ملخص مادة

الرياضيات 2-3

الصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الثالث

ملخص دروس

الفصل السابع

الاحتمالات

1 – 3 تمثيل فضاء العينة

المهارات السابقة	حساب الاحتمال التجريبي
المفردات	استعمل القوائم – الجدول -الرسم الشجري لتمثيل فضاء العينة أستعمل مبدأ العدَ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة
المهارات الأساسية	فضاء العينة – الرسم الشجري -تجربة ذات مرحلتين – تجربة متعددة المراحل -مبدأ العد الأساسي

تمثيل فضاء العينة:

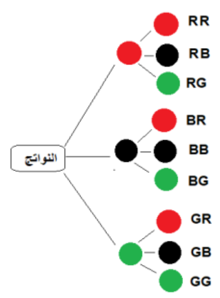
فضاء العينة: لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة أو الجدوال أو الرسم الشجري.

النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.

الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة

مثال : سحب كرتين معا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء (R)و 4 كرات خضراء (G) و2 كرات سوداء (B). مثِّل فضاء العينة باستعمال القائمة المنظمة والجدول و الرسم الشجري

الرسم الشجري



الجدول

النواتج	R	B	G
R	R ،R	R ، B	R ،G
B	B ،R	B ، B	B ، G
G	G ، R	G ، B	G، G

القائمة

R،R، R،G، R،B ، B،B، B،G، B،R ، G،R ، G،G ، G،B

التجربة العشوائية

قد تكون على مرحلتين وتسمى تجربة ذات **مرحلتين**

والتجارب التي تحتوي على اكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**

مبدأ العد الأساسي

يمكن ايجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة أ ي أن في تجربة عدد مراحلها افرض أن :

n_1 =عدد النواتج الممكنة في المرحلة الاولى

n_2= عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الاولى

n_k= عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث k-1 من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها يساوي $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots\ldots \cdot n_k$

مثال : اوجد عدد النواتج الممكنة للموقف (يختار بدر واحدا من الالوان الستة لدراجته الجديدية و أحد تصميمين لمقاعدها . الحل : عدد النواتج : $2 \cdot 6 = 12$

2 – 3 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

المهارات السابقة	استعمال مبدأ العد الأساسي .
المفردات	أستعمل التباديل في حساب الاحتمال استعمل التوافيق في حساب الاحتمال
المهارات الأساسية	المضروب – التباديل - التباديل الدائرية – التوافيق

التبديل : هو تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهماً.

المضروب : يكتب مضروب العدد الصحيح الموجب n على صورة $n!$ ويساوي حاصل ضرب جميع الاعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1$$

وقد اتفق على ان
$0! = 1$

مثال : اوجد مضروب 5 .

الحل : $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

التباديل: يرمز الى عدد التباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nP_r$ حيث

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : عدد تباديل 6 عناصر مأخوذ 4 منها في كل مرة يساوي :

$$_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

التباديل مع التكرار: عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكررعنصرمنها r_1 من المرات وأخر r_2 من المرات وهكذا .. فإنه يساوي

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \cdot \ldots\ldots \cdot r_k!}$$

مثال: ما احتمال أن يكون عدد مكون من الارقام السبعة الآتية: 7،7،7،3،3،6،5 هو 6573737

عدد التباديل : $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{210}{2} = 105$

الاحتمال : $\frac{1}{105}$

التباديل الدائرية:

1-عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة (بدون نقطة مرجعية) يساوي:

$$\frac{n!}{n}=\frac{\cancel{n}\cdot(n-1)!}{\cancel{n}}=(n-1)!$$

2-عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة (مع نقطة مرجعية) يساوي :

$$n!$$

مثال : بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة ؟

الحل : لاتوجد نقطة مرجع ثابتة إذن التباديل دائرية

$$(4-1)!=3!=6$$

أي يوجد 6 طرق لجلوس 4 أشخاص حول منضدة مستديرة .

مثال : يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة . إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد ، فما احتمال أن يكون مقعد سامي الاقرب الى الباب ؟

الحل : نقطة مرجعية: الاقرب الى الباب يعني انه تبديل خطي ، عدد التباديل يساوي 7!

احتمال جلوس سامي الاقرب الى الباب : $\frac{6!}{7!}=\frac{\cancel{6!}}{7\cdot\cancel{6!}}=\frac{1}{7}$

التوافيق: هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم يرمز الى عدد توافيق n من العناصر المختلفة ماخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$ حيث

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

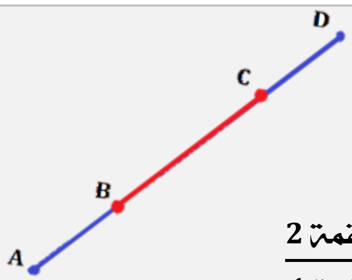
مثال: عدد توافيق 9 عناصر مأخوذة 6 في كل مرة يساوي :

$${}_9C_6=\frac{9!}{6!\cdot(9-6)!}=\frac{9!}{6!\cdot3!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot\cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot3!}=\frac{504}{6}=84$$

$3-3$ الاحتمال الهندسي

المهارات السابقة	إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة
المفردات	إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال . أجد الاحتمالات باستعمال المساحات
المهارات الأساسية	الاحتمال الهندسي : هو احتمال يتضمن قياسا هندسيا مثل الطول او المساحة

الاحتمال والاطوال



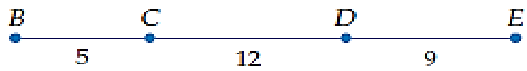
إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة اخرى (2)

واخترت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيا

فان احتمال أن تقع النقطة على القطعة(2) يساوي : $\dfrac{\text{طول القطعة المستقيمة 2}}{\text{طول القطعة المستقيمة 1}}$

مثال : إذا اخترت النقطة E عشوائيا على $\overline{AD}$ فإن : $P(E \in \overline{BC}) = \dfrac{BC}{AD}$

مثال : اخترت نقطة A عشوائيا على $\overline{BE}$ في الشكل أدناه . اوجد المطلوب فيما يلي



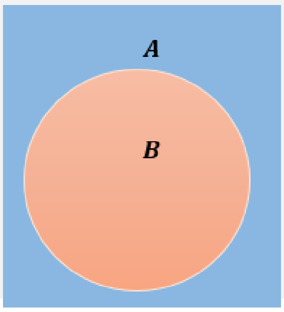
$P(A \in \overline{BD})$

$$P(A \in \overline{BD}) = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{5+12}{5+12+9} = \frac{17}{26}$$

$P(A \in \overline{CD})$

$$P(A \in \overline{CD}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{12}{5+12+9} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

الاحتمال والمساحة



اذا احتوت المنطقة A منطقة اخرى B

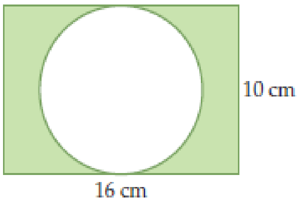
واخترت النقطة E من المنطقة A عشوائيا E

فإن احتمال ان تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\dfrac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$

مثال إذا اخترت النقطة E عشوائيا في المستطيل A فإن :

$$P\left(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B\right) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

مثال إذا اختيرت نقطة عشوائيا داخل المستطيل في الشكل أدناه ، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



