طبعة
2020

سلسلة رياضياتي

المسيطر في
التفاضل

شرح مبسط وسلس لدروس الرياضيات

للصف الثالث ثانوي

INFINITY

إعـداد /
أ.صوفـي رمضــان حمـادي

لـ أ. صوفي رمضان حمادي
7 7 0 0 6 0 7 6 6

تصميم / بلحاصل للدعاية والإعلان
770987082

بسم الله الرحمن الرحيم

نهاية واتصال الدوال المثلثية

أولاً: نهاية الدوال المثلثية :

مراجعة النهايات:

تعريف : إذا كانت $\underset{س\to أ^+}{\text{نها}}\ د(س) = \underset{س\to أ^-}{\text{نها}}\ د(س) = ل$ ،فإن $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ د(س) = ل$ ، $ل \in ح$ موجودة عند النقطة $س = أ$

مثال : أحسب : (١) $\underset{س\to ١}{\text{نها}}\sqrt{س-١}$ ، (٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ س^{٢}+٣س-٥$ ، (٣) $\underset{س\to ٣}{\text{نها}}\dfrac{س^{٢}-٩}{س-٣}$

الجواب: (١) $\underset{س\to ١^+}{\text{نها}}\sqrt{س-١} = ٠$ ، $\underset{س\to ١^-}{\text{نها}}\sqrt{س-١} =$ غير موجودة لان م.ت الدالة = [١، ∞[

إن هذه الدالة الجذرية نهايتها عن اليمين تساوي ١ وليست لها نهاية عن اليسار لأنها غير معرفة يسار العدد ١ وبالتالي الدالة ليست لها نهاية لعدم تساوي النهاية من اليمين مع النهاية من اليسار .

$\therefore \underset{س\to ١}{\text{نها}}\sqrt{س-١} =$ غير موجودة .

(٢) مجموعة تعريف الدالة = ح ، وبالتعويض المباشر تكون $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ س^{٢}+٣س-٥ = ٥$

(٣) مجموعة تعريف الدالة = ح/{٣} فهي معرفة في جوار العدد ٣، بالتعويض المباشر

$\underset{س\to ٣}{\text{نها}}\dfrac{س^{٢}-٩}{س-٣} = \dfrac{٠}{٠}$ حالة عدم تعيين. وعليه نتخلص من حالة عدم التعيين بعدة طرق وفي مثالنا بالتحليل كما يلي: $\underset{س\to ٣}{\text{نها}}\dfrac{س^{٢}-٩}{س-٣} = \underset{س\to ٣}{\text{نها}}\dfrac{(س+٣)\cancel{(س-٣)}}{\cancel{س-٣}} = \underset{س\to ٣}{\text{نها}}\ س+٣ = ٣+٣ = ٦$

تذكير:

(١) $\underset{س\to أ}{\text{نها}}\ ث = ث$ ، $\underset{س\to \pm\infty}{\text{نها}}\ ث = ث$ ، حيث ث عدد ثابت

(٢) $\underset{س\to ٠^+}{\text{نها}}\dfrac{١}{س} = \infty$ ، $\underset{س\to ٠^-}{\text{نها}}\dfrac{١}{س} = -\infty$

(٣) $\underset{س\to \infty}{\text{نها}}\ س^{ن} = \infty$

(٤) $\underset{س\to -\infty}{\text{نها}}\ س^{ن} = \begin{cases} \infty \text{ ، ن عدد زوجي } \geq ٢ \\ -\infty \text{ ، ن عدد فردي } \geq ١ \end{cases}$

(٥) $\underset{س\to \pm\infty}{\text{نها}}\dfrac{١}{س} =$ صفر

تدريبات: أحسب ما يلي:

(١) $\underset{س\to \frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}(جتا٢س - جاس)$ ، (٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\dfrac{جا\,\pi س}{س}$ ، (٣) $\underset{س\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\dfrac{ظاس}{قاس}$

الانطـــــلاقــــــة:

إن الأصل في إيجاد النهاية هو إجراء التعويض المباشر ومنه ينتج ما يلي :

١) عدد حقيقي أو $\pm\infty$ في هذه الحالة النهاية انتهت ونقبل بالناتج سواء عدد حقيقي أو $\pm\infty$.

٢) عدم تعيين وأشهرها ($\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، صفر $\times\,\infty$ ، $\infty - \infty$) وفي هذه الحالة يجب إزالة عدم التعيين باستخدام مبرهنة(١) كما سيأتي تفصيلها لاحقاً .

٣) كمية لا يمكن حسابها (جا ∞، جتا ∞ ، قا ∞ ، قتا ∞) وفي هذه الحالة نستخدم مبرهنة(٢) كما سيأتي تفصيلها لاحقاً .

مبرهنة (١): إذا كانت س مقدرة بالراديان فإن $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

ولتوضيح المبرهنة نلاحظ بالتعويض المباشر عن س = ٠ أن: $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (عدم تعيين)،
لكن الدالة معرفة في الجوار المحذوف للعدد صفر ، على النحو الموضح في الجدول الآتي عندما س ⟵ ٠ ، س ≠ ٠ .

(تنبيه:عند استخدام الآلة الحاسبة للتعويض لا تنسى وضعها على نظام الراديان)

س	١	٠,١	٠,٠١	⟵ ٠ ⟶	-٠,٠١	-٠,١	-١
$\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$	٠,٨٤١٤٧	٠,٩٩٨٣٣	٠,٩٩٩٩٨	⟵ ١ ⟶	٠,٩٩٩٩٨	٠,٩٩٨٣٣	٠,٨٤١٤٧

لذا نلاحظ من الجدول أن : $\frac{\text{جاس}}{\text{س}} \longrightarrow ١$ عندما س ⟵ ٠

نتائج: عزيزي الطالب: إن لهذه المبرهنة نتائج مهمة منها :

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\text{جاس}} = ١$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\text{ظاس}} = ١$

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ س قتا س = ١ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ س ظتا س = ١

٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا كس}}{\text{س}} = \text{ك}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا كس}}{\text{س}} = \text{ك}$ ، ك ∈ ح

٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\text{جا كس}} = \frac{1}{\text{ك}}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\text{ظا كس}} = \frac{1}{\text{ك}}$

٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{ن}\text{س}}{\text{س}^{ن}} = ١$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^{ن}\text{س}}{\text{س}^{ن}} = ١$

٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{ن}\text{كس}}{\text{س}^{ن}} = \text{ك}^{ن}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{ن}}{\text{جا}^{ن}\text{كس}} = \frac{1}{\text{ك}^{ن}}$ (وكذلك مع الظل)

٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا أس}}{\text{ظاب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{ن}\text{أس}}{\text{ظا}^{ن}\text{ب س}} = \frac{\text{أ}^{ن}}{\text{ب}^{ن}}$

ملاحظة : ممكن استنتاج النتائج السابقة بكل سهولة

إن إيجاد نهاية الدوال المثلثية وكما أسلفنا سابقاً مثلها مثل أي نهاية دالة تحل بالتعويض المباشر وإذا كان ذلك غير ممكن ننظر إلى الزاوية للنسبة المثلثية ونعوض بقيمة س التي تسعى إليها في الزاوية فإذا كانت الزاوية (∞) فإننا سنستخدم مبرهنة (٢) وسيأتي تفاصيلها لاحقاً ، وإذا كانت الزاوية (ليست ∞) فإننا نقسم النهاية إلى نوعين،نوع يحل مباشرة باستخدام مبرهنة (١) وملاحظة شروط المبرهنة (١) ومعالجة الخلل للوصول إلى المبرهنة (١) أو نتائجها . ونوع لا يمكن حله مباشرة ويتطلب منا جهد أكبر والمخطط الآتي يبين الإستراتيجية التي سنمشي عليها لإيجاد النهاية:

الزاوية

∞ نستخدم مبرهنة (٢)

ليست ∞

(لا يوجد جمع أو طرح) أو(يوجد ضرب أو قسمة) بين:
١- عدد ونسبة
٢- متغير ونسبة
٣- نسبتين
في هذه الحالة نستخدم مبرهنة(١) وملاحظة تحقق الشروط.

يوجد جمع أو طرح بين:
١- عدد ونسبة
٢- متغير ونسبة
٣- نسبتين
في هذه الحالة نستخدم مهارات والتخلص من الجمع أو الطرح والرجوع بعد ذلك للنوع السابق ومبرهنة(١) وملاحظة تحقق الشروط.

سنتطرق لكل حالة بالتفصيل وسنبدأ بالحالة الأولى من المخطط وهي :

الزاوية ليست ∞ ، ضرب أو قسمة

الحالة الأولى : الزاوية ليست ∞ ، ضرب أو قسمة

عند استخدام المبرهنة (١) علينا مراعاة ما يلي :

شروط المبرهنة (١):

١) النسبة المثلثية الجيب أو الظل.

٢) أن تكون الزاوية = صفر،عند التعويض بالقيمة التي تسعى إليها س (ليس بالضرورة س ⟵ ٠)

٣) المقدار بالزاوية نفس المقدار بالمقام

مثال توضيحي: (١) $\lim\limits_{س\to\pi} \frac{جا(س-\pi)}{(س-\pi)} = ١$ (٢) $\lim\limits_{س\to\infty} \frac{ظا\frac{١}{س}}{\frac{١}{س}} = ١$

لاحظ ان المستخدم من النسب هو الجيب أو الظل وأن الزاوية صفرية لأن الزاوية في:

(١) $س-\pi=\pi-\pi=٠$ ، وفي (٢) $\frac{١}{س} = \frac{١}{\infty} = ٠$ ،وأن المقام نفس الزاوية لذلك كان الجواب = ١

مثال ١: أحسب : (١) $\lim\limits_{س\to٠} \frac{جا(ظاس)}{س}$ (٢) $\lim\limits_{س\to١} \frac{جا(س-١)}{(س^٢-١)}$

الحل: نلاحظ في المثال أن كل من الشرط (١) و(٢) محققة ولكن توجد مشكلة في الشرط الثالث أي أن المقام لا يساوي الزاوية ، لاحظ معي كيف يتم الحل لنستخلص خلاصة في ذلك.

١) $\lim\limits_{س\to٠} \frac{جا(ظاس)}{س} = \lim\limits_{س\to٠} \frac{جا(ظاس)}{س} \times \frac{ظاس}{ظاس} = \lim\limits_{س\to٠} \left(\frac{جا(ظاس)}{ظاس} \times \frac{ظاس}{س} \right) = ١ \times ١ = ١$

٢) $\lim\limits_{س\to١} \frac{جا(س-١)}{(س^٢-١)} = \lim\limits_{س\to١} \left(\frac{جا(س-١)}{(س-١)} \times \frac{١}{(س+١)} \right) = ١ \times \frac{١}{(١+١)} = \frac{١}{٢}$

طريقة أخرى : $\lim\limits_{س\to١} \frac{جا(س-١)}{(س^٢-١)} = \lim\limits_{س\to١} \left(\frac{جا(س-١)}{(س^٢-١)} \times \frac{(س-١)}{(س-١)} \right)$

$= \lim\limits_{س\to١} \left(\frac{جا(س-١)}{(س-١)} \times \frac{(س-١)}{(س^٢-١)} \right) = ١ \times \lim\limits_{س\to١} \frac{\cancel{(س-١)}}{\cancel{(س-١)}(س+١)} = \frac{١}{(١+١)} = \frac{١}{٢}$

تنبيه: مثل $\lim\limits_{س\to١} \frac{جا(س^٢-١)}{(س-١)}$ لا تحلل الزاوية وإنما نضرب ونقسم في الزاوية

الخلاصة: في حالة أن المقام لا يساوي مكوّنات الزاوية كما في المثال السابق نعين حالتين :

١– إذا كان المقام يحتوي على مقادير قابلة للتحليل نقوم بإجراء التحليل المناسب حتى ظهور الزاوية كاملة .

٢– إذا كان المقام لا يحتوي على أي مكونات لظهور الزاوية نقوم بالضرب والقسمة في الزاوية أو جزء منها حسب الحاجة.

٣– في المثال (١) فرع (٢) نلاحظ عند الضرب في الزاوية كاملة تظهر حالة عدم تعيين أما عند التحليل للمقام تنتهي حالة عدم التعيين .

تدريب: احسب $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{س}^{٢}}{\text{ظا}(١ - \text{س})} =$ ....

....

مثال ٢: أحسب : (١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\pi\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$ ، (٢) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\pi\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$

الحل: نلاحظ أن الشرط الأول تمام حيث النسب هي جا ، ظا ولكن المشكلة في الشرط الثاني حيث أن الزاوية ليست صفرية (لا تساوي الصفر عن التعويض بما تسعى إليه س) وفي هذه الحالة سنعالجها كما يلي:

(١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\pi\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س}} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\pi - \pi\text{س})}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\pi(١ - \text{س})}{-\text{س}(١ - \text{س})} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\pi}{-\text{س}} = -\pi$

جاس=جا(π − س)
جاπ س=جا($\pi - \pi$ س)
راجع عزيزي الطالب الملحق فيما يخص المتطابقات والمحافظة على النسبة.

لاحظ أن بالمتطابقة أصبحت الزاوية صفرية ثم عالجنا الشرط الثالث مثل ما عرفنا سابقاً.

(٢) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\pi\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$ ، استخدم المتطابقة المقابلة كما يمكنك مراجعة ملحق المتطابقات المثلثية ومراجعة المحافظة على النسبة.

ظاس=ظا(π + س)
ظاπ س=ظا($\pi + \pi$ س)

عزيزي الطالب حلها بنفسك وبنفس الطريقة السابقة علماً أن الجواب = $-\pi$

مثال ٣: أحسب : (١) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{٢\text{س} - \pi}$ ، (٢) $\underset{\text{س}\to \frac{٣\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظتاس}}{\text{س} - \frac{٣\pi}{٢}}$

الحل: نلاحظ في هذا المثال أن الشرط الأول مع الثاني غير متحقق أي أن النسبة ليست جا أو ظا وبنفس الوقت الزاوية لا تساوي صفر عند التعويض المباشر وسنعالج هذه الحالة مستخدمين متطابقة كما يلي:

(١) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{٢\text{س} - \pi} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{-٢(\frac{\pi}{٢} - \text{س})} = \frac{١}{-٢} = -\frac{١}{٢}$

جتاس=جا($\frac{\pi}{٢}$ − س)

(٢) $\underset{\text{س}\to \frac{٣\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظتاس}}{\text{س} - \frac{٣\pi}{٢}} = \underset{\text{س}\to \frac{٣\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\frac{٣\pi}{٢} - \text{س})}{-١(\frac{٣\pi}{٢} - \text{س})} = -١$

ظتاس=ظا($\frac{٣\pi}{٢}$ − س)

تذكر أن التعويض المباشر في الأمثلة السابقة يعطينا حالة عدم تعيين.

يمكننا نلخص ما قمنا به في المثال (٢) والمثال (٣) في الخلاصة الآتية:

الخلاصة: إذا كانت الزاوية لا تساوي صفر عند التعويض المباشر فإننا نقوم بجعل الزاوية تساوي صفراً باستخدام متطابقات المحافظة على النسبة إذا كان الخلل في الشرط الثاني فقط . أو نستخدم متطابقة التحويل إذا كان الخلل في الشرط الأول والثاني معاً . أما بالنسبة للشرط الثالث فلا نهتم به حالياً وإنما بعد معالجة كل من الشرط الأول والشرط الثاني .

تذكير: إذا كانت الدالة كسرية كل من بسطها ومقامها كثيرة حدود وكانت س ⟵ ±∞ فإننا نميز الحالات التالية: (١) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام فإن النهاية = $\frac{\text{معامل أكبر أس للبسط}}{\text{معامل أكبر أس للمقام}}$.

(٢) إذا كانت درجة البسط < من درجة المقام فإن النهاية = صفراً .

(٣) إذا كانت درجة البسط > من درجة المقام فإن النهاية = ±∞

تدريبات: أحسب (١) $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{س^{٢} جا\frac{\pi}{س}}{س-١}$ $\boxed{\pi}$ ، (٢) $\underset{س \to -\infty}{نهـا} س^{٢} ظا\frac{١}{س}$ $\boxed{-\infty}$

....

....

....

....

....

....

الحالة الثانية : الزاوية ∞

مبرهنة (٢): إذا كانت الدالة د محدودة على الفترة (ف) المحذوفة المركز ب وكانت :

$\underset{س \to ب}{نهـا}$ تا(س)= صفراً ، فإنه يكون : $\underset{س \to ب}{نهـا}$ [د(س) × تا(س)] = صفراً

شروط المبرهنة (٢) :

١) النسبة المثلثية الجيب أو الجيب تمام.

٢) أن تكون الزاوية =±∞ عند التعويض بالقيمة التي تسعى إليها س (ليس بالضرورة س ⟵ ±∞)

ملاحظات:

(١) تستخدم هذه المبرهنة عند ظهور احد الكميات الآتية (جا ∞ ،جتا ∞ ،قا ∞ ،قتا ∞) بالتعويض المباشر.

(٢) عند استخدام هذه المبرهنة يجب تقسيم النهاية إلى حاصل ضرب نهايتين إحداهما محدودة (جا ، جتا) والأخرى نهايتها صفر .

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

مثال: احسب : (١) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، (٢) $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{قا}\frac{1}{\text{س}}}$

(٣) $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}}\ \text{س جا}\frac{1}{\text{س}}$ ، (٤) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{س}}\ \text{جاس}$

الحل: في كل من أفرع المثال يجب فصل النهايات بعملية ضرب مع تبيين النهاية المحدودة والنهاية الصفرية ثم يكون الجواب النهائي صفر حسب المبرهنة (٢).

(١) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left[\frac{1}{\text{س}} \times \text{جاس}\right] = 0$ ، نلاحظ أن $|\text{جاس}| \leqslant 1$ محدودة، و $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{س}} = 0$

(٢) $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{قا}\frac{1}{\text{س}}} = \underset{س\to 0}{\text{نهـا}}\left[\text{س} \times \text{جتا}\frac{1}{\text{س}}\right] = 0$ ، نلاحظ أن $|\text{جتا}\frac{1}{\text{س}}| \leqslant 1$ محدودة، و $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}}\ \text{س} = 0$

(٣) $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}}\ \text{س جا}\frac{1}{\text{س}} = \underset{س\to 0}{\text{نهـا}}\left[\text{س} \times \text{جا}\frac{1}{\text{س}}\right] = 0$ ، نلاحظ أن $|\text{جا}\frac{1}{\text{س}}| \leqslant 1$ محدودة، و $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}}\ \text{س} = 0$

(٤) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{س}}\ \text{جاس}$ هذه نفس رقم (١).

تدريبات: أحسب: (١) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}+1}{\text{س}^2\text{قتاس}}$ ، (٢) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س جتا}\pi\text{س}}{\text{س}^2+1}$

تدريبات للتمييز بين استخدام المبرهنة (١) والمبرهنة (٢):

أحسب: (١) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ (1-2\text{س})\ \text{جا}\frac{2}{\text{س}+1}$ $\boxed{-4}$ ، (٢) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س جا}\pi\text{س}}{\text{س}^2-1}$ $\boxed{0}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الحالة الثالثة : استخدام المهارات وطرق خاصة:

إن النظر إلى بعض المسائل نلاحظ أنها تحتاج إلى جهد أكبر لإيجادها ، ولتسهيل إيجادها وحصرها تم وضع قسم ثالث (راجع المخطط) وهذا القسم من المسائل يتميز بوجود (+) وطرح (−) مابين: (١) عدد ونسبة مثلثية. (٢) متغير ونسبة مثلثية. (٣) نسبتين مثلثتين. وللتخلص من وجود هذه في المسألة والعودة بالمسألة إلى الضرب أو القسمة ليسهل استخدام أحد المبرهنتين نستخدم مهارات منها:

١− الضرب في المرافق (١±جتاس ، جتاس ± جاس) .

٢− المتطابقات المثلثية .

٣− توزيع البسط على المقام (الحالات الجديدة يجب أن تكون حالة عدم تعيين).

٤− التحليل .

