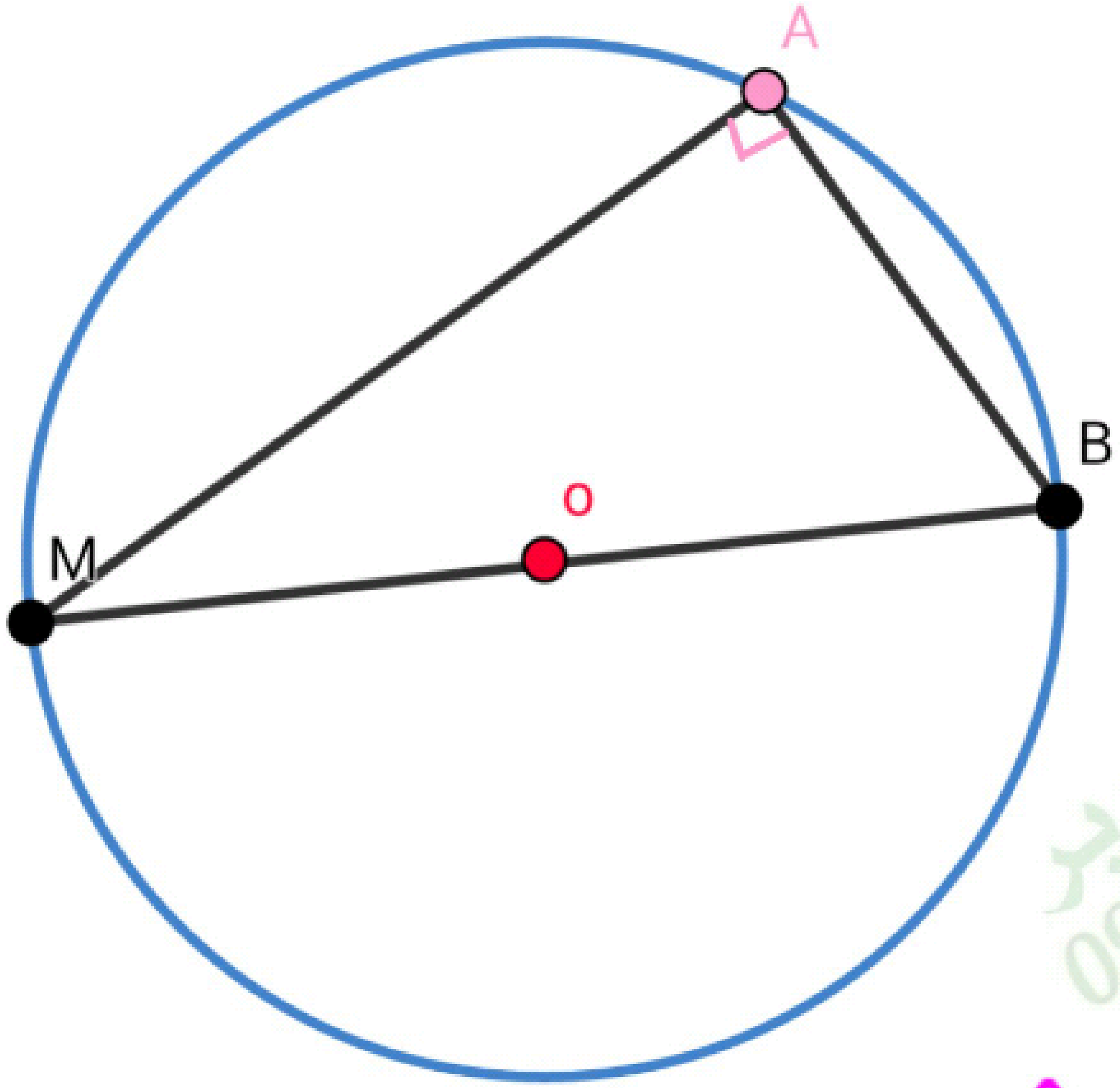
(2) الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه

هي زوايا متساوية



$$A\hat{M}B = A\hat{N}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

أ.ماهر بربر
0994830381



(3) الزاوية المحيطية التي تحصر

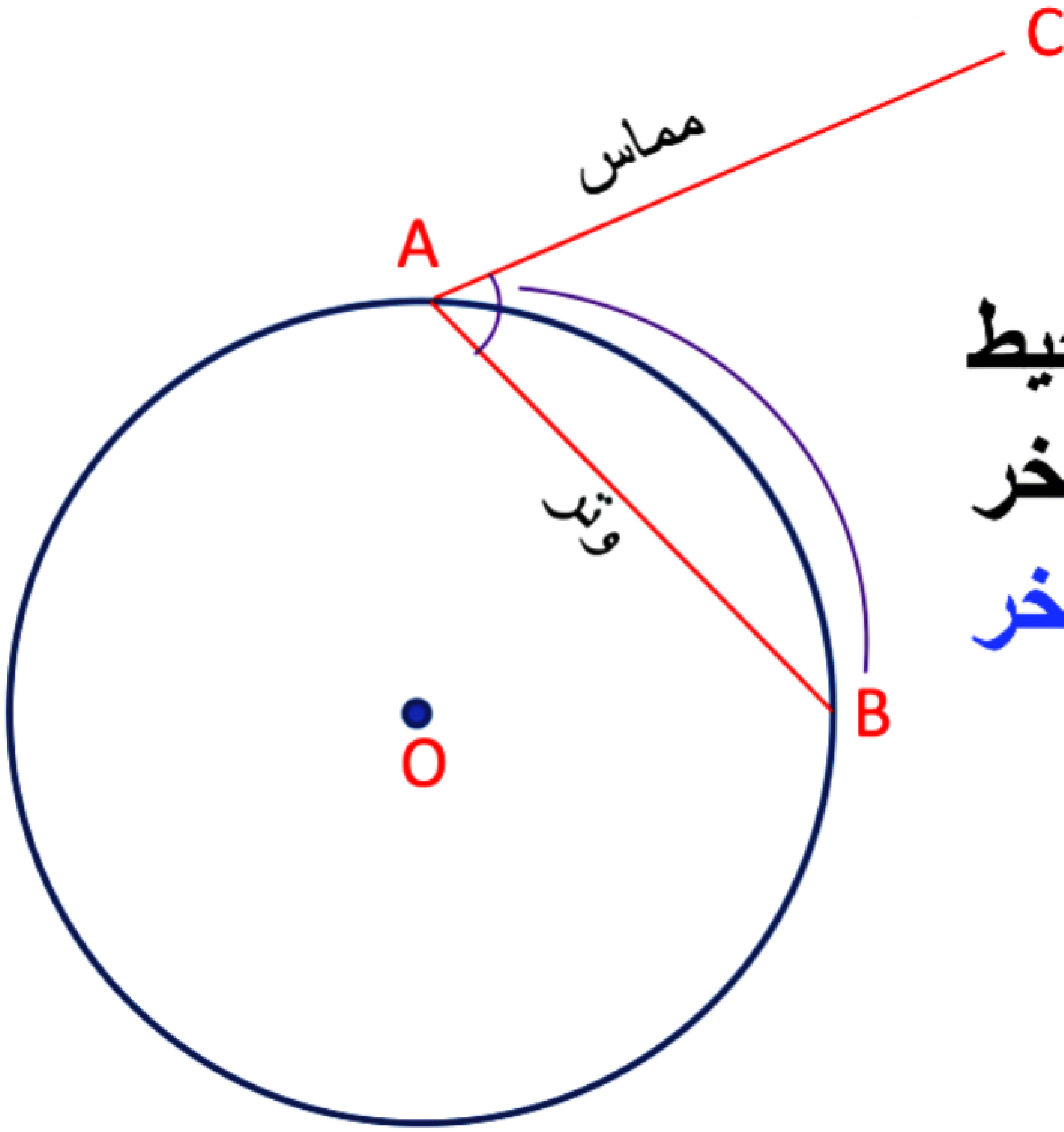
قوس نصف الدائرة هي زاوية قائمة

((((مهمة جدا جدا جدا))))

$$M\hat{A}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MB} = \frac{1}{2}(180)^\circ = 90^\circ$$

$\Rightarrow M\hat{A}B$ هي زاوية قائمة

مماس الدائرة في نقطة منها A يشترك معها بنقطة واحدة فقط هي A ندعوها نقطة التماس

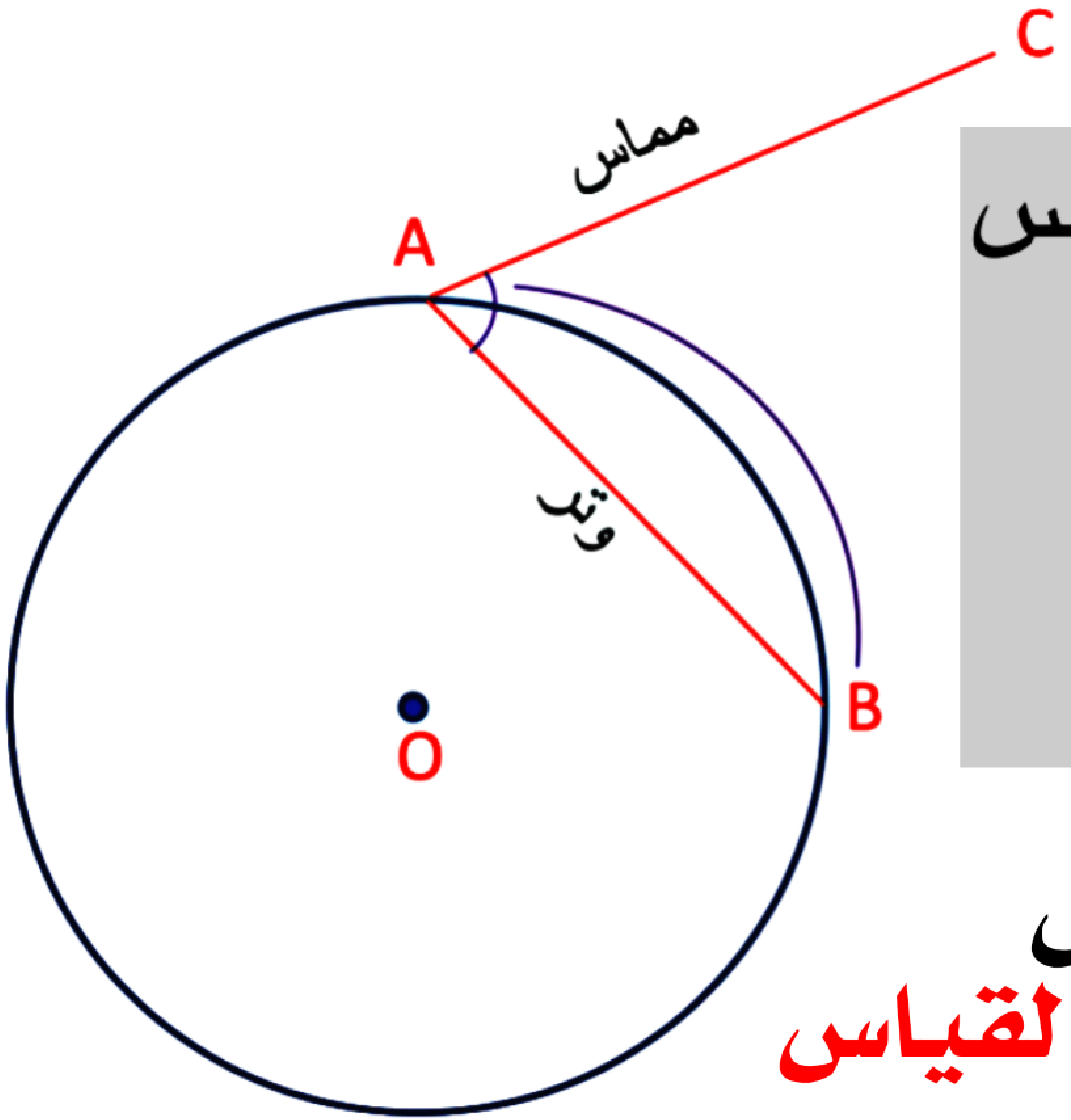


③ **الزاوية المماسية:**

نقول عن زاوية أنها مماسية إذا وقع رأسها على محيط الدائرة وكان أحد أضلاعها وتر في الدائرة والضلع الآخر مماساً لها (أحد أضلاعها داخل الدائرة والضلع الآخر خارجها)