مساحة الدائرة $r^2\pi = 25\pi\ cm^2$

مساحة المستطيل $l\,w = 10.16 = 160\ cm^2$

مساحة المنطقة المظللة= مساحة المستطيل – مساحة الدائرة

مساحة المنطقة المظللة

$$= 160 - 25\pi = 81.5cm^2$$

P (وقوع النقطة في المنطقة المممظللة) $= \dfrac{\text{مساحة المنطقة المظللة}}{\text{مساحة المستطيل}}$

$$= \frac{81.5\ \cancel{cm^2}}{160\ \cancel{cm^2}} \approx 51\%$$

الاحتمال الهندسي والقطاع الدائري

نسبة مساحة قطاع في دائرة الى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية (x°) الى 360° وعليه اذا اختيرت نقطة عشوائيا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع على يساوي $\frac{x}{360}$

مثال : استخدم القرص ذا المؤشر الدوار كما بالشكل المجاور لايجاد كل مما يلي

احتمال استقرار المؤشر على اللون الاخضر

$$\frac{x}{360} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 25\%$$

احتمال عدم استقرار المؤشر على اللون الاصفر:

$$\frac{360-45}{360} = \frac{315}{360} = \frac{7}{8} = 87.5\ \%$$

4 – 3 احتمالات الحوادث المستقلة و الحوادث غير المستقلة

المهارات السابقة	حساب الاحتمالات البسيطة
المفردات	أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة . أجد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى .
المهارات الأساسية	الحادثة المركبة – الحوادث المستقلة -الحوادث الغير مستقلة – الاحتمال المشروط – شجرة الاحتمال – الحادثة المشروطة .

الحادثة البسيطة : هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما

الحادثة المركبة : هي الحادثة التي تتكون من حاثتين بسيطتين او اكثر

ويمكن ان تكون الحوادث المركبة مستقلة او غير مستقلة :

تكون A و B **حادثتين مستقلتين**: إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.

تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين**: إذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B.

ملاحظة : افترض انه تم اختيار عناصر من مجموعة ما

فإذا اعيد العنصر في كل مرة فان اختيار عناصر اخرى هي **حوادث مستقلة**

و إذا لم يرجع العنصر في كل مرة فان اختيارعناصر اخرى هي **حوادث غير مستقلة**

قانون ضرب الاحتمالات

1. **احتمال حادثتين مستقلتين :** احتمال وقوع حاثتين غير مستقلتين معا يساوي حاصل ضرب احتمال وقع الحادثة الاولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية

$$P\,(B \cap A) = P\,(A)\,.\,P\,(B)$$

2. **احتمال حادثتين غير مستقلتين:** احتمال وقوع حاثتين غير مستقلتين معا يساوي حاصل ضرب احتمال وقع الحادثة الاولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية **بعد** وقوع الاولى فعلا

$$P\,(B \cap A) = P\,(A)\,.\,P\,(B|A)$$

يقرأ الرمز $P(B \setminus A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولا وهذا يسمى الاحتمال المشروط ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات وتسمى شجرة الاحتمالات

قيم الاحتمال

1. لاي حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \leq P(x) \leq 1$

2. مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$

مثال 1 : عند إلقاء قطعة نقد ورمي مكعب مرقم مرة واحدة ، ما احتمال ظهور الشعار والعدد 4

الحادثتان مستقلتين

A تمثل ظهور شعار عند القاء قطعة النقد $P(A) = \frac{1}{2}$

B تمثل ظهور العدد 4 عند رمي مكعب مرقم $P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(B \cap A) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 0.0833 \approx 8.33\ \%$$

مثال 2 : في تجربة سحب كراتين متتاليتين عشوائيا بدون ارجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و4 كرات زرقاء . ما احتمال اختيار كرة زرقاء في المرتين ؟

الحادثتان غير مستقلتين.

A تمثل سحب كرة زرقاء في المرة الاولى $P(A) = \frac{3}{7}$

B تمثل سحب كرة زرقاء في المرة الثانية $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$P(B \cap A) = P(A).P(B) = \frac{3}{7}.\frac{1}{3} = \frac{1}{7} \approx 0.143 \approx 14.3\ \%$$

مثال 3 : تم توزيع 10 طلاب على فريقين ليلعبوا كرة القدم ،ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1- 10 عشوائيا حيث

- **يشكل الفريق A الطلاب الذين يسحبون الأعداد الفردية .**
- **يشكل الفريق B الطلاب الذين يسحبون الأعداد الزوجية .**

ما احتمال ان يكون محمود من الفريق A قد سحب العدد 7 ؟

احتمال مشروط

A تمثل حادثة سحب عدد فردي : $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

عدد النواتج = 5

B تمثل حادثة سحب العدد 7 بعد ما تم سحب الطلاب الذين من الفريق

$$P(B|A) = \frac{1}{5} = 0.2 = 20\ \%$$

5 – 3 احتمالات الحوادث المتنافية

المهارات السابقة	إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث الغير مستقلة .
المفردات	أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث الغير متنافية أجد احتمال متممة حادثة
المهارات الأساسية	الحادثتان المتنافيتان هما حادثتين لم يكن وقوعهما ممكنا في الوقت نفسة ولا يوجد بينهما نواتج مشتركة الحادثة المتممة

قانوني الجمع في الاحتمالات

1. احتمال الحادثتين المتنافيتين: إذا كانت الحادثتان A, B متنافيتان فاحتمال وقوع A او B يساوي مجموع احتمال كل منهما

$$P\,(B \cup A) = P\,(A) + P\,(B)$$

2. احتمال الحادثتين غير المتنافيتين : اذا كانت الحادثتان A, B غيرمتنافيتن فاحتمال وقوع A او B يساوي هو مجموع احتماليهما مطروحا منه احتمال وقوع A و B معا

$$P\,(B \cup A) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B)$$

الحوادث المتممة

احتمال الحوادث المتممة : هو احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة

أي أن: لاي حادثة A

$$P\,(\acute{A}) = 1 - P\,(A)$$

مثال 1: إذا كان احتمال إصابة هدف معين $\frac{2}{7}$ فأوجد احتمال عدم إصابته ؟

A تمثل اصابة الهدف ، $P(A) = \frac{2}{7}$

$$P\,(\acute{A}) = 1 - P\,(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

رمز الاتحاد $(\cup)$:

يدل على وقوع أحد الحدثين على الاقل . و يشير الى جمع الاحتمالات

$P\,(B \cup A)$

يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B

رمز التقاطع $(\cap)$

يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين معا (وقوع الحادثتين معا)

ويشير الى ضرب الاحتمالات

$P\,(B \cap A)$

يقرأ احتمال وقوع A و وقوع B

مثال2 : حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي الشركة وكانت جائزته أن يختار عشوائيا واحدة من بين 3 بطاقات سفر ، 6 كتب ،9 ساعات و7 نظارات . ما احتمال أن يربح بطاقة سفر أو كتابات أو ساعة ؟

الحادثان متنافيتين

المجموع الكلي $3 + 6 + 9 + 7 = 25$

A تمثل اختيار بطاقة سفر $P(A) = \frac{3}{25}$

B تمثل اختيار بطاقة كتب $P(C) = \frac{9}{25}$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{25} + \frac{6}{25} + \frac{9}{25} = \frac{18}{25} = 0.72 = 72\%$$

