المتطابقات والمعادلات المثلثية

3-1 المتطابقات المثلثية

الدرس | اختبر نفسك

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

الدرس | اختبر نفسك

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

الدرس | اختبر نفسك

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

الدرس | اختبر نفسك

3-5 حل المعادلات المثلثية

الدرس | اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

المتطابقة

هي معادلة يتساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها .

مثال:

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x

المتطابقة المثلثية

هي متطابقة تحوي دوالًا مثلثية .

مثال:

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta},\ \csc\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},\ \sec\theta \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta},\ \cot\theta \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$$

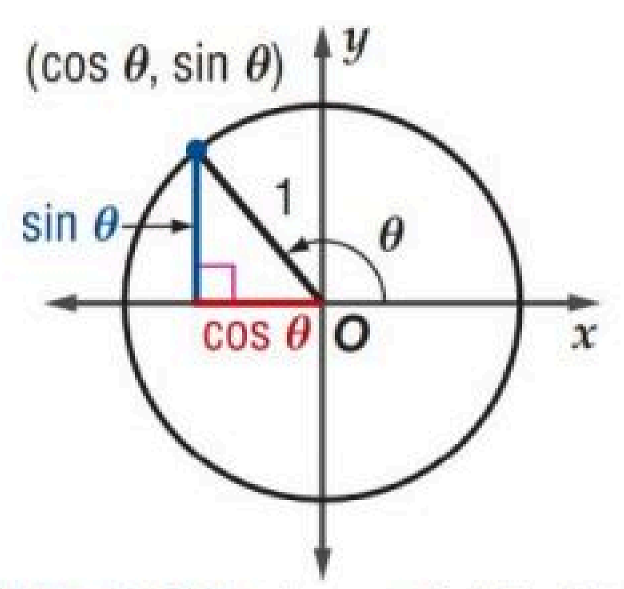
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},\ \tan\theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$



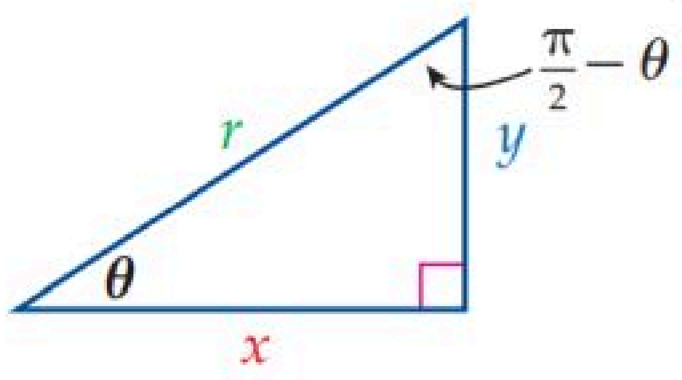
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

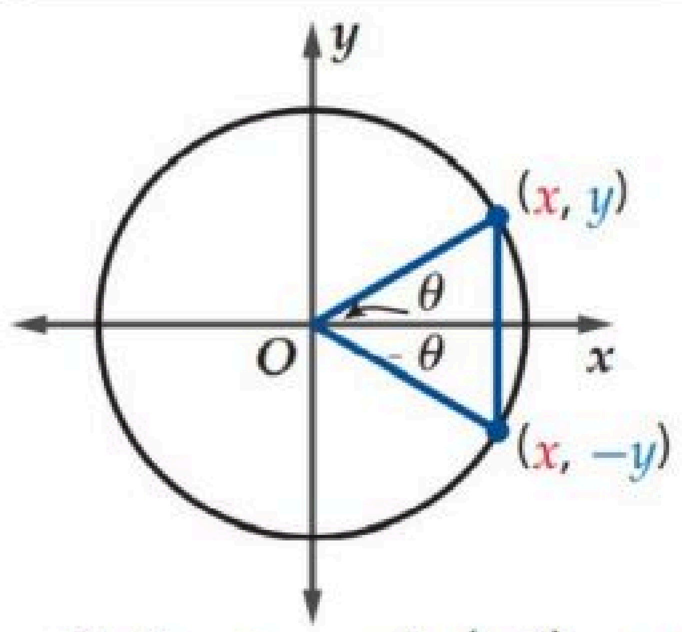
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

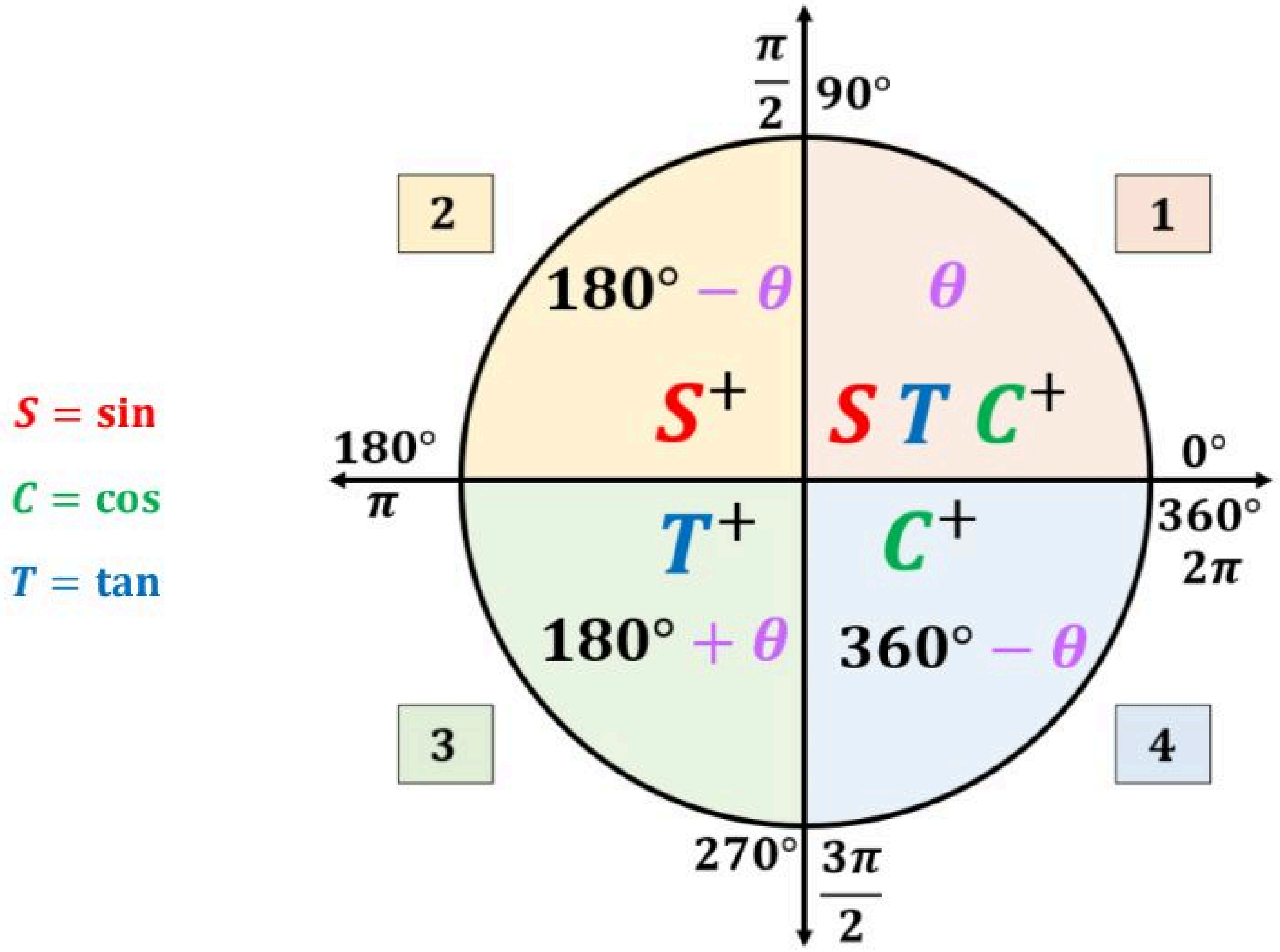
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



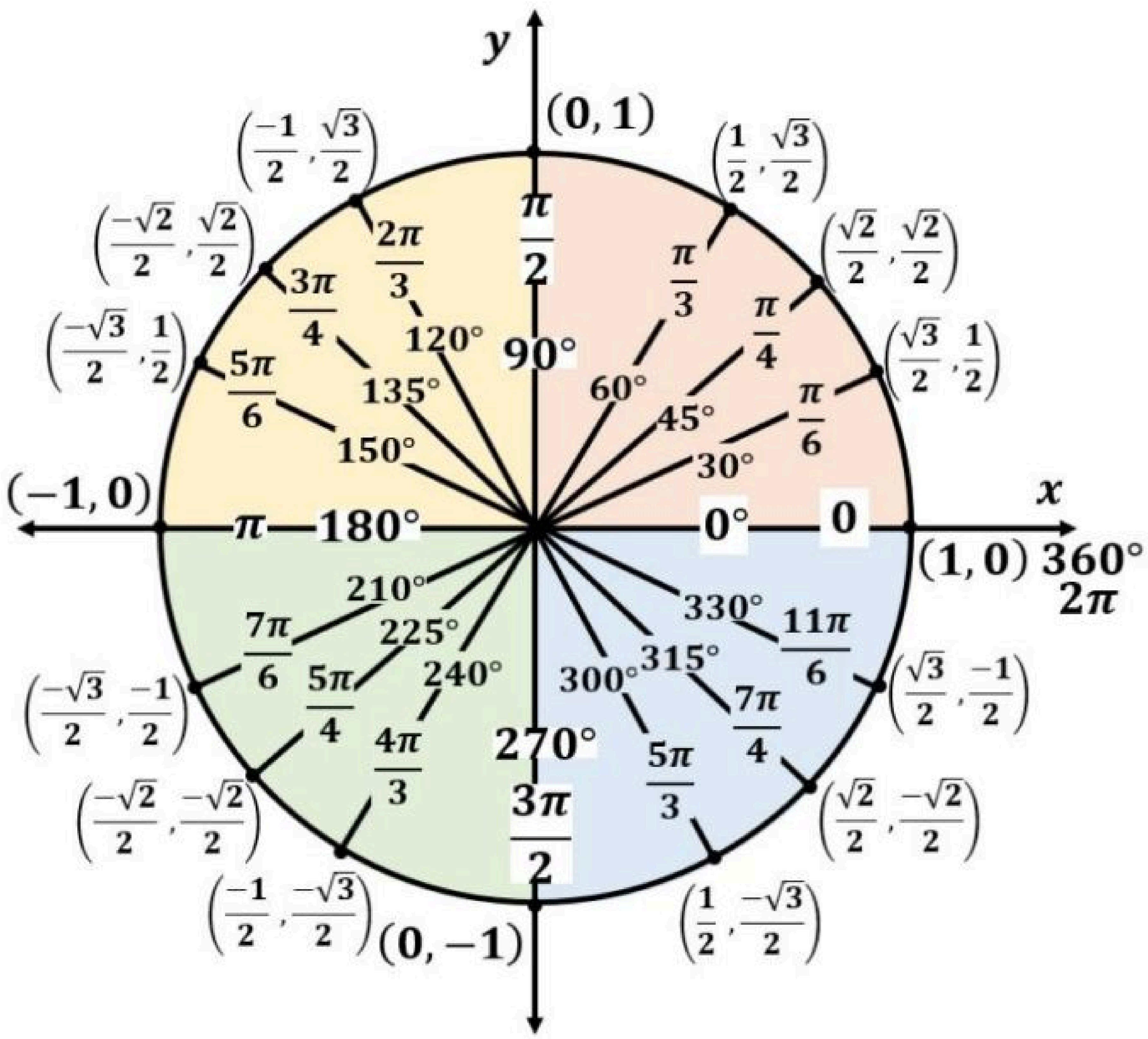
$\sin\theta = y$ $\quad \sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\quad \cos(-\theta) = x$

دائرة الوحدة والإشارات والزوايا المرجعية



حساب الدوال المثلثية للزوايا من خلال دائرة الوحدة



حساب الدوال المثلثية للزوايا المشهورة بدون آلة حاسبة

	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

	$0°$	$90°$
sin	0	1
cos	1	0
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{0} =$ غير معرف

	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	-1	0
cos	-1	0	1
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{0}{-1} = 0$	$\frac{-1}{0} =$ غير معرف	$\frac{0}{1} = 0$

استعمال المتطابقات المثلثية

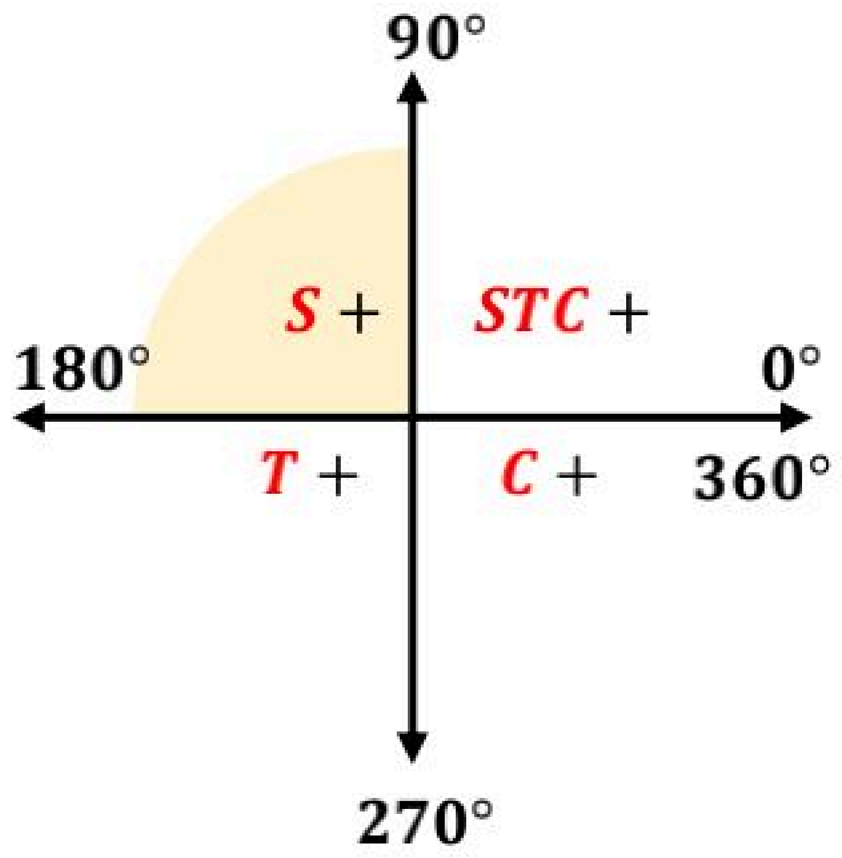
يمكن استعمال المتطابقات الأساسية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية .

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$90° < \theta < 180°$

الحل :



$\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$\cos$ سالبة

لأنها في الربع الثاني

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$

$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$

تبسيط العبارات المثلثية

يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط إن أمكن .

مثال

بسط العبارة : $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$

الحل :

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \cot^2\theta$$

من الأسهل عادة أن تكتب حدود العبارة جميعها بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$

إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين ، وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

الحل :

نبدأ من الطرف الأيسر ⟵ $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$

$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

ونصل إلى الطرف الأيمن ⟵ $= 1$

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تحول كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$

الحل :

$\cot\theta\tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= 1$$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= 1$$

بعد فك كل طرف بشكل منفصل نصل إلى نفس النتيجة .

اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها .
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب وجيب التمام فقط ثم بسط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة ، لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

متطابقات المجموع

1

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$

الحل :

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$

$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 105°$

الحل :

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°)$$

$$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 105°$

الحل :

$$\tan 105° = \tan(60° + 45°)$$

$$= \frac{\tan 60° + \tan 45°}{1 - \tan 60° \tan 45°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-(\sqrt{3})(1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}}{1-3}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$= -2-\sqrt{3}$$

متطابقات الفرق

1

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$

الحل :

$$\sin 15° = \sin(60°-45°)$$
$$= \sin 60° \ \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 15°$

الحل :

$$\cos 15° = \cos(45°-30°)$$
$$= \cos 45° \ \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 120°$

الحل :

$$\tan 120° = \tan(180°-60°)$$
$$= \frac{\tan 180° - \tan 60°}{1+\tan 180° \tan 60°}$$
$$= \frac{0-\sqrt{3}}{1+(0)(\sqrt{3})}$$
$$= \frac{-\sqrt{3}}{1}$$
$$= -\sqrt{3}$$

قائمة بقياسات بعض الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين

$(A+B)$	A	B
$75°$	$45°$	$30°$
$105°$	$60°$	$45°$
$120°$	$90°$	$30°$
$135°$	$90°$	$45°$

$(A-B)$	A	B
$15°$	$60°$	$45°$
$15°$	45	$30°$
$120°$	$180°$	$60°$
$150°$	$180°$	30

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال

أثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$

الحل :

الطرف الأيسر ⟵ $\sin(90° - \theta)$

$$= \sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta$$

$$= 1\ \cos\theta - 0 \sin\theta$$

$= \cos\theta$ ⟵ الطرف الأيمن

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$sin\ 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{-1}{3}$
$90° < \theta < 180°$

الحل :

$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

أولًا: نوجد $\sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2$

$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$

$\sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

θ تقع في الربع الثاني

$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ثانيًا: نوجد $\sin 2\theta$

$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

$= 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)$

$= \frac{-4\sqrt{2}}{9}$

$\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -3$
$90° < \theta < 180°$

الحل :

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2(-3)}{1-(-3)^2}$

$= \frac{-6}{-8}$

$= \frac{3}{4}$

$\cos 2\theta$

1

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$0° < \theta < 90°$

الحل :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$= \frac{5}{9} - \frac{4}{9}$$
$$= \frac{1}{9}$$

2

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{-1}{3}$
$90° < \theta < 180°$

الحل :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1$$
$$= 2\left(\frac{1}{9}\right) - 1$$
$$= \frac{-7}{9}$$

3

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$
$90° < \theta < 180°$

الحل :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$= 1 - 2\left(\frac{16}{25}\right)$$
$$= \frac{-7}{25}$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$

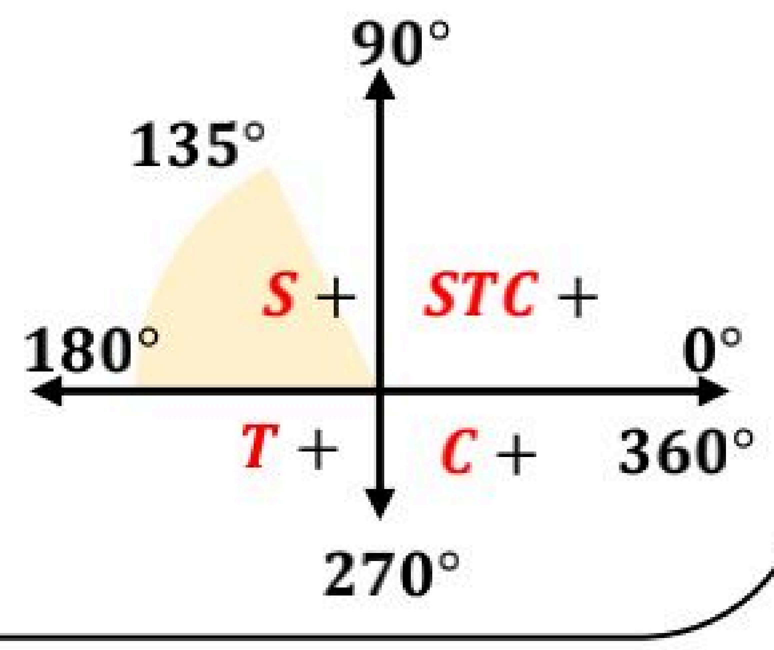
$270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\sin\frac{\theta}{2}$ موجبة



$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \quad = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

إنطاق المقام:

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$

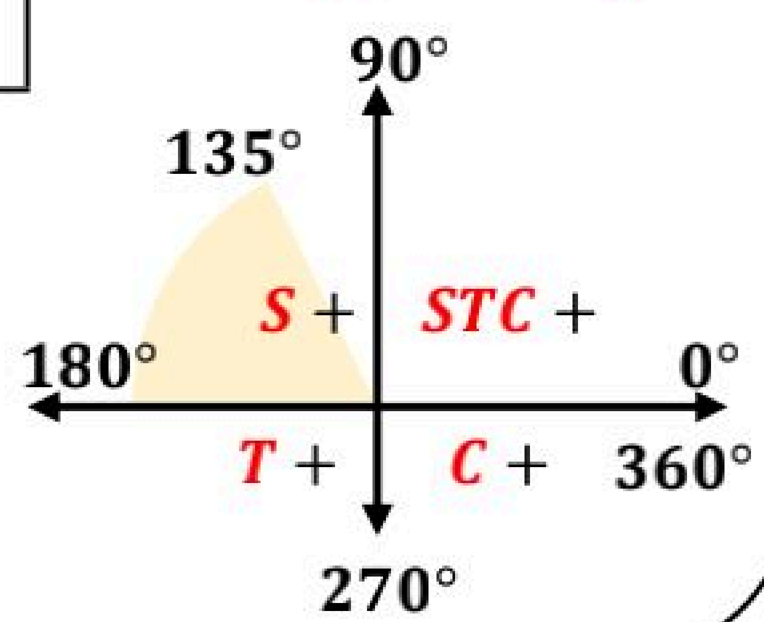
$270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\cos\frac{\theta}{2}$ سالبة



$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} \quad = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

إنطاق المقام :

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$

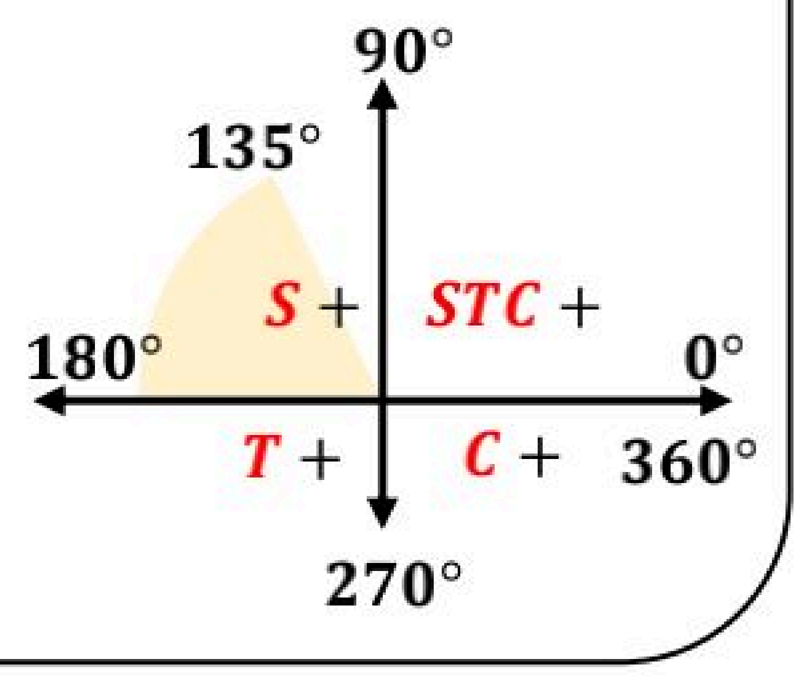
$270° < \theta < 360°$

الحل :

$135° < \frac{\theta}{2} < 180°$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\tan\frac{\theta}{2}$ سالبة



$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

إثبات صحة المتطابقات

نستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما وكذلك المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات .

مثال

أثبت صحة المتطابقة :

$$\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

الحل :

الطرف الأيمن

$$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1-1+2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta$$

الطرف الأيسر

المعادلات المثلثية

هي معادلات تتضمن دوالًا مثلثية وتكون صحيحة عند قيم محددة للمتغير .

حل المعادلات على فترة معطاة

مثال

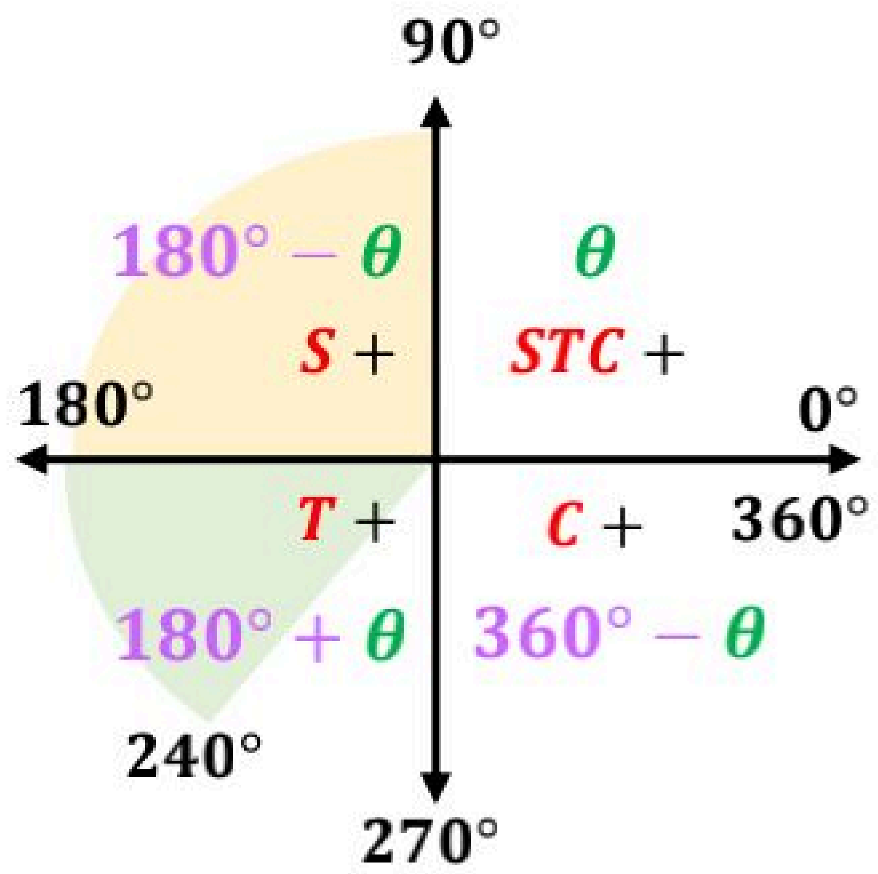
حل المعادلة :

$$\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \;;\; 0° \le \theta \le 240°$$

الحل :

cos سالبة

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



الزاوية θ تقع في

الربع الثاني والربع الثالث

$\theta = 30°$

نعوض بالزوايا المرجعية في الفترات المحددة

نوجد الزوايا في الفترة من خلال الزوايا المرجعية

الربع الثاني	الربع الثالث	إذن :
$180° - \theta$	$180° + \theta$	حل المعادلة :
$180° - 30° = 150°$	$180° + 30° = 210°$	$150°, 210°$

المعادلات المثلثية بدون فترة محددة

تحل المعادلات المثلثية عادة ، لقيم المتغير في الفترة $[0\,,2\pi]$ بالراديان أو $[0°\,,360°]$ بالدرجات . كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة لذلك فالحلول تختلف باختلاف الفترات .

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

مثال

حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان .

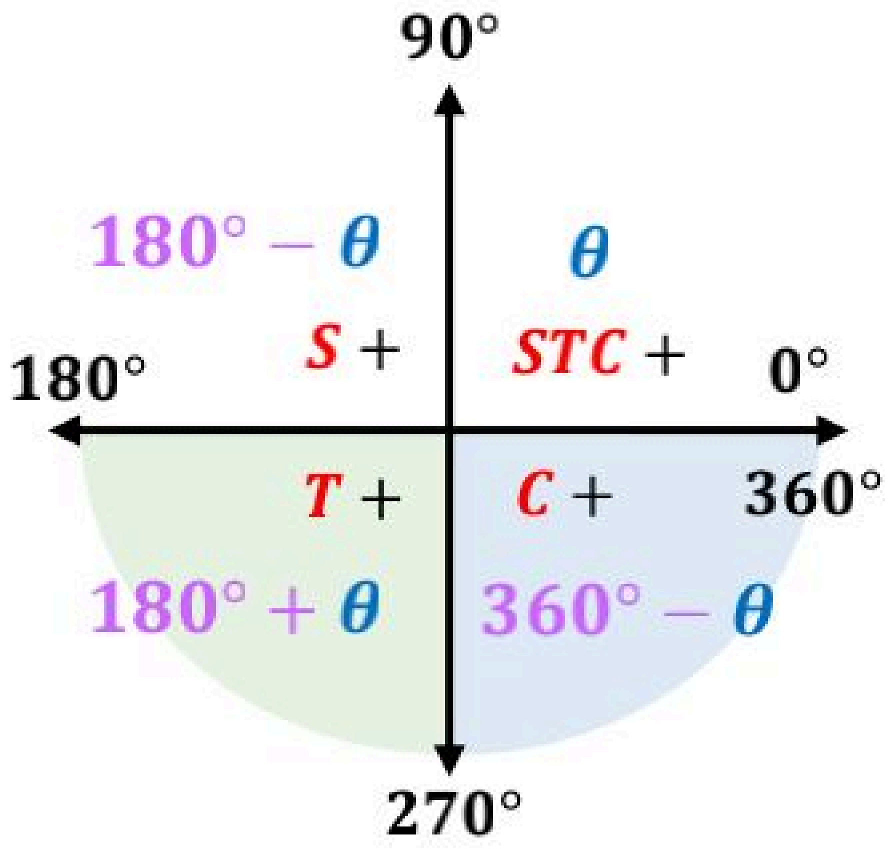
الحل :

$$\frac{2\sin\theta}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

sin سالبة

$$\theta = 30°$$



إذن الزاوية θ تقع في الربع الثالث و الربع الرابع

نعوض بالزوايا المرجعية في الفترات المحددة

نوجد الزوايا في الفترة من خلال الزوايا المرجعية

الربع الثالث	الربع الرابع	
$180° + \theta$	$360° - \theta$	ولأنها بدون فترة فلها عدد لانهائي من الحلول وتكتب بالقاعدة :
$180° + 30° = 210°$	$360° - 30° = 330°$	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$
نحولها لـ الراديان	نحولها لـ الراديان	$\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$
$210° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{7\pi}{6}$	$330° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{11\pi}{6}$	$k \in Z$

الحلول الدخيلة

بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل مثل المعادلة : $\cos\theta = 4$ ليس لها حل ، لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$.

كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية ، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة .

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

مثال

حُل المعادلة : $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

الحل :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 4 - 3$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

متطابقة

لها عدد لا نهائي من الحلول

لأن جميع قيم θ تمثل حلولًا لها.

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

مثال

حُل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات

$$\sin\theta\ \cot\theta - \cos^2\theta = 0$$

الحل :

$$\sin\theta\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \cos^2\theta = 0$$

$$\cos\theta - \cos^2\theta = 0$$

$$\cos\theta\,(1 - \cos\theta) = 0$$

$1 - \cos\theta = 0$ أو $\cos\theta = 0$

$$\cos\theta = 0$$

إذن $\theta = 90°, 270°$

$$1 - \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 1$$

إذن $\theta = 0°, 360°$

وكلاهما حلان دخيلان ، لأن $\cot\theta$ عندها غير معرفة .

حل المعادلة :

$$90° + 180°\,k$$

4-1 القطوع المكافئة

الدرس | اختبر نفسك

4-2 القطوع الناقصة والدوائر

الدرس | اختبر نفسك

4-3 القطوع الزائدة

الدرس | اختبر نفسك

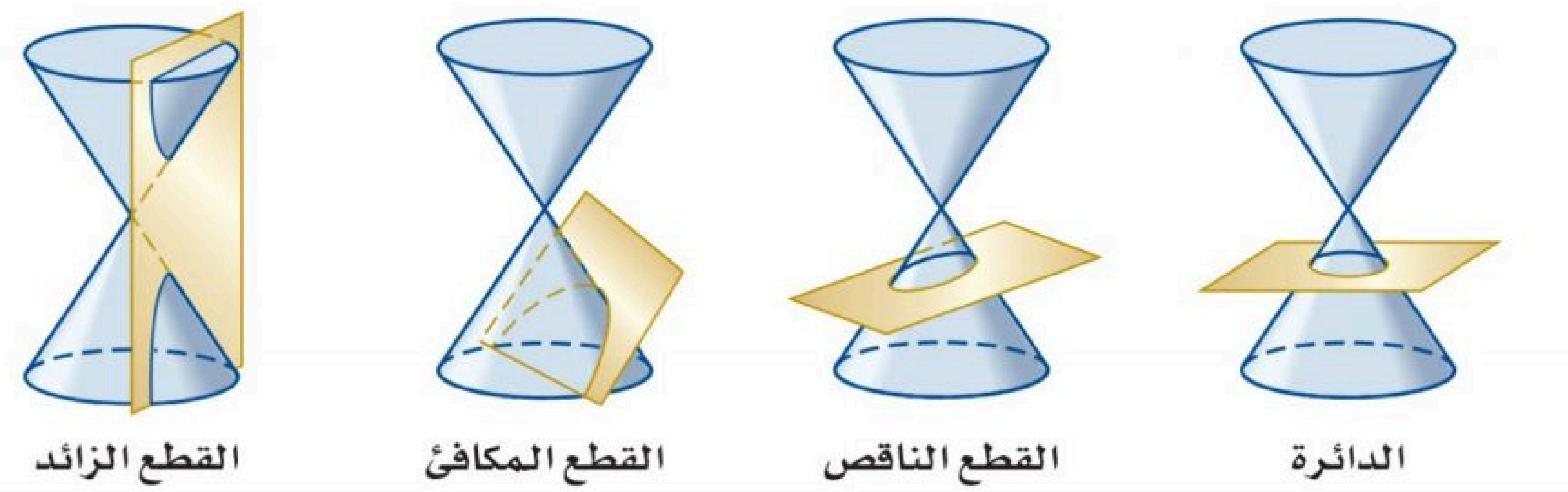
4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية

الدرس | اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

القطوع المخروطية

هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس .



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

حيث A , B , C أعداد ليست جميعها أصفارًا.

وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي .

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا

المحل الهندسي هو **الشكل** الذي ينتج عن **مجموعة النقاط** التي تحقق خاصية **هندسية** معينة .

القطع المكافئ هو **المحل الهندسي** لمجموعة **نقاط المستوى** التي يكون **بعد** كل منها عن نقطة ثابتة (**البؤرة**) مساويًا دائمًا **لبعدها** عن **مستقيم** معلوم يسمى **الدليل** .