٥− توحيد الزوايا: وإليك هذا المثال البسيط لطريقة توحيد الزوايا كما نلاحظ عدم وجود الجمع أو الطرح لذلك ممكن حله بالطريقة السابقة أو مباشرة باستخدام النتائج إذ أن الناتج بيكون $\frac{٢}{١}$ = ٢ .

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٢س}}{\text{جا س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ }\cancel{\text{جاس}}\text{ جتاس}}{\cancel{\text{جاس}}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{٢ جتاس} = ٢ \times ١ = ٢$$

تنبيه: لاتختصر جا٢س مع جاس لأختلاف الزوايا

٦− القسمة على س أو س^{٢} حسب الحاجة .

إن كل من المهارات السابقة ستلاحظ وجودها بكثافة في مسائل النهايات.

سأضع بين يديك الملاحظات الآتية والتي تساعد بشكل كبير في فهم المسألة واختيار الطريقة والمتطابقة المناسبة.

ملاحظات

١) إذا وجدت في النهاية مقادير تحتوي على نسبة جتا فإننا نستخدم متطابقات مشهورة كالآتي :

* ١− جتاس = ٢جا$^{٢}\frac{\text{س}}{٢}$ ، كما يمكن استخدام الضرب في المرافق فيعطينا فرق بين مربعين .

توضيح: $\text{١− جتاس} = \frac{(\text{١− جتاس})(\text{١+جتاس})}{\text{١+جتاس}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{١+جتاس}}$

* ١− جتا٢س = ٢ جا^{٢}س

* جتاس − جتاص = −٢ جا $\frac{\text{س + ص}}{٢}$ جا $\frac{\text{س − ص}}{٢}$

٢) بعض المتطابقات المشهورة التي تستخدم في النهايات وكيفية التعامل معها :

* جا٢س = ٢ جاس جتاس ⇐ جاس = ٢ جا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$

تذكير: كل المتطابقات المهمة تم ذكرها في الملحق(أهم المتطابقات المثلثة) فعليك بفهمها وحفظها عزيزي الطالب.

* جتا٢س = جتا^{2}س − جا^{2}س

= ٢ جتا^{2}س − ١

= ١ − ٢ جا^{2}س

* ١ − جتا^{2}س = جا^{2}س

* جاس − جتاس = جاس − جا($\frac{\pi}{2}$ − س) ، في هذه الحالة نوحد النسب وفي الحالة المقابلة تم تحويل جتا إلى جا أو جتا تتحول إلى جا .

غالباً في الزاوية ($\frac{\pi}{2}$ − س) نختار السالب (−) ونادراً نختار الموجب (+) وهو ($\frac{\pi}{2}$ + س) وذلك في حالة أن س تسعى نحو سالب العدد .

∴ يكون : جاس − جتاس = جاس − جا($\frac{\pi}{2}$ − س) = ٢ جتا $\frac{(\text{س}+(\frac{\pi}{2}-\text{س}))}{2}$ جا $\frac{(\text{س}-(\frac{\pi}{2}-\text{س}))}{2}$

حالات خاصة:

إذا كان لدينا مقادير ليست متطابقات مباشرة مثل :

١) ١−٢جتاس = ٢($\frac{1}{2}$ − جتاس) ثم نبحث عن $\frac{1}{2}$ في النسب فنلاحظ أن جتا $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

∴ ١−٢جتاس = ٢($\frac{1}{2}$ − جتاس) = ٢(جتا $\frac{\pi}{3}$ − جتاس) ثم نستخدم متطابقة نفس السابق

= ٢ [−٢ جا $\frac{(\frac{\pi}{3}+\text{س})}{2}$ جا $\frac{(\frac{\pi}{3}-\text{س})}{2}$] .

٢) $\sqrt{3}$ − ٢جتاس نفس ما أجرينا في (١) نسحب عامل مشترك ٢ فيكون :

$\sqrt{3}$ − ٢جتاس = ٢ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ − جتاس) = ٢(جتا $\frac{\pi}{6}$ − جتاس) ونلاحظ أن:

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = جتا $\frac{\pi}{6}$ ونكمل المسألة مثل سابقتها . وإذا كان بدل جتا يوجد جا (الجيب) تعمل نفس السابق نحول إلى جا و جا .

٣) ١− ظاس نغيّر العدد ١ ونجعله على شكل ظا $\frac{\pi}{4}$

∴ ١− ظاس = ظا $\frac{\pi}{4}$ − ظاس ، نفك الظل ونوحد المقامات ثم المتطابقة كما مبين فما يلي:

= $\frac{\text{جا}\frac{\pi}{4}}{\text{جتا}\frac{\pi}{4}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = $\frac{\text{جا}\frac{\pi}{4}\text{ جتاس} - \text{جتا}\frac{\pi}{4}\text{ جاس}}{\text{جتا}\frac{\pi}{4}\text{ جتاس}}$

= $\frac{\text{جا}(\frac{\pi}{4}-\text{س})}{\text{جتا}\frac{\pi}{4}\text{ جتاس}}$

تخلصنا في هذه الحالة من (−) بين عدد ونسبة ونهاية المسألة تكون جا($\frac{\pi}{4}$ −س) وهنا عليك عزيز الطالب جعل المقام نفس الزاوية لاستخدام المبرهنة ١.

٤) ١− $\sqrt{3}$ ظاس = $\sqrt{3}$ ($\frac{1}{\sqrt{3}}$ − ظاس) = $\sqrt{3}$ (ظا $\frac{\pi}{6}$ − ظاس) ثم نفك الظل وبنفس ماسبق .

تدريب: جاس − $\sqrt{3}$ جتاس ، عندما تأتيك مثل هذه المسائل حاول تتعامل مع هذا التدريب مع نفسك دون النظر إلى الإجابة ، وحاول تستفيد من الإجراءات والخطوات والأفكار في الحالات الخاصة وما قبلها، وبأن تخرج بهذا المقدار إلى متطابقة معروفة .

ممكن تستعين بالأفكار التالية إذا لم تتوصل إلى حل :

الفكرة الأولى : بما أن $\sqrt{3}$ = ظا $\frac{\pi}{3}$ ، ∴ يكون جاس− $\sqrt{3}$ جتاس = جاس − ظا $\frac{\pi}{3}$ جتاس ، ثم نفك الظل ونوحد المقامات وستجد متطابقة ونكمل بنفس ماسبق .

الفكرة الثانية : أخذ عامل مشترك ٢ فيكون ٢($\frac{1}{2}$ جاس − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جتاس) فنحول $\frac{1}{2}$ = جتا $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = جا $\frac{\pi}{3}$ فيكون: ٢($\frac{1}{2}$ جاس − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جتاس) = ٢(جتا $\frac{\pi}{3}$ جاس − جا $\frac{\pi}{3}$ جتاس)

= ٢ جا(س− $\frac{\pi}{3}$)

استخدمنا في الأخير متطابقة ويجب التركيز على الزاوية الأولى والزاوية الثانية

الخلاصة:

يمكن التخلص من نسبة جتا في حالتين هما :

أولاً : إذا كانت جتا قيمتها = صفر وهنا نستخدم متطابقة التحويل : جتاس = جا ($\frac{\pi}{2}$ ± س) .

ثانياً : إذا كانت جتا قيتها ≠ صفر ولكنها ساهمت في جعل البسط أو المقام = صفر فهنا علينا التعامل مع المقدار الذي قيمته صفر كمقدار واحد باستخدام متطابقات مناسبة أو التعامل كما في الحالات التي تم شرحها سابقاً.

ثالثاً :إذا لم تساهم الـ جتا في جعل البسط = صفر (أي إذا أزلناها فإن البسط يبقى صفر) كما في هذه النهاية: $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جاس جتاس}}{س-\pi}$ ،ففي هذه الحالة تترك جتا إلى التعويض المباشر ونهتم فقط بـ جاس

عزيزي الطالب ندرج لك فيما يلي أهم النهايات الدارجة وطريقة حلها بالإضافة إلى بعض النهايات الوزارية للسنوات الأخيرة وأيضاً حلاً وافياً لتمارين الكتاب المدرسي للصف الثالث الثانوي القسم العلمي . كما يمكنك عزيزي الطالب الإطلاع على مراجع قامت بحل العديد من النهايات للتعرف على أفكارها المختلفة والتي لا تخلو فيما أعطي لك بهذا المرجع من طرق لتسهيل اختيار الطريقة أو المتطابقة المناسبة والتوصل للجواب .

مثال: احسب: (١) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا}س}{س\,\text{جا}س}$ ،(٢) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}٥س-\text{جتا}٣س}{س^{٢}}$ ، (٣) $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٣\text{جا}^{٢}س}{١-\text{جتا}س}$

الحل: يلاحظ عزيزي الطالب أن هناك فرق بين هذا المثال والأمثلة السابقة وهو وجود (+) أو (−) ما بين عدد ونسبة أو متغير ونسبة أو نسبتين ، لذلك نستخدم المهارات السابقة والرجوع بالمسألة إلى إحدى المبرهنتين في الحل.

(١) ١− جتاس متطابقة مشهورة جداً وكثيرا ما تأتي في مسائل النهايات وممكن استخدام المتطابقة المساوية لها أو الضرب في المرافق لمعالجتها .

$$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا}س}{س\,\text{جا}س} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا}س}{س\,\text{جا}س} \times \frac{١+\text{جتا}س}{١+\text{جتا}س} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا}^{٢}س}{س\,\text{جا}س(١+\text{جتا}س)}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{\cancel{٢}}س}{س\,\cancel{\text{جا}س}(١+\text{جتا}س)} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س}{س} \times \frac{١}{١+\text{جتا}س} = ١ \times \frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢}$$

حل آخر:

$$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{جتا}س}{س\,\text{جا}س} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{٢}\text{جا}^{\cancel{٢}}\frac{س}{٢}}{س\times\cancel{٢}\cancel{\text{جا}\frac{س}{٢}}\times\text{جتا}\frac{س}{٢}} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\frac{س}{٢}}{س} \times \frac{١}{\text{جتا}\frac{س}{٢}} \times \frac{\frac{س}{٢}}{\frac{س}{٢}}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\frac{س}{٢}}{\frac{س}{٢}} \times \frac{١}{\text{جتا}\frac{س}{٢}} \times \frac{\frac{\cancel{س}}{٢}}{\cancel{س}} = ١ \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

(٢) هنا النسب المثلثية متشابهة لذلك نستخدم متطابقة ولو كانت مختلفة نضرب في المرافق :

$$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}٥س-\text{جتا}٣س}{س^{٢}} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢(\text{جا}\frac{٥س+٣س}{٢} \times \text{جا}\frac{٥س-٣س}{٢})}{س^{٢}}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢\text{جا}٤س \times \text{جا}س}{س \times س} = -٢ \times ٤ \times ١ = -٨$$

(٣) وهي تمرين من الكتاب اخترتها لاحتوائها على أكثر من طريقة لحلها فأوردتها هنا :

$$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٣\text{جا}^{٢}س}{١-\text{جتا}س} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{١-\text{جتا}س} + \frac{٣\text{جا}^{٢}س}{١-\text{جتا}س}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤\times\frac{س^{٢}}{٤}}{٢\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}} + \frac{٣\times[٢\text{جا}\frac{س}{٢}\times\text{جتا}\frac{س}{٢}]^{٢}}{٢\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}$$

$$= ٢ + \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\times\overset{٢}{\cancel{٤}}\cancel{\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}\times\text{جتا}^{٢}\frac{س}{٢}}{\cancel{٢}\cancel{\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}} = ٢+٣\times٢ = ٢+٦ = ٨$$

> في الحل الأول استخدمنا التوزيع ثم متطابقات لنتمكن من استخدام المبرهنة١ لجعل المقام نفس الزاوية + متطابقة أخرى لتوحيد الزوايا والاختصار.
> وفي الحل الآخر استخدمنا الفصل بين القوى + الاستفادة من متطابقة آخرى في الحل.

حل آخر:

$$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٣\text{جا}^{٢}س}{١-\text{جتا}س} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{١-\text{جتا}س} + \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{جا}^{٢}س}{١-\text{جتا}س}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{٢}\times\frac{س}{٢}}{\cancel{٢}\text{جا}\frac{س}{٢}} \times \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\times\frac{س}{٢}}{\text{جا}\frac{س}{٢}} + \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\times(١-\text{جتا}^{٢}س)}{١-\text{جتا}س}$$

$$= ٢ + \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\times\cancel{(١-\text{جتا}س)}(١+\text{جتا}س)}{\cancel{١-\text{جتا}س}} = ٢ + ٣\times٢ = ٢+٦ = ٨$$

تمارين الكتاب المدرسي للصف الثالث صـ ١٥٨

أحسب نهايات الدوال التالية عندما يسعى متغيرها نحو القيمة المرافقة، علماً بأنه مقدر بالراديان:

١) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}} = 2$ ، (٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{ظا}3\text{س}}{\text{جا}5\text{س}} = \dfrac{3}{5}$

(٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{س}^2\text{قتا}5\text{س}^2 = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س}^2}{\text{جا}5\text{س}^2} = \dfrac{1}{5}$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}^2 5\text{س}}{\text{س ظا}3\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}^2 5\text{س}}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\text{ظا}3\text{س}} \times \dfrac{\text{س}}{\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا}^2 5\text{س}}{\text{س}^2} \times \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س}}{\text{ظا}3\text{س}} = \dfrac{25}{3}$

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1-\text{جتا}^3\text{س}}{\text{جاس}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{(1-\text{جتاس})(1+\text{جتاس}+\text{جتا}^2\text{س})}{\text{جاس}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\cancel{2}\,\text{جا}^{\cancel{2}}\frac{\text{س}}{2}\,(1+\text{جتاس}+\text{جتا}^2\text{س})}{\cancel{2\,\text{جا}\frac{\text{س}}{2}}\;\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}} = \dfrac{\text{جا}\frac{0}{2}\,(1+\text{جتا}\,0+\text{جتا}^2 0)}{\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}} = \dfrac{0\times(1+1+1)}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

٦) تم حلها سابقاً كمثال .

٧) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}}}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\sqrt{2\text{جا}^2\text{س}}}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\sqrt{2}\,|\text{جاس}|}{\text{س}}$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to 0^+} \dfrac{\sqrt{2}\,\text{جاس}}{\text{س}} = \sqrt{2}$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to 0^-} \dfrac{-\sqrt{2}\,\text{جاس}}{\text{س}} = -\sqrt{2}$

الأعداد جوار الصفر من اليسار أعداد سالبة و جا(−س)= − جاس

٨) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} (\text{س}+1)\,\text{جتا}\dfrac{1}{\text{س}+1} = (\infty+1)\,\text{جتا}\,0 = \infty \times 1 = \infty$

تعويض مباشر

٩) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{جا}\pi\text{س}}{\text{س}^2-1} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{جا}(\pi-\pi\text{س})}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{جا}\pi(1-\text{س})}{-(1-\text{س})} \times \dfrac{1}{\text{س}+1}$

$= -\pi \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

١٠) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}-1}{\text{جا}\pi(\text{س}^2-1)} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}-1}{\text{جا}\pi(\text{س}^2-1)} \times \dfrac{\text{س}^2-1}{\text{س}^2-1}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}^2-1}{\text{جا}\pi(\text{س}^2-1)} \times \dfrac{\text{س}-1}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\pi}$.

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

$$11)\ \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{2\text{س}-\pi} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\text{س})}{-2(\frac{\pi}{2}-\text{س})} = -\frac{1}{2}$$

$$12)\ \text{نهـا}_{\text{س}\to 3} (\text{س}^2-2\text{س}-3)\ \text{ظا}\frac{\pi}{2}\text{س} = \text{نهـا}_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س}-3)(\text{س}+1)}{\text{ظتا}\frac{\pi}{2}\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to 3} \frac{-(3-\text{س})(\text{س}+1)}{\text{ظا}(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\text{س})}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to 3} \frac{-(3-\text{س})(\text{س}+1)}{\text{ظا}\frac{\pi}{2}(3-\text{س})} = \frac{-1}{\frac{\pi}{2}} \times (3+1) = \frac{-2}{\pi} \times 4 = \frac{-8}{\pi}$$

$$13)\ \text{نهـا}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س}-2} = \text{نهـا}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{\text{س}})}{\text{س}-2} = \text{نهـا}_{\text{س}\to 2} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{2}(1-\frac{2}{\text{س}})}{\text{س}(1-\frac{2}{\text{س}})} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$14)\ \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{1+2\text{جتا}2\text{س}}{4\text{جا}^2\text{س}-3} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{1+2(1-2\text{جا}^2\text{س})}{4\text{جا}^2\text{س}-3} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{1+2-4\text{جا}^2\text{س}}{4\text{جا}^2\text{س}-3}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{3-4\text{جا}^2\text{س}}}{-\cancel{(3-4\text{جا}^2\text{س})}} = -1$$

$$15)\ \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} (3\text{س}-1)\ \text{جا}\frac{\pi}{\text{س}-2} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} (3\text{س}-1)\ \text{جا}\frac{\pi}{\text{س}-2} \times \frac{\frac{\pi}{\text{س}-2}}{\frac{\pi}{\text{س}-2}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\pi(3\text{س}-1)}{\text{س}-2} \times \frac{\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}-2}}{\frac{\pi}{\text{س}-2}} = 3\pi \times 1 = 3\pi$$

$$16)\ \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{جا}(\text{س}-\frac{\pi}{3})}{1-2\text{جتاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\text{جا}(\frac{\text{س}-\frac{\pi}{3}}{2})\ \text{جتا}(\frac{\text{س}-\frac{\pi}{3}}{2})}{2(\frac{1}{2}-\text{جتاس})}$$

$$\boxed{\text{جاس} = 2\text{جا}\frac{\text{س}}{2}\ \text{جتا}\frac{\text{س}}{2}}$$

$$\boxed{\text{جتاس} - \text{جتاص} = -2\text{جا}\frac{\text{س}+\text{ص}}{2} \times \text{جا}\frac{\text{س}-\text{ص}}{2}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{2}\text{جا}(\frac{\text{س}-\frac{\pi}{3}}{2})\ \text{جتا}(\frac{\text{س}-\frac{\pi}{3}}{2})}{\cancel{2}(\text{جتا}\frac{\pi}{3}-\text{جتاس})}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{جا}(\frac{\text{س}-\frac{\pi}{3}}{2})\ \text{جتا}(\frac{\text{س}-\frac{\pi}{3}}{2})}{-2\text{جا}(\frac{\text{س}+\frac{\pi}{3}}{2})\ \text{جا}(\frac{\text{س}-\frac{\pi}{3}}{2})} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{-}\cancel{\text{جا}(\frac{\frac{\pi}{3}-\text{س}}{2})}\ \text{جتا}(\frac{\text{س}-\frac{\pi}{3}}{2})}{\cancel{-}2\text{جا}(\frac{\text{س}+\frac{\pi}{3}}{2})\ \cancel{\text{جا}(\frac{\frac{\pi}{3}-\text{س}}{2})}}$$

$$= \frac{\text{جتا}(\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}{2})}{2\text{جا}(\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}}{2})} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل آخر:

$$\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}(س-\frac{\pi}{3})}{2(\frac{1}{2}-\text{جتا}س)}=\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}(س-\frac{\pi}{3})}{2(\text{جتا}\frac{\pi}{3}-\text{جتا}س)}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}(س-\frac{\pi}{3})}{2\left[-2\,\text{جا}(\frac{\frac{\pi}{3}+س}{2})\,\text{جا}(\frac{\frac{\pi}{3}-س}{2})\right]}=\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}(س-\frac{\pi}{3})}{-4\left[\text{جا}(\frac{\pi}{6}+\frac{س}{2})\,\text{جا}(\frac{\pi}{6}-\frac{س}{2})\right]}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}(س-\frac{\pi}{3})}{-4}\times\frac{1}{-\text{جا}\frac{1}{2}(س-\frac{\pi}{3})}\times\frac{(س-\frac{\pi}{3})}{(س-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\text{جا}(\frac{\pi}{6}+\frac{س}{2})}=-\frac{1}{4}\times-2\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