$\widehat{BAC}$ زاوية مماسية تقابل (تحصر) القوس $\overset{\frown}{AB}$

$\widehat{BAC}$ زاوية مماسية تقابل (تحصر) القوس $\overset{\frown}{AB}$

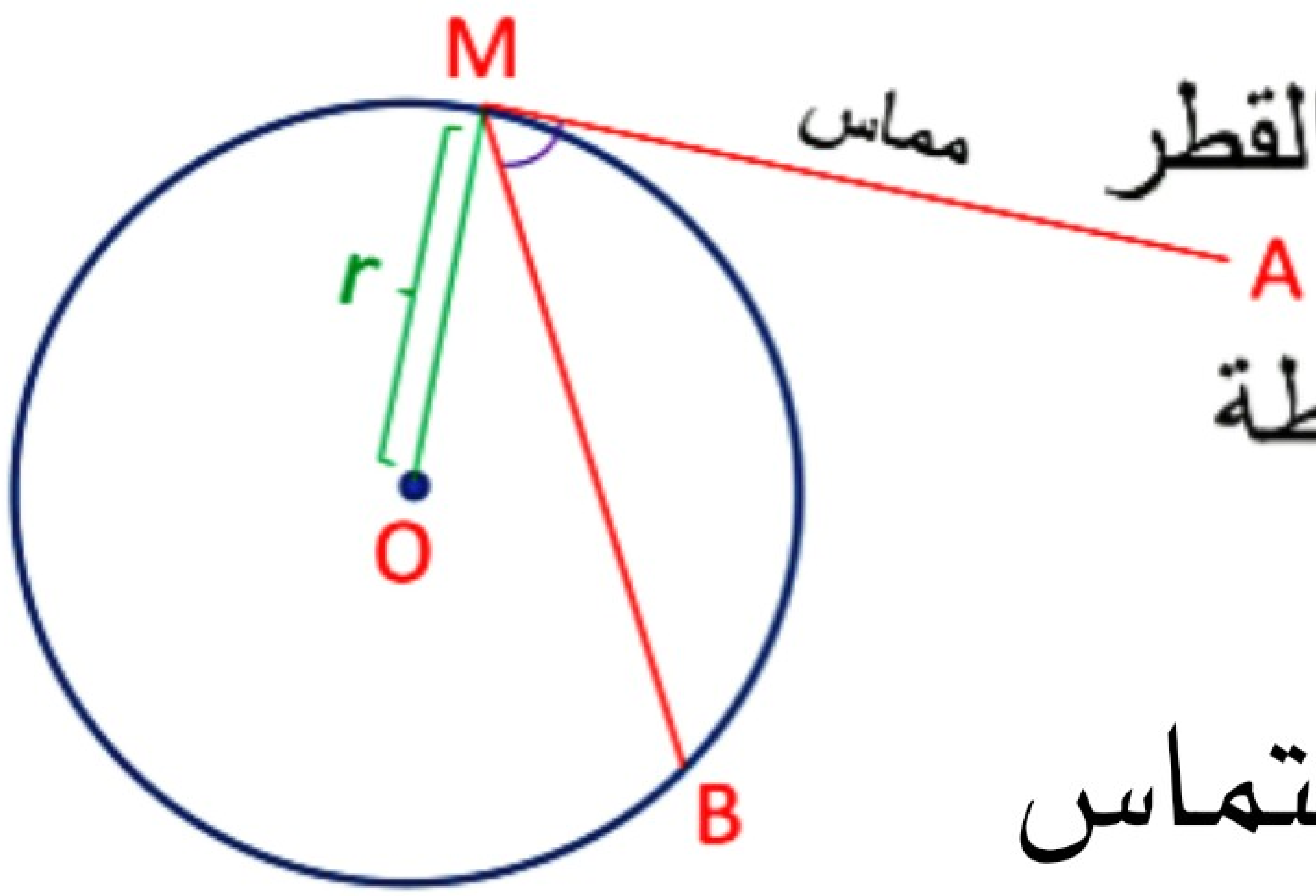


تُقاس الزاوية المماسية بنصف قياس القوس التي تحصره:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

وبذلك فإن الزاوية المماسية تعامل معاملة الزاوية المحيطة من حيث القياس

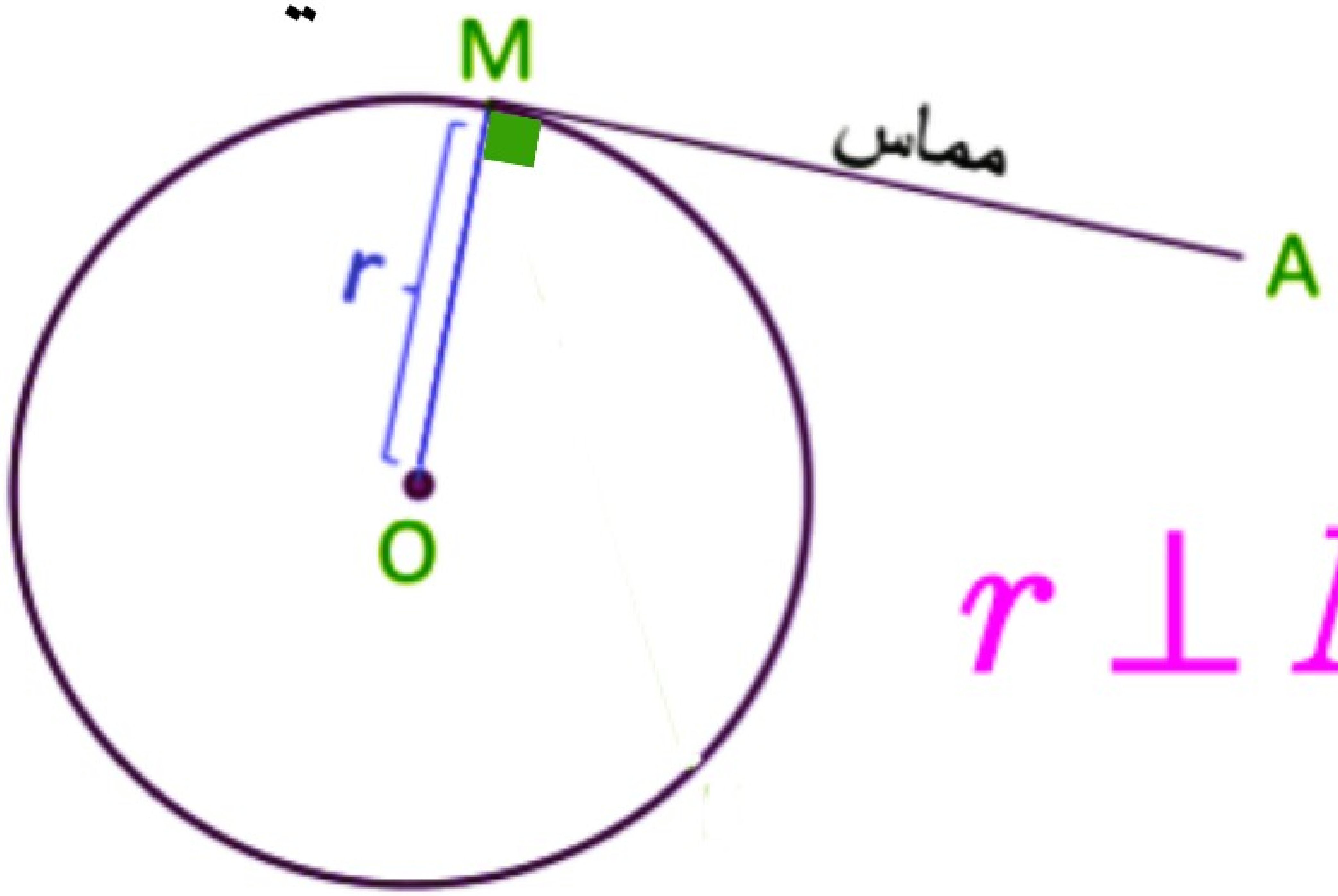
خواص:



1) بعد مركز الدائرة عن مماس لها يسمى نصف القطر

2) مماس الدائرة في نقطة منها A يشترك معها بنقطة واحدة فقط هي A

3) المماس يعامد نصف القطر في نقطة التماس

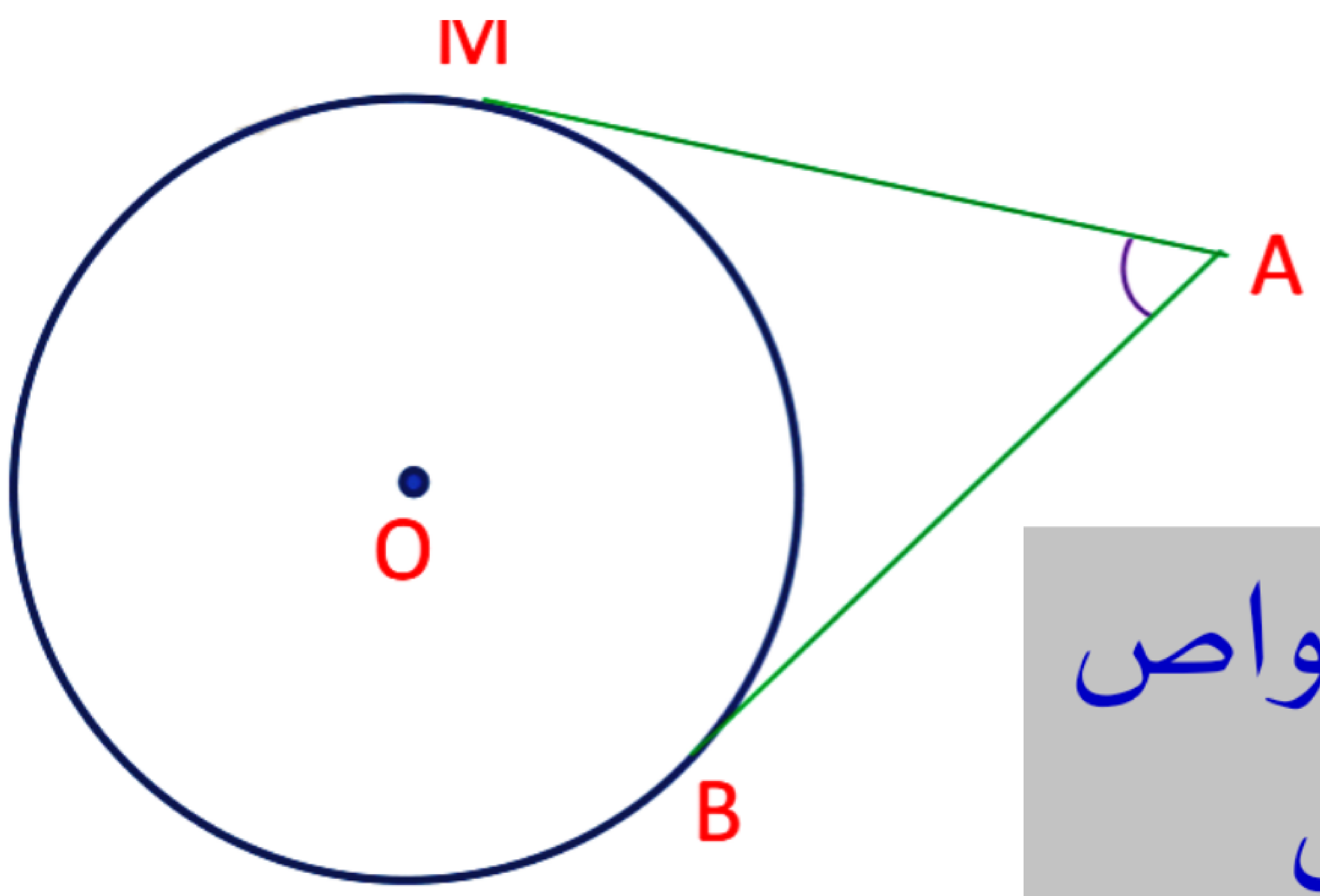


$$r \perp MA$$

مهمه جدا

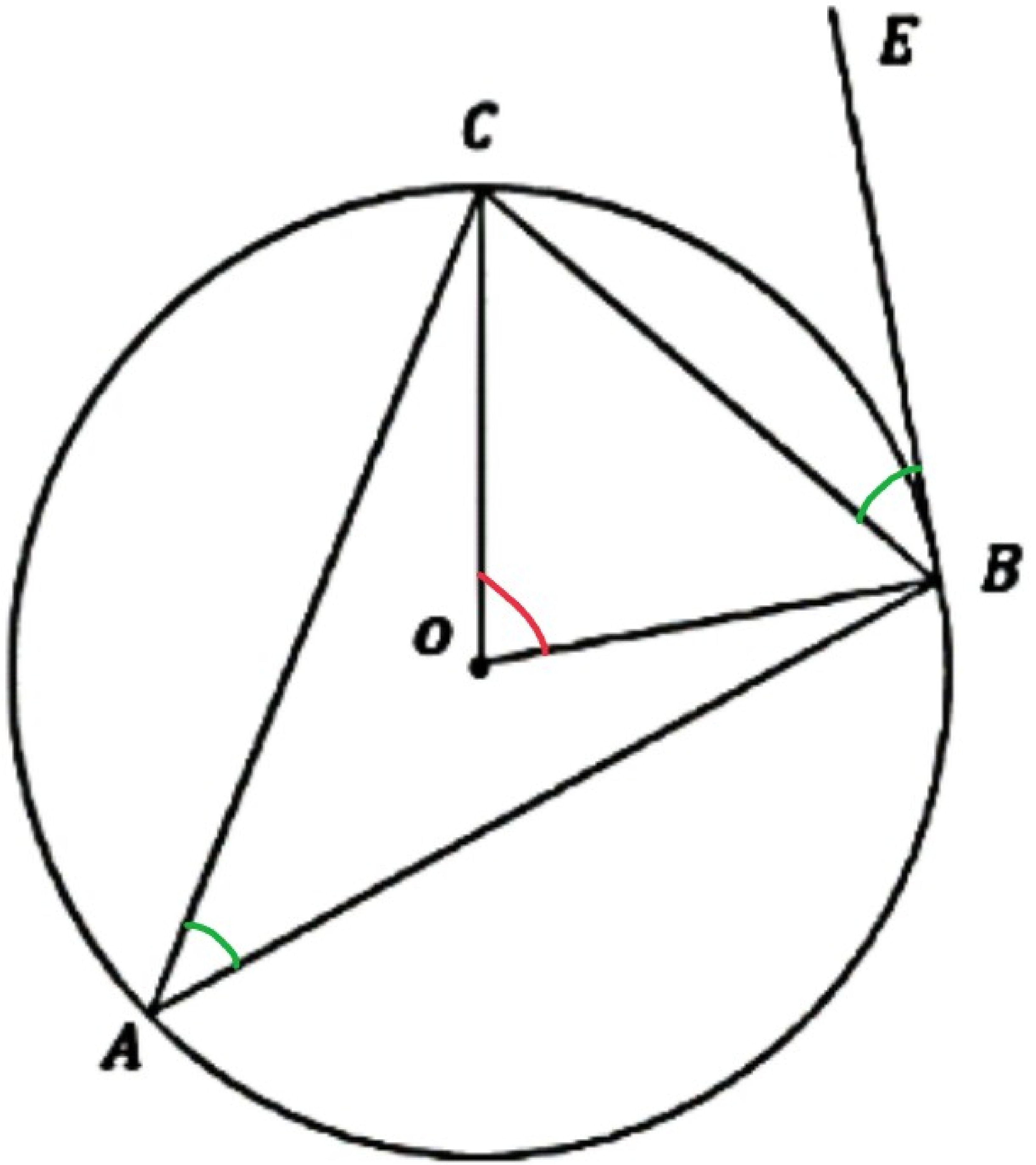
في إثبات أن المثلث قائم الزاوية

4) المماسان المرسومان من نقطة واحده متساويان



يجب فهم وحفظ هذه الخواص جيدا قبل حل المسائل

ماعلاقة الزوايا (المركزية – المحيطية – المماسية) المشتركة بالقوس ؟



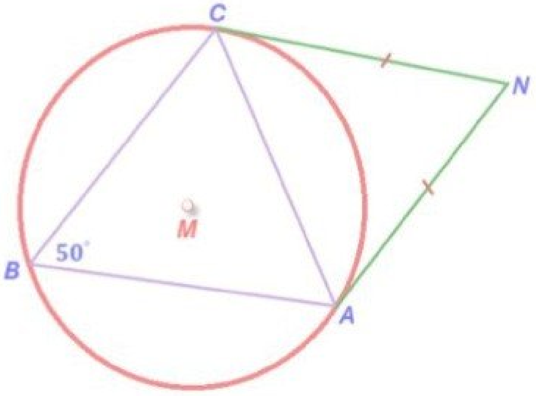
2-الزاوية المماسية في دائرة تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس .

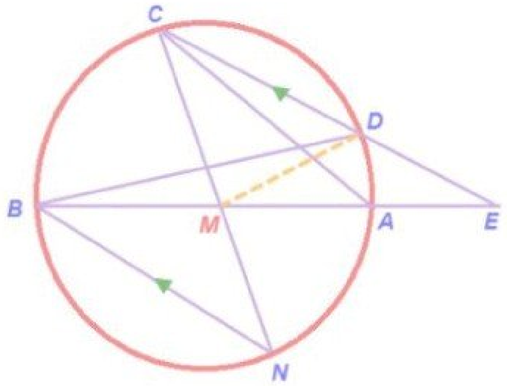
$$\begin{cases} E\hat{B}C \text{ مماسية قوسها } BC \\ C\hat{O}B \text{ مركزية قوسها } BC \end{cases}$$

$$\Leftarrow C\hat{O}B \quad E\hat{B}C = \frac{1}{2}C\hat{O}B$$

3-الزاويتان المحيطية والمماسية اللتان تحصران نفس القوس متساويتان .