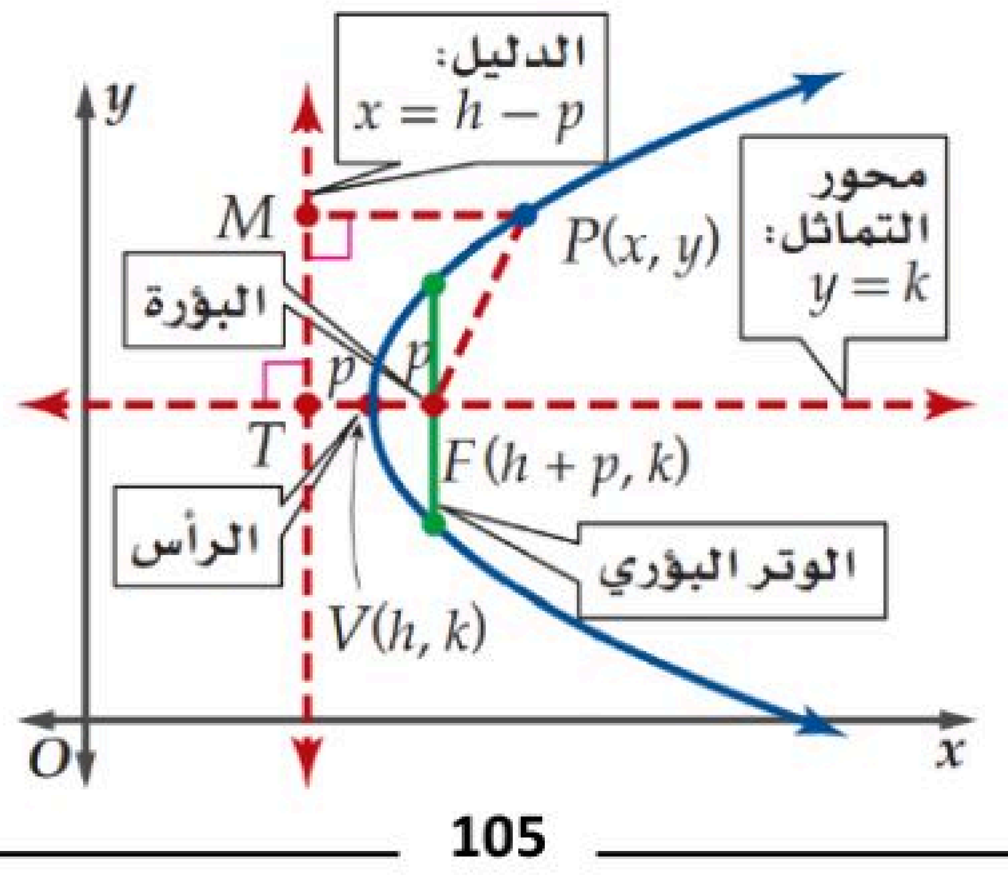
البؤرة هي **نقطة ثابتة** تقع على محور التماثل للقطع ، **وتبعد** عن **الرأس** مسافة $|c|$ وتكون مساوية **لبعد الرأس** عن **مستقيم** ثابت يسمى **الدليل**.

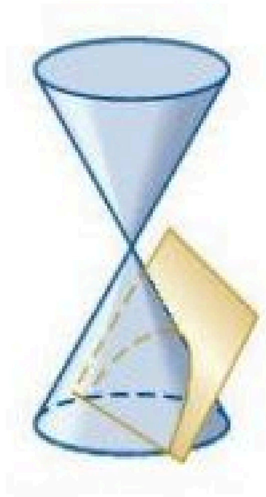
الدليل هو **مستقيم عمودي** على **محور التماثل** بحيث يكون **بعده** عن أي نقطة تقع على القطع مساويًا **لبعد** هذه النقطة عن **البؤرة** .

محور التماثل هو **المستقيم العمودي** على **الدليل** والمار **بالبؤرة** .

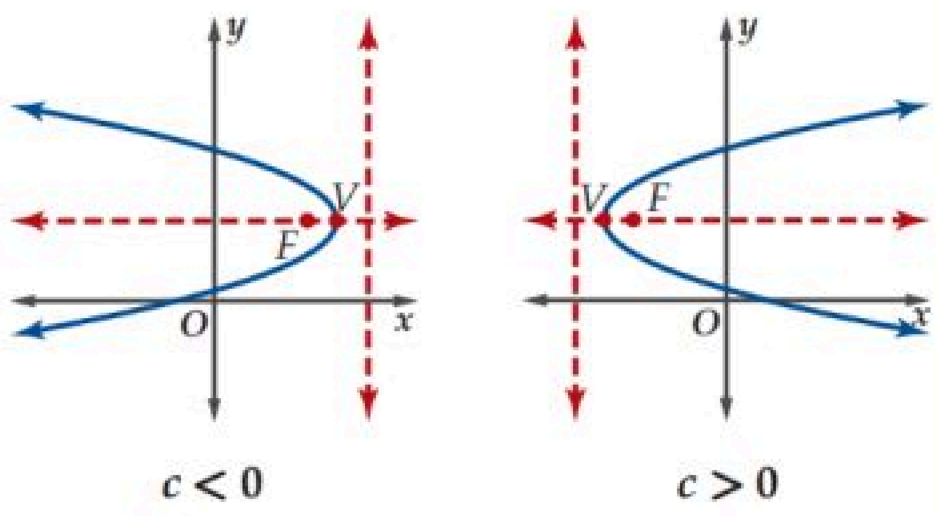
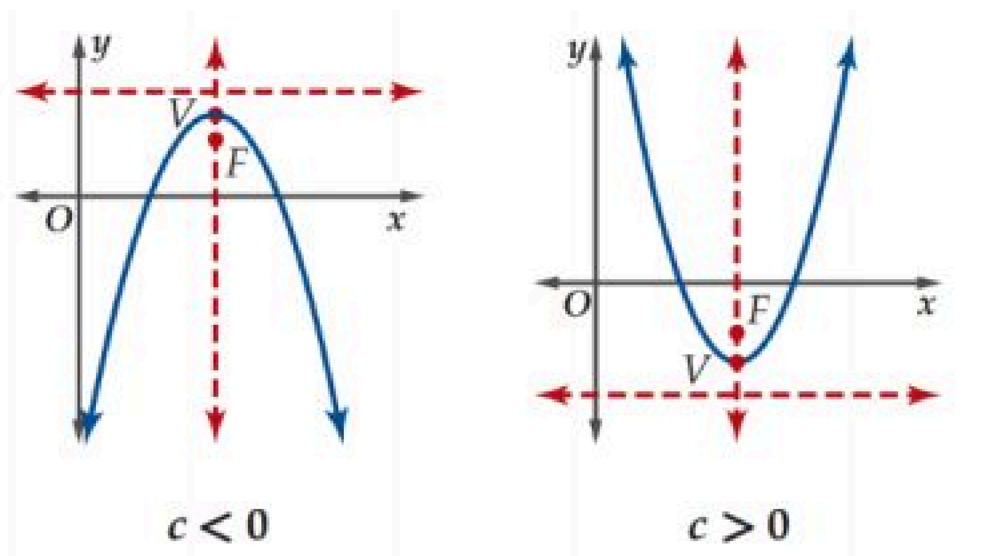
الرأس هو **نقطة تقاطع** القطع **المكافئ** مع **محور التماثل** .

الوتر البؤري هو **القطعة المستقيمة** المار **بالبؤرة** والعمودية على **محور التماثل** ويقع طرفا **الوتر البؤري** على القطع المكافئ ويساوي $|4c|$ حيث c المسافة بين **البؤرة** و**الرأس**.





خصائص القطوع المكافئة

$(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$	المعادلة	$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$
	التمثيل البياني	
أفقي	الاتجاه	رأسي
$(h\,,k)$	الرأس	$(h\,,k)$
$(h+c\,,k)$	البؤرة	$(h\,,k+c)$
$x = h - c$	معادلة الدليل	$y = k - c$
$y = k$	معادلة محور التماثل	$x = h$
$\|4c\|$	طول الوتر البؤري	$\|4c\|$

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$$

h $+$ $\frac{4c}{4}$ k

الاتجاه : رأسي .. أعلى (حسب الإشارة)

($+$) أعلى ، ($-$) أسفل

البؤرة : $(h\,,k+c)$

معادلة الدليل : $y=k-c$

طول الوتر البؤري: $|4c|$

معادلة محور التماثل :

$x=h$

الرأس: $(h\,,k)$

مثال

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(x+1)^2 = -12\,(y-6)$$

الحل :

$k=6$ $c=\frac{-12}{4}=-3$

الاتجاه : رأسي .. أسفل

البؤرة : $(-1\,,6+(-3))$

$(-1\,,3)$

معادلة الدليل : $y=6-(-3)$

$y=9$

طول الوتر البؤري: $|-12|=12$

$h=-1$

معادلة محور التماثل :

$x=-1$

الرأس: $(-1\,,6)$

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$$

k | $+$ | $\frac{4c}{4}$ | h

الاتجاه : أفقي .. يمين (حسب الإشارة)

(+) يمين ، (−) يسار

البؤرة : $(h+c\,,k)$

معادلة الدليل : $x = h - c$

طول الوتر البؤري : $|4c|$

معادلة محور التماثل :

$y = k$

الرأس: $(h\,,k)$

مثال

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(y-4)^2 = 20\,(x+2)$$

الحل :

$h = -2$ $\quad c = \frac{20}{4} = 5$ $\quad k = 4$

الاتجاه : أفقي .. يمين

البؤرة : $(-2+5\,,4)$

$(3\,,4)$

معادلة الدليل : $x = -2 - 5$

$x = -7$

طول الوتر البؤري : $|20| = 20$

معادلة محور التماثل :

$y = 4$

الرأس: $(-2\,,4)$

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع المكافئ:

$$x^2 - 4y + 3 = 7$$

الحل :

$$x^2 = 7 + 4y - 3$$

$$x^2 = 4y + 4$$

$$x^2 = 4(y + 1)$$

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

معطى البؤرة والرأس

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

الحل :

$$(x - h)^2 = 4c\ (y - k)$$

$$(x + 6)^2 = 12\ (y + 1)$$

البؤرة $(-6, 2)$

الاختلاف بين الرأس والبؤرة في y

إذن المنحنى مفتوح رأسيًا

نوجد c

$$k + c = 2$$

$$-1 + c = 2 \rightarrow c = 3 \rightarrow 4c = 12$$

الرأس $(-6, -1)$

(h, k)

معطى الرأس والدليل

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

الرأس $(-2\,,9)$ والدليل $x = 12$

الحل :

الدليل $x = 12$

الدليل رأسي

إذن المنحنى مفتوح أفقيًا

نوجد c

$x = 12$

$h - c = 12$

$9 - c = 12 \rightarrow c = 9 - 12 = -3$

$$(y-k)^2 = 4c\,(x-h)$$

$$(y+2)^2 = -12\,(x-9)$$

الرأس $(9\,,-2)$

$(h\,,k)$

معطى البؤرة واتجاه المنحنى ويمر بنقطة

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-4\,,-3)$ والمنحنى مفتوح إلى أسفل ، ويمر بالنقطة $(-10\,,5)$

الحل :

$$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$$

$$(x+3)^2 = -8\,(y+2)$$

المنحنى مفتوح إلى أسفل

إذن الاتجاه رأسي ، وعليه التغير في y

البؤرة $(-3\,,-4)$

$k + c = -4$

الرأس $(-3\,,-4-c)$

$(h\,,k)$

لايجاد c من الصورة القياسية للقطع :

$(x-h)^2 = 4c\,(y-k)$

نعوض عن

$x = 5\,, y = -10\,, h = -3\,, k = -4 - c$

$(5+3)^2 = 4c\,(-10-(-4-c))$

$64 = 4c(-6+c)$

$64 = -24c + 4c^2$

$4c^2 - 24c - 64 = 0$

$c^2 - 6c - 16 = 0$

$(c-8)(c+2) = 0 \rightarrow c = 8\,, c = -2$

ولأن المنحنى مفتوح للأسفل إذن :

$c = -2$

$4c = -8$

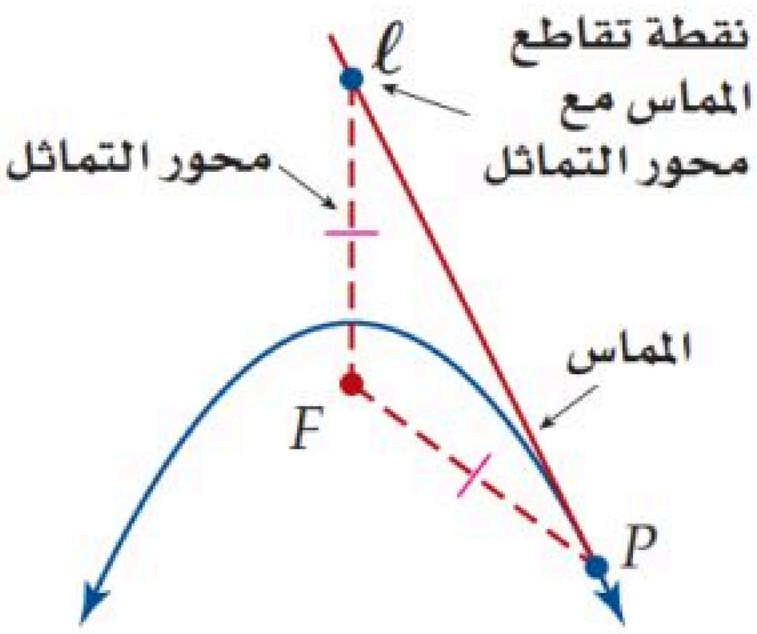
$k = -4 + 2$

$k = -2$

مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون :

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين .
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني .



كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

- إذا كان المنحنى مفتوحاً أفقياً ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$
- إذا كان المنحنى مفتوحاً رأسياً ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

مثال

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $y = 4x^2 + 4$ عند النقطة $(-1 , 8)$

الحل :

أولاً: نوجد إحداثيات البؤرة

المنحنى مفتوح رأسياً

الصورة القياسية

$$x^2 = \frac{1}{4}(y-4)$$

$$4c = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{1}{16} = 0.0625$$

الرأس $(0, 4)$

البؤرة $(0, 4.06)$

ثانياً: نوجد d المسافة بين البؤرة والنقطة المعطاة

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

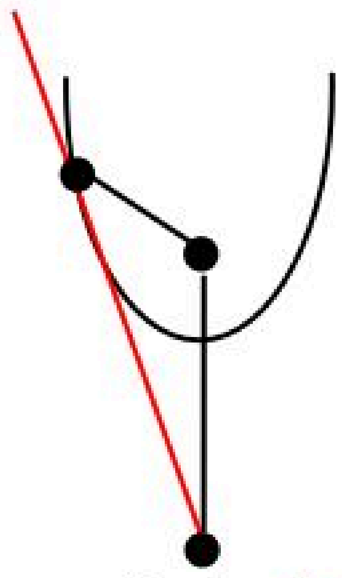
$$= \sqrt{(-1-0)^2 + (8-4.06)^2}$$

$$d = 4.06$$

ثالثاً: نوجد إحداثيات النقطة وذلك بطرح المسافة من أحد احداثي البؤرة ولان القطع رأسياً نطرح من y فتصبح

$(0, 0)$

رابعاً: نوجد الميل ونعوض في معادلة المستقيم



$$m = \frac{8-0}{-1-0} = -8$$

معادلة المستقيم المار بـ$(0 , 0)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -8(x - 0)$$

$$y = -8x$$

تحليل القطع الناقص وتمثيله بيانيًا

القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا وهو $2a$ حيث a هي البعد بين الرأس والمركز.

البؤرتان هما نقطتان تقعان على المحور الأكبر والمسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري ويكون مجموع بعديهما عن أي نقطة على منحنى القطع الناقص يساوي مقدارًا ثابتًا ، حيث c هي البعد بين إحدى البؤرتين والمركز .

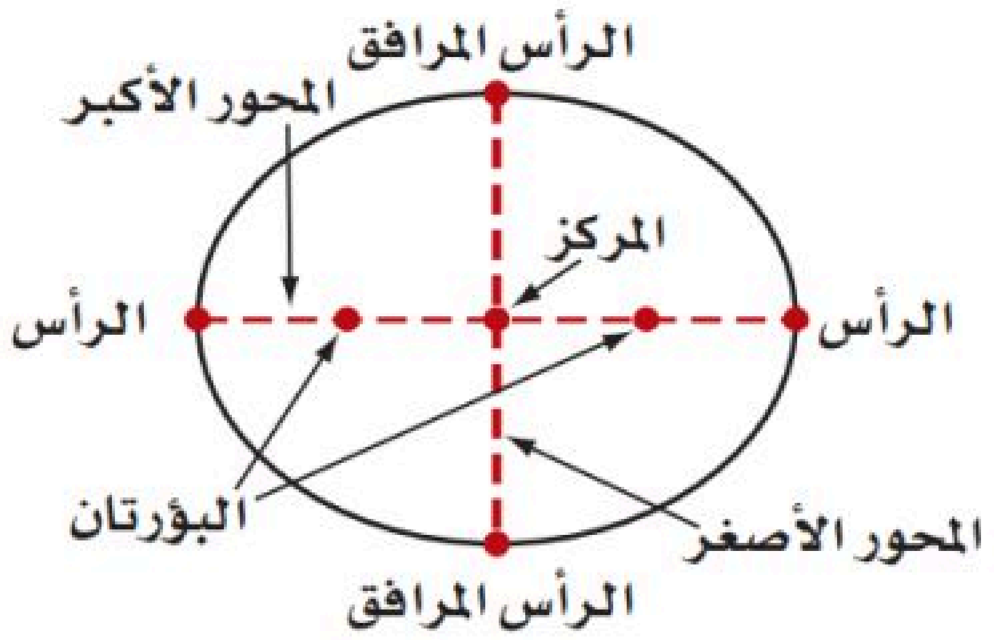
المحور الأكبر هو محور تماثل للقطع الناقص وهو القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين وتقع نهايتاها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2a$ حيث a البعد بين المركز وأحد الرأسين .

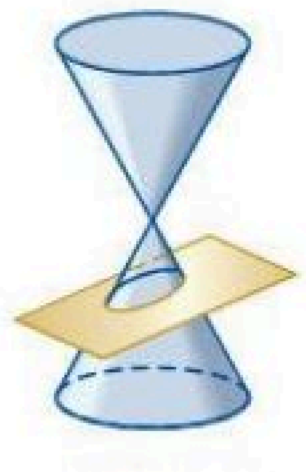
المحور الأصغر هو القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز والمتعامدة مع المحور الأكبر ، وتقع نهايتاها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2b$ ، حيث b هي البعد بين المركز وأحد الرأسين المرافقين .

المركز هو نقطة المنتصف للمحورين الأكبر والأصغر والبؤرتين .