١٧) $\underset{س\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}}\ \frac{2\,\text{جتا}^2\frac{س}{2}-\text{جا}س}{س-\frac{\pi}{2}}=\underset{س\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}}\ \frac{2\,\text{جتا}^2\frac{س}{2}-2\,\text{جا}\frac{س}{2}\,\text{جتا}\frac{س}{2}}{س-\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\text{جا}س=2\,\text{جا}\frac{س}{2}\,\text{جتا}\frac{س}{2}}$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}}\ \frac{2\,\text{جتا}\frac{س}{2}\left[\text{جتا}\frac{س}{2}-\text{جا}\frac{س}{2}\right]}{س-\frac{\pi}{2}}$$

$\text{جتا}س=\text{جا}(\frac{\pi}{2}-س)$

$\text{جتا}\frac{س}{2}=\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{س}{2})$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}}\ \frac{2\,\text{جتا}\frac{س}{2}\left[\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{س}{2})-\text{جا}\frac{س}{2}\right]}{س-\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{\text{جا}س-\text{جا}ص=2\,\text{جتا}\frac{س+ص}{2}\times\text{جا}\frac{س-ص}{2}}$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}}\ 2\,\text{جتا}\frac{س}{2}\times\frac{2\,\text{جتا}\frac{\pi}{4}\,\text{جا}(\frac{\pi}{4}-\frac{س}{2})}{س-\frac{\pi}{2}}=\underset{س\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}}\ 2\,\text{جتا}\frac{س}{2}\times2\,\text{جتا}\frac{\pi}{4}\times\frac{\text{جا}-\frac{1}{2}(س-\frac{\pi}{2})}{س-\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times-\frac{1}{2}=-1$$

١٨) $\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا}3س+\text{ظتا}س}{4س-\pi}=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{\text{جا}3س}{\text{جتا}3س}+\frac{\text{جتا}س}{\text{جا}س}}{4س-\pi}=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{\text{جا}س\,\text{جا}3س+\text{جتا}س\,\text{جتا}3س}{\text{جتا}3س\,\text{جا}س}}{4س-\pi}$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جتا}(3س-س)}{\text{جتا}3س\,\text{جا}س\,(4س-\pi)}$$

$\boxed{\text{جتا}(س-ص)=\text{جتا}س\,\text{جتا}ص+\text{جا}س\,\text{جا}ص}$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{جتا}3س\,\text{جا}س}\times\frac{\text{جتا}2س}{(4س-\pi)}=\frac{1}{\text{جتا}\frac{3\pi}{4}\,\text{جا}\frac{\pi}{4}}\times\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-2س)}{-2(\frac{\pi}{2}-2س)}$$

$$=-\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times-\frac{1}{2}=1$$

١٩) $\underset{س\to\pi}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}(\pi\,\text{جتا}س)}{(س-\pi)^2}=\underset{س\to\pi}{\text{نهـا}}\ \frac{-\text{جا}(\pi+\pi\,\text{جتا}س)}{(س-\pi)^2}\times\frac{\pi+\pi\,\text{جتا}س}{\pi+\pi\,\text{جتا}س}$

$$=-1\times\underset{س\to\pi}{\text{نهـا}}\ \frac{\pi(1+\text{جتا}س)}{(س-\pi)^2}=-1\times\underset{س\to\pi}{\text{نهـا}}\ \frac{\pi\times2\,\text{جتا}^2\frac{س}{2}}{(س-\pi)^2}$$

$\boxed{2\,\text{جتا}^2\frac{س}{2}=1+\text{جتا}س}$

$$=-2\pi\times\underset{س\to\pi}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}^2(\frac{\pi}{2}-\frac{س}{2})}{(س-\pi)^2}=-2\pi\times\underset{س\to\pi}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}^2-\frac{1}{2}(س-\pi)}{(س-\pi)^2}$$

$\boxed{\text{جتا}\frac{س}{2}=\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{س}{2})}$

$$=-2\pi\times\frac{1}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

بعض نهايات الاختبارات الوزارية للأعوام الأخيرة

كل من النهايات الآتية بسيطة ويمكن حلها بخطوات قليلة لذلك اترك حلها لك عزيزي الطالب وأضع بين يديك الجواب النهائي .

٢٠١٢-٢٠١٣م : (١) $\underset{س \to ١}{نها} \frac{س^{٢} - ١}{جا \pi س} = -\frac{٢}{\pi}$ ، (٢) $\underset{س \to ١}{نها} (س-١) ظتا \pi س = \frac{١}{\pi}$

(٣) $\underset{س \to ١}{نها} \frac{جا \pi س}{س^{٢} - س} = -\pi$ ، (٤) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{س ظتا٣س جا٤س}{جا٣س} = \frac{٤}{٩}$

٢٠١٣-٢٠١٤م : (١) $\underset{س \to ٠}{نها} س ظتا٥س = \frac{١}{٥}$ ، (٢) $\underset{س \to ٠}{نها} س جا \frac{\pi}{س} = ٠$

(٣) $\underset{س \to ٠}{نها} جا٢س ظتا٥س = \frac{٢}{٥}$ ، (٤) $\underset{س \to ٠}{نها} ٥س ظتا٤س = \frac{٥}{٤}$

(٥) $\underset{س \to ٠}{نها} \left(\frac{جا٤س}{س} + جتا٢س \right) = ٥$

٢٠١٤-٢٠١٥م : (١) $\underset{س \to ٠}{نها} س قتا \pi س = \frac{١}{\pi}$

(٢) إذا كانت $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{ك س}{جا٢س} = ٤$ ، فإن قيمة ك = ………………

٢٠١٥-٢٠١٦م : (١) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{س^{٢}}{١ - جتاس} = ٢$ ، (٢) $\underset{س \to \infty}{نها} \frac{٢س+جاس}{١+٣س} = \frac{٢}{٣}$

ثانياً: اتصال الدوال المثلثية :

تذكر أن: (١) الدالة د تكون متصلة عند النقطة س = م ⟺ $\lim_{س \to م}$ د(س) = د(م) .
(٢) إذا كانت الدالة د معرّفة على فترة أو أكثر فالدالة د تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط مجموعة تعريفها .

شروط اتصال دالة عند النقطة س = م:

١ –أن تكون معرفة عند النقطة س = م [أي د(م) موجودة].

٢ –$\lim_{س \to م}$ د(س) موجودة [أي ليست ± ∞].

٣ –$\lim_{س \to م}$ د(س) = د(م) .

شروط اتصال دالة معرفة بقاعدتين عند س = م:

١ –أن تكون معرفة عند س = م .

٢ –$\lim_{س \to م^+}$ د(س) = $\lim_{س \to م^-}$ د(س).

٣ –$\lim_{س \to م^+}$ د(س) = $\lim_{س \to م^-}$ د(س) = د(م).

ملاحظة: إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = م فإنه يمكن إعادة تعريفها لتكون متصلة عند س = م بشرط أن تكون النهاية موجودة . وإعادة تعريفها بالقاعدة الآتية:

د(س) = { الدالة المعطاة ، س ≠ م
قيمة النهاية ، س = م

- سنتطرق عزيزي الطالب لنوعين من أسئلة اتصال دالة مثلثية، الصيغة الأولى وهي التبيين فيما إذا كانت متصلة ، والصيغة الأخرى هي صيغة الأسئلة الوزارية وكما ستلاحظها لاحقاً.

مثال: بيّن فيما إذا كانت الدوال الآتية متصلة عند العدد المرافق وإذا كانت غير متصلة أعد تعريفها لكي تكون متصلة (إن أمكن): (١) د(س)= جاس+٢ ،س = ٠ ، (٢) د(س)= $\frac{٢س+جاه س}{س}$ ،س = ٠

الحل: علينا ملاحظة إمكانية تحقق كل من المسألتين لشروط اتصال دالة عند نقطة:

(١) أ) د(س) = جاس+٢ ، س = ٠، الدالة مجموعة تعريفها ح فهي معرفة عند س = ٠

∴ د(٠) = جا ٠ + ٢ = ٢

ب) $\lim_{س \to ٠}$ جاس+٢= جا ٠ + ٢ = ٢

ج) د(٠) = $\lim_{س \to ٠}$ جاس+٢ = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ٠

٢) د(س) = (٢س+جا٥س)/س ، س = ٠

لاحظ م.ت = ح/{٠} ، ∴ الدالة غير معرفة عند س = ٠ ، فنحسب النهاية للدالة لنعيد تعريفها إذا وجدت قيمة للنهاية : نهـا(س←٠) (٢س+جا٥س)/س = ٢+٥ = ٧

∴ يمكن إعادة تعريفها لتكون متصلة كما يلي : د(س) = { (٢س+جا٥س)/س ، س ≠ ٠
  ٧ ، س = ٠ }

عزيزي الطالب : أنتقل بك الآن إلى صيغة مسائل الاتصال الوزارية وطريقة حلها علماً أن هذه المسائل يقول لك فيها أنها متصلة أي تحقق الشروط والمطلوب إيجاد قيمة المجهول، لذلك نحقق كل من الشرط الأول والشرط الثاني ثم نكون معادلة من الشرط الثالث وإيجاد قيمة المجهول .
انتقيت لك أهم مسائل الاتصال التي فيها أفكار معينه لتلم بجميع الحالات .

* سؤال وزاري عام ٢٠٠٨–٢٠٠٩م : أوجد قيمة (أ) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

حيث د(س) = { أس قاس قتا٢س ، س ≠ ٠
  ٢ + س^٢ ، س = ٠ }

الحل : ∵ الدالة متصلة فهي تحقق شروط الاتصال ، نحقق كل من الشرط الأول والثاني ثم تكوين المعادلة من الشرط الثالث وهكذا في بقية المسائل من هذا النوع وسنفصّل في هذا السؤال :

أ) د(٠) = ٢+٠^٢ = ٢+٠ = ٢

ب) نهـا(س←٠) أس قاس قتا٢س = نهـا(س←٠) أس × ١/جتاس × ١/جا٢س = أ × ١ × ١/٢ = أ/٢

ج) ∵ الدالة متصلة ⇐ ∴ د(٠) = نهـا(س←٠) د(س) ⇐ ٢ = أ/٢ ⇐ أ = ٤

* سؤال وزاري عام ٢٠٠٥–٢٠٠٦م : أوجد قيمة (أ) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

حيث د(س) = { (جا٦س-ظا أس)/س ، س > ٠
  س^٣+٢أ^٢ ، س ≤ ٠ }

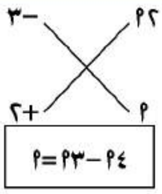
الحل : مثل هذه الدوال نهايتها من جهتين يمين ويسار العدد صفر لوجود > و < في القاعدة لذلك عند دراسة النهاية نبحث نهايتها عن اليمين وعن اليسار.

اخترنا النهاية جهة اليمين لأن النهاية من جهة اليسار تعطينا نفس قيمة د(٠) ، وبذلك لن نستطيع إيجاد قيمة المجهول.

د(٠) = ٠+ ٢أ^٢ = ٢أ^٢ ، نهـا(س←٠^+) (جا٦س-ظا أس)/س = ٦– أ

∵ الدالة متصلة ⇐ ∴ د(٠) = نهـا(س←٠^+) د(س)

٢أ^٢ = ٦– أ ⇐ ٢أ^٢ + أ – ٦ = ٠ ⇐ (٢أ–٣)(أ+٢) = ٠



إما ٢أ–٣ = ٠ ⇐ أ = ٣/٢ ، أو أ+٢ = ٠ أ = –٢

* سؤال وزاري عام ٢٠١٣–٢٠١٤م : أوجد قيمة (م) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{حيث د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{١-جتا٢م س}}{\text{جا س}^{٢}} & \text{، س} \neq ٠ \\ \text{٤ قاس} & \text{، س} = ٠ \end{cases}$$

الحل : د(٠) = ٤قا٠ = ٤ × ١ = ٤

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{١-جتا٢م س}}{\text{جا س}^{٢}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{٢جا}^{٢}\text{م س}}{\text{جاس}^{٢}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{٢جا}^{٢}\text{م س}}{\text{م}^{٢}\text{س}^{٢}} \times \text{م}^{٢}\cancel{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{\text{جاس}^{٢}} \times \frac{١}{\cancel{\text{س}^{٢}}} = \text{٢م}^{٢}$$

$$\therefore \text{٢م}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{م}^{٢} = ٢ \Leftarrow \text{م} = \pm\sqrt{٢}$$

تدريبات:

١) سؤال وزاري عام ٢٠١٤–٢٠١٥م: أوجد قيمة (ك) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س= ٠

$$\text{حيث د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٣س-جا س}}{\text{س}} & \text{، س} \neq ٠ \\ \text{ك} - ٣ & \text{، س} = ٠ \end{cases}$$

$\boxed{\text{ك} = ٥}$

٢) سؤال وزاري عام ٢٠١٣–٢٠١٤م: أوجد قيمة (ل) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س= ٠

$$\text{حيث د(س)} = \begin{cases} \text{جاس جتا}\dfrac{١}{\text{س}} & \text{، س} \neq ٠ \\ \text{ل}^{٢} - \text{ل جتاس} & \text{، س} = ٠ \end{cases}$$

$\boxed{\text{ل} = ٠}$

$\boxed{\text{ل} = ١}$

٣) أوجد قيمة (ك) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{حيث د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٤س}^{٢}\text{+ظا}^{٢}\text{٢س}}{\text{جا}^{٢}\text{٢س}} & \text{، س} > ٠ \\ \text{٣+ك جتا٢س} & \text{، س} \leqslant ٠ \end{cases}$$

$\boxed{\text{ك} =-١}$

٢) سؤال وزاري عام ٢٠١٨–٢٠١٩م: أوجد قيمة (م) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{حيث د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٤س}^{٢}\text{+ظا}^{٢}\text{٢س}}{\text{س}^{٢}} & \text{، س} > ٠ \\ \text{٣+ م جتاس} & \text{، س} \leqslant ٠ \end{cases}$$

$\boxed{\text{م} = ٥}$

....

....

....

....

....

أسئلة وزارية اضافية في الاتصال مع الحل

* سؤال وزاري عام ٢٠٠٤–٢٠٠٥م : أوجد قيمة (أ) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{1 - \text{جتا}2\text{أس}}{\text{س جاس}} & ، \text{س} \neq 0 \\ \text{أ} + 6 & ، \text{س} = 0 \end{cases}$$

الحل : $\text{د}(0) = \text{أ} + 6$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}2\text{أس}}{\text{س جاس}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{جا}^2\text{أس}}{\text{س جاس}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{جاأس جاأس}}{\text{س جاس}} \times \frac{\text{أس}}{\text{أس}} \times \frac{\text{أس}}{\text{أس}} \times \frac{\text{س}}{\text{س}} = 2\text{أ}^2$$

$\therefore 2\text{أ}^2 = \text{أ} + 6 \Leftarrow 2\text{أ}^2 - \text{أ} - 6 = 0 \Leftarrow (2\text{أ}+3)(\text{أ}-2) = 0$ ، إما $\text{أ} = -\frac{3}{2}$ ، أو $\text{أ} = 2$

* سؤال وزاري عام ٢٠٠٦–٢٠٠٧م : أوجد قيمة (أ) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{2\text{جا}(\text{أس}) - \text{جا}(2\text{أس})}{\text{س}^3} & ، \text{س} \neq 0 \\ -8 & ، \text{س} = 0 \end{cases}$$

الحل : $\text{د}(0) = -8$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{جا}(\text{أس}) - \text{جا}(2\text{أس})}{\text{س}^3} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{جاأس} - 2\text{جاأس جتاأس}}{\text{س}^3} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{جاأس}(1 - \text{جتاأس})}{\text{س}^3}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{جاأس}}{\text{أس}} \times \text{أ} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتاأس}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتاأس}}{1 + \text{جتاأس}}$$

$$= 2\text{أ} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2\text{أس}}{\text{س}^2(1 + \text{جتاأس})} = 2\text{أ} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\text{أس}}{\text{س}^2} \times \frac{1}{1 + \text{جتاأس}} = 2\text{أ} \times \text{أ}^2 \times \frac{1}{2} = \text{أ}^3$$

$\therefore \text{أ}^3 = -8 \Leftarrow \text{أ} = -2$

* سؤال وزاري عام ٢٠٠٧–٢٠٠٨م : أوجد قيمة (أ) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س}^2 - \text{أس})\text{جاأس}}{\text{س}^2} & ، \text{س} \neq 0 \\ 2\text{أ} - 3 & ، \text{س} = 0 \end{cases}$$

الحل : $\text{د}(0) = 2\text{أ} - 3$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س}^2 - \text{أس})\text{جاأس}}{\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}(\text{س} - \text{أ})}{\text{س}} \times \frac{\text{جاأس}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} (\text{س} - \text{أ}) \times \text{أ} = -\text{أ}^2$$

$\therefore 2\text{أ} - 3 = -\text{أ}^2 \Leftarrow \text{أ}^2 + 2\text{أ} - 3 = 0 \Leftarrow (\text{أ}+3)(\text{أ}-1) = 0 \Leftarrow$ إما $\text{أ} = -3$ ، أو $\text{أ} = 1$

* سؤال وزاري عام ٢٠٠٩–٢٠١٠م: أوجد قيمة (أ) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = $\frac{\pi}{\text{٤}}$

$$\text{حيث د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{ظاس}-\text{١}}{\text{س}-\frac{\pi}{\text{٤}}} & \text{، س} \neq \frac{\pi}{\text{٤}} \\ \text{أ} & \text{، س} = \frac{\pi}{\text{٤}} \end{cases}$$

الحل : د($\frac{\pi}{\text{٤}}$) = أ

$$\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\text{ظاس}-\text{١}}{\text{س}-\frac{\pi}{\text{٤}}} = \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}-\text{١}}{\text{س}-\frac{\pi}{\text{٤}}} = \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\frac{\text{جاس}-\text{جتاس}}{\text{جتاس}}}{\text{س}-\frac{\pi}{\text{٤}}} = \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\text{جاس}-\text{جتاس}}{\text{جتاس}(\text{س}-\frac{\pi}{\text{٤}})}$$

$$\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\text{جاس}-\text{جا}(\frac{\pi}{\text{٢}}-\text{س})}{\text{جتاس}(\text{س}-\frac{\pi}{\text{٤}})} = \lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\text{٢جتا}\frac{\pi}{\text{٤}}\ \text{جا}(\text{س}-\frac{\pi}{\text{٤}})}{\text{جتاس}\ (\text{س}-\frac{\pi}{\text{٤}})} = \text{٢} \times \text{١} = \text{٢}$$

∴ أ = ٢

* سؤال وزاري عام ٢٠١٠–٢٠١١م: أوجد قيمة (أ،ب) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س= ٠

$$\text{حيث د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}(\text{أس}-\text{ب س})}{\text{س جتاأس جتاب س}} & \text{، س} < \text{٠} \\ \text{أ} & \text{، س} = \text{٠} \\ \text{ب س ظتاأس} & \text{، س} > \text{٠} \end{cases}$$

الحل : د(٠) = ٢ .....(١)

$$\lim_{\text{س}\to\text{٠}^+} \text{ب س ظتاأس} = \lim_{\text{س}\to\text{٠}^+} \text{ب س} \times \frac{\text{١}}{\text{ظاأس}} \times \frac{\text{أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{.......(٢)}$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{٠}^-} \frac{\text{جا}(\text{أس}-\text{ب س})}{\text{س جتاأس جتاب س}} = \lim_{\text{س}\to\text{٠}^-} \frac{\text{جاس}(\text{أ}-\text{ب})}{\text{س}} \times \frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ}-\text{ب}} \times \frac{\text{١}}{\text{جتاأس}} \times \frac{\text{١}}{\text{جتاب س}} = \text{أ}-\text{ب} \text{..(٣)}$$

ومن (١) و(٢) و(٣) ينتج : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \text{٢} \Leftarrow \text{٢أ} = \text{ب} \Leftarrow \text{٢أ}-\text{ب} = \text{٠}$ ....(٤)

أ−ب = ٢ ....(٥)