مثال3: يبين الجدول المقابل عدد طلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة . إذا اختير احد الطلاب عشوائيا اوجد احتمال أن يكون من الصف الاول الثانوي أو يلعب كرة القدم

الثالث الثانوي	الثاني الثانوي	الأول الثانوي	الرياضة
6	5	6	كرة السلة
7	8	5	كرة القدم
6	4	3	كرة الطائرة

الحادثان غير متنافيتين لان يوجد مشترك بينهما

المجموع الكلي $6 + 5 + 3 + 5 + 8 + 4 + 6 + 7 + 6 = 50$

A تمثل اختيار طالب ان يكون من الصف الاول الثانوي

$$P(A) = \frac{6+5+3}{50} = \frac{14}{50}$$

B تمثل اختيار طالب يلعب كرة القدم

$$P(B) = \frac{5+8+7}{50} = \frac{20}{50}$$

$A \cap B$ تمثل اختيار طالب من الصف الاول الثانوي أو يلعب كرة القدم

$$P(A \cap B) = \frac{5}{50}$$

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{14}{50} + \frac{20}{50} - \frac{5}{50} = \frac{29}{50} = 0.58 = 58\%$$

ملخص دروس

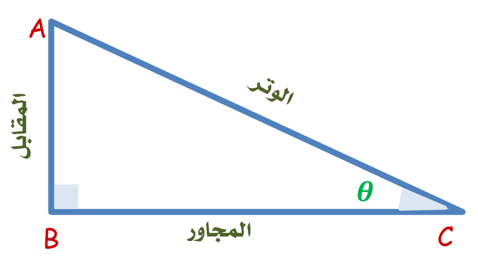
الفصل الثامن

حساب المثلثات

1 – 4 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

المهارات السابقة	نظرية فيثاغورس
المفردات	**حساب المثلثات:** فرع من أفرع الرياضيّات والذي يَدرُس العلاقة بين أضلاع المُثلثات وزواياهم **النسبة المثلثية:** مقاييسُ خاصةٌ للمثلث القائم وهي النسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم **الدالة المثلثية:** مجموعة من الدوال الحقيقيةّ التي تربط زاوية مثلث قائم مع نسبة ضلعين من أضلاعه الجيب ، جيب التمام ، الظل ، ظل التمام ، القاطع ، قاطع التمام **دوال المقلوب:** هي مقلوب النسب الجيب ، جيب التمام ، الظل **معكوس الجيب ل x:** هي الزاوية التي جيبها x **معكوس جيب التمام ل x :** هي الزاوية التي جيب تمامها x **معكوس الظل x:** هي الزاوية التي ظلها x **زاوية الارتفاع:** هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أعلى الأفقي. **زاوية الانخفاض:** هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أسفل الأفقي
المهارات الأساسية	أجد قيم الدوال المثلثية لزوايا حادة . أستعمل الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية .

الدوال المثلثية للزوايا الحادة

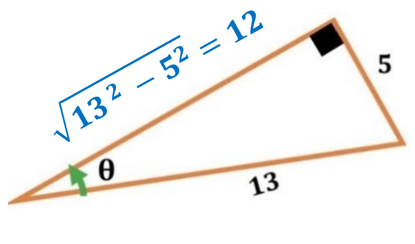
قاطع التمام $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$		الجيب $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
القاطع $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$		جيب التمام $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
ظل التمام $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$		الظل $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

دوال المقلوب

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

مثال: في المثلث أدناه فيه طول ضلعين فيه (13 ، 5) أوجد الدوال المثلثية للزاوية θ

أولا نوجد طول الضلع الثالث

$\csc\theta = \frac{13}{5}$		$\sin\theta = \frac{5}{13}$
$\sec\theta = \frac{13}{12}$		$\cos\theta = \frac{12}{13}$
$\cot\theta = \frac{12}{5}$		$\tan\theta = \frac{5}{12}$

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

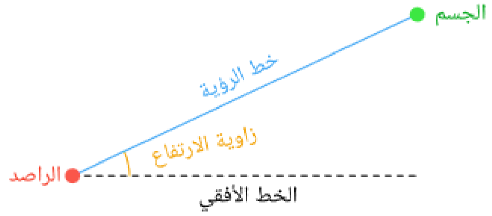
الدالة	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

معكوس النسب المثلثية (لإيجاد قياس الزاوية θ)

$\sin^{-1} x = \theta$	$\cos^{-1} x = \theta$	$\tan^{-1} x = \theta$

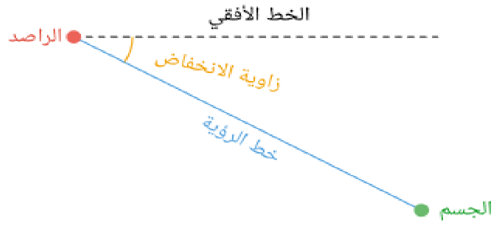
زوايا الارتفاع

هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أعلى الأفقي.



زوايا الانخفاض

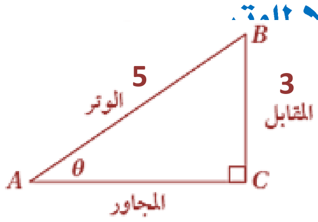
هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أسفل الأفقي



تطبيقات

إذا كان $\sin A = \frac{3}{5}$ أوجد $\cos A$.

الخطوة 1 : ارسم مثلثا قائم الزاوية، وسم إحدى زوايا الحادة A وضع العدد 3 طولا للضلع المقابل والعدد 5 طولا للوتر



$$\sin A = \frac{3 \text{ المقابل}}{5 \text{ الوتر}}$$

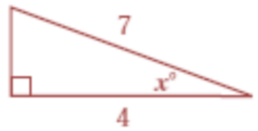
الخطوة 2 : استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة الضلع المجاور = المجاور

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

الخطوة 3: نوجد $\cos A$:

$$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

أوجد قيمة x في الشكل المقابل



المعطيات : مثلث قائم الزاوية فيه الوتر = (

الضلع المجاور للزاوية x = 4

المطلوب قياس الزاوية x

الحل: نستخدم الدوال العكسية لإيجاد الزاوية ومنها تحديدا دالة جيب التمام

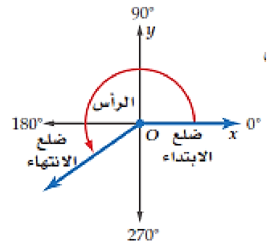
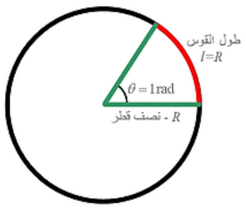
$$\cos x = \frac{4}{7}$$