$$E\hat{B}C = B\hat{A}C \Leftarrow \begin{cases} E\hat{B}C \text{ مماسية قوسها } BC \\ B\hat{A}C \text{ محيطية قوسها } BC \end{cases}$$





أوراقَ عمل

أ.ماهر بربر

هندسة - الوحدة الثالثة - الدرس الأول

الزاوية المركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها

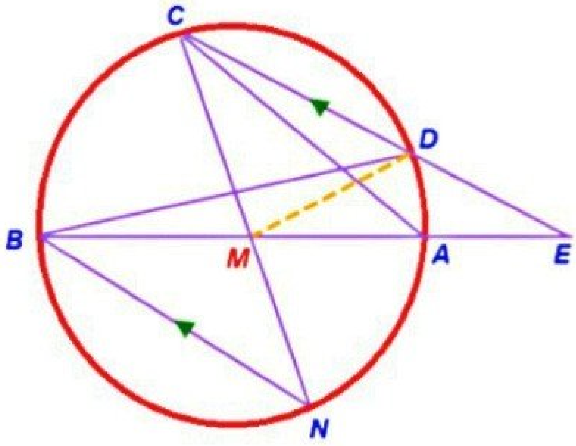
الزاوية المحيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها

الزاوية المماسية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها

رياضيات مع المدرس ماهر بربر 0994 830 381

حل كلا من المسائل التالية .

المسألة الأولى:



في الشكل المرسوم جانباً فيه : $[AB]$ قطر في الدائرة $C(M,R)$

CD وتر فيها ، E نقطة تقاطع CD مع AB

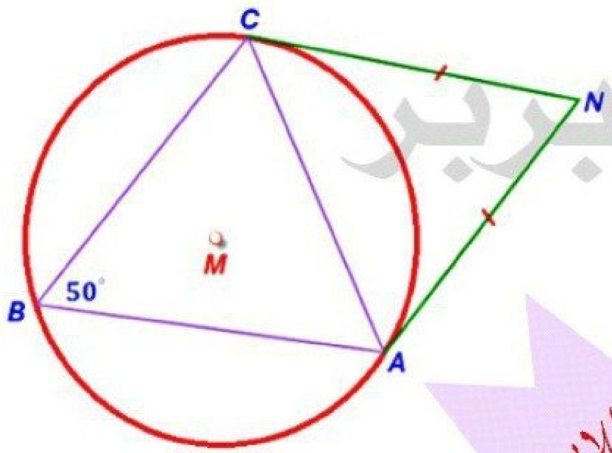
$\widehat{AD} = \frac{1}{6}\widehat{AB}$ ، والمطلوب :

1 – أحسب قياس كل من الزوايا : $A\hat{M}D$ ، $A\hat{C}D$ ، $A\hat{B}D$

2 – أثبت أن الزوايا : $B\hat{N}C$ ، $B\hat{A}C$ ، $B\hat{D}C$ طبوقة

3 – **احسب قياس الزاوية المركزية المنعكسة** $A\hat{M}D$

المسألة الثانية :