وبطرح المعادلتين (٤) ، (٥) ينتج: أ = −٢

وبالتعويض بقيمة أ في المعادلة (٤) يعطينا ب = −٤

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

* سؤال وزاري عام ٢٠١١–٢٠١٢م : أوجد قيمة (ك) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٥س}^{٢}+\text{جا}^{٢}\text{٣س}}{\text{س ظا ك س}} & ، \text{س} < ٠ \\[2ex] \dfrac{\text{س + ك}}{\text{س}^{٢}+١} & ، \text{س} \geqslant ٠ \end{cases} \quad \text{حيث}$$

الحل : د(٠) = ك

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{-}} \frac{\text{٥س}^{٢}+\text{جا}^{٢}\text{٣س}}{\text{س ظا ك س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{-}} \frac{\text{٥س}^{٢}}{\text{س ظا ك س}} + \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{-}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{٣س}}{\text{س ظا ك س}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{-}} \frac{\text{٥س}}{\text{ظا ك س}} + \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^{-}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{٣س}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{ظا ك س}} = \frac{٥}{\text{ك}} + ٤ \times \frac{١}{\text{ك}} = \frac{٥}{\text{ك}} + \frac{٤}{\text{ك}} = \frac{٩}{\text{ك}}$$

$$\therefore \text{ك} = \frac{٩}{\text{ك}} \Leftarrow \text{ك}^{٢} = ٩ \Leftarrow \text{ك} = \pm ٣$$

* سؤال وزاري عام ٢٠١٢–٢٠١٣م : أوجد قيمة (م) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = ٠

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢}\,\text{جا}\frac{١}{\text{س}}}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}} & ، \text{س} \neq ٠ \\[2ex] \text{م} - ٢ + \text{س} & ، \text{س} = ٠ \end{cases} \quad \text{حيث}$$

الحل : د(٠) = م − ٢ + ٠ = م − ٢

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}^{٢}\,\text{جا}\frac{١}{\text{س}}}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \text{س جا}\frac{١}{\text{س}} \times \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}}$$

$$= ٠ \times \frac{١}{\pi} = ٠$$

$$\therefore \text{م} - ٢ = ٠ \Leftarrow \text{م} = ٢$$

في هذا السؤال: مبرهنة٢ مع مبرهنة١

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \text{س} = ٠$ ، $\left|\text{جا}\frac{١}{\text{س}}\right| \leqslant ١$

* سؤال وزاري عام ٢٠١٣–٢٠١٤م : أوجد قيمة (م) التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جتا٤س}}{١ - \text{جاس}} & ، \text{س} \neq \frac{\pi}{٢} \\[2ex] \dfrac{١}{\text{م}^{٢}} & ، \text{س} = \frac{\pi}{٢} \end{cases} \quad \text{حيث}$$

الحل : $\text{د}(\frac{\pi}{٢}) = \frac{١}{\text{م}^{٢}}$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جتا٤س}}{١ - \text{جاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{٢جا}^{٢}\text{٢س}}{١ - \text{جاس}} \times \frac{١ + \text{جاس}}{١ + \text{جاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{٢جا}^{٢}\text{٢س}(١ + \text{جاس})}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{٢جا٢س جا٢س}\,(١ + \text{جاس})}{\text{جتاس جتاس}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{٢جا}(\pi - \text{٢س})\,\text{جا}(\pi - \text{٢س})\,(١ + \text{جاس})}{\dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})\,\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) \times (\frac{\pi}{٢} - \text{س})^{٢}}{(\frac{\pi}{٢} - \text{س})\,(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{٢جا}(\pi - \text{٢س})\,\text{جا}(\pi - \text{٢س})\,(١ + \text{جاس})}{\frac{١}{٢}(\pi - \text{٢س}) \times \frac{١}{٢}(\pi - \text{٢س})} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$$

$$\therefore \frac{١}{\text{م}^{٢}} = ١٦ \Leftarrow \text{م}^{٢} = \frac{١}{١٦} \Leftarrow \text{م} = \pm \frac{١}{٤}$$

قاعـــدة لوبيتال

سأعطي لك هنا عزيزي الطالب قاعدة لوبيتال لحل النهايات لكن يجب أن تحذر أن تستخدمها في الحل كونها غير مقررة في المرحلة الثانوية ، لذلك عليك استخدام ما مر معك سابقاً من قواعد وطرق . ولكن أوجدتها هنا لكي تستفيد منها في التأكد من صحة الحل أو للاختيار من متعدد أو لأسئلة الصح أو الخطأ ، بحيث يمكن الحل بهذه الطريقة بشكل أسهل وأسرع .

القاعدة:

إذا كان د ، ه دالتين قابليتين للاشتقاق عند س = أ و د (أ) = ه (أ) فإن :

$$\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{د (س)}}{\text{ه (س)}} = \frac{\text{د}'\text{(س)}}{\text{ه}'\text{(س)}} = \frac{\text{مشتقة الدالة د عند س = أ}}{\text{مشتقة الدالة ه عند س = أ}}$$

ملاحظات :

١– نطبق هذه القاعدة إذا كان لدينا نهاية دالة كسرية وحالات عدم التعيين لها ($\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$).

٢– يمكن الاشتقاق أكثر من مرة لكل من البسط والمقام إلى أن نتخلص من حالة عدم التعيين .

مثال صـ٤ــ: أحسب : $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{جا(س} - ١)}{(\text{س}^{٢} - ١)}$

الحل: $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{جا(س} - ١)}{(\text{س}^{٢} - ١)} = \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{جتا(س} - ١)}{٢\text{س}} = \frac{\text{جتا}(١ - ١)}{٢ \times ١} = \frac{\text{جتا ٠}}{٢} = \frac{١}{٢}$

مثال صـ٥ــ: أحسب : $\lim_{\text{س}\to -١} \frac{\text{ظا } \pi \text{ س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$

الحل: $\lim_{\text{س}\to -١} \frac{\text{ظا } \pi \text{ س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}} = \lim_{\text{س}\to -١} \frac{(\text{قا}^{٢} \pi \text{ س}) \times \pi}{٢\text{س} + ١} = \frac{(\text{قا}^{٢} \pi \times -١) \times \pi}{-٢ + ١} = \frac{(-١)^{٢} \times \pi}{-١} = -\pi$

مثال صـ١١ــ: أحسب : $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}}$

الحل: $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{٠ + \text{جاس}}{١ \times \text{جاس} + \text{س جتاس}} = \frac{٠ + \text{جا ٠}}{١ \times \text{جا ٠} + ٠ \times \text{جتا ٠}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نلاحظ أن النهاية لازالت عدم تعيين ، فنشتق مرة أخرى : $\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{جاس} + \text{س جتاس}}$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس} + ١ \times \text{جتاس} + \text{س} \times -\text{جاس}} = \frac{\text{جتا ٠}}{\text{جتا ٠} + \text{جتا ٠} - ٠ \times \text{جا ٠}} = \frac{١}{١ + ١ - ٠} = \frac{١}{٢}$$

مثال صـ١١ـ : أحسب : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا٥س} - \text{جتا٣س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

الحل: $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا٥س} - \text{جتا٣س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{٥جا٥س} + \text{٣جا٣س}}{\text{٢س}} = \dfrac{-\text{٥جا٠} + \text{٣جا٠}}{\text{٢} \times \text{٠}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نلاحظ أن النهاية لازالت عدم تعيين ، فنشتق مرة أخرى :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{٥جا٥س} + \text{٣جا٣س}}{\text{٢س}} = \underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{٢٥جتا٥س} + \text{٩جتا٣س}}{\text{٢}} = \dfrac{-\text{٢٥جتا٠} + \text{٩جتا٠}}{\text{٢}} = \dfrac{-\text{٢٥} + \text{٩}}{\text{٢}}$$

$$= \dfrac{-\text{١٦}}{\text{٢}} = -\text{٨}$$

إن العالم يتحرك بجناحين هما "السرعة والإبتكار"
وعلى الإنسان أن يدرك ذلك ... حتى لا يحطمه قطار الزمن
نمِّ قلبك بالآيات .. ونمِّ عقلك بالرياضيات
ومن يتهيب صعود الجبال .... يعش أبد الدهر بين الحُفر

(ورقة عمل) أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في النهايات والاتصال

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٣\text{س}}{٢\text{س}} = \frac{١}{٢}$ ( )

٢- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}} = ١$ ( )

٣- $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \frac{\text{جا س}}{١ + ٣\text{س}} = \text{صفر}$ ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \text{س قتا}\ \pi\ \text{س} =$ ....

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) إذا كانت $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ك س}}{\text{جا}٢\text{س}} = ٤$ ، فإن قيمة ك = ... [٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨]

٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٤\text{س}}{\text{ظا}٢\text{س}} =$ .... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١- $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}٤\text{س}}{\text{س}} + \text{جتا}٢\text{س} \right) =$	$-\frac{١}{٢}$
٢- $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جتاس}}{٢\text{س} - \pi} =$	٢
	٥

س٥: أوجد قيمة ل التي تجعل الدالة متصلة عند س = ٠

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{جاس جتا}\frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} \neq ٠ \\ \text{ل}^{٢} - \text{ل جتاس} & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

....

س٦: أوجد قيمة ك التي تجعل الدالة متصلة عند س = ٠

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٣س} - \text{جا س}}{\text{س}} & \text{، س} \neq \text{٠} \\ \text{ك} - \text{٣} & \text{، س} = \text{٠} \end{cases}$$

....

....

....

....

س٧: أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = ٠

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٢س} - \text{جا س}}{\text{س}} & \text{، س} \neq \text{٠} \\ \text{أ}^{\text{٢}} - \text{٣} & \text{، س} = \text{٠} \end{cases}$$

....

....

....

....

س٨: أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = $\frac{\pi}{\text{٢}}$

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٢}}} & \text{، عندما س} \neq \frac{\pi}{\text{٢}} \\ \text{أ} & \text{، عندما س} = \frac{\pi}{\text{٢}} \end{cases}$$

....

....

....

....

س٩: أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = ٠

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{ظا}^{\text{٢}}\,\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}}} & \text{، عندما س} > \text{٠} \\ \text{٣} + \text{أ جتاس} & \text{، عندما س} \leq \text{٠} \end{cases}$$

....

....

....

....

س١٠: أحسب النهايات التالية : (أ) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س^٢}{١ - جتا س}$ ، (ب) $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٢س - جاس}{١ + ٣س}$

....

....

....

....

....

تم الانتهاء من درس نهاية واتصال الدوال المثلثية

كل الشكر لمن ساعدني في إتمامه

إعداد وتصميم وطباعة الأستاذ / صوفي رمضان حمادي

شبام – حضرموت–٢٠٢٠م

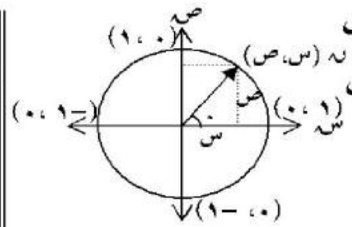
soramnet@gmail.com - +٩٦٧-٧٧٠٠٦٠٧٦٦

دائرة الوحدة والنسب المثلثية

جاهـ = $\frac{\text{ص}}{1}$ = ص

جتاهـ = $\frac{\text{س}}{1}$ = س

ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

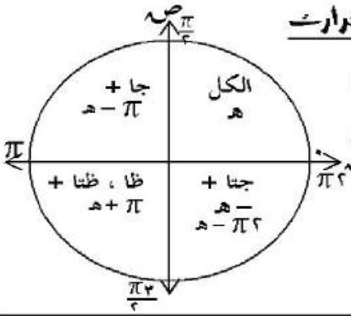


قاعدة الإشارات

* اشارة جتا تتبع اشارة الاحداثي السيني

* اشارة جا تتبع اشارة الاحداثي الصادي

* وتكون اشارة النسب حسب الموقع



المتطابقات الأساسية

١) جا^{2}س + جتا^{2}س = ١ ⟸ جا^{2}س = ١ − جتا^{2}س و جتا^{2}س = ١ − جا^{2}س

٢) ١ + ظا^{2}س = قا^{2}س = $\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$ ، ١ + ظتا^{2}س = قتا^{2}س = $\frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}$

٣) ظتا س = $\frac{1}{\text{ظا س}}$ = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ ⟸ ظا س = $\frac{1}{\text{ظتا س}}$ = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

٤) قتا س = $\frac{1}{\text{جا س}}$ ⟸ جا س = $\frac{1}{\text{قتا س}}$ و قا س = $\frac{1}{\text{جتا س}}$ ⟸ جتا س = $\frac{1}{\text{قا س}}$

متطابقات المضاعفات والإنصاف

١) جا ٢س = ٢ جا س جتا س ⟸ جا س = ٢ جا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$

٢) جتا ٢س = جتا^{2}س − جا^{2}س وبالتعويض بـ جا^{2}س = ١ − جتا^{2}س ينتج ما يلي :

جتا٢س = ٢جتا^{2}س − ١ ⟸ ٢جتا^{2}س = ١+ جتا٢س ⟸ جتا^{2}س = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢س)

جتاس = ٢جتا^2 $\frac{\text{س}}{2}$ − ١ ⟸ ٢جتا^2 $\frac{\text{س}}{2}$ = ١+ جتا س ⟸ جتا^2$\frac{\text{س}}{2}$ = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا س)

وبالتعويض بـ جتا^{2}س = ١ − جا^{2}س ينتج ما يلي :

جتا٢س = ١ − ٢جا^{2}س ⟸ ٢جا^{2}س = ١ − جتا٢س ⟸ جا^{2}س = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا٢س)

جتاس = ١ − ٢جا^2 $\frac{\text{س}}{2}$ ⟸ ٢جا^2 $\frac{\text{س}}{2}$ = ١ − جتا س ⟸ جا^2 $\frac{\text{س}}{2}$ = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا س)

متطابقات مجموع او فرق بين زاويتين

١) جا(س+ص)=جاس جتاص+جتاس جاص

٢) جا(س−ص)=جاس جتاص−جتاس جاص

٣) جتا(س+ص)=جتاس جتاص−جاس جاص

٤) جتا(س−ص)=جتاس جتاص+جاس جاص

متطابقات الزاوية السالبة

جا (− س) = − جا س

جتا (− س) = جتا س

ظا (− س) = − ظا س

ظتا (− س) = − ظتا س

قا (− س) = قا س

قتا (− س) = − قتا س

مدرس مادة الرياضيات

صوفي رمضان حمادي

متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى حاصل ضرب والعكس

١) $\text{جاس} + \text{جاص} = ٢\,\text{جا}\frac{\text{س}+\text{ص}}{٢} \cdot \text{جتا}\frac{\text{س}-\text{ص}}{٢}$

٢) $\text{جاس} - \text{جاص} = ٢\,\text{جتا}\frac{\text{س}+\text{ص}}{٢} \cdot \text{جا}\frac{\text{س}-\text{ص}}{٢}$

٣) $\text{جتاس} + \text{جتاص} = ٢\,\text{جتا}\frac{\text{س}+\text{ص}}{٢} \cdot \text{جتا}\frac{\text{س}-\text{ص}}{٢}$

٤) $\text{جتاس} - \text{جتاص} = -٢\,\text{جا}\frac{\text{س}+\text{ص}}{٢} \cdot \text{جا}\frac{\text{س}-\text{ص}}{٢}$

$\text{جاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا}(\text{س}+\text{ص}) + \text{جا}(\text{س}-\text{ص})\right]$

$\text{جتاس جاص} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا}(\text{س}+\text{ص}) - \text{جا}(\text{س}-\text{ص})\right]$

$\text{جتاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left[\text{جتا}(\text{س}+\text{ص}) + \text{جتا}(\text{س}-\text{ص})\right]$

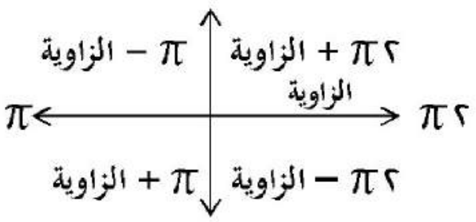
$\text{جاس جاص} = -\frac{١}{٢}\left[\text{جتا}(\text{س}+\text{ص}) - \text{جتا}(\text{س}-\text{ص})\right]$

المحافظة على النسبة مع (π ، ٢π)

١) $\text{جاس} = \text{جا}(\pi - \text{س})$
$= -\text{جا}(\pi + \text{س})$
$= -\text{جا}(٢\pi - \text{س})$
$= \text{جا}(٢\pi + \text{س})$

٢) $\text{ظا س} = -\text{ظا}(\pi - \text{س})$
$= \text{ظا}(\pi + \text{س})$
$= -\text{ظا}(٢\pi - \text{س})$
$= \text{ظا}(٢\pi + \text{س})$

المخطط



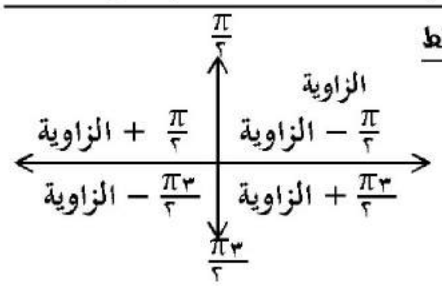
تنبيه : يجب مراعاة الإشارة في الربع الجديد

تحويل النسبة إلى أخرى مع ($\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$)

١) $\text{جتاس} = \text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})$
$= \text{جا}(\frac{\pi}{٢} + \text{س})$
$= -\text{جا}(\frac{٣\pi}{٢} - \text{س})$
$= -\text{جا}(\frac{٣\pi}{٢} + \text{س})$

٢) $\text{ظتاس} = \text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})$
$= -\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} + \text{س})$
$= \text{ظا}(\frac{٣\pi}{٢} - \text{س})$
$= -\text{ظا}(\frac{٣\pi}{٢} + \text{س})$

المخطط



تنبيه : يجب مراعاة الإشارة في الربع الجديد

قيم النسب المثلثية للزوايا الشهيرة

النسب المثلثية	°٠	°٣٠	°٤٥	°٦٠	°٩٠	°١٨٠	°٢٧٠	°٣٦٠
	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
جا	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	−١	٠
جتا	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	٠	−١	٠	١
ظا	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرف	٠	غير معرف	٠
ظتا	غير معرف	$\sqrt{٣}$	١	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	٠	غير معرف	٠	غير معرف
قا	١	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٢}$	٢	غير معرف	−١	غير معرف	١
قتا	غير معرف	٢	$\sqrt{٢}$	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	١	غير معرف	−١	غير معرف

مدرس مادة الرياضيات / صوفي رمضان حمادي

مراجعة المشتقات

الجدول الآتي يبيّن قواعد وقوانين المشتقة الأساسية والتي تعرّفت عليها سابقاً في دراستك:

جدول المشتقات الأساسية:

نوع الدالة	الدالة	مشتقتها
الدالة الثابتة	د(س) = أ ، أ ثابتاً	دَ(س) = صفر
دالة التطابق	د(س) = س	دَ(س) = ١
الدالة الخطية	د(س) = أس+ب ، أ،ب ثابتين	دَ(س) = أ (معامل س)
دالة القوة	$د(س) = [ق(س)]^{ن}$	$دَ(س) = ن\,[ق(س)]^{ن-١} \times قَ(س)$
	$د(س) = س^{ن}$ ، حالة خاصة	$دَ(س) = ن\,س^{ن-١}$
جمع دالتين	د(س) = ق(س) ± هـ(س)	دَ(س) = قَ(س) ± هـَ(س)
حاصل ضرب وقسمة دالتين	د(س) = ق(س) × هـ(س)	دَ(س) = قَ(س) × هـ(س) + ق(س) × هـَ(س)
	د(س) = أ ق(س) ، أ ثابت	دَ(س) = أ قَ(س)
	$د(س) = \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ ٠	$دَ(س) = \frac{قَ(س) \times هـ(س) - ق(س) \times هـَ(س)}{[هـ(س)]^{٢}}$
دالة الجذر التربيعي	$د(س) = \sqrt{هـ(س)}$ ، هـ(س) ⩾ ٠	$دَ(س) = \frac{هـَ(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$
	$د(س) = \sqrt{س}$ ، س ⩾ ٠	$دَ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$
دالة كسرية بسطها عدد ثابت ومقامها قوة	$د(س) = \frac{أ}{[ق(س)]^{ن}}$	$دَ(س) = \frac{-أ \times ن \times قَ(س)}{[ق(س)]^{ن+١}}$
	$د(س) = \frac{أ}{[س+ب]^{ن}}$	$دَ(س) = \frac{-أ \times ن}{[س+ب]^{ن+١}}$

قواعد أساسية:

(١) $\frac{١}{س^{ن}} = س^{-ن}$ ، (٢) $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$ ، (٣) $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$ ، (٤) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

وتطبيقاً للقواعد السابقة هو حل المثال الآتي :

مثال : أوجد دَ(س) لكل من الدوال الآتية :

(١) د(س) = $٢^{٥}$ ، (٢) د(س) = ٥س^{٤} − ٢س^{٢} + ٣س + ٧ ، (٣) د(س) = (س^{٢} + ١)^{٧}

(٤) د(س) = (س^{٢} + ٢) (٣س + س^{٣}) ، (٥) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س} + ٤}$ ، س ≠ −٤

(٦) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}$

الحل: (١) دَ(س) = ٠ ، (٢) دَ(س) = ٢٠س^{٣} − ٤س + ٣

(٣) دَ(س) = ٧(س^{٢} + ١)^{٦} × ٢س = ١٤س(س^{٢} + ١)^{٦}

(٤) دَ(س) = (س^{٢} + ٢)َ (٣س + س^{٣}) + (س^{٢} + ٢) (٣س + س^{٣})َ

= ٢س(٣س + س^{٣}) + (س^{٢} + ٢)(٣ + ٣س^{٢})

= ٦س^{٢} + ٢س^{٤} + ٣س^{٢} + ٣س^{٤} + ٦ + ٦س^{٢}

= ٥س^{٤} + ١٥س^{٢} + ٦

(٥) دَ(س) = $\frac{(\text{س}+٤)٢\text{س} - (\text{س}^{٢}-٢)\times ١}{(\text{س}+٤)^{٢}} = \frac{٢\text{س}^{٢}+٨\text{س}-\text{س}^{٢}+٢}{(\text{س}+٤)^{٢}} = \frac{\text{س}^{٢}+٨\text{س}+٢}{(\text{س}+٤)^{٢}}$

(٦) دَ(س) = $\frac{٢\text{س}-٢}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١}} = \frac{٢(\text{س}-١)}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١}} = \frac{\text{س}-١}{\sqrt{\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١}}$

تدريب : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لما يلي :

(١) د(س) = (س^{٢} + ٢س) (٣س + ١)

(٢) د(س) = $\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$

....