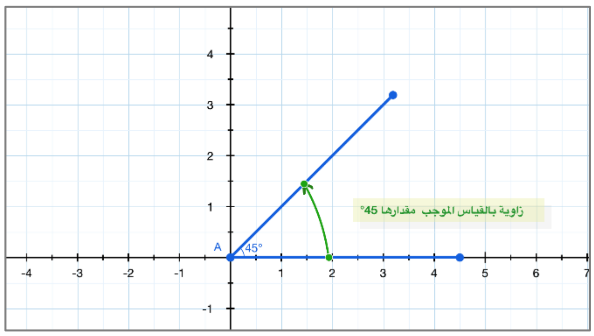
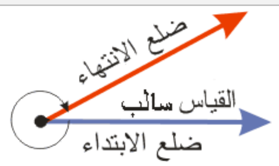
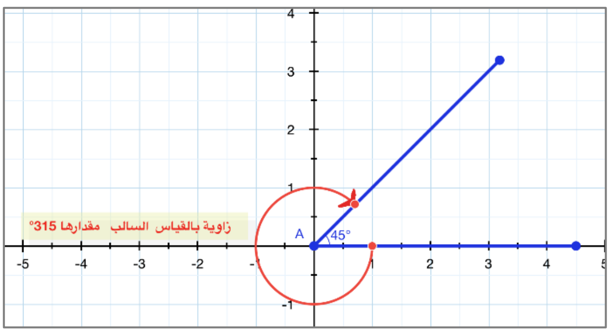
$$x = \cos^{-1}\frac{4}{7}$$

$$x = 55.2°$$

2 – 4 الزوايا و قياساتها

المهارات السابقة	أرسم زوايا في الوضع القياسي وأجد قياساتها .
المفردات	الوضع القياسي : للزاوية إذا كان رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب لمحور x . ضلع الابتداء : للزاوية هو الضلع المنطبق على المحور x. ضلع الانتهاء : للزاوية هو الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل . الراديان : وحدة قياس للزوايا وهي الزاوية المركزيّة في دائرة التي تقابل قوسًا طوله مساو لطول نصف قطر الدائرة. الزاوية المركزية : هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة . طول القوس :

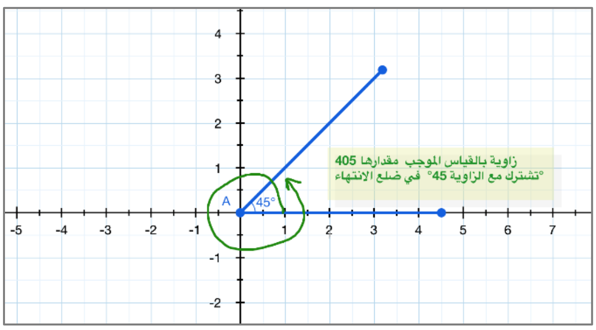
الوضع القياسي للزوايا	الراديان
	يعادل الراديان الواحد $\frac{180}{\pi}$ درجات أي بالتقريب $57.296°$ 

القياس الموجب	القياس السالب
 	 

عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها:

$45°$ ، $405°$ ، $-315°$

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى ، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات $360°$.



إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب ، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة :

130°

القياس الموجب $130° + 360° = 490°$

القياس السالب $130° - 360° = -230°$

−90°

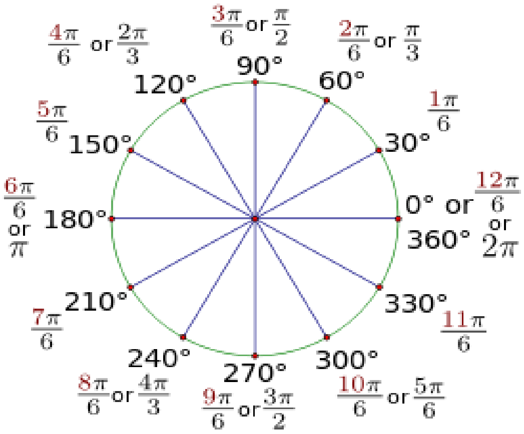
القياس الموجب $-90° + 360° = 270°$

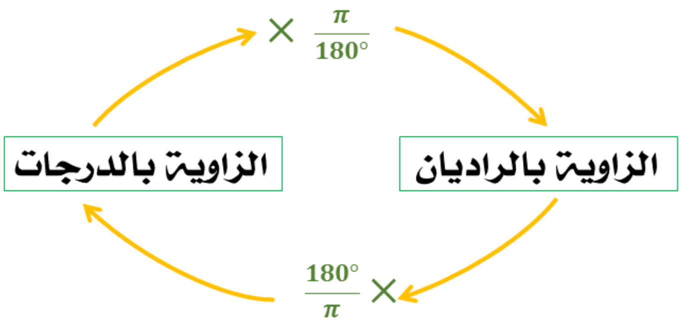
القياس السالب $-90° - 360° = -450°$

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

يمكن أن تقاس الزوايا بالدرجات أو بالراديان، وهما وحدتان مرتبطتان بطول القوس. والراديان الواحد هو قياس زاوية في الوضع القياسي، يقطع ضلع الانتهاء لها قوس من الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويرتبط القياسان من خلال المعادلتين:

$$2\pi\ rad = 360° \quad \text{أو} \quad \pi\ rad = 180°$$

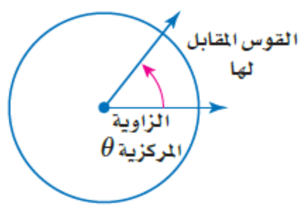


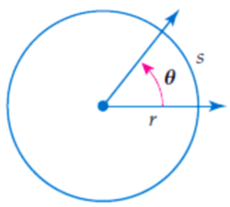


مثال حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

الزاوية المركزية وطول القوس

اذا علم قياس الزاوية المركزية بالراديان من السهل إيجاد طول القوس	طول القوس = حاصل ضرب قياس الزاوية المقابلة له بالراديان في نصف القطر

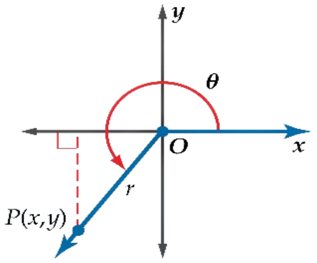




المهارات السابقة	إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة .
المفردات	**الزوايا الربعية :** هي زوايا موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات x,y . **الزوايا المرجعية :** هي الزاوية الحادة الموجبة باستخدام الاتجاه الموجب للمحور س باعتباره إطارها المرجعي.
المهارات الأساسية	أجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية . أجد قيم الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية .

يمكن إيجاد قيم الدوال المثلّثية لزوايا قياساتها تزيد على 90 ° أو تقلُّ عن 0°

من خلال إحداثيات النقطة $P(x, y)$ التي تقع على ضلع الانتهاء لزاوية في وضع قياسي مقدارها θ



الوتر $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

المجاور x المقابل y

فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يلي

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}\ , x \neq 0$	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$	$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$
$\cot\theta = \dfrac{x}{y}\ ,\ \ y \neq 0$	$\sec\theta = \dfrac{r}{x}\ , x \neq 0$	$\csc\theta = \dfrac{r}{y}\ , y \neq 0$

مثال : إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-2 , -5)$

فأوجد قيم الدوال المثلّثية الست للزاوية θ؟

نوجد قيمة r : $x = -2 \quad , \quad y = -5$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

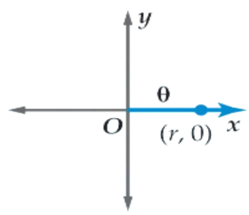
ثم نعوض

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$	$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-2}{\sqrt{29}} = \dfrac{-2\sqrt{29}}{29}$	$\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-5}{\sqrt{29}} = \dfrac{-5\sqrt{29}}{29}$
$\cot\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-2}{-5} = \dfrac{2}{5}$	$\sec\theta = \dfrac{r}{x} = -\dfrac{\sqrt{29}}{2}$	$\csc\theta = \dfrac{r}{y} = -\dfrac{\sqrt{29}}{5}$