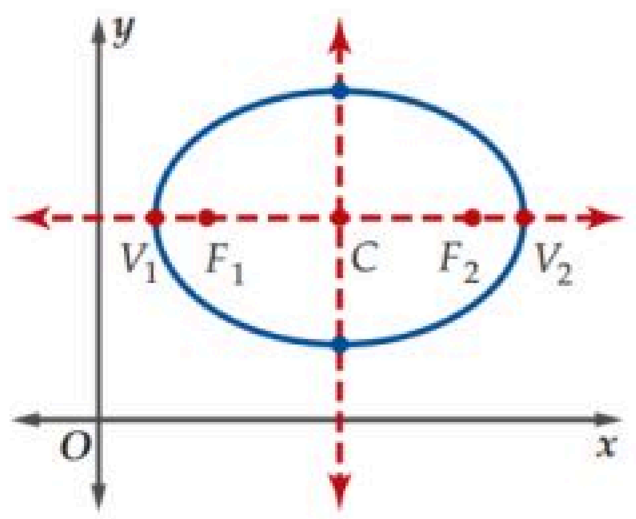
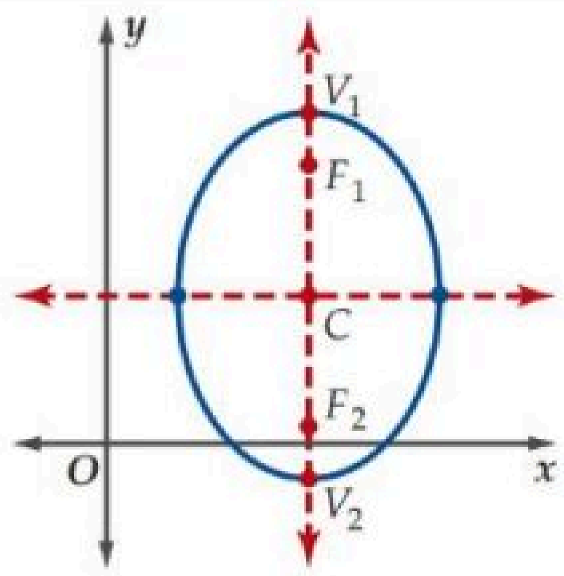
الرأسان هما نقطتا نهايتي المحور الأكبر .

الرأسان المرافقان هما نقطتا نهايتي المحور الأصغر.





خصائص القطع الناقص

نوع القطع	القطع الناقص	
التمثيل البياني		
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
إيجاد c " البعد بين المركز والبؤرة "	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	
a^2	هو العدد الأكبر	
تحديد الاتجاه	حسب اللي فوق العدد الأكبر a^2	
	أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2
$2a$	طول المحور الأكبر	
$2b$	طول المحور الأصغر	
$2c$	طول البعد البؤري	
المركز	(h,k)	
معادلة المحور	الأكبر $y=k$	الأكبر $x=h$
	الأصغر $x=h$	الأصغر $y=k$
الرأسان " a "	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
البؤرتان " c "	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
الرأسان المرافقان " b "	$(h,k\pm b)$	$(h\pm b,k)$
خطا التقارب	....	

تحديد خصائص القطع الناقص

مثال حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

الاتجاه : رأسي

الحل :

$h=-2,\ k=0,\ a=7,\ b=3,\ c=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}$

المركز $(-2\,,0)$

معادلة المحور الأصغر $y=0$

معادلة المحور الأكبر $x=-2$

الرأسان: $a=7$
$(-2\,,7)$
$(-2\,,-7)$
طول المحور الأكبر $2a=14$

البؤرتان: $c=\sqrt{40}$
$(-2\,,\sqrt{40})$
$(-2\,,-\sqrt{40})$
طول البعد البؤري $2c=2\sqrt{40}$

الرأسان المرافقان: $b=3$
$(1\,,0)$
$(-5\,,0)$
طول المحور الأصغر $2b=6$

تحديد خصائص القطع الناقص

مثال حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

الاتجاه : أفقي

الحل :

$h=-4,\ k=-3,\ a=3,\ b=2,\ c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

المركز $(-4\,,-3)$

معادلة المحور الأكبر $y=-3$

معادلة المحور الأصغر $x=-4$

الرأسان المرافقان: $b=2$
$(-4\,,-1)$
$(-4\,,-5)$
طول المحور الأصغر $2b=4$

البؤرتان: $c=\sqrt{5}$
$(-4+\sqrt{5}\,,-3)$
$(-4-\sqrt{5}\,,-3)$
طول البعد البؤري $2c=2\sqrt{5}$

الرأسان: $a=3$
$(-1\,,-3)$
$(-7\,,-3)$
طول المحور الأكبر $2a=6$

كتابة معادلة القطع الناقص بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والرأسان المرافقان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$

الحل :

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 10$$

$$a = 5 \rightarrow a^2 = 25$$

نستعمل المحور الأصغر لتحديد b من الرأسين المرافقين

$$2b = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 6$$

$$b = 3 \rightarrow b^2 = 9$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h, k) = \left(\frac{-6-6}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right) = (-6, -3)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$$

معطى الرأسان والبؤرتان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$

الحل :

طول المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2} = 10$$

$$a = 5 \rightarrow a^2 = 25$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2} = 6$$

$$c = 3$$

نوجد b^2

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$3^2 = 5^2 - b^2$$

$$b^2 = 25 - 9$$

$$b^2 = 16$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (1, 4)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأكبر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:
البؤرتان $(3,3)$, $(-7,3)$ ، $(19,3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة

الحل :

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c=\sqrt{(19+7)^2+(3-3)^2}=26$$
$$c=13$$

طول المحور الأكبر $2a=30$

$$a=15 \rightarrow a^2=225$$

نوجد b^2

$$c^2=a^2-b^2$$
$$13^2=15^2-b^2$$
$$b^2=225-169$$
$$b^2=56$$

مركز القطع هو نقطة منتصف البؤرتين

$$(h,k)=\left(\frac{19-7}{2},\frac{3+3}{2}\right)=(6,3)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x-6)^2}{225}+\frac{(y-3)^2}{56}=1$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأصغر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-2,8)$, $(-2,-4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة

الحل :

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a=\sqrt{(-2+2)^2+(-4-8)^2}=12$$
$$a=6$$
$$a^2=36$$

طول المحور الأصغر $2b=10$

$$b=5$$
$$b^2=25$$

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

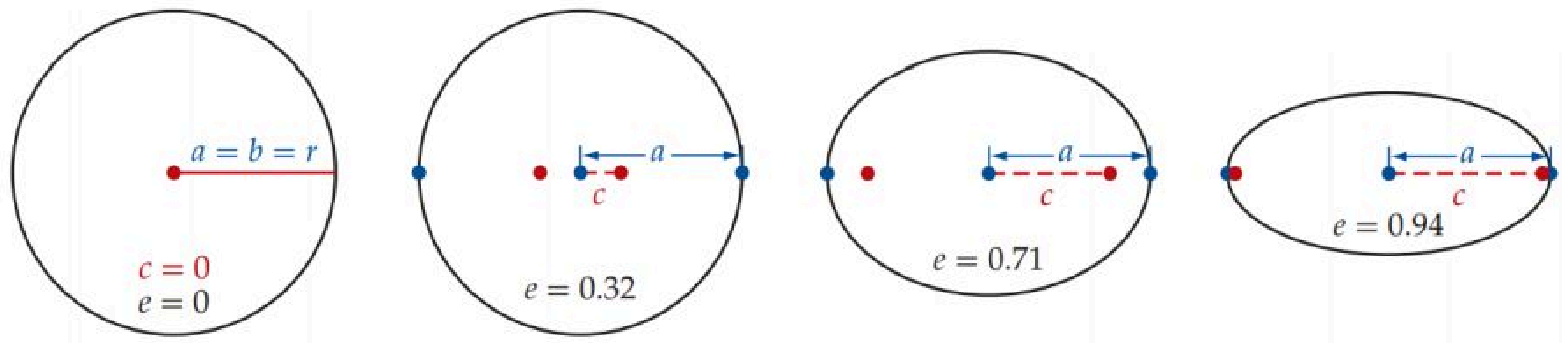
$$(h,k)=\left(\frac{-2-2}{2},\frac{-4+8}{2}\right)=(-2,2)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

هو نسبة c إلى a وتقع هذه القيمة دائماً بين 0 و 1 ، وتحدد مدى دائرية أو اتساع القطع الناقص .



الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$

$$0 < e < 1$$

مثال

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$$

الحل :

$$a^2 = 19 \ , a = \sqrt{19}$$

أولاً: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{19 - 17}$$

$$c = \sqrt{2}$$

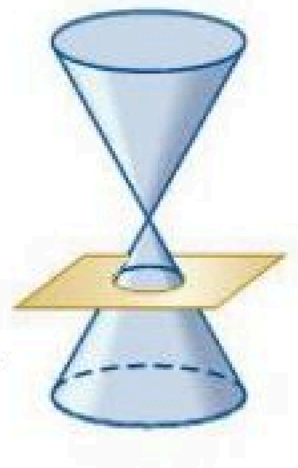
ثانياً: نستعمل قيمتي c , a لإيجاد قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$$

$$e \approx 0.32$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة



الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

كتابة معادلة الدائرة

مثال

مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي

مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها 3

الحل :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=3^2$$

$$x^2+y^2=9$$

طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة

إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$

نوجد المركز (h, k) باستخدام قانون نقطة المنتصف

الحل :

$$(h, k)=\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$$

$$(h, k)=(2, 1)$$

نوجد طول نصف القطر باستخدام قانون المسافة بين نقطتين

(بين المركز وإحدى نقاط طرفا القطر)

$$r=\sqrt{(2-3)^2+(1+3)^2}$$

$$r=\sqrt{17}$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{17}\right)^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=17$$

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً

القطع الزائد هو المحل الهندسي لجمع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً هو $2a$ ، حيث a البعد بين المركز وأحد الرأسين .

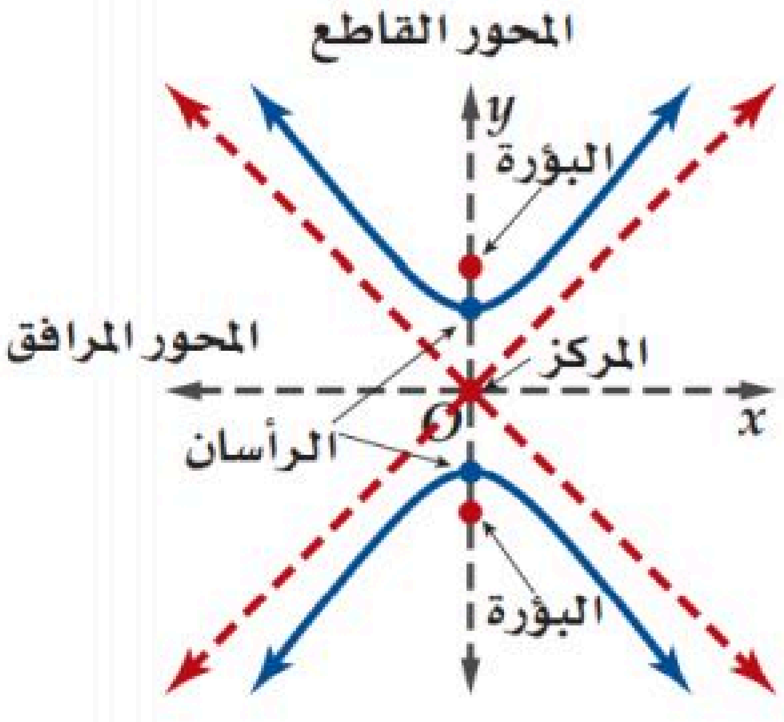
البؤرتان هما نقطتان تقعان على المحور القاطع و المسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري والفرق المطلق بين بعديهما عن أي نقطة من نقاط منحنى القطع الزائد يساوي مقداراً ثابتاً.

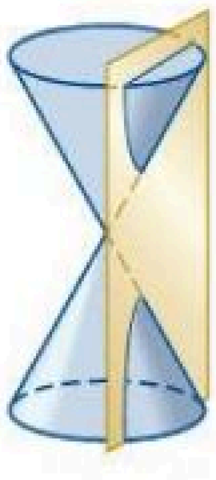
المركز هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين والرأسين .

الرأسان هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى .

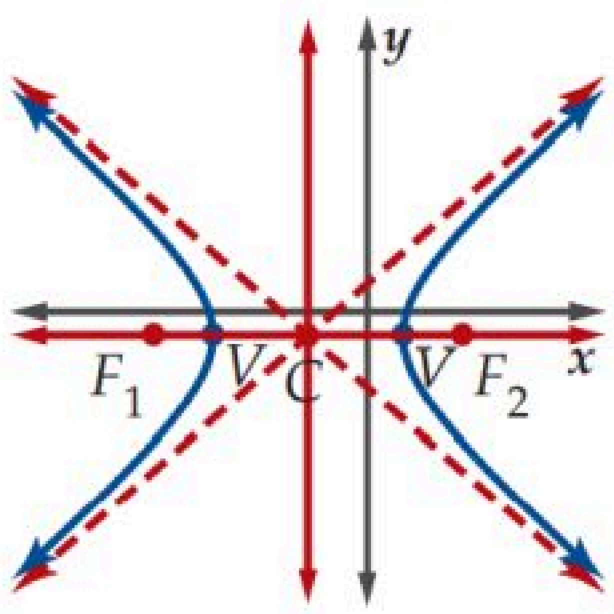
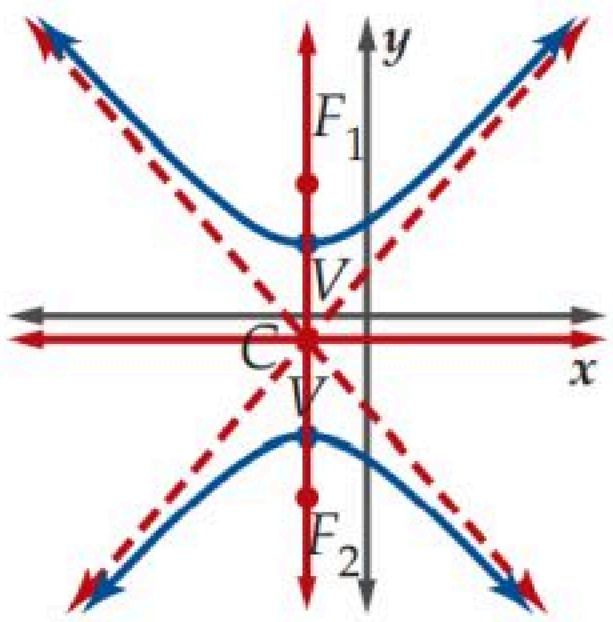
المحور القاطع هو أحد محوري تماثل القطع الزائد وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين ويمر بالمركز.

المحور المرافق هو أحد محوري تماثل القطع الزائد وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع ويمر بالمركز.





خصائص القطع الزائد

نوع القطع	القطع الزائد	
التمثيل البياني		
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
إيجاد c " البعد بين المركز والبؤرة "	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
a^2	هو العدد الأول	
تحديد الاتجاه	حسب اللي فوق العدد الأول a^2	
	أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2
$2a$	طول المحور القاطع	
$2b$	طول المحور المرافق	
$2c$	طول البعد البؤري	
المركز	$(h\,,k)$	
معادلة المحور	القاطع $y=k$	القاطع $x=h$
	المرافق $x=h$	المرافق $y=k$
الرأسان " a "	$(h\pm a\,,k)$	$(h\,,k\pm a)$
البؤرتان " c "	$(h\pm c\,,k)$	$(h\,,k\pm c)$
الرأسان المرافقان " b "	....	
خطا التقارب	$(y-k)=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$(y-k)=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

تحديد خصائص القطع الزائد

مثال

الاتجاه : رأسي

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{17}=1$

الحل :

$h=0\,,k=0\,,a=2\,,b=\sqrt{17}\,,c=\sqrt{4+17}=\sqrt{21}$

معادلة المحور المرافق $y=0$

المركز $(0\,,0)$

معادلة المحور القاطع $x=0$

الرأسان

$a=2$

$(0\,,2)$

$(0\,,-2)$

طول المحور القاطع

$2a=4$

البؤرتان

$c=\sqrt{21}$

$(0\,,\sqrt{21})$

$(0\,,-\sqrt{21})$

طول البعد البؤري

$2c=2\sqrt{21}$

$b=\sqrt{17}$

طول المحور المرافق

$2b=2\sqrt{17}$

خطا التقارب : $y=\pm\frac{2}{\sqrt{17}}x$

$y=\pm\frac{2\sqrt{17}}{17}x$

تحديد خصائص القطع الزائد

مثال

الاتجاه : أفقي

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-5)^2}{36}=1$

الحل :

$h=1\,,k=5\,,a=3\,,b=6\,,c=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

معادلة المحور القاطع $y=5$

المركز $(1\,,5)$

معادلة المحور المرافق $x=1$

$b=6$

طول المحور المرافق

$2b=12$

خطا التقارب: $y-5=\pm\frac{6}{3}(x-1)$

$y-5=\pm 2\,(x-1)$

البؤرتان

$c=\sqrt{45}$

$(1+\sqrt{45}\,,5)$

$(1-\sqrt{45}\,,5)$

طول البعد البؤري

$2c=2\sqrt{45}$

الرأسان

$a=3$

$(4\,,5)$

$(-2\,,5)$

طول المحور القاطع

$2a=6$

كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع الزائد:

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$$

الحل :

تجميع المتشابهات

$$(4y^2 - 8y) + (-9x^2 - 36x) = 68$$

أخذ عوامل مشتركة

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 + 4x) = 68$$

اكمال المربع

$$4(y^2 - 2y + \square) - 9(x^2 + 4x + \square) = 68 + 4(\square) - 9(\square)$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 68 + 4(1) - 9(4)$$

تبسيط

$$4(y-1)^2 - 9(x+2)^2 = 36$$

بالقسمة والتبسيط

$$\frac{4(y-1)^2}{36} - \frac{9(x+2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$$

كتابة معادلة القطع الزائد بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والبؤرتان

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-3, 2), (-3, -6)$ والبؤرتان $(-3, 3), (-3, -7)$

الحل :

في الرأسين إحداثيي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right)$$

$$(h, k) = (-3, -2)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3+3)^2 + (-6+2)^2}$$

$$a = 4 \rightarrow a^2 = 16$$

نوجد c وهي المسافة بين أي من البؤرتين والمركز

$$= \sqrt{(-3+3)^2 + (3+2)^2}$$

$$c = 5 \rightarrow c^2 = 25$$

نوجد b^2 من القانون

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

المحور القاطع رأسي فإن a^2 يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

معطى الرأسان وخطا التقارب

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-9,0),(-3,0)$ وخطا التقارب $y=-2x+12$, $y=2x-12$

الحل :

في الرأسين إحداثيي y متساويان فإن المحور القاطع أفقي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3-9}{2},\frac{0+0}{2}\right)$$

$$(h,k)=(-6,0)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$=\sqrt{(-3+6)^2+(0-0)^2}$$

$$a=3 \rightarrow a^2=9$$

ميلا خطي التقارب $\pm\frac{b}{a}$ نستخدم الميل الموجب لإيجاد b

$$\frac{b}{a}=2 \rightarrow \frac{b}{3}=2 \rightarrow b=6$$

$$b^2=36$$

المحور القاطع أفقي فإن a^2 يرتبط بالحد x^2

$$\frac{(x+6)^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$$

معطى الرأسان وطول المحور المرافق

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(3,6),(3,2)$ وطول المحور المرافق 10 وحدات

الحل :

في الرأسين إحداثيي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{3+3}{2},\frac{2+6}{2}\right)$$

$$(h,k)=(3,4)$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$=\sqrt{(3-3)^2+(2-4)^2}$$

$$a=2 \rightarrow a^2=4$$

طول المحور المرافق $2b=10$

$$b=5$$

$$b^2=25$$

المحور القاطع رأسي فإن a^2 يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{25}=1$$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

لأي قطع زائد $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

حيث $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$

$$e > 1$$

مثال

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد :

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$$

الحل :

$$a^2 = 64 \ , a = 8$$

أولًا: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{64 + 80}$$

$$c = \sqrt{144} = 12$$

ثانيًا: نستعمل قيمتي a , c لإيجاد قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{12}{8}$$

$$e = \frac{3}{2} = 1.5$$

ملاحظة

الاختلاف المركزي للقطوع :

القطع الناقص $0 < e < 1$

القطع الزائد $e > 1$

الدائرة $e = 0$

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

على أن لا تساوي C , B , A جميعها أصفارًا . ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصورة القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية

$$4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$$

ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله .

الحل :

تجميع المتشابهات مع أخذ عوامل

$$4(x^2 - 4x) + y^2 + 8y = 4$$

اكمال المربع

$$4(x^2 - 4x + \square\ ) + (y^2 + 8y + \square\ ) = 4 + 4(\square) + \square$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 4 + 4(4) + 16$$

تبسيط

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 36$$

تبسيط

$$4(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

قسمة وتبسيط

$$\frac{4(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$$

نوع القطع المخروطي : قطع ناقص

قطع مكافئ

$$B^2 - 4AC = 0$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$$6y^2 - 24y + 28 - x = 0$$

الحل :

$A = 0$, $B = 0$, $C = 6$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(0)(6) = 0$$

قطع مكافئ

قطع ناقص

$B^2 - 4AC < 0$, $A \neq C$ أو $B \neq 0$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$$

الحل :

$A = 1$, $B = 0$, $C = 4$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(1)(4) = -16$$

قطع ناقص

تحديد أنواع القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

باستعمال المميز

$$B^2 - 4AC$$

دائرة

$B^2 - 4AC < 0$, $B = 0$ و $A = C$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$$8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$$

الحل :

$A = 8$, $B = 0$, $C = 8$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(8)(8) = -256$$

دائرة

قطع زائد

$$B^2 - 4AC > 0$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :

$$3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$$

الحل :

$A = 4$, $B = 3$, $C = 0$

$$B^2 - 4AC$$

$$(3)^2 - 4(4)(0) = 9$$

قطع زائد

الكميات الفيزيائية

كمية قياسية (عددية)

هي كمية لها مقدار فقط وليس لها اتجاه.

طول قطعة مستقيمة 5 cm

كمية متجهة

هي كمية لها مقدار و اتجاه .

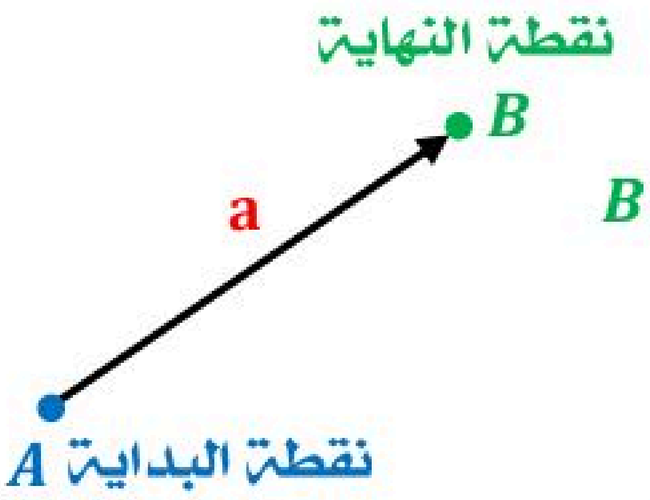
يسير قارب بسرعة 15 m/h في اتجاه الجنوب الغربي .

المتجهات

المتجه:

قطعة مستقيمة لها اتجاه أو سهم لها نقطة بداية A ولها نقطة نهاية B

يرمز للمتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو a



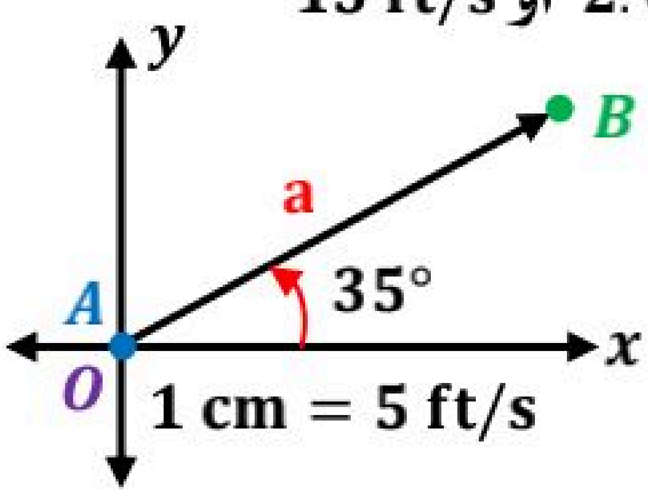
طول المتجه:

طول القطعة المستقيمة التي تمثله ويرمز لطول المتجه a بالرمز $|a|$

مثلًا : إذا كان مقياس الرسم $1\text{ cm} = 5\text{ ft/s}$ فإن الطول يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s

الوضع القياسي للمتجه:

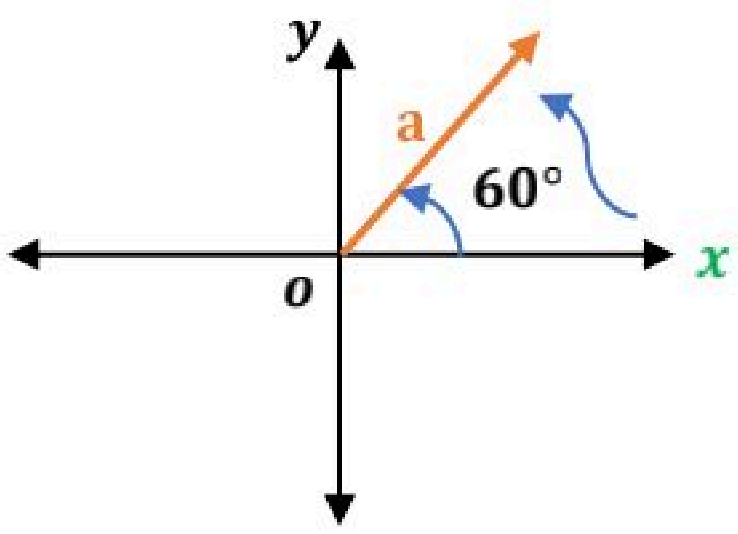
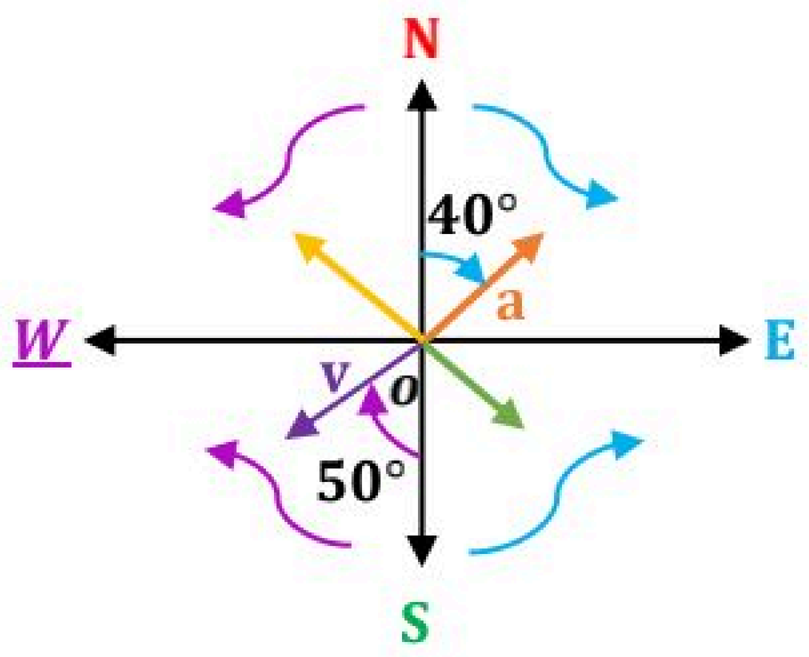
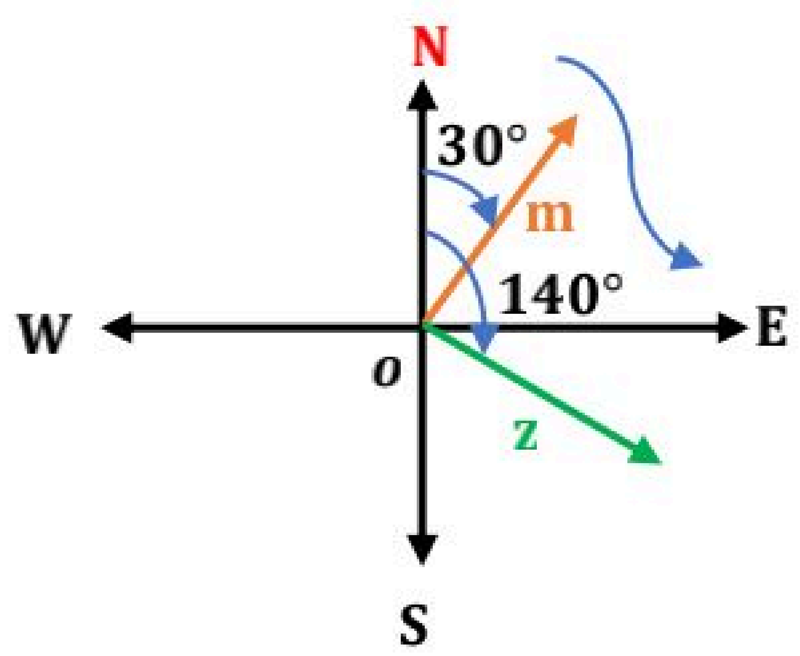
إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل.



اتجاه المتجه:

- الاتجاه الأفقي .
- الاتجاه الربعي.
- الاتجاه الحقيقي .

تمثيل المتجه هندسيًا

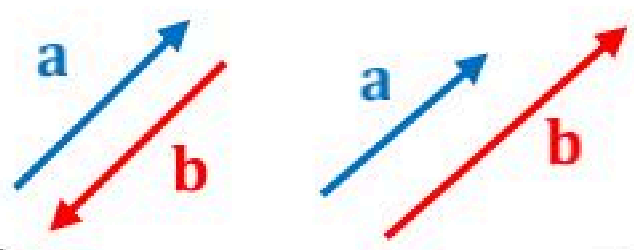
النوع	خصائصه	الرسم
الاتجاه الأفقي	يستعمل **المحور الأفقي** الزاوية التي يصنعها مع **محور x الموجب** ويكون **عكس عقارب الساعة** . مثال : $\vec{a}$ بزاوية قياسها $60°$ مع الاتجاه الأفقي	
الاتجاه الربعي φ (فاي)	يستعمل المحور الرأسي y إما **شمالًا N** أو **جنوبًا S** **يكون قياس الزاوية** بين $0°$ و$90°$ **شرق** أو **غرب** المحور الرأسي **وتكتب الزاوية** بين حرفين مثال : $\vec{a}$ باتجاه N 40° E $\vec{v}$ باتجاه S 50° W	
الاتجاه الحقيقي	يبدأ من **الشمال N** ويكون **مع عقارب الساعة** وتكتب الزاوية **بثلاثة أرقام** مثال : $\vec{m}$ باتجاه $030°$ $\vec{z}$ باتجاه $140°$ إذا كان قياس الزاوية ثلاث أرقام تكتب كما هي .	

أنواع المتجهات

المتجهات المتوازية

$a \parallel b$

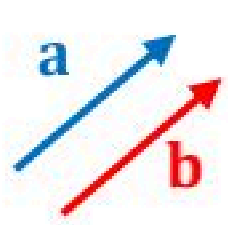
لها الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه.



المتجهات المتساوية

$a = b$

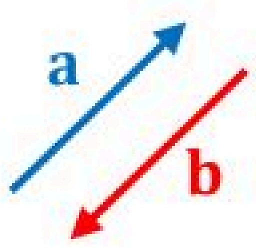
لها الاتجاه نفسه والطول نفسه .



المتجهان المتعاكسان

$a = -b$

لهما الطول نفسه واتجاهان متعاكسان.



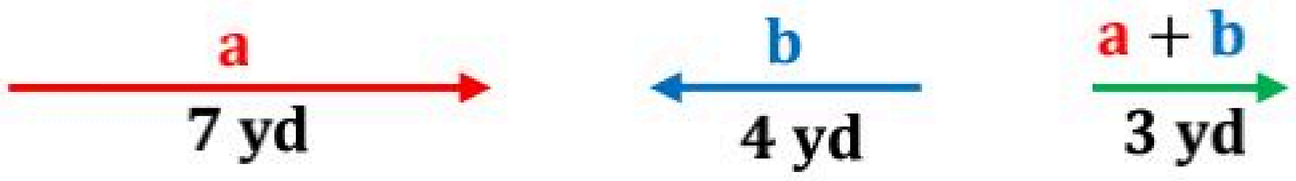
المحصلة: هي المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر .

محصلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه

هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات ، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه .

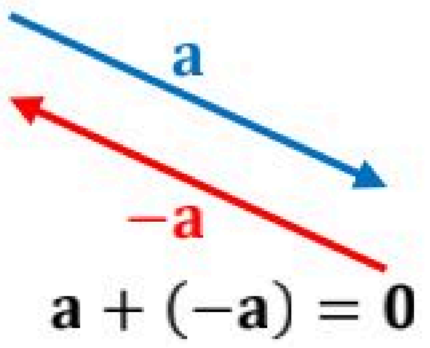
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين

هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا .



محصلة ناتج جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه

هو المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0 وطوله صفر وليس له اتجاه .