....

....

....

....

....

مشتقة الدالة المثلثية

الجدول الآتي يبيّن قواعد الدالة المثلثية :

الدالة	مشتقتها
ص = جاس	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتاس
ص = جتاس	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − جاس
ص = ظاس	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{٢}س = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = ١+ ظا^{٢}س
ص = ظتاس	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتا^{٢}س = − $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ = −(١+ ظتا^{٢}س)
ص = قاس	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قاس × ظاس
ص = قتاس	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتاس × ظتاس

نتائج : (وهي صحيحة لكل النسب المثلثية)

(١) ص = جا[ق(س)] ⇐ صَ = قَ(س) × جتا[ق(س)]

مشتقة أي دالة مثلثية = مشتقة الزاوية × مشتقة النسبة

(٢) ص = جا^{ن}[ق(س)] ⇐ صَ = ن جا$^{ن-١}$[ق(س)] × قَ(س) × جتا[ق(س)]

مشتقة دالة القوة التي أساسها نسبة ثابتة تتم بالقاعدة (٢)

مثال : أوجد دَ(س) لكل من الدوال الآتية :

(١) د(س) = ١+س جاس ، (٢) د(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

(٣) د(س) = جا^{٥}٣س ، (٤) د(س) = $\sqrt{\text{١+جاس}}$

الحل:

تنبيه : قبل تطبيق قاعدة الاشتقاق يجب النظر والتركيز على القاعدة الأساسية التي يجب عليك أتباعها وتطبيق القواعد الفرعية عندما تواجهك خلال الاشتقاق مثل د(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{س}}$ فالقاعدة الأساسية التي ستطبق هي قاعدة الدالة الكسرية مع ملاحظة أن البسط دالة مثلثية وستطبق قاعدتها عند اشتقاق البسط.

(١) دَ(س) = ٠+(١×جاس+ س×جتاس) = جاس+ س جتاس — الثابت+تطبيق القاعدة الأساسية للضرب

(٢) دَ(س) = $\frac{\text{− جاس × س − جتاس×١}}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{\text{− س جاس− جتاس}}{\text{س}^{٢}}$ — تطبيق القاعدة الأساسية وهى القسمة

(٣) دَ(س)=٥جا^{٤}٣س×٣×جتا٣س=١٥جا^{٤}٣س جتا٣س | تطبيق قاعدة القوة لدالة اساسها نسبة مثلثية

(٤) دَ(س) = $\frac{\text{جتاس}}{٢\sqrt{١+\text{جاس}}}$ | تطبيق القاعدة الأساسية وهنا الجذر التربيعي

مثال: إذا كانت د(س) = ظاس ، س ≠ $\frac{\pi}{٢}$ + ك π ، ك ∈ ص فأثبت أن : دَ(س) = قا^{٢}س

الحل: ∵ ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، جتاس ≠ ٠

نطبق قاعدة الاشتقاق للدالة الكسرية نجد أن :

دَ(س) = (ظاس)َ = $\frac{\text{جتاس جتاس} - \text{جاس} \times -\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}+\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = قا^{٢}س (هـ.ط)

تدريبات: (١) أوجد مشتقة الدوال الآتية :

(أ) د(س) = ظتا^{٥}($\sqrt{\text{س}}$) ، (ب) ص = (جاس−جتاس)^{٣}

(جـ) د(س) = ٥س+١+ جا $\frac{١}{\text{س}-٣}$

(٢) إذا كانت د(س) = ظتاس ، س ≠ ك π ، ك ∈ ص فأثبت أن : دَ(س) = − قتا^{٢}س

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مشتقة الدالة اللوغاريتمية

تذكير :

(أ) تسمى الدالة ص= $\text{لو}_{أ}$ س $\Longleftrightarrow$ س= $أ^{ص}$ بالدالة اللوغاريتمية حيث س،أ $\in$ $ح^{+}$،أ $\neq$ ٠

(ب) تسمى الدالة ص = $\text{لو}_{هـ}$ س $\Longleftrightarrow$ س = $هـ^{ص}$ بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية حيث هـ $\approx$ ٢,٧٢

(جـ) م . ت =] ٠ ، ∞ [، والمدى = ح

(د) خواص اللوغاريتم: (إذا لم يكتب الأساس في اللوغاريتم فاللوغاريتم يعتبر طبيعي)

١) لو ١ = صفر

٢) لوهـ = ١

٣) لو$س^{ن}$ = ن لوس

٤) لو($س_{١}$ $س_{٢}$) = لو$س_{١}$ + لو$س_{٢}$

٥) لو$\left[\frac{س_{١}}{س_{٢}}\right]$ = لو$س_{١}$ − لو$س_{٢}$

٦) لوس = لوص $\Longleftrightarrow$ س = ص

٧) لو$هـ^{س}$ = س

٨) $هـ^{\text{لوس}}$ = س

٩) $هـ^{\text{س لو ب}}$ = $ب^{س}$

١٠) $\text{لو}_{أ}ب = \frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ}}$ قاعدة تحويل اللوغاريتم إلى لوغاريتم طبيعي

١١) $\text{لو}_{ب}أ = \frac{١}{\text{لو}_{أ}ب}$

قاعدة اشتقاق الدالة اللوغاريتمية :

١) ص = لو[ق(س)] $\Leftarrow$ صَ = $\frac{\text{قَ(س)}}{\text{ق(س)}}$ ، ق(س) > ٠ القاعدة الأساسية

٢) ص = لوس $\Leftarrow$ صَ = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ حالة خاصة

ملاحظة: إذا لم يكتب الأساس في اللوغاريتم فإننا نعتبر ذلك لوغاريتم طبيعي .

مثال: أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لما يلي : (١) $\text{ص} = \text{لو}(\text{س}^{٣}+\text{٩س})$ ، (٢) $\text{ص} = \text{لو}\sqrt{\text{س}^{٢}+٢}$

(٣) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{لوس}$ ، (٤) $\text{ص} = \text{لوظتا}^{٢}\text{س}$

احذر تجمع س المرتبطة بـ لو مع س
لذلك سأضعها داخل قوسين ( )

الحل: (١) $\text{ص}' = \frac{\text{٣س}^{٢}+٩}{\text{س}^{٣}+\text{٩س}}$ ، (٢) $\text{ص}' = \frac{\frac{\text{٢س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}+٢}}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢}} = \frac{\text{٢س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}+٢}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢}} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٢}$

(٣) $\text{ص}' = (\text{٢س لوس}) + \text{س}^{٢} \times \frac{١}{\text{س}} = (\text{٢سلوس}) + \text{س} = \text{س}\,[\text{٢لوس}+١]$

(٤) $\text{ص}' = \frac{\text{٢ظتاس} \times -\text{قتا}^{٢}\text{س}}{\text{ظتا}^{٢}\text{س}} = \frac{-\text{٢قتا}^{٢}\text{س}}{\text{ظتاس}} = \frac{-٢}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \div \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \frac{-٢}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \times \frac{\cancel{\text{جاس}}}{\text{جتاس}}$

$= \frac{-٢}{\text{جاس جتاس}}$

تدريبات: أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للآتي : (١) $\text{د(س)} = \text{جتاس لوس}$ ، (٢) $\text{د(س)} = [\,\text{لوظاس}\,]^{٣}$

(٣) $\text{ص} = \text{لو}_{٢}\text{س}$

عند حلك للتدريب رقم (٣) نلاحظ أنه ليس لوغاريتم طبيعي ولتحويله إلى طبيعي نستخدم الخاصية (١٠) من خواص اللوغاريتم التي مرت سابقاً ثم نشتق.

فوائد اللوغاريتم :

١) اشتقاق الدوال المركبة (صعبة الإشتقاق).

٢) اشتقاق الدوال التي على صورة (دالة أس دالة) مثل ($\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$).

الخطوات المتبعة لاشتقاق دالة باستخدام اللوغاريتم :

١– ندخل "لو" على الطرفين ونستخدم الخواص للتبسيط.

٢– نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير س (لذلك نضع صَ عند اشتقاق ص).

٣– نضع صَ في طرف مستقل (عن طريق الضرب في ص).

٤– نعوض عن ص بقيمتها.

مثال : أوجد مشتقة الدوال الآتية :

$$(1)\ \text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}+1} \quad ، \quad (2)\ \text{ص} = \text{س}^{\text{س}} \quad ، \quad (3)\ \text{ص} = (\text{جاس})^{\text{جتاس}}$$

الحل: (١) نلاحظ أن الدالة كسرية ويمكن اشتقاقها باستخدام مشتقة الدوال الكسرية لكن أريد هنا أن أبيّن لك أننا نستطيع استخدام اللوغاريتم لإيجاد مشتقتها.

$$\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}+1} \Leftarrow \text{لوص} = \text{لو}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+1}\right) \Leftarrow \text{لوص} = \text{لوس} - \text{لو}(\text{س}+1)$$ [استخدمنا الخطوة١]

نشتق الآن الطرفين : $\frac{1}{\text{ص}}\,\text{صَ} = \frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}+1} \Leftarrow \text{صَ} = \text{ص}\left[\frac{\text{س}+1-\text{س}}{\text{س}(\text{س}+1)}\right]$

$$\Leftarrow \text{صَ} = \left(\frac{\text{س}}{\text{س}+1}\right)\left(\frac{1}{\text{س}^2+\text{س}}\right) = \frac{\text{س}}{\text{س}^3+\text{س}^2+\text{س}^2+\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س}^2+2\text{س}+1)} = \frac{1}{(\text{س}+1)^2}$$

(٢) $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$ نلاحظ وجود المتغير في الأساس والأس فندخل "لو" على الطرفين

$\text{لوص} = \text{لوس}^{\text{س}}$ [إدخال لو ثم تطبيق خاصية للتبسيط]

$\text{لوص} = \text{س}\,\text{لوس}$ [نشتق الطرفين مع ملاحظة قاعدة الضرب في الطرف الأيسر]

$\frac{1}{\text{ص}}\,\text{صَ} = 1 \times \text{لوس} + \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}$ [تطبيق قاعدة الضرب في الطرف الأيسر والاختصار]

$\frac{1}{\text{ص}}\,\text{صَ} = (\text{لوس}) + 1$ [بالضرب × ص]

$\text{صَ} = \text{ص}\,(1+\text{لوس})$ [وبالتعويض عن ص بقيمتها]

$\text{صَ} = \text{س}^{\text{س}}\,(1+\text{لوس})$

(٣) ص = (جاس)$^{\text{جتاس}}$

نلاحظ وجود المتغير في الأساس والأس فندخل "لو" على الطرفين

لوص = لو(جاس)$^{\text{جتاس}}$

لوص = جتاس لو(جاس)

$\frac{1}{\text{ص}}$ ص َ = − جاس×لوجاس + جتاس× $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

ص َ = ص [− جاسلوجاس + $\frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس}}$]

ص َ = (جاس)$^{\text{جتاس}}$ [− جاسلوجاس + $\frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس}}$]

تدريبات: أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لما يلي : (١) ص = (جاس)$^{\text{س}}$ ، (٢) ص = (لوس)$^{\text{لوس}}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مشتقة الدالة الأسية

تذكير:

(١) تسمى الدالة $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$ المعرفة من $\text{ح} \longrightarrow \text{ح}^{+}$ ، $\forall\ \text{أ} \in \text{ح}^{+} / \{١\}$ بالدالة الأسية

ويمكن كتابتها بالصورة $\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$ ، وإذا كان $\text{أ} = \text{هـ}$ تسمى أسية طبيعية وتكتب $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$.

(٢) م.ت = ح ، المدى = $]\,٠ \,،\, \infty\,[$

قاعدة اشتقاق الدالة الأسية :

١) $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ن(س)}} \Leftarrow \bar{\text{ص}} = \text{أ}^{\text{ن(س)}} \times \bar{\text{ن}}\text{(س)} \times \text{لو أ}$ — القاعدة الأساسية

٢) $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}} \Leftarrow \bar{\text{ص}} = \text{أ}^{\text{س}} \times \text{لو أ}$ — حالة خاصة لأن مشتقة س = ١

٣) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ن(س)}} \Leftarrow \bar{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{ن(س)}} \times \bar{\text{ن}}\text{(س)}$ — حالة خاصة لأن لوهـ = ١

٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \bar{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، "الدلوعة e^{x}" — حالة خاصة من (٣) لأن $\bar{\text{س}} = ١$، ومايميزها عدم تأثرها بالإشتقاق أوالتكامل

مثال: أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لما يلي : (١) $\text{ص} = ٣^{\text{لوس}}$ ، (٢) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٥}$

(٣) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{لو}٥$ ، (٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لوس}} + ٢\,\text{لو}(\text{س}^{٢}+١)$

الحل: (١) $\bar{\text{ص}} = ٣^{\text{لوس}} \times \frac{١}{\text{س}} \times \text{لو}٣$

(٢) $$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} \times ٣}{٢\sqrt{\text{هـ}^{٣\text{س}}+٥}} = \frac{٣\,\text{هـ}^{٣\text{س}}}{٢\sqrt{\text{هـ}^{٣\text{س}}+٥}}$$

(٣) $\bar{\text{ص}} = (٢\text{س}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{س}^{٢} \times \text{هـ}^{٣\text{س}} \times ٣) + ٠ = ٢\text{س}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٣\text{س}^{٢} \times \text{هـ}^{٣\text{س}}$

(٤) قبل الاشتقاق نستخدم خاصية وهي أن هـ مع لو ينتهي لاحظ ذلك بالصورة الجديدة للدالة:

$$\text{ص} = \cancel{\text{هـ}}^{\cancel{\text{لو}}\text{س}} + ٢\,\text{لو}(\text{س}^{٢}+١) \Leftarrow \text{ص} = \text{س} + ٢\,\text{لو}(\text{س}^{٢}+١)$$

$$\bar{\text{ص}} = ١ + ٢ \times \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} = ١ + \frac{٤\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$$

تدريبات: (١) $ص = هـ^{٢س}$ لوقاس ، (٢) $ص = هـ^{س} \times ٢^{س}$ ، (٣) $ص = \frac{١}{١ + هـ^{٢س}}$

مشتقة تركيب دالتين (قاعدة التسلسل)

تعريف

إذا كانت س ، ع ، ص فترات حقيقية مفتوحة بحيث أن :

د : س ⟵ ع ، ع = د(س)

ه : ع ⟵ ص ، ص = ه(ع)

فإن : (د ○ ه)(س) = د [ه(س)] ، ∀ س ∈ س ، وتقرأ د بالنسبة لـ ه(س)

وكذلك : (ه ○ د)(س) = ه [د(س)] ، ∀ س ∈ س ، وتقرأ ه بالنسبة لـ د(س)

لإشتقاق تركيب دالتين صورتان هما :

الصورة الأولى: قاعدة اشتقاق تركيب دالتين

(١) (د ○ ه)َ(س) = دَ [ه(س)] × هَ(س)

(٢) (ه ○ د)َ(س) = هَ [د(س)] × دَ(س)

إن اشتقاق هذا النوع من الدوال يمر بثلاث مراحل أساسية قبل تطبيق القاعدة (١) وهي :

١- إيجاد دَ(س)

٢- التعويض بـ ه(س) في دَ(س) ، فتتكون دَ [ه(س)]

٣- إيجاد هَ(س) ، ثم تطبيق القاعدة (١)

تطبق نفس الخطوات إذا كان المطلوب تطبيق القانون (٢) مع مراعاة الاختلاف في الترتيب

مثال : إذا كانت د(س)=س^{٢}+١ ، ه(س)= س^{٣}-٢س ، وكانت ر(س)=(ه ○ د)(س) فأوجد رَ(٢)

الحل : المطلوب إيجاد مشتقة تركيب دالتين عند العدد ٢ وسنجدها كالآتي :

القاعدة : (ه ○ د)َ(س) = هَ [د(س)] × دَ(س) ، والخطوات الثلاث ستتم كما يلي :

- هَ(س) = ٣س^{٢}-٢
- هَ [د(س)] = ٣(س^{٢}+١)^{٢}-٢ [تم التعويض بـ د(س) في هَ(س)]
- دَ(س) = ٢س

∴ (ه ○ د)َ(س) = [٣(س^{٢}+١)^{٢}-٢] × ٢س = ٦س(س^{٢}+١)^{٢}-٤س

رَ(٢) = (ه ○ د)َ(٢) = ١٢×٢٥ - ٨ = ٣٠٠ - ٨ = ٢٩٢

ملاحظة : إذا أجرينا التركيب أولاً ثم الاشتقاق حسب القواعد السابقة فالطريقة صحيحة ما لم يلزمنا باستخدام طريقة التركيب مثل المثال السابق ممكن حله كما يلي:

$(ه \circ د)(س) = ه[د(س)] = (س^٢+١)^٣ - ٢(س^٢+١)$ أجرينا التركيب أولا ثم نشتق الدالة الجديدة

$\therefore$ لتكن $ل(س) = (س^٢+١)^٣ - ٢(س^٢+١) \Leftarrow ل'(س)$

$= ٣(س^٢+١)^٢ \times ٢س - ٢ \times ٢س = ٦س(س^٢+١)^٢ - ٤س$

و $ل'(٢) = ١٢ \times ٢٥ - ٨ = ٣٠٠ - ٨ = ٢٩٢$

الصورة الثانية: قاعدة التسلسل

إذا كانت $ص = ه(ع)$ ، $ع = د(س)$ ، فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

استخداماتها :

(١) نستخدم هذه القاعدة لحساب مشتقة دالة مركبة ،مثل الدالة التي على الصورة:

$ص = [د(س)]^ن$ ، بحيث نفرض أن $ع = د(س) \Leftarrow ص = ع^ن$.