الزوايا الربعية وهي ($0°, 90°, 180°, 270°, 360°$)

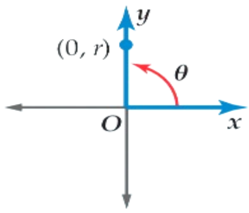
$\theta = 0°$

أو $\theta = 0\ rad$



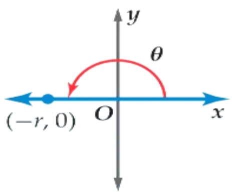
$\theta = 90°$

أو $\theta = \frac{\pi}{2}\ rad$



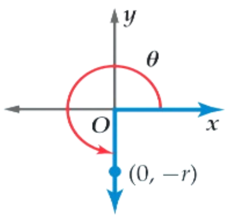
$\theta = 180°$

أو $\theta = \pi\ rad$



$\theta = 270°$

أو $\theta = \frac{3\pi}{2}\ rad$



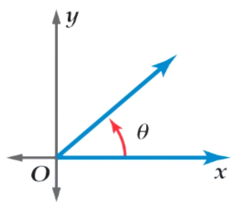
قيم الدوال المثلثية عند الزوايا الربعية دائما ثابته كالجدول التالي

الدالة	$90°$	$180°$	$270°$	$360° = 0°$
$\sin\theta$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	غير معرف	0	غير معرف	0

الزوايا المرجعية

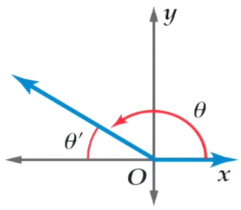
(إذا أعطيت زوايا أكبر من $90°$ وأصغر من $0°$ يتم إرجاعها لزوايا حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية المعطاة ومحور x)

الربع الأول



$\theta' = \theta$

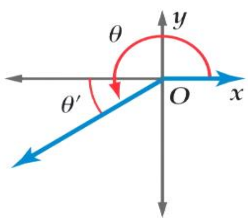
الربع الثاني



$\theta' = 180° - \theta$

$\theta' = \pi - \theta$

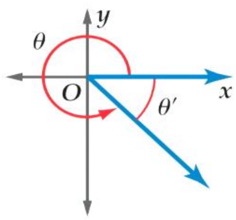
الربع الثالث



$\theta' = \theta - 180°$

$\theta' = \theta - \pi$

الربع الرابع

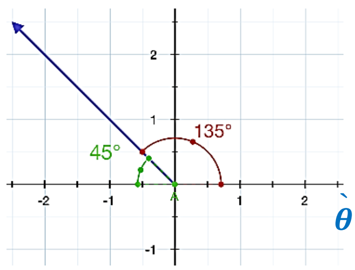


$\theta' = 360° - \theta$

$\theta' = 2\pi - \theta$

مثال : ارسم كلا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها

$\theta = 135°$



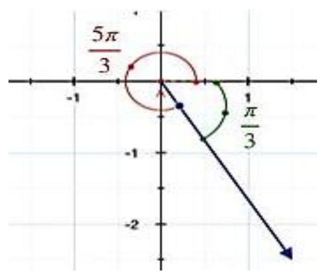
ضلع الانتهاء للزاوية $135°$

يقع في الربع الثاني

$\grave{\theta} = 180° - \theta$

$\grave{\theta} = 180° - 135° = 45°$

$\theta = \frac{5\pi}{3}$



ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{3}$

يقع في الربع الرابع

$\grave{\theta} = 2\pi - \theta$

$\grave{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية من خلال الزاوية المرجعية لها

نتبع ثلاث خطوات :

- نوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية المعطاة
- نوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية المرجعية
- نحدد إشارة قيمة الدالة للزاوية المعطاة حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء

قاعدة إشارات الدوال المثلثية في الارباع

إذا كانت لدينا زاوية θ في الوضع القياسي،
فإننا نقول إن الزاوية θ تقع في الربع نفسه الذي يقع فيه ضلعها النهائي.
ولتحديد إشارة الدوال المثلثية لزاوية معلومة θ نضع في أذهاننا
أن إشارة دالة جيب التمام تتبع إشارة محور x
وأن إشارة دالة الجيب تتبع إشارة محور y والتوزيع التالي

في الرَّبع الأول، تكون قيَم الكلّ موجبة

في الرَّبع الثاني، تكون قيمة sin موجبة

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta: +$	$\sin\theta, \csc\theta: +$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: -$	$\tan\theta, \cot\theta: +$
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta: -$	$\sin\theta, \csc\theta: -$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: +$	$\tan\theta, \cot\theta: -$

في الرَّبع الرابع، تكون قيمة cos موجبة.

في الرَّبع الثالث، تكون قيمة tan موجبة

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الدالة	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

الزوايا الشهيرة التي زواياها المرجعية

(30° , 45° , 60°)

	الربع(1)	الربع(2)	الربع(3)	الربع (4)
30°	30°	151°	210°	330°
45°	45°	135°	225°	315°
60°	60°	120°	240°	300°

تتفق الزوايا الشهيرة مع زواياها المرجعية بقيم الدوال المثلثية وتختلف بالإشارات كالتالي

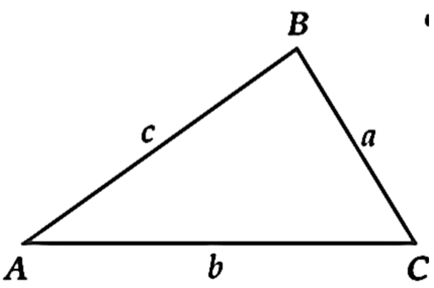
مثال : أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يلي:

$\tan 315° = -\tan 45° = -1$ الإشارة سالبة لان الزاوية تقع في الربع الرابع والدالة tan في هذا الربع سالبة	$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ الإشارة سالبة لان الزاوية تقع في الربع الثاني والدالة cos في هذا الربع سالبة	$\csc 120° = \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$ الإشارة موجبة لان الزاوية تقع في الثاني والدالة sin في هذا الربع موجبة

4 – 4 قانون الجيوب

المهارات السابقة	إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها .
المفردات	**قانون الجيوب :** هو قانون أو معادلة تربط بين أطوال أضلاع المثلث بجيوب زواياه الداخلية طبقاً للعلاقة . **حل المثلث :** استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه.
المهارات الأساسية	إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما . أستعمل قانون الجيوب في حل المثلثات .