في الشكل المرسوم جانباً فيه : $[NA]$ مماس للدائرة $C(M,R)$

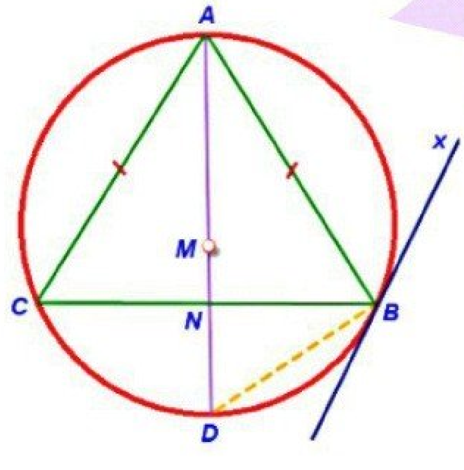
$[NA] = [NC]$ ، والمطلوب :

1 – أثبت أن $[NC]$ مماس للدائرة

2 – إذا كان قياس الزاوية $\hat{B} = 50^\circ$

فأحسب قياسات زوايا المثلث NAC

المسألة الثالثة:



في الشكل المرسوم جانباً فيه : ABC مثلث مرسوم في الدائرة $C(M,R)$

$AB = AC$ ، Bx مماس للدائرة في B ، ممدد AM يلاقي BC في N

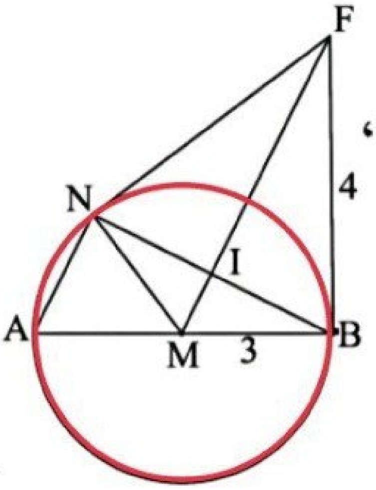
ويلاقي الدائرة في D والمطلوب :

1 – أثبت أن AB ينصف الزاوية $x\hat{B}C$

2 – أثبت أن المثلث ABD قائم الزاوية

3 – أثبت أن الزاويتين $N\hat{D}B$ ، $A\hat{C}B$ طبوقتين

المسألة الرابعة:



C دائرة مركزها M $[AB]$ قطرا فيها ونصف قطرها يساوي 3 ،
$(FB),(FN)$ مماسان لها و $BF = 4$ والمطلوب :

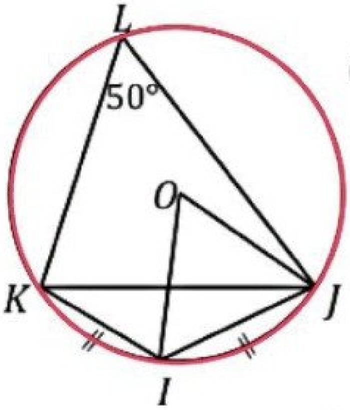
1 – اثبت ان المثلثان ANB و FMB قائمان

2 – اثبت ان : $F\hat{B}N = N\hat{A}B$

3 – اثبت ان MF منصف للزاوية $N\hat{F}B$ ثم استنتج ان $AN \parallel FM$

المسألة الخامسة :

في الشكل المجاور، دائرة C مركزها O



فيها $K\hat{L}J = 50°$ ، I منتصف القوس $\widehat{KJ}$، المطلوب:

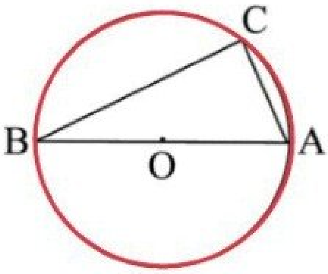
1 – احسب قياس القوس $\widehat{KJ}$ و قياس الزاوية $I\hat{O}J$.

2 – احسب قياسات زوايا المثلثات KIJ.

3 – احسب قياس الزاوية المركزية المنعكسة $I\hat{O}J$

المسألة السادسة:

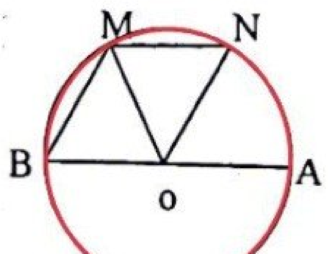
في الشكل المجاور دائرة C مركزها O وطول قطرها $AB = 8$



C نقطة تحقق : $\widehat{BC} = 2\,\widehat{CA}$ والمطلوب :

1 – أثبت ان $\widehat{CA} = 60°$ واحسب قياسات زوايا المثلث ABC

2 – احسب طول BC



المسألة السابعة: A, N, M, B نقاط من دائرة مركزها O ،

وطول قطرها $AB = 8$ $\widehat{BM} = \widehat{MN} = \widehat{NA}$،

احسب كلاً من قياس الزاويتين $A\hat{O}N$, $A\hat{B}M$

واستنتج أن : $BM \parallel ON$، أثبت أن المثلث ONM متساوي الأضلاع واحسب مساحته

المسائل السبعة هي دورات سابقه وفيها بعض الاضافات كما أنها متتمه للمسائل التي تم حلها في كل قسم وليست بديلا عنها .

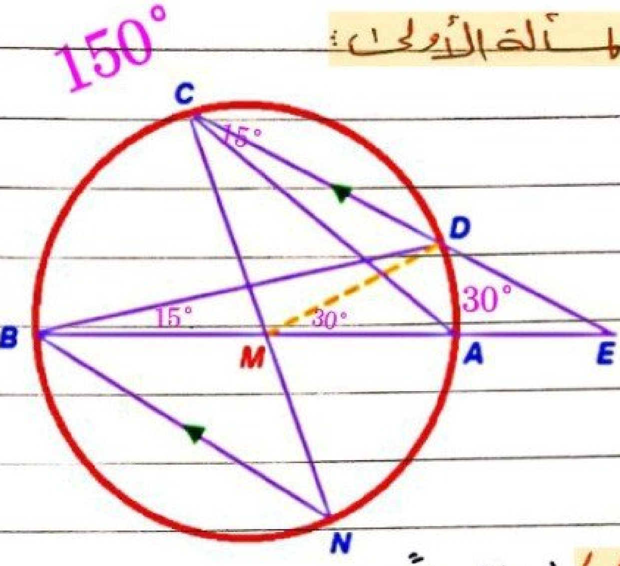
ملاحظة:

تم حذف الطلبات المتعلقه بالرباعي الدائري لأنه غير مطلوب في الفصل الأول.