(٢) نستخدمها أيضاً لحساب مشتقة دالتين منفصلتين بينهما متغير مشترك.

مثال : إذا كان $ص = ظا^٣(لوس)$ ، أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ بالتسلسل .

الحل : نضع $ع = ظا(لوس) \Leftarrow \therefore ص = ع^٣$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} = ٣ع^٢$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{س} \times قا^٢(لوس)$

$\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣ع^٢ \times \frac{١}{س} \times قا^٢(لوس)$ [وبالتعويض عن ع بقيمتها حيث $ع = ظا(لوس)$]

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٣ظا^٢(لوس) \times \frac{١}{س} \times قا^٢(لوس) = \frac{٣}{س} ظا^٢(لوس) \times قا^٢(لوس)$

مثال : لتكن $ص = جتا^٢ع$ ، $ع = ه^س$ ، أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل: $\frac{ءص}{ءع} = ٢جتاع \times -جاع$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ه^س$

$\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= ٢جتاع \times -جاع \times ه^س = -٢ه^س جتا ه^س جا ه^س$

ملاحظة : إذا أجرينا التركيب أولاً ثم الاشتقاق حسب القواعد السابقة فالطريقة صحيحة ما لم يلزمنا باستخدام طريقة التسلسل مثل المثال السابق ممكن حله كما يلي:

ص = جتا^٢^ع ، ع = هـ^س^ ⇐ ص = جتا^٢^هـ^س^

نجري التركيب أولا ثم نشتق الدالة بعد التركيب

∴ صَ = ٢ جتاهـ^س^ × − جاهـ^س^ × هـ^س^ = −٢هـ^س^ جتاهـ^س^ جاهـ^س^

مثال : لتكن ص = لو(ع+١) ، ع = قاس ، أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل: $\frac{ءص}{ءع} = \frac{١}{ع+١}$ ، $\frac{ءع}{ءس} =$ قاس ظاس

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{ع+١} \times$ قاس ظاس $= \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قاس}+١}$

سؤال وزاري ٢٠١٣–٢٠١٤م : إذا كانت ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = لوس ، أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل : $\frac{ءص}{ءع} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}} \times \frac{١}{س} = \frac{١}{٢س\sqrt{\text{لوس}}}$

تدريبات: (١) إذا كان د(س) = جتاس ، ىه(س) = هـ^س^ ، فأوجد (د ∘ ىه)َ(س)

(٢) إذا كانت ص = $\sqrt{١+\text{قا}^٢\text{س}}$ ، أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ باستخدام قاعدة التسلسل .

(٣) وزاري عام ٢٠١٢–٢٠١٣م : لتكن ص = هـ^ع^ ، ع = لو(س^٢^+١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$.

....

٢س

....

....

....

....

....

....

....

مشتقة الدالة الضمنية

الدوال السابقة التي مرت معنا هي دوال صريحة (عادية) ويمكن فيها وضع ص بدلالة س لكن الدوال التي يصعب فيها وضع ص في طرف تسمى دوال ضمنية وسنتعرف على طريقة اشتقاقها.

تعريف الدالة الضمنية هي الدالة التي يصعب فيها وضع ص بدلالة س (وضع ص في طرف)

من أمثلة الدوال الضمنية : ص^٢−٢س^٢+ص = ٠ ، ظاص+ص^{٢}س = هـ^{ص} ، لوس+لوص = هـ

لاحظ أنه يصعب وضع ص في طرف لأن ص يمثّل دالة بالنسبة لـ س أي ص = د(س) لذا تسمى مثل هذه الدوال بالدوال الضمنية.

طرق إشتقاق الدالة الضمنية: للدالة الضمنية طريقتان للاشتقاق:

أولاً: الطريقة العامة (المطولة)

وهي اشتقاق الدالة (المعادلة) بالنسبة للمتغير س وخطواتها كما يلي :

١− نشتق جميع الحدود بالنسبة للمتغير س كالآتي :

أ) إذا كان الحد يحتوي على س فقط فإن اشتقاقه كما سبق.

ب) إذا كان الحد يحتوي على ص فقط فإن اشتقاقه كما نشتق س ثم نضرب في صَ أو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

ج) إذا كان الحد يحتوي عل س و ص معاً فإن اشتقاقه وفق العلاقة بينهما (ضرب أو قسمة).

٢− نجعل الحدود التي تحتوي على صَ في طرف والحدود التي لا تحتويه في طرف آخر.

٣− نسحب صَ عامل مشترك من الحدود التي تحتويه.

٤− نقسم طرفي المعادلة على معامل صَ .

مثال : أوجد مشتقة كلاً من : (١) ص^٢+س ص+س^٢ = ٣س ، (٢) س^٣+٣ص^٢+جاص = ٠

(٣) لوس − هـ^{ص} + ظاص = ٠ ، (٤) $\sqrt{\text{س+ص}}$ = ص^٢−١

الحل : (١) ص^٢+س ص+س^٢ = ٣س

٢ص صَ + (١×ص+س صَ) +٢س=٣ [نشتق الطرفين بالنسبة لـ س]

٢ص صَ+ص+س صَ+٢س=٣

٢ص صَ+س صَ=٣−٢س−ص [نجمع الحدود التي تحوي صَ في الطرف الأيمن]

صَ(٢ص+س)=٣−٢س−ص [نسحب صَ عامل مشترك في الطرف الأيمن]

صَ = $\frac{\text{٣−٢س−ص}}{\text{٢ص+س}}$ [نجعل في الطرف الأيمن صَ فقط عن طريق القسمة]

(٢) $\text{س}^{٣}+٣\text{ص}^{٢}+\text{جاص} = ٠$

$٣\text{س}^{٢}+٦\text{ص صَ} + \text{جتاص صَ} = ٠$

$٦\text{ص صَ} + \text{جتاص صَ} = -٣\text{س}^{٢}$

$\text{صَ}\,(٦\text{ص}+\text{جتاص}) = -٣\text{س}^{٢}$

$$\text{صَ} = \frac{-٣\text{س}^{٢}}{٦\text{ص}+\text{جتاص}}$$

(٣) $\text{لوس} - \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ظاص} = ٠$

$\frac{١}{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{صَ} + \text{قا}^{٢}\text{ص صَ} = ٠$

$-\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{صَ} + \text{قا}^{٢}\text{ص صَ} = -\frac{١}{\text{س}}$

$\text{صَ}\,(-\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{قا}^{٢}\text{ص}) = -\frac{١}{\text{س}}$

$\text{صَ} = -\frac{١}{\text{س}} \div (-\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{قا}^{٢}\text{ص})$

$$\text{صَ} = -\frac{١}{\text{س}} \times \frac{١}{-\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{قا}^{٢}\text{ص}} = \frac{١}{\text{س}(\text{هـ}^{\text{ص}} - \text{قا}^{٢}\text{ص})}$$

(٤) $\sqrt{\text{س}+\text{ص}} = \text{ص}^{٢}-١$

$\frac{١+\text{صَ}}{٢\sqrt{\text{س}+\text{ص}}} = ٢\text{ص صَ} - ٠$ [بالضرب في $٢\sqrt{\text{س}+\text{ص}}$ للتخلص من المقام]

$\Leftarrow$ $١+\text{صَ} = ٢\text{ص صَ} \times ٢\sqrt{\text{س}+\text{ص}}$ $\Leftarrow$ $\text{صَ} - ٤\text{ص صَ}\sqrt{\text{س}+\text{ص}} = -١$

$\Leftarrow$ $\text{صَ}\,(١-٤\text{ص}\sqrt{\text{س}+\text{ص}}) = -١$ $\Leftarrow$ $\text{صَ} = \frac{-١}{١-٤\text{ص}\sqrt{\text{س}+\text{ص}}}$

تدريبات: أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدوال الآتية بالطريقة العامة :

(١) $\text{س}^{٢} - \sqrt{\text{س}-\text{ص}} = ٢$ ، (٢) $\text{س}^{٢}+\text{لوص}=\text{جتاص}+\text{لو}\sqrt{\text{س}}$

....

....

....

....

....

....

ثانياً : طريقة القاعدة (المختصرة)

إن استخدام هذه الطريقة تحتاج منك عزيزي الطالب إلى التركيز الجيد عند استخدامها.

إن شرط استخدام هذه القاعدة هو أن جميع الحدود في طرف واحد والقاعدة هي :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{(مشتقة المعادلة على أساس أن ص ثابت)}}{\text{مشتقة المعادلة على أساس أن س ثابت}}$$

مثال : أوجد مشتقة كلاً من : (١) $\text{س ص}^{٢} - \text{ص} - \text{س} - ٤ = ٠$

(٢) $\text{س}^{٢}\text{لوص} - \text{جتاص} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

الحل: (١) $\text{س ص}^{٢} - \text{ص} - \text{س} - ٤ = ٠$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-(\text{ص}^{٢} - ٠ - ١ - ٠)}{٢\text{س ص} - ١ - ٠ - ٠} = \frac{١ - \text{ص}^{٢}}{٢\text{س ص} - ١}$$

(٢) $\text{س}^{٢}\text{لوص} - \text{جتاص} = \text{هـ}^{\text{ص}} \Leftarrow \text{س}^{٢}\text{لوص} - \text{جتاص} - \text{هـ}^{\text{ص}} = ٠$ **[تم جعل المعادلة صفرية]**

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-(٢\text{سلوص} - ٠ - ٠)}{\text{س}^{٢} \times \frac{١}{\text{ص}} - (-\text{ جاص}) - \text{هـ}^{\text{ص}}} = \frac{-٢\text{سلوص}}{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}} + \text{جاص} - \text{هـ}^{\text{ص}}}$$

ملاحظة : يمكنك استخدام أحد الطريقتين للتأكد من صحة حل الطريقة الأخرى.

تدريبات : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدوال الآتية بطريقة القاعدة:

(١) $\text{ص}^{٢} - ٥\text{س}^{٢} = \text{س ص}^{٣}$ ، (٢) $\text{ص قاس} + \text{س جاص} = ٠$

أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في قواعد الاشتقاق

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١ – إذا كانت ص = هـ$^{\text{لوجتاس}}$ ، فإن صَ = ص ظاس ( )

٢ – إذا كانت ص = لو(قاس) ، فإن صَ = قاس ( )

٣ – ليكن ص = ٣ع – ٥ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = –٢ ، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = –٦ ( )

٤ – إذا كانت دَ(س) = هـ$^{\text{–٣س}}$ ، فإن دَ(٠) = –٣ ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١ – إذا كانت د(س) = س$^{\text{هـ}}$ – هـ$^{\text{٣}}$ ، فإن دَ(س) = ...

٢ – إذا كانت ص = ٥$^{\text{جتاس}}$ ، فإن صَ = ...

٣ – إذا كانت ص = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتا$^{\text{٣}}$س ، فإن صَ = ...

٤ – $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٣$^{\text{س}}$) = ٣$^{\text{س}}$ × ....

٥ – إذا كانت ص = ٢$^{\text{جاس}}$ ، فإن صَ = ...

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) ص$^{\text{٢}}$ – ٢س = ٩ ، فإن قيمة صَ = ... [$\frac{\text{–٢}}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{–١}}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{٢}}{\text{ص}}$]

٢) إذا كانت د(س) = جا٢س ، فإن دَ(٠) = ... [٠ ، ١ ، ٢ ، ٣]

٣) إذا كانت ص = ع$^{\text{٢}}$ ، ع = س + ١ ، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... [س+١ ، ٢(س+١) ، ٢س+١]

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر:

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١ – إذا كان د(س) = لوجا$^{\text{٢}}$س ، فإن دَ($\frac{\pi}{\text{٤}}$) = ...	١
٢ – إذا كانت ص$^{\text{٣}}$ – س$^{\text{٣}}$ = ١ ، فإن صَ $|_{(١ ، ١)}$ = ...	٢
	٠

س٥: إذا كانت ص = ع$^{\text{٣}}$ ، ع = قتا$^{\text{٢}}$س ، فأوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

....

....

....

....

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

المشتقات ذات الرتب العليا والمشتقة النونية

أولاً : المشتقات ذات الرتب العليا

(١) نرمز للمشتقة الأولى للدالة بالرموز : دَ(س) ، صَ ، $\frac{ءص}{ءس}$

(٢) نرمز للمشتقة الثانية للدالة بالرموز : دً(س) ، صً ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$

(٣) نرمز للمشتقة الثالثة للدالة بالرموز : دًّ(س) ، صًّ ، $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$

(٤) نرمز للمشتقة النونية للدالة بالرموز : $د^{(ن)}$(س) ، $ص^{(ن)}$ ، $\frac{ء^نص}{ءس^ن}$

وعليه فالمشتقات عندما ن > ٢ تسمى بالمشتقات ذات الرتب العليا.

ملاحظة : لإيجاد المشتقات ذات الرتب العليا لدالة نوجد المشتقة الأولى ثم الثانية والثالثة وهكذا ... حتى رتبة المشتقة المطلوبة.

مثال : إذا كانت ص=٥س+س^٢ ، فأوجد صًّ .

الحل : صَ = ٥+٢س

صً = ٢

صًّ = ٠ [نلاحظ أن هذه الدالة قابلة إلى الاشتقاق الثالث]

توضيح : إن مسائل الإثبات كثيرة لهذا الموضوع وسنعطي لك بعضها والتي يجب عليك التركيز في طريقة إثباتها حيث نوجد المشتقات المطلوبة والتعويض في الطرف الأيمن والوصول إلى الطرف الأيسر .

مثال : إذا كانت ص = جاس+جتاس ، أثبت أن : (١) صً = − ص ، (٢) (صَ)^٢+ص^٢= ٢

الحل: (١) نلاحظ أن المشتقة الثانية مطلوبة للإثبات لذلك نوجد صَ، ثم صً

صَ = جتاس− جاس

صً = − جاس− جتاس

نعوض الآن في الطرف الأيمن والتوصل بخطوات رياضية صحيحة إلى الطرف الأيسر

∴ الطرف الأيمن = صً = − جاس− جتاس= − (جاس+جتاس) = − ص = الطرف الأيسر

(هـ.ط)

(٢)(صَ)^2+ص^2=٢ ،في هذا الإثبات يجب معرفة صَ أولاً وقد أُوجدت في الفرع الأول من الإجابة

∴ الطرف الأيمن = (صَ)^2+ص^2= (جتاس−جاس)^2+ (جاس+جتاس)^2 ، [وبفك المربع الكامل]

= جتا^{2}س−~~٢جتاس جاس~~+جا^{2}س+جا^{2}س+~~٢جاس جتاس~~+جتا^{2}س $\boxed{\text{جتا}^2\text{س}+\text{جا}^2\text{س} = ١}$

= ٢جتا^{2}س+٢جا^{2}س = ٢(جتا^{2}س+جا^{2}س) =٢×١= ٢ = الطرف الأيسر (هـ.ط)

تمرين محلول: إذا كانت ص = ٩ جا٣س، ٩ ثابت، جا٣س ≠ ٠ ،فأوجد قيمة ٩ التي تحقق المعادلة:

صً + ٢ص − ٤ جا٣س = ٠

الجواب: إن هذا التمرين يختلف عن مسائل الإثبات لذلك سنحل المعادلة والطرفين معا ، لكن نلاحظ أن الطرف الأيمن يحتوي على صً وهي المشتقة الثانية لـ ص سنجدها أولاً ثم التعويض في المعادلة بطرفيها

ص = ٩ جا٣س   [الدالة المعطاة]

صَ = ٣٩ جتا٣س   [المشتقة الأولى]

صً = −٩٩ جا٣س   [المشتقة الثانية]

∴ وبالتعويض في المعادلة صً + ٢ص − ٤ جا٣س = ٠ يكون :

−٩٩ جا٣س + ٢٩ جا٣س − ٤ جا٣س = ٠ [بتجميع الحدود الجبرية]

−٧٩ جا٣س − ٤ جا٣س = ٠ [سحب جا٣س عامل مشترك]

جا٣س(−٧٩−٤) = ٠   [بالقسمة على جا٣س علماً أن جا٣س ≠ ٠]

−٧٩−٤ = ٠ ⇐ −٧٩=٤ ⇐ ٩ = −$\frac{٤}{٧}$

تدريب : إذا كانت ص = س−لوس ، فبرهن أن : س^{2}صً − صَ − $\frac{١}{س}$ = ٠

....

....

....

....

....

....

....

....

المشتقة الثانية للدالة الضمنية : لإيجاد المشتقة الثانية نتبع الخطوات الآتية :

١– نوجد المشتقة الأولى بإحدى الطريقتين السابقتين .

٢– نوجد المشتقة الثانية بالطريقة العامة.

٣– نعوّض عن المشتقة الأولى بقيمتها من الخطوة ① مع التبسيط.

مثال : أوجد المشتقة الثانية للدالة : س^{٢}– ص^{٢} = ٧

الحل: ٢س–٢ص صَ = ٠ [اشتقينا اشتقاق ضمني]

٢ص صَ = ٢س

صَ = $\frac{٢س}{٢ص}$ ⇐ صَ = $\frac{س}{ص}$ [نشتق مرة أخرى اشتقاق بالطريقة العامة]

صً = $\frac{١×ص – س صَ}{ص^{٢}}$ [وبالتعويض عن صَ بـ $\frac{س}{ص}$]

صً = $\frac{ص – س \frac{س}{ص}}{ص^{٢}}$ = $\frac{ص}{ص^{٢}}$ – $\frac{\frac{س^{٢}}{ص}}{ص^{٢}}$ = $\frac{١}{ص}$ – $\frac{س^{٢}}{ص^{٣}}$

سؤال وزاري ٢٠١٣–٢٠١٤ م : إذا كانت (س–ص)^{٤} = ١٦ ، فبرهن أن : صً = صفر

الحل: (١) الطريقة الأولى الحل كدالة ضمنية

نوجد المشتقة الأولى :

٤(س–ص)^{٣} × (١–صَ) = ٠

١–صَ = ٠ ⇐ صَ = ١

∴ صً = ٠ (هـ . ط)

أما ٤(س–ص)^{٣}= ٠

⇐ س–ص= ٠

⇐ س=ص مستحيل

أو ١–صَ = ٠

(٢) الطريقة الثانية الحل كدالة صريحة

نحوّل الدالة إلى صريحة بأخذ الجذر الرابع

(س–ص)^{٤} = (±٢)^{٤}

س–ص = ±٢ ⇐ ص = س ∓ ٢ [نشتق كدالة صريحة]

صَ = ١ ⇐ صً = ٠ (هـ.ط)

سؤال وزاري ٢٠١٣-٢٠١٤ م : إذا كانت $هـ^{س ص} = ٢$ ، فبرهن أن : $ص'' = \frac{٢ص}{س^٢}$

الحل: (١) الطريقة الأولى الحل كدالة ضمنية

نوجد المشتقة الأولى :

$هـ^{س ص} (١ \times ص + س ص') = ٠$

$ص هـ^{س ص} + س ص' هـ^{س ص} = ٠$

$س ص' هـ^{س ص} = - ص هـ^{س ص}$

$ص' = \frac{- ص هـ^{س ص}}{س هـ^{س ص}} = \frac{-ص}{س}$

$ص'' = \frac{- ص' \times س - (-ص \times ١)}{س^٢}$

$= \frac{-س ص' + ص}{س^٢}$ [وبالتعويض بـ $ص' = \frac{-ص}{س}$]

$= \frac{-س \frac{-ص}{س} + ص}{س^٢} = \frac{ص + ص}{س^٢} = \frac{٢ص}{س^٢}$ (هـ.ط)

(٢) الطريقة الثانية الحل كدالة صريحة (عادية)

نحوّل الدالة إلى صريحة بإدخال "لو" على الطرفين

$لوهـ^{س ص} = لو٢$

$س ص = لو٢ \Leftarrow ص = \frac{لو٢}{س}$ [نشتق كدالة صريحة]