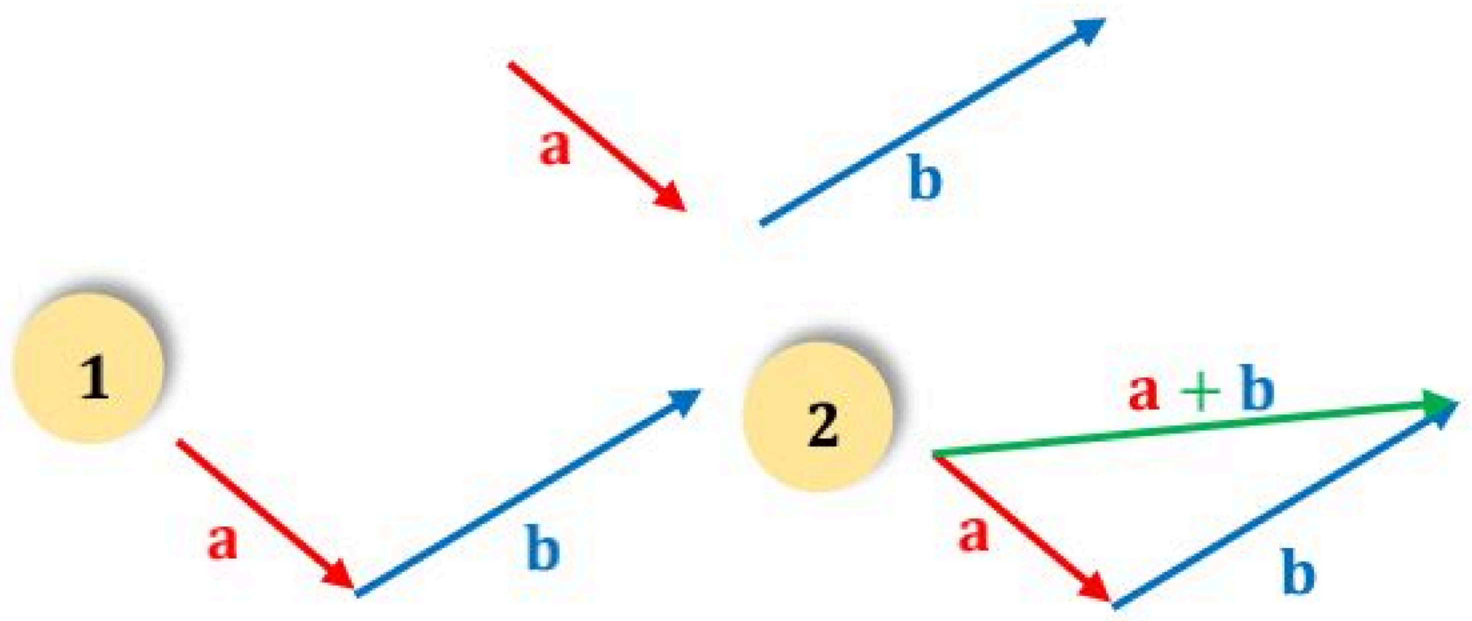


إيجاد المحصلة هندسيًا

قاعدة المثلث

طريقته:

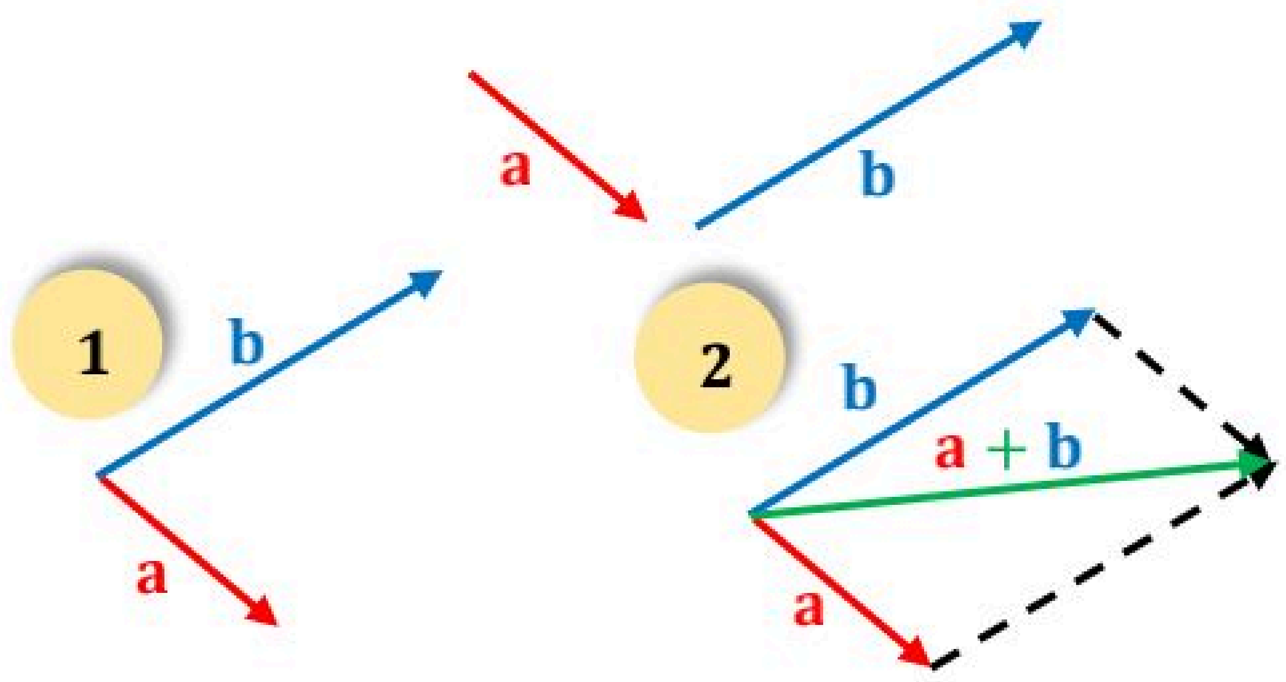
- تلتقي نقطة نهاية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- المحصلة هي المتجه المرسوم من نقطة بداية المتجه a إلى نهاية المتجه b



قاعدة متوازي الأضلاع

طريقته:

- تلتقي نقطة بداية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- نكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه a, b
- المحصلة هي المتجه الذي يمثل قطر متوازي الأضلاع الذي بدايته نقطة التقاء بداية المتجهين.



العمليات على المتجهات

$|k|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k

$|\mathbf{v}|$ طول المتجه $\mathbf{v}$

ضرب متجه في عدد حقيقي

إذا ضرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\,\mathbf{v}$ هو : $|k|\,|\mathbf{v}|$

ويتحدد اتجاهه بإشارة k

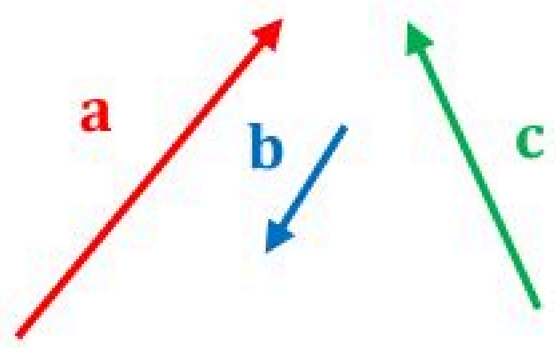
إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه .

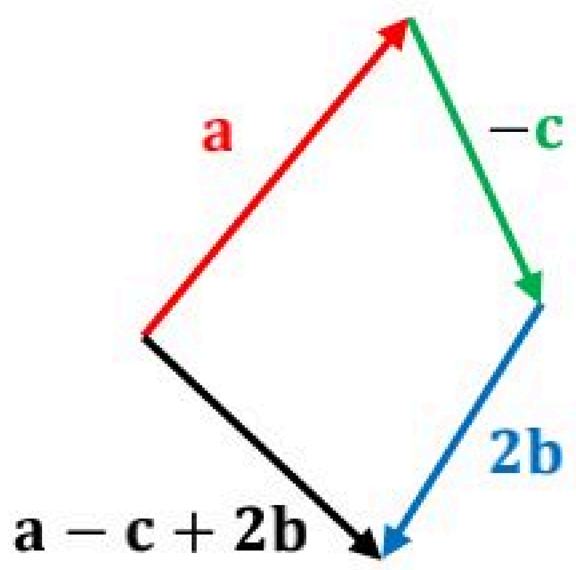
إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

مثال

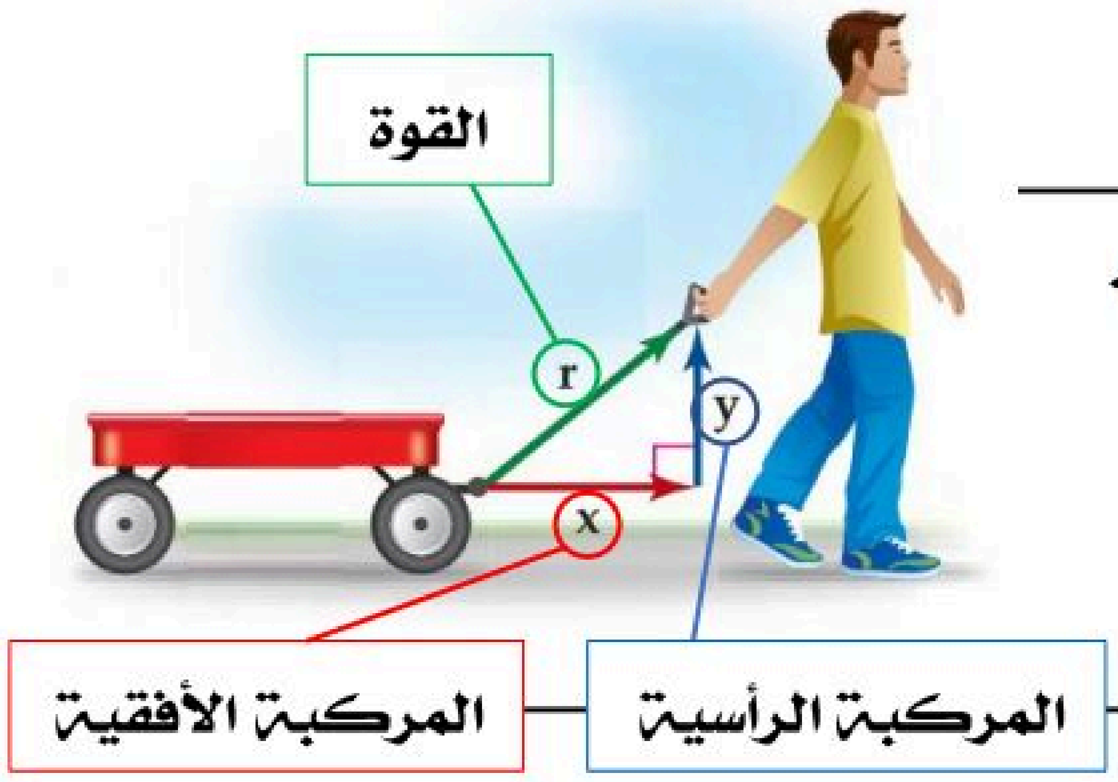
ارسم المتجه التالي :

$$\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$$





المركبات المتعامدة



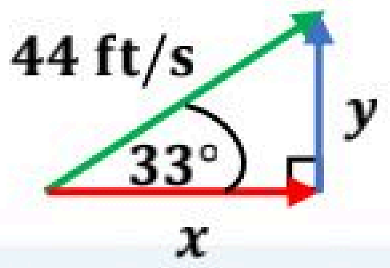
هي مركبتان متعامدتان واحدة أفقية والأخرى رأسية .

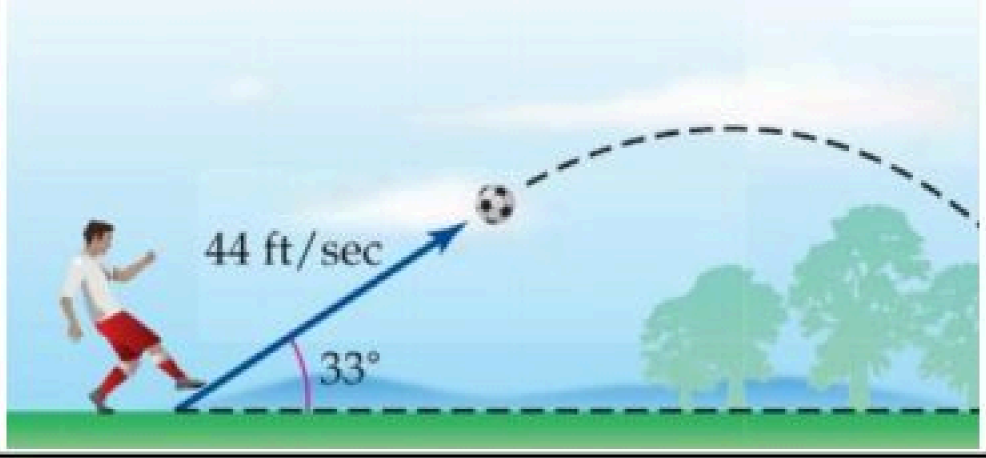
مقدار المركبة الأفقية $|x| = r\cos\theta$

مقدار المركبة الرأسية $|y| = r\sin\theta$

مثال

يركل لاعبٌ كرة قدمٍ من سطح الأرض بسرعة مقدارها $44\ ft/s$ ، وبزاوية $33°$ مع سطح الأرض.





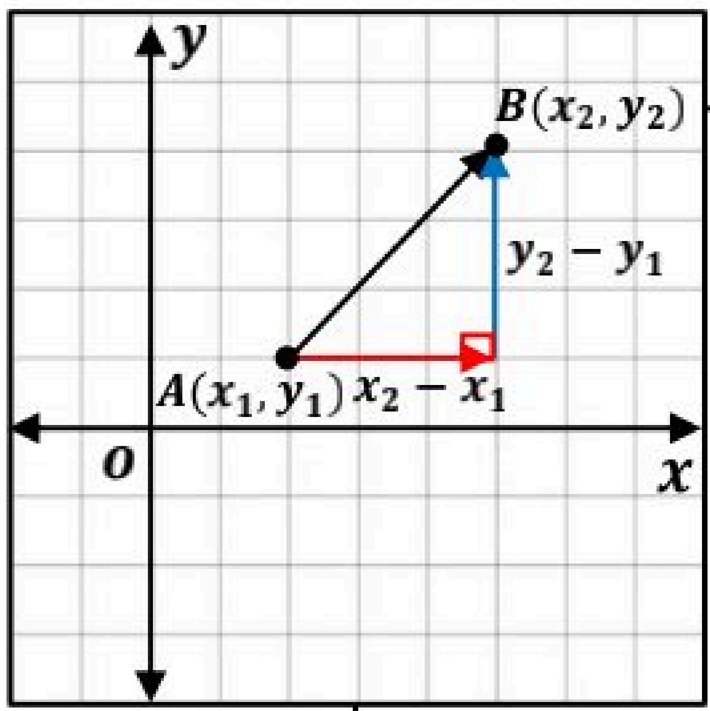
مقدار المركبة الأفقية للسرعة $|x| = r\cos\theta$

$$|x| = 44\cos 33° \approx 36.9\ ft/s$$

مقدار المركبة الرأسية للسرعة $|y| = r\sin\theta$

$$|y| = 44\sin 33° \approx 23.96\ ft/s$$

الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1)$

ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle$

مثال :

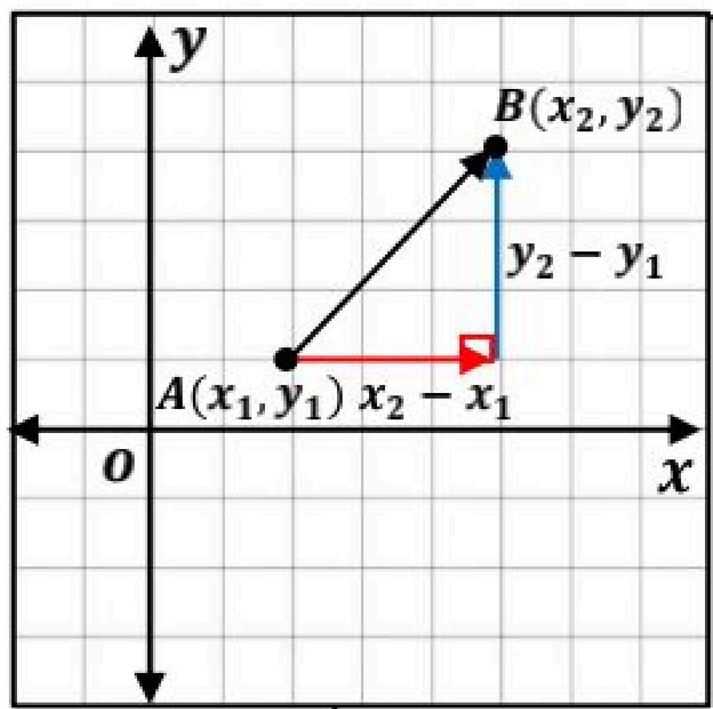
الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-2 , -7)$

ونقطة نهايته $B(6 , 1)$ هي:

$$= \langle 6 - (-2), 1 - (-7) \rangle$$

$$= \langle 8 , 8 \rangle$$

طول المتجه



طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1)$

ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال :

طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-2 , -7)$

ونقطة نهايته $B(6 , 1)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - (-7))^2}$$

$$= \sqrt{128} \approx 11.3$$

إذا كانت الصورة الإحداثية للمتجه هي : $\langle a , b \rangle$ فإن طوله $= \sqrt{a^2 + b^2}$

من مثال : الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB} = \langle 8 , 8 \rangle$ فإن طوله هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(8)^2 + (8)^2} = \sqrt{128} \approx 11.3$$

العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقياً، فإن :

جمع متجهين	طرح متجهين	ضرب متجه في عدد حقيقي
$\mathbf{a} + \mathbf{b} =$	$\mathbf{a} - \mathbf{b} =$	$k\,\mathbf{a} =$
$\langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 \rangle$	$\langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 \rangle$	$\langle k\,a_1 , k\,a_2 \rangle$

مثال

إذا كان : $\mathbf{c} = \langle -4 , 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3 , 0 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle 2 , 5 \rangle$

$$2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$$
$$= 2\langle -4 , 1 \rangle + 4\langle 2 , 5 \rangle - \langle -3 , 0 \rangle$$
$$= \langle -8 , 2 \rangle + \langle 8 , 20 \rangle + \langle 3 , 0 \rangle$$
$$= \langle 3 , 22 \rangle$$

متجه الوحدة

u

متجه طوله 1 ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$

طريقة إيجاده : قسمه المتجهة على طوله . $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

مثال

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{w} = \langle 6 , -2 \rangle$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$$
$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{|\langle 6 , -2 \rangle|}$$
$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}}$$
$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{\sqrt{40}}$$
$$= \left\langle \frac{6}{\sqrt{40}} , \frac{-2}{\sqrt{40}} \right\rangle$$

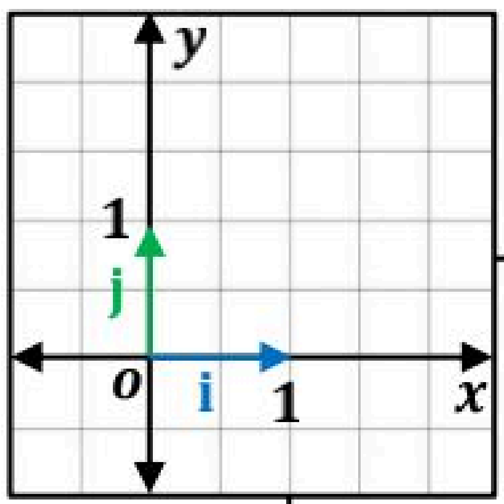
انطاق المقام

$$= \left\langle \frac{6\sqrt{40}}{40} , \frac{-2\sqrt{40}}{40} \right\rangle$$

بالتبسيط

$$= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10} , \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$$

متجها الوحدة القياسيان

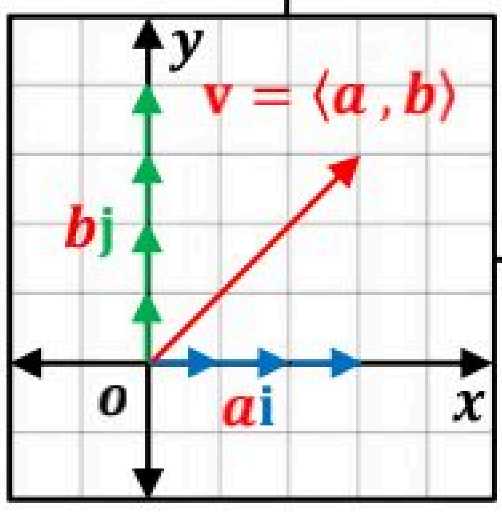


هما متجها الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x والاتجاه الموجب لمحور y

ويرمز لهما بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1 , 0 \rangle , \mathbf{j} = \langle 0 , 1 \rangle$

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a , b \rangle$

بالصورة : $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$



التوافق الخطي

ملاحظة

i عدد تخيلي

i متجه الوحدة

يقصد به كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة i , j

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ توافق خطي لمتجهي الوحدة .