خاص بطلاب الدورة الإلكترونية

قبل كل شيء ضع الفرضيات على الرسم الهندسي
وكل معلومة تظهر معك في الطلبات ضعها مباشرة على الرسم

*المسألة الأولى:



*1- لدينا فرضاً

$$\overset{\frown}{AD} = \frac{1}{6}\,\overset{\frown}{AB}$$

ومن AB قطراً في الدائرة

وبالتالي: $\overset{\frown}{AB} = 180°$

$$\overset{\frown}{AD} = \frac{1}{6} \times (180°) = 30°$$

أي أن:

$$\overset{\frown}{AD} = 30° \Rightarrow \overset{\frown}{DB} = 150°$$

ومن:

$A\hat{M}D = 30°$ أي $A\hat{M}D = \overset{\frown}{AD}$

(مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها)

$A\hat{C}D = 15°$ أي $A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$

(محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها)

(أو: نصف المركزية المشتركة معها بالقوس)

$A\hat{B}D = 15°$ أي $A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$

لنفس السبب السابق أو:

$$A\hat{C}D = A\hat{B}D = 15°$$

(محيطيتان تشتركان بالقوس $\overset{\frown}{AD}$)

*2- إن الزوايا: $B\hat{N}C$ ، $B\hat{A}C$ ، $B\hat{D}C$ جميعها زوايا

محيطية تحصر القوس (تشترك بالقوس) $\overset{\frown}{BC}$ فهي متساوية لأن:

الزوايا المحيطية التي تشترك بالقوس ذاتها تكون متساوية.

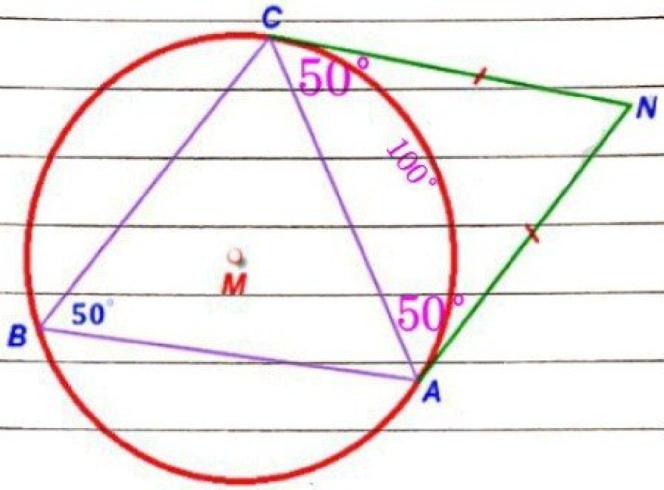
*3) وجدنا في الطلب الأول:

قياس الزاوية المركزية $A\hat{M}D = 30°$

وبالتالي قياس زاويتها المنعكسة تساوي

$360° - 30° = 330°$

*** المسألة الثانية:**



***1)** لدينا فرضاً: $[NC]=[NA]$

أي أن المثلث NAC متساوي الساقين في N ومنه:

$N\hat{A}C = N\hat{C}A$ ......*

بما أن $[NA]$ مماس للدائرة في A

ومنه: $N\hat{A}C = \frac{\widehat{AC}}{2}$

(مماسية تقاس بنصف قياس القوس المقابل)

ومن * يكون:

$$N\hat{A}C = N\hat{C}A = \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

أي أن:

$N\hat{C}A$ تساوي نصف قياس القوس $\widehat{AC}$ التي تحصره فهي مماسية وعليه فإن NC مماس للدائرة في C.

تذكر:

/ المماسان المرسومان من نقطة واحدة متساويان /

***2)** ومنه: $\hat{B}=50^\circ$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC}=100^\circ$$

(محيطية تساوي نصف قياس القوس المقابل)

ولدينا: $N\hat{C}A = N\hat{A}C$ مماسيتان تحصران القوس $\widehat{AC}$ ومنه:

$$N\hat{C}A = N\hat{A}C = \frac{\widehat{AC}}{2} = 50^\circ$$

(أو نقول مباشرة:

$N\hat{C}A = N\hat{A}C = \hat{B}$ قياس الزاوية المماسية يساوي قياس المحيطية المشتركة معها بالقوس)

ومنه: في المثلث NCA:

$\hat{C}=50^\circ$ ، $\hat{A}=50^\circ \Rightarrow \hat{N}=80^\circ$

* المسألة الثالثة:

*1) إن قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس أي:

$A\hat{B}x = A\hat{C}B$ ...... ★

وبما أن المثلث ABC متساوي الساقين في A عندئذٍ:

$A\hat{C}B = A\hat{B}C$

بالمقارنة مع ★ نجد:

$A\hat{B}x = A\hat{C}B = A\hat{B}C \Rightarrow$

$A\hat{B}x = A\hat{B}C \Rightarrow$

AB ينصف الزاوية $x\hat{B}C$

*2) الزاوية المحيطية التي تحصر قوس نصف الدائرة هي زاوية قائمة: أي: $A\hat{B}D = 90°$ ومنه المثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ قائم في $\hat{B}$.

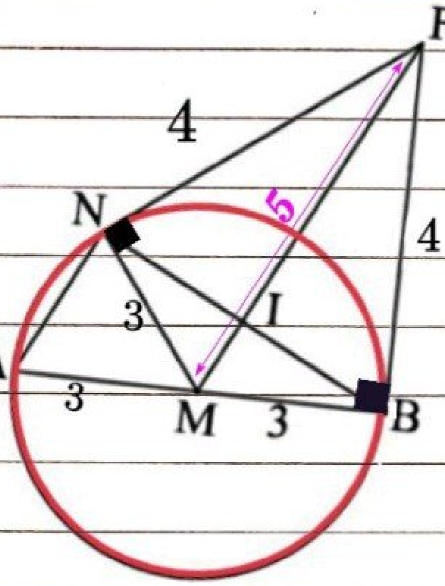
*3) الزاوية $N\hat{D}B$ تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$

" $A\hat{C}B$ " $\overset{\frown}{AB}$

وهما محيطيتان تحصران القوس ذاته فهما متساويتان وقياس كل منهما يساوي نصف قياس القوس $\overset{\frown}{AB}$

(الزوايا المحيطية التي تحصر القوس ذاته متساوية)

* المسألة الرابعة:



*1) . $A\hat{N}B$ زاوية محيطية تحصر قوس نصف الدائرة ⇐ $A\hat{N}B = 90°$ ومنه المثلث ANB قائم في $\hat{N}$.

. لدينا فرضاً FB مماس للدائرة في B ومنه $FB \perp MB$ (المماس يعامد نصف القطر في نقطة التماس) ومنه: المثلث FMB قائم في $\hat{B}$.

*2) $F\hat{B}N$ زاوية مماسية تحصر القوس $\overset{\frown}{BN}$ وتساوي نصفه.