$ص' = \frac{-لو٢}{س^٢}$

تذكر أن : لو٢ عدد ثابت . وأن $ص = \frac{١}{س}$ مشتقته $\frac{-١}{س^٢}$

$ص'' = \frac{٢س لو٢}{س^٤} = \frac{٢لو٢}{س^٣} = \frac{٢}{س^٢} \times \frac{لو٢}{س}$

$\because ص = \frac{لو٢}{س}$

$\therefore ص'' = \frac{٢ص}{س^٢}$ (هـ.ط)

سؤال وزاري ٢٠١٢-٢٠١٣ م : إذا كانت س = جتاص ، فأثبت أن صً – س (صَ)^{٣} = صفر

الحل: نشتق الدالة: س = جتاص كلاً من الاشتقاق الأول والثاني:

١ = – جاص صَ ⇐ صَ = $\frac{\text{-١}}{\text{جا ص}}$ [هذا الاشتقاق الأول]

صً = $\frac{\text{-(-١)} \times \text{جتاص صَ}}{\text{جا}^{٢}\text{ص}}$ = $\frac{\text{جتاص صَ}}{\text{جا}^{٢}\text{ص}}$ [نعوض بـ صَ = $\frac{\text{-١}}{\text{جا ص}}$]

= $\frac{\text{جتاص}}{\text{جا}^{٢}\text{ص}} \times \frac{\text{-١}}{\text{جا ص}} = \frac{\text{- جتاص}}{\text{جا}^{٣}\text{ص}}$

الطرف الأيمن = صً – س (صَ)^{٣} = $\frac{\text{- جتاص}}{\text{جا}^{٣}\text{ص}}$ – جتاص × $\frac{\text{- ١}}{\text{جا}^{٣}\text{ص}}$

= $\cancel{\frac{\text{- جتاص}}{\text{جا}^{٣}\text{ص}}} + \cancel{\frac{\text{جتاص}}{\text{جا}^{٣}\text{ص}}}$

= صفر = الطرف الأيسر (هـ.ط)

تدريب محلول : إذا كانت ص – س ص = جاس ، أثبت أن صً + ص = $\frac{\text{٢صَ}}{\text{١ – س}}$

الحل : صَ – (١ ×ص+س صَ) = جتاس [إجراء الاشتقاق الأول]

صَ – ص – س صَ = جتاس

نشتق مرة أخرى على وضعية ناتج المشتقة الأولى (دون جعل صَ في طرف) :

صً – صَ – (١ ×صَ + س صً) = – جاس [إجراء الاشتقاق الثاني]

صً – صَ – صَ – س صً + جاس = ٠ [ترتيب الحدود]

صً – س صً – ٢صَ + ص – س ص = ٠ [التعويض عن جاس بـ ص – س ص]

صً (١ – س) + ص(١ – س) = ٢صَ [سحب صً و صَ من الحدود التي تحويه]

صً + ص = $\frac{\text{٢صَ}}{\text{١ – س}}$ (هـ.ط) [بالقسمة على (١ –س)]

تدريب : إذا كانت س = لو(س+ص) ، فأثبت أن : ١ + صَ – صً = ٠

....

....

....

....

....

ثانياً: المشتقة النونية

تعريفها: هي قانون يعطي جميع المشتقات العليا ولكل دالة مشتقة نونية مختلفة عن الدالة الأخرى ويرمز لها بالرمز : $د^{(ن)}(س)$ ، $ص^{(ن)}$ ، $\frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}}$

نعطي لك عزيزي الطالب تذكير بالمضروب والذي تعرفت عليه بالتفصيل في وحدة مبدأ العد.

ملاحظات:

(١) مضروب عدد صحيح موجب (ن) : هو حاصل ضرب كافة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تبدأ بالعدد ن وتتناقص بمقدار (١) وتنتهي بالواحد الصحيح ، ويرمز له بالرمز : $\underline{|ن}$ أو ن! أي أن:

$\underline{|ن}$ = ن (ن−١) (ن−٢) (ن−٣) × ... × ٣×٢×١

مثلاً : $\underline{|٥}$ = ٥×٤×٣×٢×١

$\underline{|٧}$ = ٧×٦×٥×٤×٣×٢×١

وضع المضروب لتسهيل كتابة حاصل ضرب أعداد متتالية تنتهي بالواحد

(٢) مضروبات مشهورة : $\underline{|٢}$ = ٢ ، $\underline{|١}$ = ١ ، $\underline{|٠}$ = ١

(٣) تحويل أي عدد صحيح (م > ٢) إلى مضروب: (أ) لتحويل العدد إلى المضروب نقوم بضرب البسط والمقام في مضروب الأقل منه أي م = $\frac{م\,\underline{|م-١}}{\underline{|م-١}}$ فمثلاً : ٣ = $\frac{٣\,\underline{|٣-١}}{\underline{|٣-١}}$ = $\frac{٣\,\underline{|٢}}{\underline{|٢}}$.

(ب) لتحويل العدد إلى مضروب نقسم مضروب العدد على مضروب العدد الأقل منه أي أن :

م = $\frac{\underline{|م}}{\underline{|م-١}}$ فمثلاً : ٦ = $\frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-١}}$ = $\frac{\underline{|٦}}{\underline{|٥}}$

ملاحظة: إذا كانت الإشارة تتناوب في المشتقات بالصورة (−،+،−،...) نضع في الصيغة $(-١)^{ن}$ ،وإذا كانت الإشارة تتناوب بالصورة (+،−،+،...) نضع في الصيغة $(-١)^{ن+١}$

خطوات إيجاد المشتقة النونية لدالة:

١− نوجد المشتقات الثلاث الأولى مع الاهتمام باستخدام المضروب إن أمكن.

٢− نقوم باستنتاج القانون من خلال:

أ) مراعاة تناوب الإشارات للمشتقات الثلاث إن وجد.

ب) مقارنة درجة المشتقة والكميات التي يحصل فيها تغيير (المضروب ، أس المقام ، العدد المتكرر).

مثال: إذا كانت ص $= \dfrac{1}{\text{س}+\text{ب}}$ ، ب ثابت فأوجد المشتقة النونية.

الحل: نضع الدالة في الصورة ص = $(\text{س}+\text{ب})^{-1}$

$$\text{ص}' = -1(\text{س}+\text{ب})^{-2} \times 1 = \frac{-1}{(\text{س}+\text{ب})^{2}} = \frac{-\underline{|1}}{(\text{س}+\text{ب})^{2}}$$

$$\text{ص}'' = -1\times-2(\text{س}+\text{ب})^{-3} \times 1\times 1 = \frac{2}{(\text{س}+\text{ب})^{3}} = \frac{\underline{|2}}{(\text{س}+\text{ب})^{3}}$$

$$\text{ص}''' = -1\times-2\times-3(\text{س}+\text{ب})^{-4} \times 1\times 1\times 1 = \frac{-3\times 2}{(\text{س}+\text{ب})^{4}} = \frac{-\underline{|3}}{(\text{س}+\text{ب})^{4}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{d^{n}\text{ص}}{d\text{س}^{n}} = (-1)^{n} \times \frac{\underline{|n}}{(\text{س}+\text{ب})^{n+1}}}$$

ملاحظة: للتأكد من صحة المشتقة النونية الناتجة نضع $n = 3$ ثم نقارن بين النتيجة التي حصلنا عليها بالمشتقة الثالثة فإذا كانت متساوية فإن القانون صحيح وإلاّ نراجع الخطوات السابقة.

مثال: إذا كانت ص $= \dfrac{1}{(2\text{س}+1)^{2}}$ ، فأوجد $\dfrac{d^{n}\text{ص}}{d\text{س}^{n}}$

الحل: نضع الدالة في الصورة ص = $(2\text{س}+1)^{-2}$

$$\text{ص}' = -2(2\text{س}+1)^{-3} \times 2 = \frac{-2\times 2^{1}}{(2\text{س}+1)^{3}} = \frac{-2\times\underline{|2}}{(2\text{س}+1)^{3}}$$

$$\text{ص}'' = -2\times-3(2\text{س}+1)^{-4} \times 2\times 2 = \frac{-2\times-3\times 2^{2}}{(2\text{س}+1)^{4}} = \frac{2^{2}\times\underline{|3}}{(2\text{س}+1)^{4}}$$

$$\text{ص}''' = -2\times-3\times-4(2\text{س}+1)^{-5} \times 2\times 2\times 2 = \frac{-2\times-3\times-4\times 2^{3}}{(2\text{س}+1)^{5}} = \frac{-2^{3}\times\underline{|4}}{(2\text{س}+1)^{5}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{d^{n}\text{ص}}{d\text{س}^{n}} = (-1)^{n} \times \frac{2^{n}\,\underline{|n+1}}{(2\text{س}+1)^{n+2}}}$$

لاحظ أن المقام مقدار قابل للتحليل لذلك نحلل المقدار قبل استنتاج المشتقة النونية

تدريب : أوجد المشتقة النونية للدالة ص $= \dfrac{1}{\text{س}^{2}+2\text{س}+1}$

....

....

....

....

....

مثال: إذا كانت $\text{ص} = \frac{١}{(\text{س}-٢)^{٤}}$ ، فأوجد $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{ن}}}$

> تم تحويل العدد ٤ في المشتقة الأولى إلى مضروب حسب طريقة تحويل العدد إلى مضروب ليسهل استنتاج الصيغة وهكذا مع البقية

الحل: نضع الدالة في الصورة $\text{ص} = (\text{س}-٢)^{-٤}$

$$\text{ص}' = -٤(\text{س}-٢)^{-٥} \times ١ = \frac{-٤ \times ٣!}{٣!\,(\text{س}-٢)^{٥}} = \frac{-٤!}{٣!\,(\text{س}-٢)^{٥}}$$

$$\text{ص}'' = -٤\times-٥(\text{س}-٢)^{-٦}\times١\times١ = \frac{٥\times٤\times ٣!}{٣!\,(\text{س}-٢)^{٦}} = \frac{٥!}{٣!\,(\text{س}-٢)^{٦}}$$

$$\text{ص}''' = -٤\times-٥\times-٦(\text{س}-٢)^{-٧}\times١\times١\times١ = \frac{-٦\times٥\times٤\times ٣!}{٣!\,(\text{س}-٢)^{٧}} = \frac{-٦!}{٣!\,(\text{س}-٢)^{٧}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{ن}}} = (-١)^{\text{ن}} \times \frac{(\text{ن}+٣)!}{٣!\,(\text{س}-٢)^{\text{ن}+٤}}$$

مثال: أوجد المشتقة النونية للدوال الآتية:

(١) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$ ، أ ثابت ، (٢) $\text{ص} = ٧^{٢\text{س}+٣}$ ، (٣) $\text{ص} = \text{س هـ}^{\text{س}}$

الحل: (١) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$

$$\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{أس}} \times \text{أ} = \text{أ هـ}^{\text{أس}}$$

$$\text{ص}'' = \text{هـ}^{\text{أس}} \times \text{أ} \times \text{أ} = \text{أ}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}}$$

$$\text{ص}''' = \text{هـ}^{\text{أس}} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} = \text{أ}^{٣}\text{هـ}^{\text{أس}}$$

$$\therefore \text{ص}^{(\text{ن})} = \text{أ}^{\text{ن}}\text{هـ}^{\text{أس}}$$

(٢) $\text{ص} = ٧^{٢\text{س}+٣}$

$$\text{ص}' = ٧^{٢\text{س}+٣} \times ٢ \times \text{لو}٧ = ٢^{١}\,(\text{لو}٧)^{١} \times ٧^{٢\text{س}+٣}$$

$$\text{ص}'' = ٧^{٢\text{س}+٣} \times ٢ \times \text{لو}٧ \times ٢ \times \text{لو}٧ = ٢^{٢}\,(\text{لو}٧)^{٢} \times ٧^{٢\text{س}+٣}$$

$$\text{ص}''' = ٧^{٢\text{س}+٣} \times ٢ \times \text{لو}٧ \times ٢ \times \text{لو}٧ \times ٢ \times \text{لو}٧ = ٢^{٣}\,(\text{لو}٧)^{٣} \times ٧^{٢\text{س}+٣}$$

$$\therefore \text{ص}^{(\text{ن})} = ٢^{\text{ن}}\,(\text{لو}٧)^{\text{ن}} \times ٧^{٢\text{س}+٣}$$

(٣) $\text{ص} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ [تمرين]

$$\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{ص}'' = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} = ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{ص}''' = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} = ٣\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{ص}^{(\text{ن})} = \text{ن}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}$$

مثال: أوجد المشتقة النونية للدوال الآتية: (١) $\text{ص} = \text{لوس}$ ، (٢) $\text{ص} = \text{لو}(\text{أس}+\text{ب})$

الحل: (١) $\text{ص} = \text{لوس} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{\text{س}} = \text{س}^{-١} = \frac{\lfloor ٠}{\text{س}}$

$$\text{ص}'' = -١\,\text{س}^{-٢} = \frac{-١}{\text{س}^٢} = \frac{-\lfloor ١}{\text{س}^٢} \quad ، \quad \text{ص}''' = -١ \times -٢ \times \text{س}^{-٣} = \frac{١\times٢}{\text{س}^٣} = \frac{\lfloor ٢}{\text{س}^٣}$$

$$\boxed{\therefore\ \frac{\text{د}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{د}\,\text{س}^{\text{ن}}} = (-١)^{\text{ن}+١} \times \frac{\lfloor \text{ن}-١}{\text{س}^{\text{ن}}}}$$

(٢) $\text{ص} = \text{لو}(\text{أس}+\text{ب}) \Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{أ}}{(\text{أس}+\text{ب})} = \text{أ}(\text{أس}+\text{ب})^{-١} = \frac{\text{أ}}{(\text{أس}+\text{ب})} = \frac{\text{أ}\lfloor ٠}{(\text{أس}+\text{ب})}$

$$\text{ص}'' = \text{أ} \times -١ \times (\text{أس}+\text{ب})^{-٢} \times \text{أ} = \frac{-\text{أ}^٢ \times ١}{(\text{أس}+\text{ب})^٢} = \frac{-\text{أ}^٢\lfloor ١}{(\text{أس}+\text{ب})^٢}$$

$$، \quad \text{ص}''' = \text{أ} \times -١ \times -٢ \times (\text{أس}+\text{ب})^{-٣} \times \text{أ} \times \text{أ} = \frac{\text{أ}^٣ \times ١ \times ٢}{(\text{أس}+\text{ب})^٣} = \frac{\text{أ}^٣\lfloor ٢}{(\text{أس}+\text{ب})^٣}$$

$$\boxed{\therefore\ \frac{\text{د}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{د}\,\text{س}^{\text{ن}}} = (-١)^{\text{ن}+١} \times \frac{\text{أ}^{\text{ن}}\lfloor \text{ن}-١}{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}}}$$

تدريب: أوجد المشتقة النونية للدالة $\text{ص} = \text{لو}(\text{س}^٢+٢\text{س}+١)$

لاحظ أن بعد "لو" مقدار قابل للتحليل لذلك نحلل المقدار قبل استنتاج المشتقة النونية

ملاحظة: عند استنتاج المشتقة النونية للدوال المثلثية علينا الإرجاع إلى النسبة الأصلية عن طريق المتطابقتين الآتيتين : (١) جتاس = جا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$ ، (٢) جاس = − جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$

مثال: أوجد المشتقة النونية للدوال الآتية:

(١) ص = جتاس ، (٢) ص = جا٢س ، (٣) ص = جا^{2}س ، (٤) ص = س جتاس

الحل: (١) ص = جتاس ⇐ صَ = − جاس = جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$

صً = − جا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$ = جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$+\frac{\pi}{2})$ = جتا$(\frac{2\pi}{2}+$ س$)$

ص‴ = − جا$(\frac{2\pi}{2}+$ س$)$ = جتا$(\frac{2\pi}{2}+$س$+\frac{\pi}{2})$ = جتا$(\frac{3\pi}{2}+$ س$)$

∴ ص$^{(ن)}$ = جتا$(\frac{ن\pi}{2}+$ س$)$

(٢) ص = جا٢س ⇐ صَ = ٢ جتا٢س = ٢ جا$(\frac{\pi}{2}+$٢س$)$

صً = ٢×٢ جتا$(\frac{\pi}{2}+$٢س$)$ = ٢^{2}جا$(\frac{\pi}{2}+$٢س$+\frac{\pi}{2})$ = ٢^{2}جا$(\frac{2\pi}{2}+$ ٢س$)$

ص‴ = ٢×٢×٢ جتا$(\frac{2\pi}{2}+$٢س$)$ = ٢^{3}جا$(\frac{2\pi}{2}+$٢س$+\frac{\pi}{2})$ = ٢^{3}جا$(\frac{3\pi}{2}+$ ٢س$)$

∴ ص$^{(ن)}$ = ٢^{ن} جا$(\frac{ن\pi}{2}+$ ٢س$)$

(٣) ص = جا^{2}س ⇐ صَ = ٢جاس جتاس = جا٢س = ٢^{0}جا$(\frac{0\pi}{2}+$ ٢س$)$

صً = ٢ جتا٢س = ٢ جا$(\frac{\pi}{2}+$٢س$)$

ص‴ = ٢×٢ جتا$(\frac{\pi}{2}+$٢س$)$ = ٢^{2}جا$(\frac{\pi}{2}+$٢س$+\frac{\pi}{2})$ = ٢^{2}جا$(\frac{2\pi}{2}+$ ٢س$)$

∴ ص$^{(ن)}$ = ٢$^{ن-1}$ جا$(\frac{(ن-1)\pi}{2}+$ ٢س$)$

(٤) ص = س جتاس ⇐ صَ = جتاس − س جاس = جتاس + س جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$

صً = −جاس+جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$+س× − جا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$ = جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$+جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$+س جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$+\frac{\pi}{2})$

= ٢ جتا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$ + س جتا$(\frac{2\pi}{2}+$س$)$

ص‴ = ٢× − جا$(\frac{\pi}{2}+$س$)$+جتا$(\frac{2\pi}{2}+$س$)$+س× − جا$(\frac{2\pi}{2}+$س$)$

= ٢ جتا$(\frac{2\pi}{2}+$س$)$+جتا$(\frac{2\pi}{2}+$س$)$+س جتا$(\frac{3\pi}{2}+$س$)$ = ٣ جتا$(\frac{2\pi}{2}+$س$)$ + س جتا$(\frac{3\pi}{2}+$س$)$

∴ ص$^{(ن)}$ = ن جتا$(\frac{(ن-1)\pi}{2}+$س$)$ + س جتا$(\frac{ن\pi}{2}+$س$)$

تدريبات: أوجد المشتقة النونية للدوال الآتية: (١) ص = جاس ، (٢) ص = جتا؟س

(٣) ص = جتا^{2}س ، (٤) ص = جتا^{2}س – جا^{2}س ، (٥) ص = س جاس

مسائل محلولة: (١) أوجد المشتقة النونية للدالة $ص = هـ^{١-لوس}$

الحل: $ص = هـ^{١-لوس} \Leftarrow ص = هـ^{١} \times هـ^{-لوس} \Leftarrow ص = هـ \times هـ^{لوس^{-١}} = هـ\, س^{-١}$

$$\therefore ص' = هـ \times -١ \times س^{-٢} = هـ \; \frac{-\underline{|١}}{س^{٢}}$$

لا تنسى أن هـ عدد ثابت

$$ص'' = هـ \times -١ \times -٢ \times س^{-٣} = هـ \; \frac{\underline{|٢}}{س^{٣}}$$

$$ص''' = هـ \times -١ \times -٢ \times -٣ \times س^{-٤} = هـ \; \frac{-\underline{|٣}}{س^{٤}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}} = (-١)^{ن} \times هـ \; \frac{\underline{|ن}}{س^{ن+١}}}$$

(٢) إذا كان $ص' = هـ^{-ص}$ ، فأوجد المشتقة النونية.