إيجاد مساحة المثلث



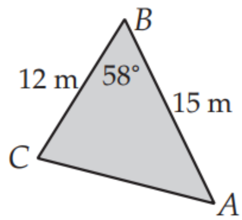
$$k = \frac{1}{2}\, a.b \sin C$$

$$k = \frac{1}{2}\, a.c \sin B$$

$$k = \frac{1}{2}\, b.c \sin A$$

مساحة المثلث k تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

تطبيق: أوجد مساحة المثلث ΔABC في كل من الحالات التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة :



$$k = \frac{1}{2}\, a.c \sin B$$

$$k = \frac{1}{2}\,(12)(15)\ s$$

$$k = 76.3 \quad m$$

$A = 34°\ , b = 19.4\ ft\ \ ,\ \ c = 8.6\ ft$

$$k = \frac{1}{2}\, b.c \sin A$$

$$k = \frac{1}{2}\,(19.4)(8.6) \sin 34°$$

$$k = 46.6\ \ ft^2$$

قانون الجيوب لحل المثلثات

يستخدم قانون الجيوب لحل المثلث في الحالات الآتية:

- معرفة قياسي زاويتين في المثلث وطول أي ضلع في إما زاوية – زاوية- ضلع حالة AAS ، أو زاوية- ضلع- زاوية حالةASA وفي هذه الحالة يوجد للمثلث حل وحيد أي يوجد مثلث وحيد
- معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما ضلع- ضلع- زاوية حالةSSA

وفي هذه الحالة إن عدد المثلثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد ، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلث حل أو له حل واحد ، أو له حلان.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ينص قانون الجيب على أن النسبة بين طول أيِّ ضلع وجيب الزاوية المقابلة له متساوية لجميع الأضلاع الثلاثة والزوايا المقابلة لها في أيِّ مثلث .

تطبيقات

حل المثلث الذي فيه $B = 47°, C = 112°, b = 13$

من المعطيات زاويتين نوجد الزاوية الثالثة من مجموع زوايا المثلث : $A = 180° - (112° + 47°) = 21°$

باستخدام قانون الجيوب التعويض حل النسبة وإيجاد قيمة المتغير

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 47°}{13} = \frac{\sin 112°}{c}$$

$$c = \frac{13 \sin 112°}{\sin 47°} = 16.5$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

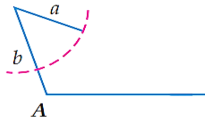
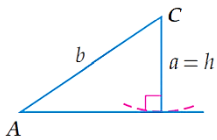
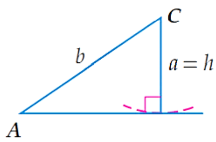
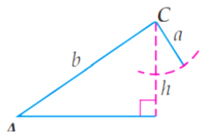
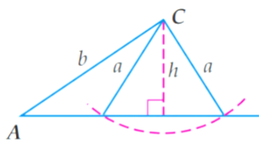
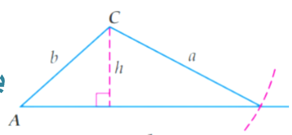
$$\frac{\sin 21°}{a} = \frac{\sin 47°}{13}$$

$$a = \frac{13 \sin 21°}{\sin 47°} = 6.4$$

المثلثات الممكنة في حالة SSA

إذا علم في مثلث $m\angle A, a, b$

فإن الحالات الممكنة تعتمد أولا على قيمة الزاوية A

الحالة	التوضيح بالرسم	مثال
إذا كانت $\angle A$ قائمة أو منفرجة	 $a \le b$ لا يوجد حل	$A = 131°, a = 15, b = 32$
	 $a = h$ يوجد حل واحد	$A = 95°, a = 19, b = 12$
إذا كانت $\angle A$ حادة	 $a = h$ يوجد حل واحد	$A = 30°, a = 3, b = 6$ $h = 6 \sin 30° = 3$
	 $a < h$ لا يوجد حل	$A = 60°, a = 15, b = 24$ $h = 24 \sin 60° \approx 20.8$
	 $h < a < b$ يوجد حلين وتسمى هذه الحالة بالحالة المبهمة	$A = 34°, a = 8, b = 13$ $h = 13 \sin 34° \approx 7.3$
	 $a \ge b$ يوجد حل واحد	$A = 38°, a = 21, b = 18$

5 – 4 قانون جيوب التمام

المهارات السابقة	حل المثلثات باستخدام قانون الجيوب.
المفردات	**قانون جيوب التمام:** هو قانون ومبرهنة تربط ضلع أي مثلث بضلعيه الآخرين وجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما.
المهارات الأساسية	أستعمل قانون جيوب التمام لحل المثلثات . أختر طرقا مناسبة لحل المثلثات

استعمال قانون جيوب التمام لحل المثلث

- معرفة طولي ضلعين في ً المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع – زاوية – ضلع) حالة SAS
- معرفة أطوال الأضلاع الثلاثة ً للمثلث (ضلع – ضلع – ضلع) حالة SSS

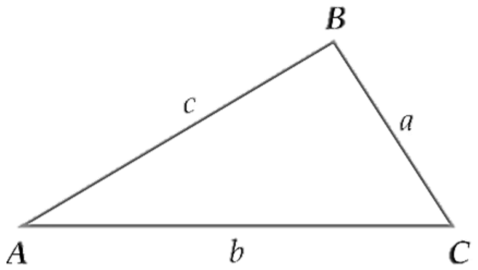
قانون جيوب التمام

إذا كانت أضلاع ΔABC لتي أطوالها a, b, c :تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية ت كون صحيحة:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$$



تطبيق : حدد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم قانون جيوب التمام) لحل المثلث مما يأتي، ثم حل المثلث مقربا أطوال الأضلاع أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

$$C = 54°\ , a = 16\ , b = 20$$

الحل : القانون المناسب قانون جيوب التمام لان حالة المثلث هي SAS

الخطوة الأولى: نستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$$

$$c^2 = 16^2 + 20^2 - 2(16)(20)\cos 54° = 279.82$$

$$c = 16.7$$

الخطوة الثانية: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية.A) ويمكن في هذه الخطوة إيجاد قيمة الزاوية باستخدام قانون الجيوب)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$

$$16^2 = 20^2 + 16.7^2 - 2(20)(16.7)\ \cos A$$

$$256 = 400 + 278.9 - 668\ \cos A$$

$$-422.9 = -668\ \cos A$$

$$\cos A = \frac{-422.9}{-668} = 0.6331$$

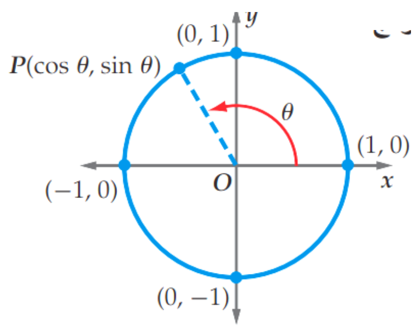
$$A = \ \cos^{-1} 0.6331 \approx 51°$$

الخطوة الثالثة : نوجد قياس الزاوية B : من مجموع زوايا المثلث : $B = 180° - (51° + 54°)$

$$B = 75°$$

6 – 4 الدوال الدائرية

المهارات السابقة	إيجاد قيم دوال مثلثية باستعمال زوايا مرجعية .
المهارات الأساسية	أجد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة . أستعمل خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية .
المفردات	**دائرة الوحدة :** أو الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها يساوي الواحد **الدالة الدائرية :** وتسمى أيضاً بالدوال المثلثية وهي مجموعة من الدوال الحقيقية التي تربط زاوية مثلث قائم مع نسبة ضلعين من أضلاعه. **الدالة الدورية :** هي دالة تكرر قيمتها بعد فترة محددة منتظمة متتالية . **الدورة :** النمط الواحد الكامل في الدالة الدورية **طول الدورة :** المسافة الأفقية في الدورة

في دائرة الوحدة **المركز:** (0,0) **نصف القطر :** $r = 1$ **الزاوية :** θ في وضع قياسي $P(x, y)$ نقطة تقع على تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$	

تطبيقات

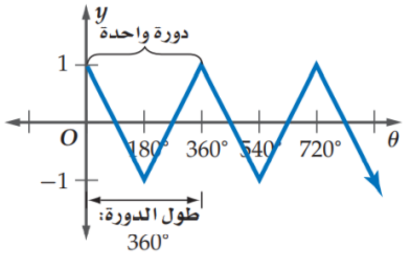
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ فأوجد كلا من $\sin\theta, \cos\theta$

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

ملاحظات هامة : من خلال المعطى $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ يمكن تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء وهو الثالث لأن إشارات احداثيات كل من x,y سالبة ويمكن إيجاد باقي الدوال باستخدام دوال المقلوب او النسب المثلثية .