$N\hat{A}B$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{BN}$ وتساوي نصفه

ومنه $F\hat{B}N = N\hat{A}B$

(تذكر: الزاوية المماسية تساوي الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس)

(3 FBM قائم في $\hat{B}$ برهاناً ومنه وحسب مبرهنة فيثاغورث نجد:

$[FM]^2 = [MB]^2 + [BF]^2 \Rightarrow [FM]^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow$

$[FM] = 5$

FNM قائم في $\hat{N}$ برهاناً وبما أن FB ، FN مماسان مرسومان من نقطة واحدة فهما متساويان أي أن $FN = FB = 4$

وبالتالي وحسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم FNM نجد: $FM = 5$

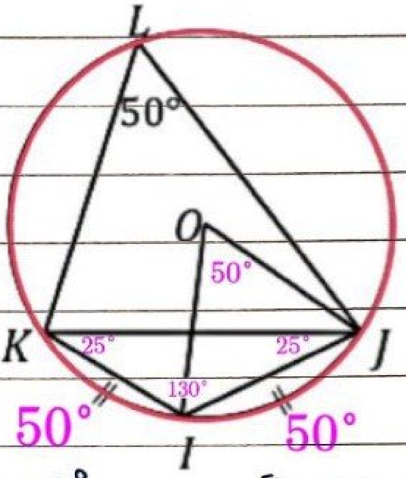
مما سبق نجد:

المثلثان FMB ، FNM طبوقان لتساوي أطوال أضلاع الأول مع مقابلاتها من الثاني ومن تطابق المثلثين ينتج أن الزوايا المتقابلة طبوقة ومنه $N\hat{F}M = M\hat{F}B$ أي أن MF منصف للزاوية $N\hat{F}B$.

* المثلث NFB متساوي الساقين في F ، فيه FM منصف لزاوية الرأس فهو متوسط ومحور وارتفاع أي أن:

وجدنا $\begin{cases} MF \perp NB \\ AN \perp NB \end{cases} \Leftarrow AN \parallel MF$ (العمودان على مستقيم واحد متوازيان)

* المسألة الخامسة:



*1) لدينا فرضاً: $K\hat{L}G = 50°$

وهي زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{KJ}$

والزاوية المحيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل ومنه

$K\hat{L}G = 50° \Rightarrow \overset{\frown}{KJ} = 100°$

وبما أن: $\overset{\frown}{KI} = \overset{\frown}{IJ}$ فرضاً فإن

$\overset{\frown}{KI} = \overset{\frown}{IJ} = \frac{100}{2} = 50°$

ومنه:

$I\hat{O}J = \overset{\frown}{IJ} = 50°$

(مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها)

*2)

$I\hat{K}J = \frac{\overset{\frown}{IJ}}{2} = \frac{50°}{2} = 25°$ "محيطية"

$K\hat{J}I = \frac{\overset{\frown}{KI}}{2} = \frac{50°}{2} = 25°$ "محيطية"

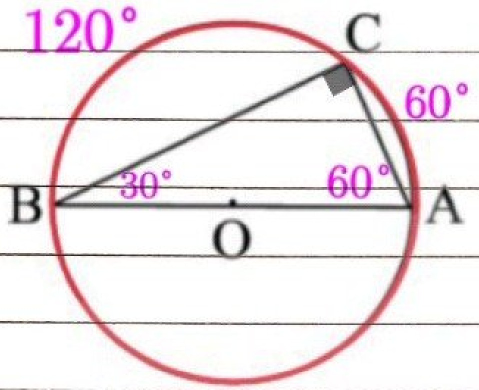
ومنه:

$K\hat{I}J = 180 - (25+25) = 130°$

*3) وجدنا $I\hat{O}J = 50°$ وبالتالي

قياس زاويتها المنعكسة $360 - 50 = 310°$

* المسألة السادسة:



*1) لدينا AB قطراً في الدائرة ومنه

$\overset{\frown}{AB} = 180° \Rightarrow$

$\underbrace{\overset{\frown}{BC}} + \overset{\frown}{CA} = 180°$

$2\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{CA} = 180° \Rightarrow 3\overset{\frown}{CA} = 180° \Rightarrow$

$\overset{\frown}{CA} = 60°$ ومنه $\overset{\frown}{BC} = 120°$

في المثلث ABC نجد:

$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \frac{60}{2} = 30°$ (محيطية)

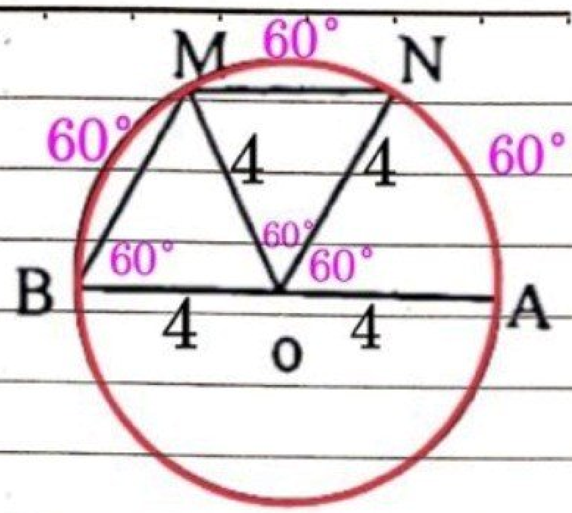
$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{120}{2} = 60°$ (محيطية)

والزاوية $\hat{C}$ محيطية تحصر قوس نصف الدائرة فهي قائمة أي $\hat{C} = 90°$

*2) /يتم الحساب بأكثر من طريقة/

$\underbrace{\sin 60°} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$



* المسألة السابعة :

لدينا فرضاً :

AB قطر في الدائرة ومنه :

$\overset{\frown}{AB}=180°$

والقوس $\overset{\frown}{AB}$ هو عبارة عن مجموع الأقواس :

$\overset{\frown}{BM}$ ، $\overset{\frown}{MN}$ ، $\overset{\frown}{NA}$

وهي متساوية فرضاً ومنه :

$\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NA} \Rightarrow$ ؛ $\overset{\frown}{AB}=180°$

$\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{NA}=180°$

$3\overset{\frown}{BM}=180° \Rightarrow \overset{\frown}{BM}=60° \Rightarrow \overset{\frown}{MN}=60°$ and $\overset{\frown}{NA}=60°$

وعليه فإن :

* $A\hat{O}N=\overset{\frown}{NA}=60°$ (مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها)

$A\hat{B}M=\dfrac{\overset{\frown}{MA}}{2}$ (محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها)

$\overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{NA}=60°+60° \Rightarrow \overset{\frown}{MA}=120°$

ومنه $A\hat{B}M=\dfrac{120°}{2}=60°$

* مما سبق نجد :

$\left\{\begin{array}{l} A\hat{O}N=60° \\ A\hat{B}M=60° \end{array}\right.$ الزاويتان $A\hat{O}N$ ، $A\hat{B}M$ متساويتان وهما في وضع التناظر بالنسبة للمستقيمين ON ، BM والقاطع