مسألة هامّة (التابع اللوغاريتمي)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف وفق : $f(x) = \ln(e^x - x)$ و **المطلوب** :

أ-

Abdullah Attoura
& Abdulmalek Khairullah

1- تحقّق من أنّ $D_f = \mathbb{R}$.

2- أثبت أنّ التابع f يُكتَب بالشكل $f(x) = x + \ln(1 - xe^{-x})$.

3- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه .

4- أثبت أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ، و ادرس وضعه بالنسبة للخط C .

5- ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .

6- أثبت أنّ الخط C يقبل مماساً T يوازي المستقيم Δ في نقطة يُطلَب تعيين إحداثياتها ، ثم اكتب معادلة المماس T .

7- في معلم واحد ارسم Δ ثم ارسم C .

8- أوجد مجموعة تعريف التابع $h(x) = \ln(f(x))$

ب- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و **المطلوب** :

1- برهن بالتدريج من أجل $n \geq 0$ صحّة المتراجحة : $0 < u_{n+1} \leq u_n$.

2- استنتج أن المتتالية u_n متقاربة و عيّن نهايتها .

أ) -1 التابع f معرف بشرط:

$$e^x - x > 0$$

$$u(x) = e^x - x$$

لندرس اطراد $u(x)$:

$$u'(x) = e^x - 1$$

$$u'(x) = 0 \iff e^x = 1$$

$$x = \ln(1) = 0$$

$$u(0) = e^0 - 0 = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

نستنتج أن $u(x) \geq 1$

إذن $u(x) > 0$ أيا كانت x من $\mathbb{R}$.

فالتابع f معرف على $\mathbb{R}$.

-2

$$f(x) = \ln(e^x(1 - xe^{-x}))$$

$$= \ln(e^x) + \ln(1 - xe^{-x})$$

$$f(x) = x + \ln(1 - xe^{-x})$$

-3

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(e^x - x)$$

$$= \lim_{u(x) \to +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right)$$

$$= +\infty + \ln(1) = +\infty$$

نذكر: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

-4

$$f(x) - y_\Delta = \cancel{x} + \ln(1 - xe^{-x}) - \cancel{x}$$

$$= \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

$$= \ln(1 - 0) = 0$$

فالمستقيم Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

$$f(x) - y_\Delta = 0 \iff$$

$$\ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 0$$

$$1 - \frac{x}{e^x} = 1$$

$$\frac{x}{e^x} = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ	تقاطع	C تحت Δ

يتقاطع C مع Δ في النقطة $(0, 0)$.

-5 f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

$$f'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$f(0) = \ln(1) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

6) لكي يقبل C مماساً يوازي Δ
يجب أن تقبل المعادلة $f'(x)=1$ حلاً
واحداً على الأقل.

$$f'(x)=1 \Rightarrow \frac{e^x-1}{e^x-x}=1$$

$$\cancel{e^x}-1=\cancel{e^x}-x$$

$$-1=-x$$

$$\boxed{x=1}$$

$$f(1)=\ln(e-1)$$

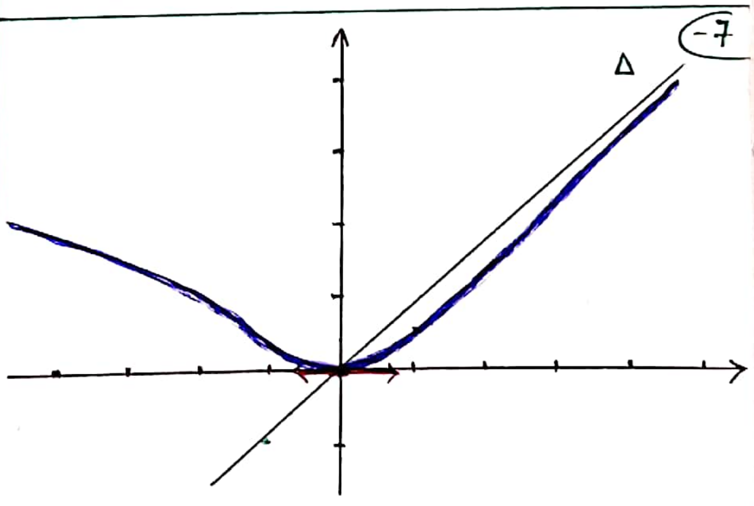
فالخط C يقبل مماساً يوازي Δ في النقطة
التي إحداثياتها $(1;\ln(e-1))$
معادلة المماس من الشكل:

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$y=x-1+\ln(e-1)$$

$$\boxed{T:\ y=x+\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

7)



8) الدالة h معرفة بشرط $f(x)>0$
وهذا يكافئ $x\neq 0$

$$\Rightarrow D_h=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

ب)

1) $E(n):\quad 0<u_{n+1}\le u_n$

$E(0)$ محققة لأن:

$$0<u_1\le u_0$$

حيث $u_1=f(u_0)=f(1)=\ln(e-1)$

$$0<\ln(e-1)\le 1$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:
بالاستفادة من كون الدالة f متزايدة تماماً
على المجال $[0,+\infty[$:

$$0<u_{n+1}\le u_n$$

$$f(0)<f(u_{n+1})\le f(u_n)$$

$$0<u_{n+2}\le u_{n+1}$$

$E(n+1)$ محققة. فالقضية $E(n)$ صحيحة أياً
كان العدد الطبيعي $n\geq 0$.

2) نستنتج من النتيجة $0<u_{n+1}\le u_n$
أن المتتالية u_n متناقصة ومحدودة
من الأدنى بالعدد (0) فهي متقاربة.

نحل المعادلة $f(x)=x$

$$\ln(e^x-x)=x$$

$$\cancel{e^x}-x=\cancel{e^x}$$

$\boxed{x=0}$ مقبول

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=0}$$