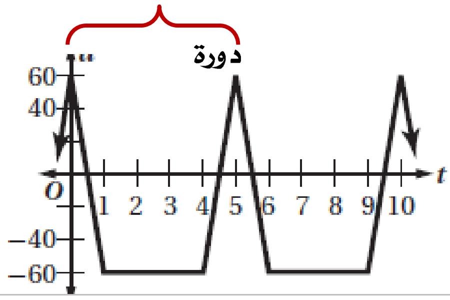
الدوال الدورية



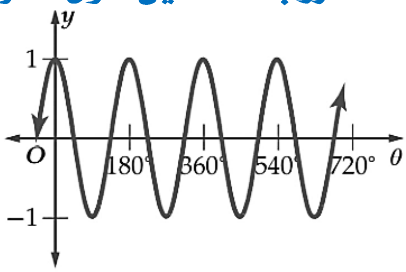
θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

تكرر الدورة كل 360°

دالة دورية تتكرر بنمط معين طول الدورة : 5



دالة دورية تتكرر بنمط معين طول الدورة : 180°

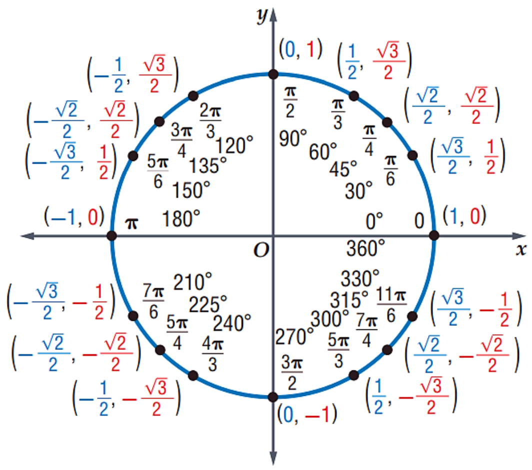


يبين الشكل المجاور القيم الدقيقة لكل من $\sin\theta$, $\cos\theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة

$$\cos\theta = x \quad \Rightarrow \sec\theta = \frac{1}{x}\ , x \neq 0$$

$$\sin\theta = y \quad \Rightarrow \csc\theta = \frac{1}{y}\ , y \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \cot\theta = \frac{x}{y}\ , y \neq 0$$



ملاحظات هامة تتكرر دورة كل من دالتي الجيب وجيب التمام كل 360° .

وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كل منهما 2π أو 360°

لذا فإن قيم كل من الدالتين تتكرر كل 360° . فتكون النتيجة التالية صحيحة دائما

$$\sin(\theta + 360°) = \sin\theta$$

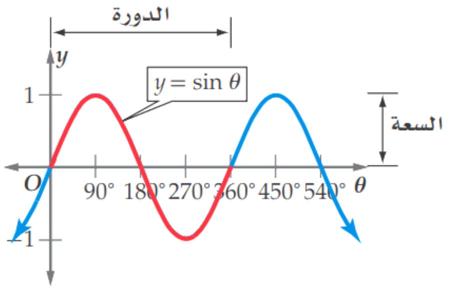
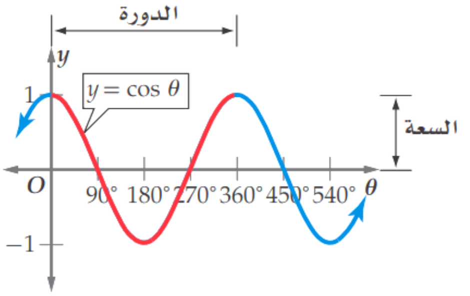
$$\cos(\theta + 360°) = \cos\theta$$

تطبيق أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي	
$\sin 585°$ $= \sin(225° + 360°)$ $= \sin 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 7\pi$ $= \cos(\pi + 3(2\pi))$ $= \cos\pi = -1$

7 – 4 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

المهارات السابقة	الدوال الدورية
المهارات الأساسية	أصف دوال الجيب وجيب التمام والظل وأمثلها بيانياً . أصف دوال مثلثية أخرى وأمثلها بيانياً .
المفردات	**السعة :** لمنحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة. **التردد :** هو عدد الدورات في وحدة الزمن. وهو وصف للموجات والحركة الدورية

التمثيل البياني وخصائص دالتي الجيب وجيب التمام

الدالة الأم	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الاعداد الحقيقية	
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	
السعة	1	
طول الدائرة	$360°$	

الصورة العامة لتحويلات التمثيل البياني للدوال المثلثية

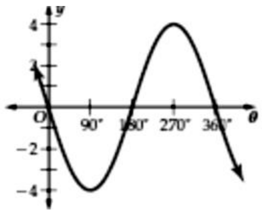
$y = a\cos b\theta$	$y = a\sin b\theta$
نقاط تقاطع الدالة محور θ :	نقاط تقاطع الدالة محور θ :
$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{360°}{b}, 0\right)$ و $\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{360°}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{360°}{b}, 0\right)$ و $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{b}, 0\right)$ و $(0, 0)$

السعة = $|a|$ ، وطول الدورة = $\frac{360°}{|b|}$

تطبيقات : أوجد السعة وطول الدورة لكلٍّ دالة ممّا يأتي، ثم مثلها بيانيا:

السعة $= |-4| = 4$

طول الدورة $= \frac{360°}{1} = 360°$



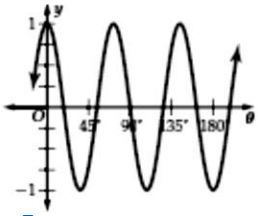
نقاط تقاطع الدالة محور θ :

$\left(\frac{360°}{1}, 0\right)$ و $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{1}, 0\right)$ و $(0, 0)$

$(360°, 0)$ و $(180°, 0)$ و $(0, 0)$

السعة $= |1| = 1$

طول الدورة $= \frac{360°}{5} = 72°$



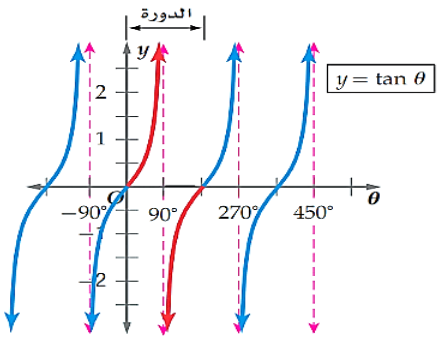
نقاط تقاطع الدالة محور θ :

$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{360°}{5}, 0\right)$ و $\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{360°}{5}, 0\right)$