مثال

اكتب المتجه $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة i , j

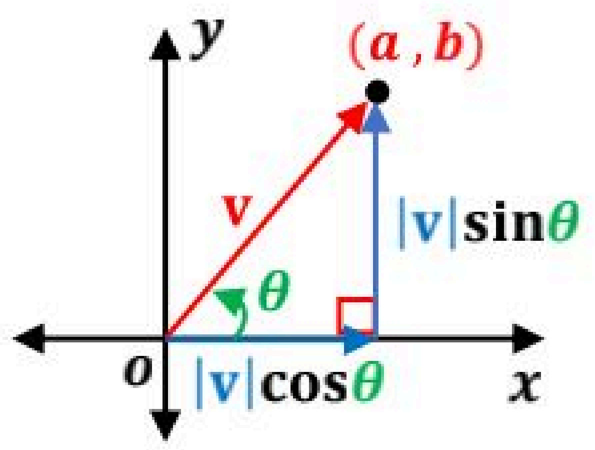
$D(-6 , 0) , E(2 , 5)$

أولًا: نكتب المتجه بالصورة الإحداثية $\overrightarrow{\mathbf{DE}} = \langle 2 - (-6), 5 - 0 \rangle = \langle 8 , 5 \rangle$

ثانيًا: نعيد كتابتها كتوافق خطي $\overrightarrow{\mathbf{DE}} = \langle 8 , 5 \rangle = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

إيجاد الصورة الإحداثية

الصورة الإحداثية لمتجه معطى طوله و زاوية اتجاهه مع الأفقي



طول المتجه $|\mathbf{v}|$ و الزاوية θ

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta , |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

ويمكن كتابتها كتوافق خطي

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| (\cos\theta)\, \mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\, \mathbf{j}$$

مثال

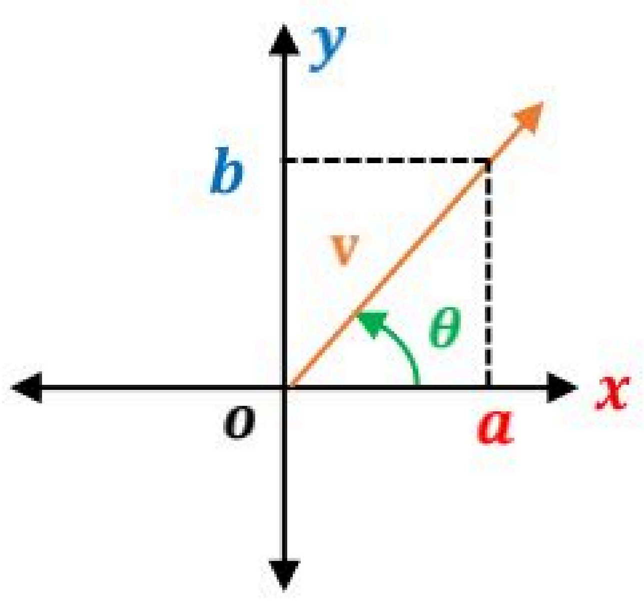
أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطى

طوله $|\mathbf{v}| = 8$ وزاوية الاتجاه مع الأفقي $\theta = 45°$

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta , |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle 8 \cos 45° , 8 \sin 45° \rangle = \langle 4\sqrt{2} , 4\sqrt{2} \rangle$$

زوايا الاتجاه للمتجهات



زاوية اتجاه المتجه مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x)

إذا كان المتجه $\mathbf{v} = \langle a , b \rangle$ وذلك بحل المعادلة : $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

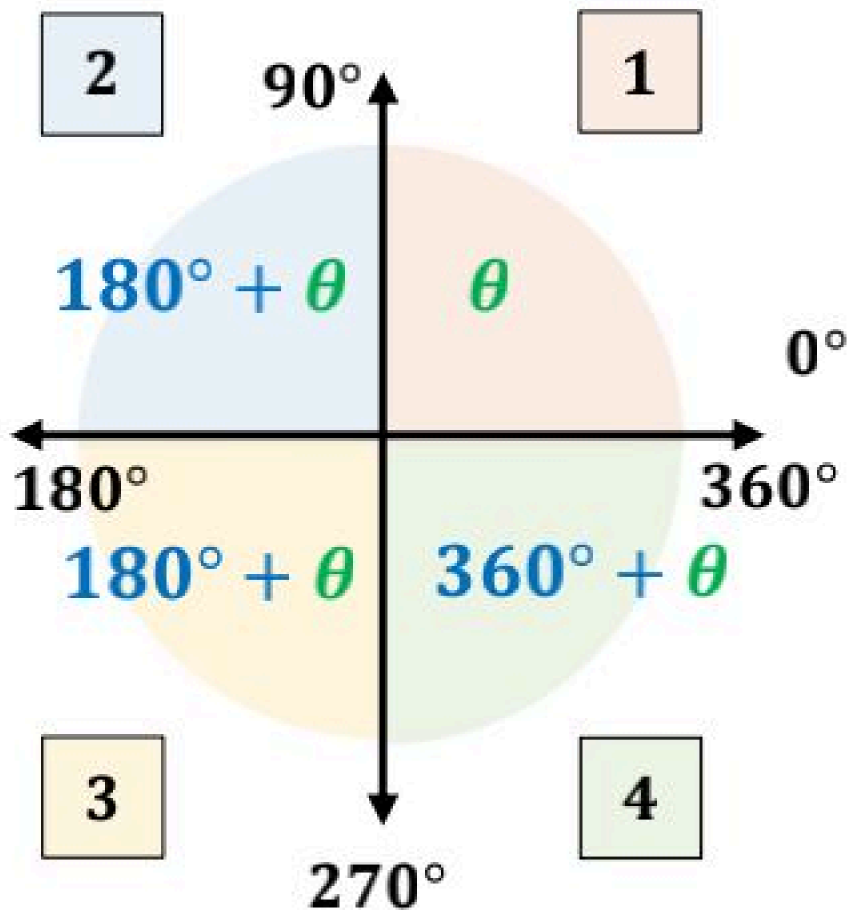
لإيجاد الزاوية

1 نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية :

- إذا كانت $\tan\theta$ موجبة فإن الزاوية θ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.
- إذا كانت $\tan\theta$ سالبة فإن الزاوية θ تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع.

لتحديد الربع بشكل أدق نستعمل قيمتي a و b حيث تؤخذ a من محور x وتؤخذ b من محور y .

2 نحدد قيمة الزاوية θ وذلك عن طريق $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$



الزاوية المطلوبة مع الاتجاه الأفقي

- إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول تبقى كما هي (موجبة)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني تكون (سالبة)
ولإيجادها نضيف 180° (لأنها ستكون أقل من 180°)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثالث تكون (موجبة)
ولإيجادها نضيف 180° (لأنها ستكون أكبر من 180°)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الرابع تكون (سالبة)
ولإيجادها نضيف 360° (لأنها ستكون أقل من 360°)

مثال

أوجد زاوية المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور x :

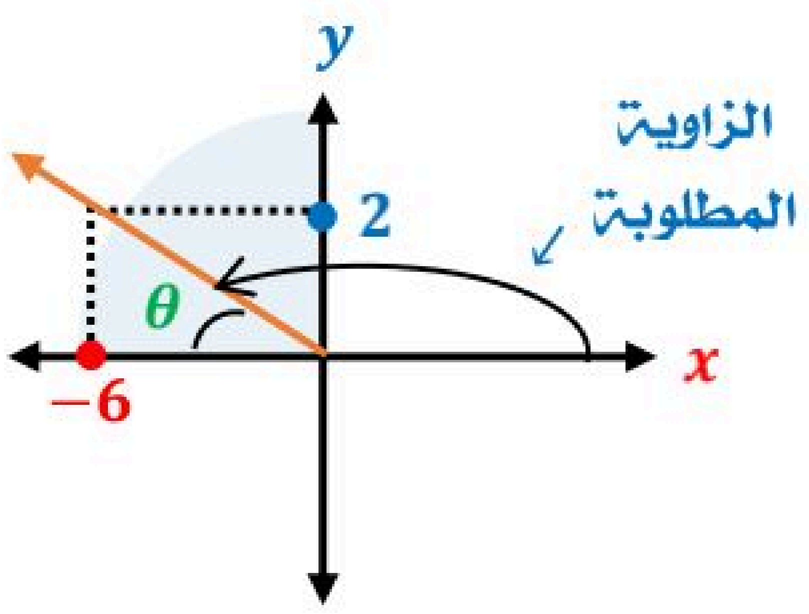
$$-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

θ تقع في الربع الثاني

$$180° + \theta$$
$$= 180 - 18.4$$
$$= 161.6°$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{-6}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{-6}$$
$$\theta = -18.4°$$

$a = -6 \ , b = 2$



تطبيقات العمليات على المتجهات

إيجاد محصلة سرعة الحركة

1. نوجد متجه السرعة الأول وغالباً يكون متجه أفقي $\mathbf{v}_1 = \langle a, 0 \rangle$
2. نوجد الصورة الإحداثية لمتجه السرعة الثاني والذي مقداره $\mathbf{v}_2$ وزاوية اتجاهه θ
   $\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2| \cos\theta, |\mathbf{v}_2| \sin\theta \rangle$
3. نوجد مجموع المتجهين $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \langle a, b \rangle$
4. نوجد محصلة السرعتين باستخدام قانون طول المتجه
   $\mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2}$

إيجاد اتجاه الحركة

1. بعد إيجاد مجموع المتجهين $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \langle a, b \rangle$
2. $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 \rangle$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ ⟵ الناتج يكون عدداً وليس متجهاً

المتجهان متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

يساوي صفر

المتجهان غير متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

لا يساوي صفر

مثال

$\mathbf{u} = \langle -2 , -3 \rangle , \mathbf{v} = \langle 9 , -6 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2(9) + (-3)(-6)$

$= 0$

$\mathbf{u} = \langle 3 , -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -5 , 1 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-5) + (-2)(1)$

$= -17$

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w}$ متجهات وكان k عدد حقيقي

1 الخاصية الإبدالية

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

2 خاصية الضرب في عدد حقيقي

$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

3 خاصية التوزيع

$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

4 خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري

$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$

5

مثال

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه $\mathbf{c} = \langle -1 , -7 \rangle$

بما أن : $|c|^2 = c \cdot c$ فإن : $|\mathbf{c}| = \sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{\langle -1, -7 \rangle \cdot \langle -1, -7 \rangle}$$

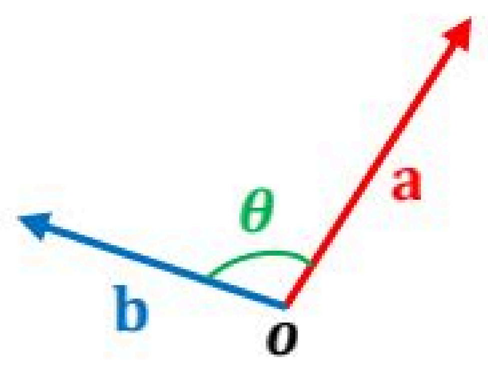
$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 7.07$$

الزاوية بين المتجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ فإن :

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$



إذا كانت الزاوية بين المتجهين $90°$ فإنهما **متعامدان** .

إذا كانت الزاوية بين المتجهين $0°$ أو $180°$ فإنهما **متوازيان** .

مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = \langle -5 , -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 4 , 4 \rangle$$

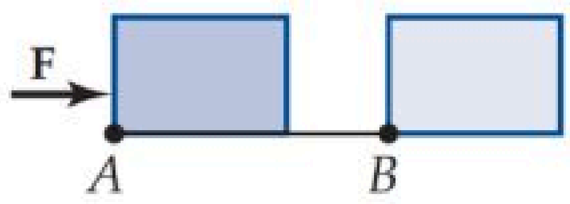
$$\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-5(4) + (-2)4}{\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}\ \sqrt{4^2 + 4^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-28}{\sqrt{29}\ \sqrt{32}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-28}{4\sqrt{58}} = 156.8°$$

الشغل

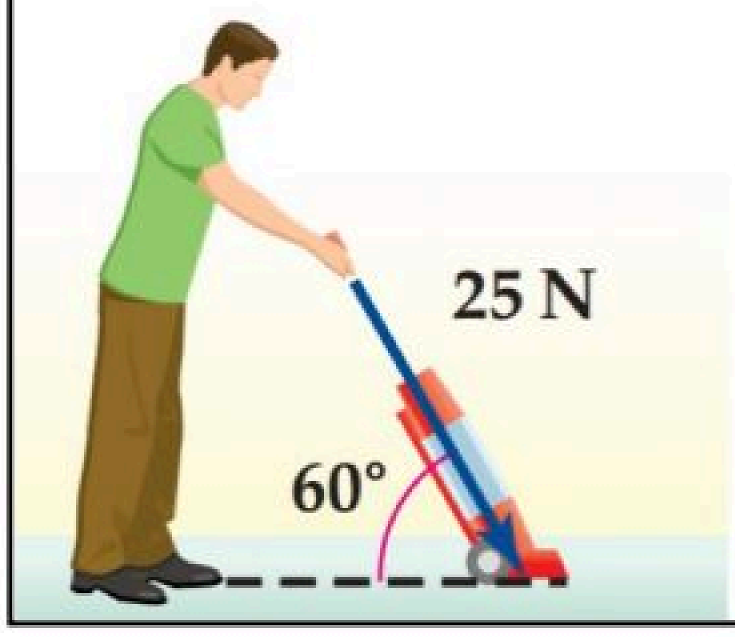


مقدار **القوة المؤثرة** في جسم لتحركيه مضروباً في **المسافة المتجهة** التي تحركها .

$$W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$$

مثال

يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N ، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي يبذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m



$$W = F.\overrightarrow{AB}$$

1 الصورة الإحداثية للقوة المتجه F بدلالة مقدار القوة ، وزاوية الاتجاه هي :

$$\mathbf{F} = \langle 25\cos 60° , 25\sin 60° \rangle$$

$$\mathbf{F} = \langle 12.5 , 21.6 \rangle$$

2 الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي :

$$\overrightarrow{AB} = \langle 6 , 0 \rangle$$

3

$$W = F.\overrightarrow{AB}$$

$$W = \langle 12.5 , 21.6 \rangle \cdot \langle 6 , 0 \rangle$$

$$W = 75 + 0 = 75\ \mathrm{J}$$

وحدات الشغل في النظام المتري
نيوتن- متر
أو جول

طريقة أخرى مختصرة

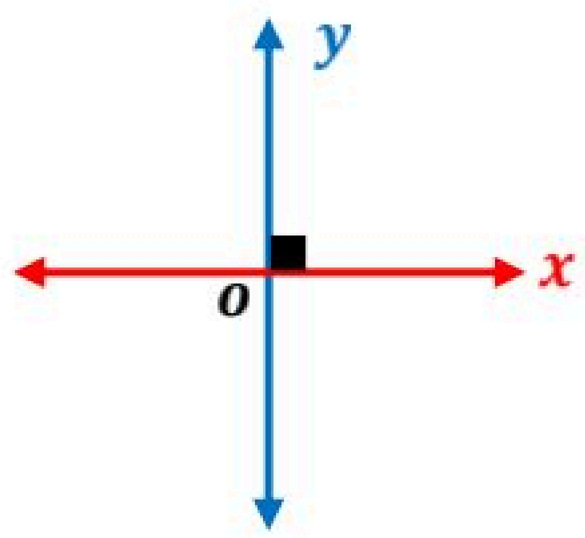
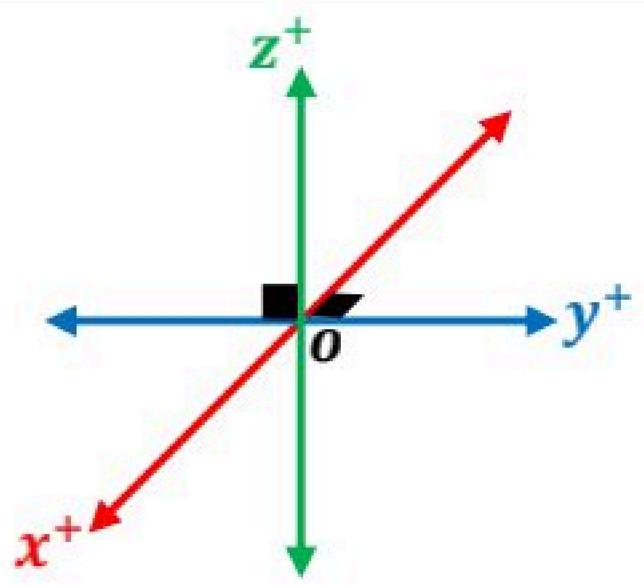
$$W = d\,.\,F.\cos\theta$$

$$d = 6\ , \qquad F = 25\ , \qquad \theta = 60°$$

$$W = 6\,(25)\cos 60°$$

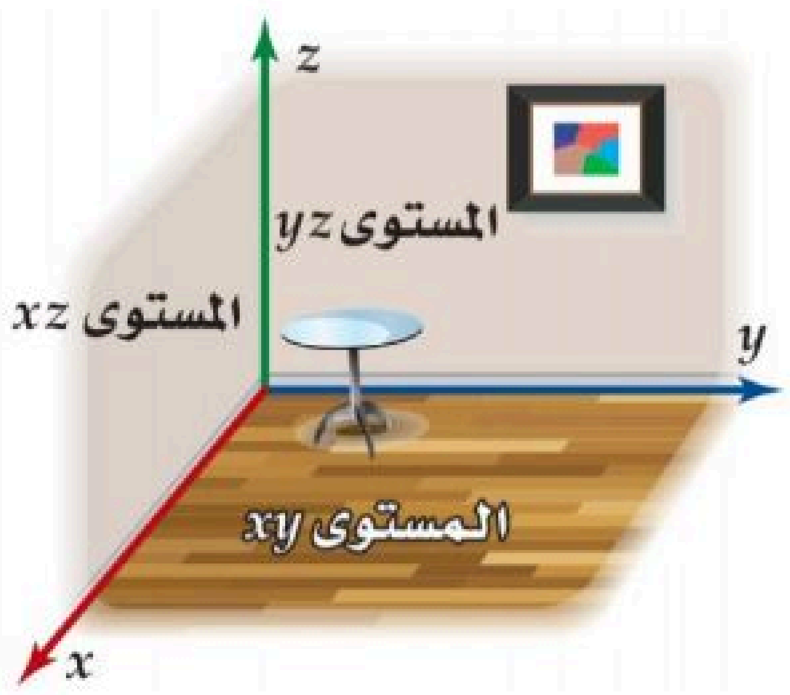
$$W = 75\ \mathrm{J}$$

الفرق بين نظام المستوى الإحداثي و نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