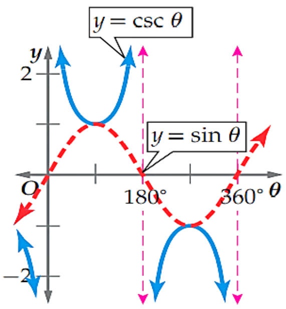
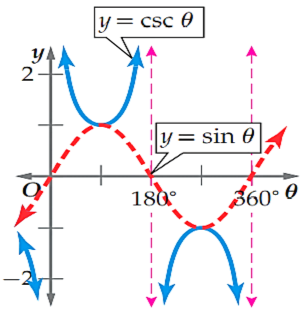
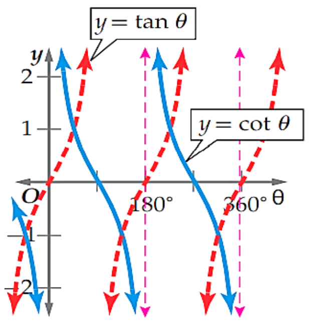
$(18°, 0)$ و $(54°, 0)$

تستخدم الدوال المثلّثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتمُّ وصف هذه الأمواج عادة باستعمال التردد ، **التردد = مقلوب طول الدورة**

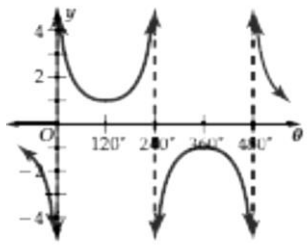
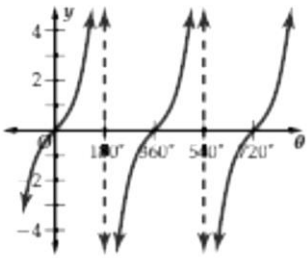
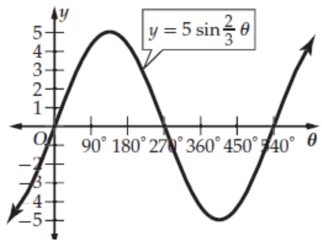
دالة الظل

الدالة الأم	$y = \tan\theta$	
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180°n, n\epsilon Z\}$ أي غير معرفه عند 90° و 270°....	
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية	
السعة	غير معرفة	
طول الدورة	$180°$	

تمثيل الدوال المثلثية الأخرى

الدالة الأم	$y = \csc\theta$	$y = \sec\theta$	$y = \cot\theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180°n, n\epsilon Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180°n, n\epsilon Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180°n, n\epsilon Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$		مجموعة الأعداد الحقيقة
السعة	غـيـر مـعـرفـة		
طول الدورة	$360°$		$180°$

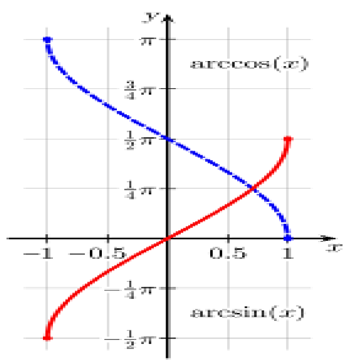
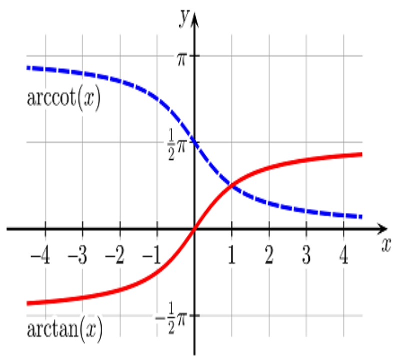
أوجد السعة (إذا كانت معرفة)، وطول الدورة لكلِّ دالة ممّا يأتي ومثلها بيانيا :

التمثيل البياني	طول الدورة	السعة	الدالة
	$\frac{360°}{\lvert b\rvert} = \frac{360°}{\frac{3}{4}} = 360°\left(\frac{4}{3}\right) = 480°$	غير معرفة	$y = \csc\frac{3}{4}\theta$
	$\frac{180°}{\lvert b\rvert} = \frac{180°}{\frac{1}{2}} = 360°$	غير معرفة	$y = 2\tan\frac{1}{2}\theta$
	$\frac{360°}{\lvert b\rvert} = \frac{360°}{\frac{2}{3}} = 360°\left(\frac{3}{2}\right) = 540°$	$\lvert 5\rvert = 5$	$y = 5\sin\frac{2}{3}\theta$

$8-4$ الدوال المثلثية العكسية

المهارات السابقة	تمثيل الدوال المثلثية العكسية .
المهارات الأساسية	أجد قيم الدوال المثلثية العكسية . أحل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية .
المفردات	القيم الأساسية : الدوال المثلثية غير متباينة فيكون معكوس الدوال غير موجود فيتم تحديد مجال الدوال المثلثية العكسية إلى قيم أساسية محددة . دالة الجيب العكسية - دالة جيب التمام العكسية - دالة الظل العكسية المعادلة المثلثية : هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية بزوايا مجهولة القياس

معكوس الدالة المثلثية :

الدالة العكسية	دالة الجيب العكسية	دالة جيب التمام العكسية	دالة الظل العكسية
الرمز	$y = Sin^{-1} x$ $y = Arc\sin x$	$y = Cos^{-1} x$ $y = Arc\cos x$	$y = Tan^{-1} x$ $y = Arc\tan x$
المجال	$-1 \leq x \leq 1$	$-1 \leq x \leq 1$	$\mathbb{R}$
المدى	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $-90° \leq y \leq 90$	$0 \leq y \leq \pi$ $0° \leq y \leq 180$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90° < y < 90°$
الرسم البياني			

الفرق بين : $y = \cos^{-1} x$ و $y = Cos^{-1}x$ عندما $x = \frac{1}{2}$

$y = \cos^{-1} x$ $y = °60$ و $300°$ وكل زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين في ضلع الانتهاء لذلك تسمى $y = \cos^{-1} x$ علاقة	$y = Cos^{-1}x$ $y = °60$ لذلك تسمى $y = Cos^{-1} x$ دالة

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية

ممكن إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية بثلاث طرق

- استعمال دائرة الوحدة
- استعمال الزاوية المرجعية
- استعمال الالة الحاسبة

تطبيقات

أوجد قيمة ما يلي بالدرجات والراديان :

$Tan^{-1}(-\sqrt{3})$ و $-90° < \theta < 90°$ $\theta = -60°$ $= -\frac{\pi}{3}$	$Cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ $0° \le \theta \le 180°$ $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$	$Sin^{-1}\frac{1}{2}$ $-90° \le \theta \le 90°$ $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$

أوجد قيمة ما يلي ، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة

$\tan\left[\mathrm{Sin}^{-1}(-\frac{1}{2})\right]$ 0.58 باستخدام الالة الحاسبة	$\cos\left[\mathrm{Tan}^{-1}\frac{3}{5}\right]$ 0.86 باستخدام الالة الحاسبة	$\sin\left[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ $\sin\left[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ دالة وعكسها فتكون الإجابة مباشره وبدون آلة حاسبة $\frac{\sqrt{3}}{2}$

حل المعادلات التالية (حل المعادلات المثلثية مشابه تماما لما سبق في الدوال العكسية):

$Tan\theta = 3.8$ $\theta = Tan^{-1}(3.8)$ $= 75.26°$	$Cos\ \theta = -0.25$ $\theta = Cos^{-1}(-0.25)$ $= 104.48°$	$Sin\theta = 2.5$ ليس لها حل لأن مجال الدالة $\mathrm{Sin}^{-1} x$ $-1 \le sinx \le 1$