المستوى الإحداثي	نوع النظام	المستوى الثلاثي الأبعاد
2	عدد المحاور	3
يتشكل بواسطة خطي أعداد متعامدين هما المحور x والمحور y	المحاور	يتشكل بواسطة ثلاثة خطوط متعامدة هي المحور x والمحور y والمحور z
يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0, 0)$	نقطة التقاطع	تتقاطع في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0, 0, 0)$
مستويان تقسم المستوى إلى أربع مناطق يسمى كل منها الربع .	شكلها	ثلاث مستويات تقسم الفضاء إلى ثماني مناطق يسمى كل منها الثمن .
تحديد وتعيين نقاط في المستوى .	يسمح هذا النظام بـ	تحديد وتعيين نقاط في الفضاء.
(x, y)	الإحداثيات	(x, y, z)
	التمثيل البياني	

الثمن

الشكل المجاور يمثل الثمن في الفضاء الثلاثي الأبعاد وهو الجزء الظاهر من الغرفة .



الثلاثي المرتب

وهو شكل كتابة النقطة في الفضاء (x, y, z) حيث أنها أعداد حقيقية .

مثال : $(2, 4, -6)$

تعيين نقطة في الفضاء

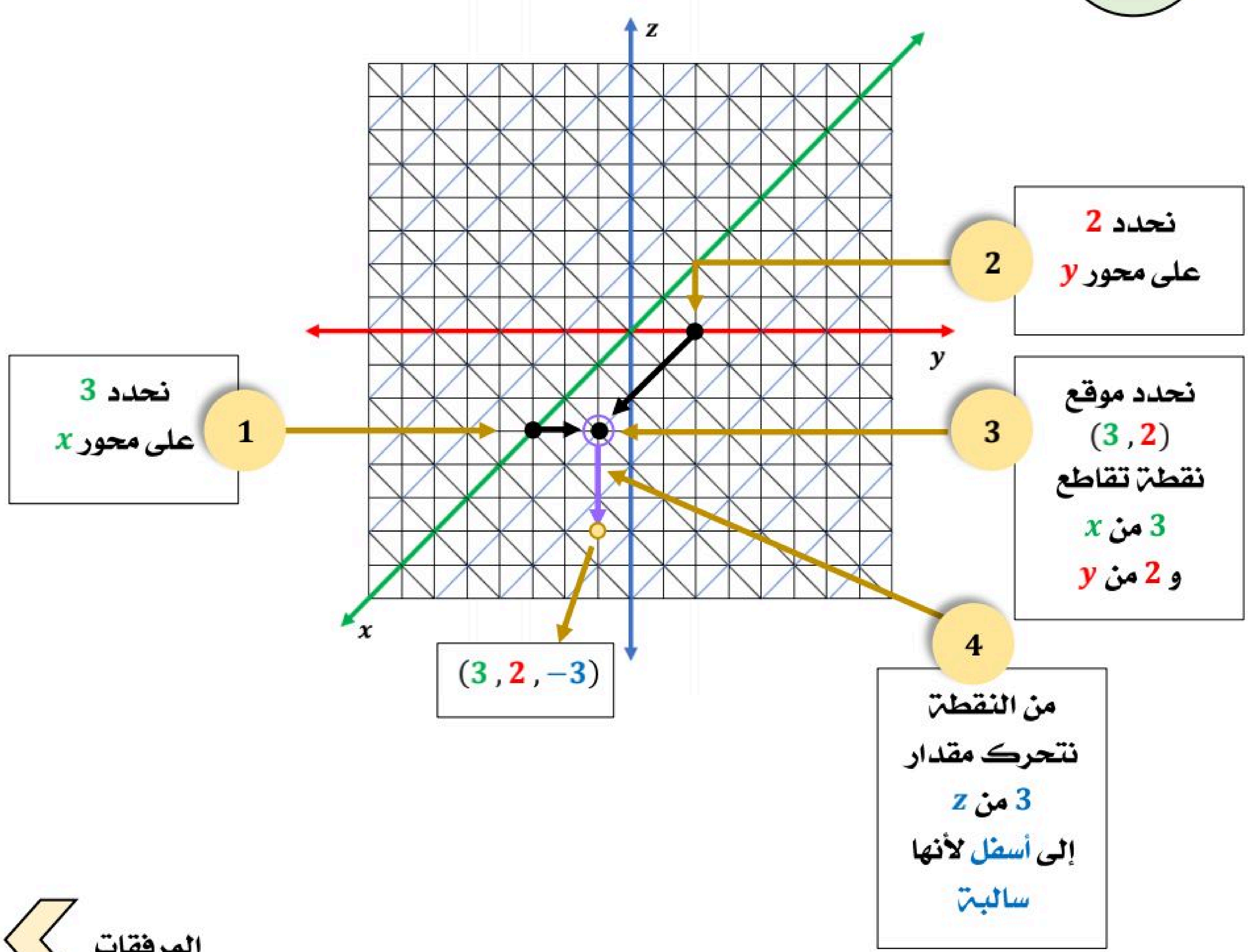
لتكن النقطة (x , y , z)

1 عين النقطة (x , y) في المستوى xy

2 تحرك لأعلى إذا كانت قيمة z موجبة أو إلى أسفل إذا كانت قيمة z سالبة باتجاه موازي لمحور z

مثال

عين النقطة $(3 , 2 , -3)$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :



المرفقات

المسافة بين نقطتين في الفضاء

يشبه قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

نقطة المنتصف في الفضاء

يشبه قانون نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$

نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

المتجهات في الفضاء

تشبه المتجهات في المستوى الإحداثي

المتجه في الوضع القياسي $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

المتجه الصفري $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية :

$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

يمكن التعبير عن المتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

تعيين متجه في الفضاء

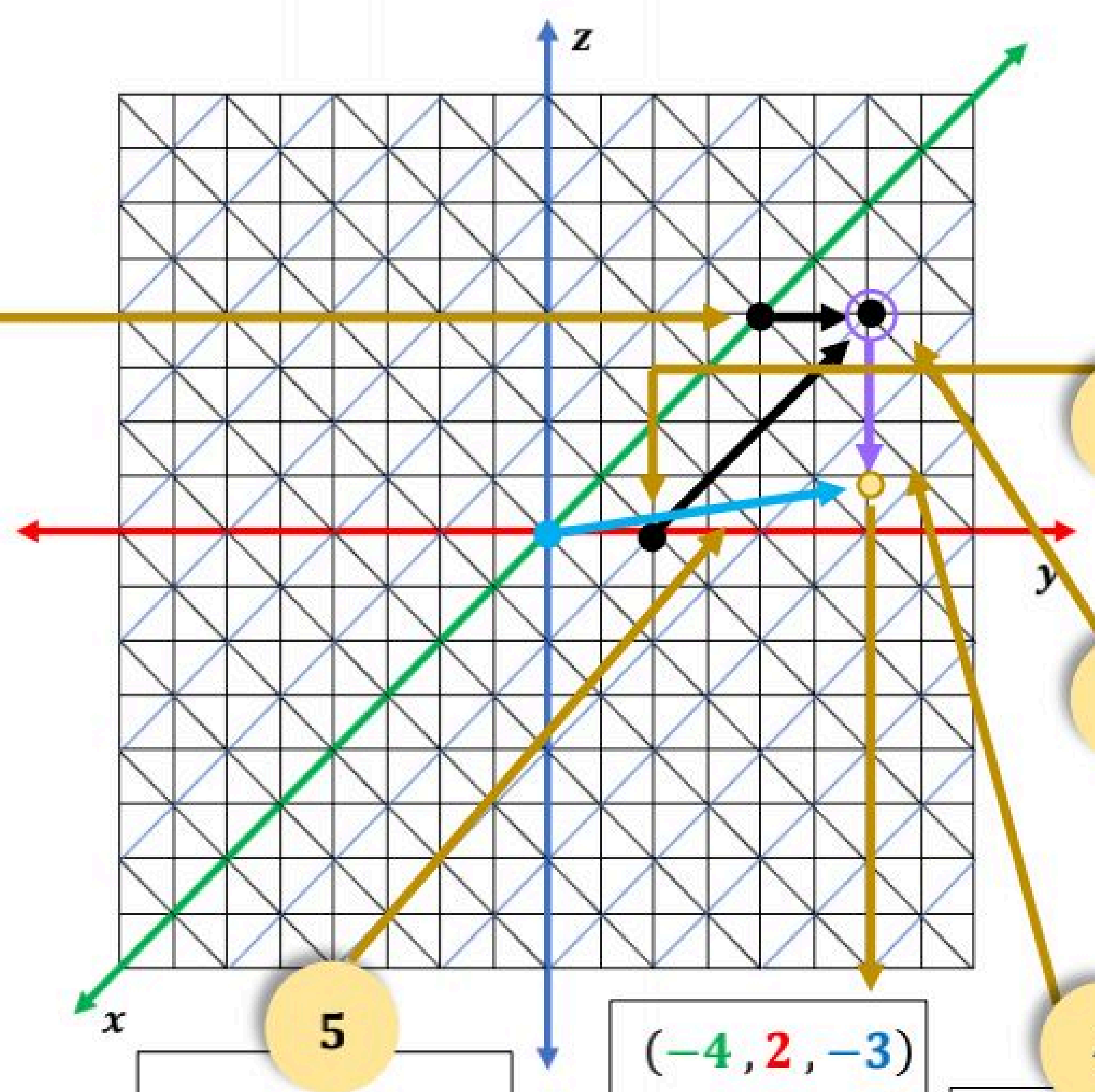
ليكن المتجه $\mathbf{v} = \langle x , y , z \rangle$

1 عين النقطة (x , y , z) بالطريقة السابقة.

2 المتجه v بيانياً وذلك بأن تكون نقطة الأصل هي نقطة البداية والنقطة (x , y , z) هي نقطة النهاية.

مثال

عين المتجه $\mathbf{u} = \langle -3 , 2 , -4 \rangle$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :



1 نحدد 4 على محور x في الاتجاه السالب

2 نحدد 2 على محور y

3 نحدد موقع $(-4 , 2)$ نقطة تقاطع -4 من x و 2 من y

4 من النقطة نتحرك مقدار 3 من z إلى أسفل لأنها سالبة

5 نرسم المتجه u من نقطة الأصل إلى النقطة $(-4 , 2 , -3)$

المرفقات

العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقيًا، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 , a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $k\,\mathbf{a} = \langle ka_1 , ka_2 , ka_3 \rangle$

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

التعبير عن المتجهات في الفضاء يشبه المستوى الإحداثي

الصورة الإحداثية لمتجه في الفضاء

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ هي:

$$\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$

طول المتجه في الفضاء

طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

متجه الوحدة في الفضاء

متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو :

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

الضرب الداخلي في الفضاء

الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \longrightarrow$$ الناتج يكون عددًا وليس متجهًا

المتجهان متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

يساوي صفر

المتجهان غير متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

لا يساوي صفر

مثال

$\mathbf{u} = \langle 3 , -5 , 4 \rangle , \mathbf{v} = \langle 5 , 7 , 5 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(5) + (-5)7 + 4(5)$

$= 0$

$\mathbf{u} = \langle 4 , -2 , -3 \rangle , \mathbf{v} = \langle 1 , 3 , -2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4(1) + (-2)3 + (-3)(-2)$

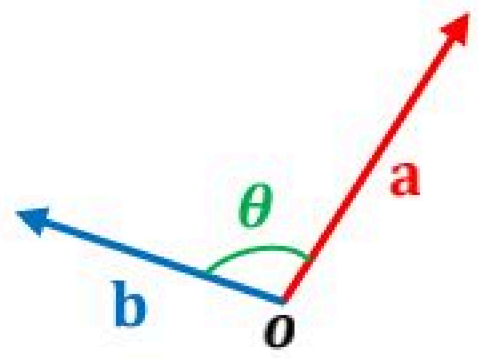
$= 4$

الزاوية بين المتجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a} , \mathbf{b}$ فإن :

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \ |\mathbf{b}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \ |\mathbf{b}|}$$



مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u} , \mathbf{v}$:

$\mathbf{u} = \langle -4 , 2 , 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 4 , 0 , 3 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \ |\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-4(4) + 2(0) + 1(3)}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2}\sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{\sqrt{21}\sqrt{25}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{5\sqrt{21}} = 124.6^\circ$$

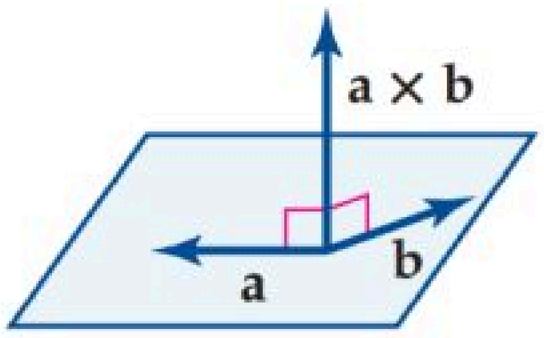
الضرب الاتجاهي

الضرب الاتجاهي لمتجهين a , b هو متجه وليس عددًا

ويرمز له بالرمز $a \times b$ (× تقرأ cross)

ويكون المتجه الناتج عموديًا على المستوى الذي يحوي المتجهين a , b

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في النظام ثلاثي الأبعاد فقط.



الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان : $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \ , \ b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a , b هو المتجه :

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

يكون الضرب الاتجاهي
$u \times v$
عموديًا على كلًا من
المتجهين
u , v
إذا كان حاصل
الضرب الداخلي لـ $u \times v$
مع كلًا من المتجهين
يساوي صفرًا.

مثال

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u , v : $u = \langle 4 , 2 , -1 \rangle , v = \langle 5 , 1 , 4 \rangle$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

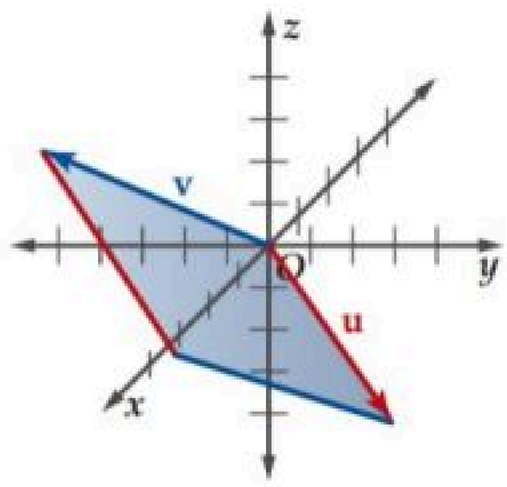
$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = (2(4) - (-1)(1)) i - (4(4) - (-1)(5)) j + (4(1) - 2(5)) k$$

$$u \times v = (8 + 1) i - (16 + 5) j + (4 - 10) k$$

$$u \times v = 9 i - 21 j - 6 k$$

تطبيقات هندسية للضرب الاتجاهي



مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران

هو **طول** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ أي مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

مثال

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه :

$\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

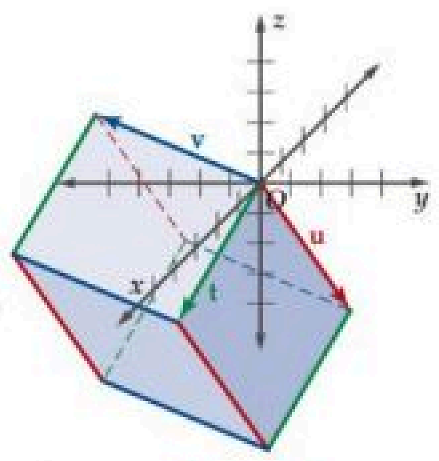
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -11\,\mathbf{i} + 18\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2}$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{545} = 23.3$$

مساحة متوازي الأضلاع تساوي 23.3 وحدة مربعة



متوازي السطوح : هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء ، له ستة أوجه ، كل منها على شكل متوازي أضلاع .

حجم متوازي السطوح : هو القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي .

إذا كان : $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$:

$$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :

$\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة .

$$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}(0) - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}(2) + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}(-5)$$

$$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -10\,(0) + 18(2) + (-10)(-5)$$

$$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 36 + 50 = 86$$

حجم متوازي السطوح يساوي 86 وحدة مكعبة