الحل: نلاحظ أن المشتقة الأولى موجودة فنوجد كلاً من المشتقة الثانية والثالثة

$ص'' = هـ^{-ص} \times -ص'$ [نعوض بدل $ص'$ بـ $هـ^{-ص}$]

$= هـ^{-ص} \times -هـ^{-ص} = -هـ^{-٢ص}$

$ص''' = -هـ^{-٢ص} \times -٢ص' = -هـ^{-٢ص} \times -٢\, هـ^{-ص} = ٢\, هـ^{-٣ص}$

$$\boxed{\therefore \frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}} = (-١)^{ن+١} \times \underline{|ن-١}\; هـ^{-ن ص}}$$

ملاحظة هامة: إذا كانت $ص = س^{ن}$ $\forall\, ن \in ص^{+}$ ، فإن :

(١) $ص^{(ن)} = \underline{|ن}$ ، (٢) $ص^{(ن+١)} = صفر$ ، (٣) $ص^{(ن-١)} = \underline{|ن}\; س$

فمثلاً: $ص = س^{٥}$ ، فإن: $ص^{(٥)} = \underline{|٥} = ١٢٠$

$ص^{(٥+١)} = ص^{(٦)} = ٠$

$ص^{(٥-١)} = ص^{(٤)} = \underline{|٥}\; س = ١٢٠\, س$

(ورقة عمل) أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في المشتقات ذات الرتب العليا والمشتقة النونية

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١- إذا كانت ص = س^{٦} ، فإن المشتقة السابعة ص$^{(٧)}$ = ١ ( )

٢- إذا كانت ص = س^{٣} ، فإن صً = $\underline{|٣}$ ( )

س٢: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) إذا كانت ص = هـ^{٢س} ، فإن صَ − ٢ص = ... [−١ ، ١ ، صفر ، −٢]

س٣: إذا كانت (س − ص)^{٤} = ١٦ فبرهن أن : صً = صفر

....

....

....

....

س٤: إذا كان ص = ٣ + جا٢س ، فأثبت أن ٤ص + صً = ١٢

....

....

....

....

معادلة المماس ومعادلة الناظم

تعرفت عزيزي الطالب سابقاً على معادلة المماس ومعادلة الناظم عند نقطة معينة ولتكن (م ، د(م)) وهما كالآتي:

معادلة المماس هي : ص − د(م) = دَ(م) (س−م)

علماً أن: دَ(م) = ميل المماس

معادلة الناظم هي : ص − د(م) = − $\frac{١}{دَ(م)}$ (س−م)

تعريف الناظم: هو المستقيم العمودي على المماس في نقطة التماس

ملاحظة مهمة جداً: لإيجاد معادلة المماس ومعادلة الناظم يجب معرفة شيئين أساسيين وهما: الميل [مشتقة الدالة عند النقطة (م ، د(م))] ونقطة التماس (م ، د(م)) .

وهنا سندرج لك طرق لإيجاد كلاً من الميل ونقطة التماس .

أولاً: طرق إيجاد الميل:

١) إذا عُلمت معادلة المماس فإن إيجاد الميل بعدة طرق وهي:

(أ) الميل = $\frac{-\text{ معامل س}}{\text{معامل ص}}$.

(ب) الميل = المشتقة الأولى لمعادلة المماس.

(جـ) نضع ص في طرف من المعادلة فيكون الميل يساوي معامل س.

٢) إذا عُلم المماس يمر بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن :

الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

٣) إذا عُلم قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ولتكن هـ فإن:

الميل = ظا هـ .

٤) إذا عُلم المماس يوازي محور السينات فإن ميل المماس = صفر وميل الناظم غير معرف ، وفي هذه الحالة فإن معادلة المماس هي: ص = د(م) ، ومعادلة الناظم هي: س = م .

٥) إذا عُلم المماس يوازي محور الصادات فإن ميل المماس غير معرف وميل الناظم = صفر ، وفي هذه الحالة فإن معادلة المماس هي: س = م ، ومعادلة الناظم هي: ص = د(م) .

٦) إذا عُلم المماس يوازي المستقيم م س+ب ص+جـ = ٠ فإن: ميل المماس=ميل المستقيم =− $\frac{م}{ب}$

٧) إذا عُلم المماس عمودي على المستقيم م س+ب ص+جـ = ٠ فإن:

ميل المماس = − مقلوب ميل المستقيم = $\frac{ب}{م}$.

٨) إذا عُلمت معادلة المنحنى (الدالة) فإن ميل المماس = مشتقة الدالة عند النقطة (م ، د(م)) .

ثانياً: طرق إيجاد النقطة: إذا لم تعطى النقطة ضمن السؤال فيمكن إيجادها من خلال الآتي:

١) لمعرفة نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ، ونوجد س .

٢) لمعرفة نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ، ونوجد ص .

٣) لإيجاد نقاط التقاطع بين منحنيين نحل معادلتيهما معاً .

تنبيه هام: ركّز عزيزي الطالب جيداً على معطيات المسألة والمطلوب وتسخير المعطيات لإيجاد ما يساعدك على تحقيق المطلوب من خلال تفسير المعطيات حسب ما أعطي لك في طرق إيجاد الميل.

ملاحظة: اشتق الدالة حسب ما أعطيت لك سواءً بصورة ضمنية أو صريحة ولا تحول الضمنية إلى صريحة إلاّ إذا دعت الضرورة لذلك .

مثال: أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم لمنحنى الدالة د(س) = س^{٤} − س^{٢} +١ عند النقطة(−١ ، ١) .

الحل: هذا المثال مباشرة ما علينا إلاّ اشتقاق الدالة وتعويض بالنقطة في المشتقة والحصول على الميل ثم كتابة المعادلتين :

دَ(س) = ٤س^{٣} − ٢س ⇐ دَ(س)|$_{(-١ ، ١)}$ = ٤(−١)^{٣}−٢(−١) = −٤+٢ = −٢ = ميل المماس

∴ معادلة المماس هي: ص−١ = −٢(س−(−١)) ⇐ ص−١ = −٢س−٢ ⇐ ٢س+ص+١ = ٠

ومعادلة الناظم هي: ص−١ = $\frac{-١}{-٢}$(س− (−١)) ⇐ ٢ص−٢ = س+١ ⇐ س−٢ص+٣ = ٠

سؤال وزاري ٢٠١٣−٢٠١٤: أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة س^{٣} − ص^{٣} −٤س ص = ٦ عند النقطة(١ ، −١) .

الحل: أ = ١ ، د(أ) = −١ ، دَ(أ) = ميل المماس = ؟ (نجده أولاً)

نشتق الدالة مع ملاحظة أنها دالة ضمنية : ٣س^{٢}−٣ص^{٢}صَ− (٤ص+٤س صَ) = ٠

٣س^{٢}−٣ص^{٢}صَ−٤ص−٤س صَ = ٠ ⇐ −٣ص^{٢}صَ−٤س صَ = ٤ص−٣س^{٢}

صَ(−٣ص^{٢}−٤س) = ٤ص−٣س^{٢} ⇐ صَ = $\frac{\text{٤ص}-\text{٣س}^{٢}}{-\text{٣ص}^{٢}-\text{٤س}}$

يمكن الاشتقاق بطريقة القاعدة (المختصرة)

نعوض بالنقطة في المشتقة لإيجاد الميل :

صَ|$_{(١ ، -١)}$ = $\frac{٤\times-١-٣(١)^{٢}}{-٣(-١)^{٢}-٤\times١}$ = $\frac{-٤-٣}{-٣-٤}$ = $\frac{-٧}{-٧}$ = ١ = ميل المماس

∴ معادلة المماس هي: ص−(−١) = ١(س−١) ⇐ ص+١ = س−١ ⇐ س−ص−٢ = ٠

سؤال وزاري ٢٠١٤-٢٠١٥: أوجد معادلة المماس للمنحنى س ص+ص = هـ^س ، عند س = ٠

الحل: هنا أعطي لنا فقط الإحداثي السيني للنقطة (س = ٠) فنوجد ص بالتعويض في المنحنى

بـ س = ٠ فيكون : ٠ × ص + ص = هـ^٠ ⇐ ص = ١ ⇐ ∴ النقطة (٠ ، ١) .

نشتق الدالة ونوجد الميل بالتعويض بالنقطة في المشتقة:

ص + س صَ + صَ = هـ^س ⇐ س صَ + صَ = هـ^س − ص ⇐ صَ(س+١) = هـ^س − ص

صَ = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{ص}}{\text{س} + ١}$ ⇐ صَ|$_{(٠ ، ١)}$ = $\frac{\text{هـ}^{٠} - ١}{٠ + ١}$ = $\frac{١-١}{١}$ = $\frac{٠}{١}$ = صفر = ميل المماس

∵ ميل المماس = صفر ، هنا حالة خاصة فتكون معادلة المماس هي: ص = ١

مثال: أوجد معادلتي المماس والناظم لمنحنى الدالة: د(س)= ٢س + جاس ،عند النقطة (π ، ٢π)

الحل: ∵ نقطة التماس هي: (π ، ٢π) ، دَ(س) = ٢ + جتاس

دَ(س)|$_{(\pi ، ٢\pi)}$ = ٢ + جتا π = ٢ − ١ = ١ = ميل المماس

وبالتعويض عن نقطة التماس المعطاة والميل الحاصلين عليه فتكون معادلة المماس هي:

ص− د(π) = دَ(π) (س−π) ⇐ ص−٢π = ١ × (س−π) ⇐ ص − س − π = ٠

ومعادلة الناظم هي:

ص − ٢π = −$\frac{١}{١}$ × (س−π) ⇐ ص − ٢π = −١× (س−π) ⇐ ص + س − ٣π = ٠

مثال: أوجد معادلتي المماس والناظم لكل من الدالتين التاليتين عند النقاط الموضحة أمام كل منها:

(أ) د(س) = ٣ظتا س +$\sqrt{٢}$ قا س ، عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٥) .

(ب) جتا^٢ س + جا^٢ ص = $\frac{١}{٢}$ ، عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٠) .

الحل: (أ) د(س) = ٣ظتا س + $\sqrt{٢}$ قا س ، عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٥) .

∵ نقطة التماس هي: ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٥) ، دَ(س) = − ٣قتا^٢س + $\sqrt{٢}$ قا س ظا س

دَ($\frac{\pi}{٤}$)= − ٣قتا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ +$\sqrt{٢}$ قا $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$ = −٣ × ٢ + $\sqrt{٢}$ ×$\sqrt{٢}$ × ١ = −٦ + ٢ = − ٤

وبالتعويض عن نقطة التماس المعطاة والميل الحاصلين عليه فتكون معادلة المماس هي:

ص− د($\frac{\pi}{٤}$) = دَ($\frac{\pi}{٤}$) (س−$\frac{\pi}{٤}$) ⇐ ص − ٥ = −٤ × (س−$\frac{\pi}{٤}$) ⇐ ص + ٤س = π + ٥

ومعادلة الناظم هي:

ص − ٥ = $\frac{١}{٤}$ × (س−$\frac{\pi}{٤}$) ⇐ ١٦ص − ٤س = ٨٠ − π

(ب) $جتا^{٢}$ س + $جا^{٢}$ ص = $\frac{١}{٢}$ ، عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٠)$.

نشتق الدالة ضمنياً: −٢جتاس جاس + ٢جاص جتاص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

٢جاص جتاص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢جتاس جاس ⇐ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢جتاس جاس}{٢جاص جتاص}$

$\frac{ءص}{ءس} \Big|_{(\frac{\pi}{٤} ، ٠)}$ = $\frac{٢جتا \frac{\pi}{٤} جا \frac{\pi}{٤}}{٢جا ٠ جتا ٠}$ = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

∵ ميل المماس غير معرف ، هنا حالة خاصة فتكون:

معادلة المماس هي: س = $\frac{\pi}{٤}$ ، ومعادلة الناظم هي: ص = ٠

تدريبات:

(١)٢٠١٣−٢٠١٤: أوجد معادلة المماس للمنحنى $س^{٢}$+$ص^{٢}$ = ٢س ص عند النقطة (١,١) .

(٢) أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم للدالة ص = $\sqrt{\frac{٤−س^{٢}}{٣}}$ عند النقطة (١ ، ١) .

(٣) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{ص}$ = $\frac{١}{م}$ ، عند ص = − م

س=$\frac{م}{٢}$ ، الميل = −٤

ننتقل بك الآن عزيزي الطالب لبعض مسائل معادلتي المماس والناظم غير المباشرة والتي تحتاج إلى جهد أكبر وسنوضح لك الخطوات لكل مسألة.

مثال: إذا كانت ٤س ص = ٢٥ ، وكان ميل المماس لمنحنى الدالة هو (−١) أوجد قيم س التي تحقق ذلك ؟

الحل: نلاحظ في هذا المثال الآتي:

- المعطى الدالة ٤س ص = ٢٥ دالة كتبت كضمنية وهي صريحة لذلك ممكن جعلها بصورتها الصريحة.
- معطى ميل المماس أي أن دَ(م) = −١ = ميل المماس
- المطلوب قيم س أي القيم للإحداثي السيني للنقطة .

نكتب الدالة كصريحة . لماذا ؟

> لأنه بالاشتقاق الضمني يظهر متغيرين س ، ص ونحتاج التعويض بقيمة ص لكي تكون بدلالة س فقط ، لذلك نفضّل تحويلها إلى صريحة من البداية.
> الاشتقاق الضمني للدالة ٤س ص = ٢٥ كما يلي:
> ٤ص + ٤س صَ = ٠ ⇐ ٤س صَ = −٤ص ⇐ صَ = $\frac{-ص}{س}$

٤س ص = ٢٥

ص = $\frac{٢٥}{٤س}$

صَ = − $\frac{٢٥}{١٦س^٢}$

∵ دَ(س) = الميل

∴ − $\frac{٢٥}{٤س^٢}$ = −١ ⇐ −٤س^٢ = −٢٥ ⇐ س^٢ = $\frac{٢٥}{٤}$ ⇐ س = ± $\frac{٥}{٢}$ وهي قيم س المطلوبة.

مثال: أوجد ميل المماس للمنحنى س = ص^٢ − ٤ص عند نقاط تقاطعه مع محور الصادات .

الحل: المطلوب إيجاد الميل ولكن النقطة غير موجودة فأعطانا معلومات للحصول عليها .

∵ المنحنى يقطع محور الصادات ⇐ س = ٠ ، نوجد ص بالتعويض في المنحنى بقيمة س :

س = ص^٢ − ٤ص ⇐ ٠ = ص^٢ − ٤ص ⇐ ص(ص−٤) = ٠ ⇐ إما ص = ٠ ، أو ص = ٤

∴ هناك نقطتين هما (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

نشتق الدالة: س = ص^٢ − ٤ص (ضمنياً)

١ = ٢ص صَ − ٤صَ ⇐ صَ(٢ص − ٤) = ١ ⇐ صَ = $\frac{١}{٢ص−٤}$

∴ ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطتان (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤) هما:

صَ$|_{(٠ ، ٠)}$ = $\frac{١}{٢×٠−٤}$ = $\frac{-١}{٤}$ ، صَ$|_{(٠ ، ٤)}$ = $\frac{١}{٢×٤−٤}$ = $\frac{١}{٤}$

مثال: أوجد نقاط المنحنى (ص−٤)^{٢} = س+٢ التي عندها المماس يوازي المستقيم
٣س+٦ص+٢ = ٠

الحل: المطلوب إيجاد النقاط ، ويمكن الحصول عليها من تساوي المشتقة بالميل .

∴ نوجد الميل من المعلومة المعطاة وهي أن المماس يوازي المستقيم ٣س+٦ص+٢ = ٠

∵ المماس // المستقيم ⇐ ميل المماس = ميل المستقيم

∴ ميل المستقيم = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-٣}{٦}$ = ميل المماس

نشتق الدالة ضمنياً : ٢(ص−٤) صَ = ١ ⇐ صَ = $\frac{١}{٢(ص-٤)}$

∵ دَ(س) = الميل

∴ $\frac{١}{٢(ص-٤)}$ = $\frac{-٣}{٦}$ ⇐ −٦(ص−٤) = ٦ ⇐ ص−٤ = −١ ⇐ ص = ٣

حصلنا على جزء من النقطة وهو ص = ٣ ، نوجد س بالتعويض بقيمة ص في معادلة المنحنى (ص−٤)^{٢} = س+٢ ⇐ (٣ −٤)^{٢} = س+٢ ⇐ س+٢ = ١ ⇐ س = −١

∴ النقطة (−١ ، ٣)

تمرين محلول: أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى الدالة
س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٦ص + ٢ = ٠ عند النقطة (٣ ، −١)

الحل: نعلم سابقاً أن ظا هـ = الميل (علماً أن الميل أيضاً = مشتقة الدالة عند نقطة التماس)

نوجد مشتقة الدالة عند النقطة (٣ ، −١) :

٢س + ٢ص صَ − ٢ + ٦صَ = ٠ ⇐ صَ(٢ص + ٦) = ٢ − ٢س ⇐ صَ = $\frac{٢-٢س}{٢ص+٦}$

صَ|$_{(٣ ، -١)}$ = $\frac{٢-٦}{-٢+٦}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = −١

∵ ظا هـ = الميل ⇐ ∴ ظا هـ = −١ ⇐ هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$ = ١٣٥° = −$\frac{\pi}{٤}$ = −٤٥°

مثال: أوجد قيمة (أ) التي تجعل المستقيم ص= ٥س+أ مماساً أفقياً لمنحنى الدالة ص= س^{٢}+ س

الحل: ∵ المعطى معادلة المماس فإن الميل نجده من المعادلة ص = ٥س+أ ⇐ ٥س−ص+أ = ٠

∴ الميل = $\frac{-أ}{ب}$ ⇐ الميل = $\frac{-٥}{-١}$ = ٥

∵ دَ(س) = الميل ، نشتق الدالة ونساويها بالميل : صَ = ٢س+١

∴ ٢س+١=٥ ⇐ ٢س=٤ ⇐ س=٢،وهي الإحداثي السيني للنقطة،نعوض بقيمة س في المنحنى:

ص = س^{٢}+ س ⇐ ص = ٤+٢ ⇐ ص = ٦ ⇐ ∴ النقطة (٢ ، ٦)

نعوض بالنقطة في معادلة المماس لمعرفة قيمة أ فيكون:

ص = ٥س+أ ⇐ ٦ = ٥ × ٢ + أ ⇐ أ = ٦ − ١٠ ⇐ $\boxed{أ = -٤}$

مثال: إذا كان المستقيم ٢ص = ٢س+٤ مماساً لمنحنى الدالة ص = س^{٢} + ب س + جـ عند النقطة (٠ ، ٢) أوجد قيمة ب ، جـ .

الحل: ∵ النقطة (٠ ، ٢) على المنحنى لأنها نقطة تماس ، وبالتعويض بها في معادلة المنحنى يكون:

ص = س^{٢} + ب س + جـ ⇐ ٢ = ٠^{٢} + ب × ٠ + جـ ⇐ $\boxed{\text{جـ = ٢}}$

لإيجاد ب نعوض بالنقطة في مشتقة الدالة لكي نتخلص من جـ ويبقى ب

∵ ص = س^{٢} + ب س + جـ ⇐ صَ = ٢س + ب ⇐ دَ(٠) = ٢ × ٠ + ب ⇐ $\boxed{\text{دَ(٠) = ب}}$

نوجد دَ(٠) ، حيث معلوم لدينا أن دَ(س) = الميل ، وعليه ممكن الحصول على الميل من معادلة المماس المعطاة :

∵ معادلة المماس هي: ٢ص = ٢س+٤ ⇐ ٢س−٢ص+٤ = ٠ ⇐ الميل = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-٢}{-٢}$ = ١

∴ دَ(٠) = ب ⇐ $\boxed{\text{ب = ١}}$

مثال: إذا كان المستقيم ص = س+١ مماساً للدالة ص^{٢}+ ٢س ص − س^{٢}+ ل = ٠ أوجد قيمة ل

الحل: لكي نوجد قيمة ل يجب معرفة النقطة ويمكن الحصول على النقطة من تساوي الميل بالمشتقة:

نوجد الميل أولاً: ∵ ص = س+١ مماس للدالة ⇐ س− ص + ١ = ٠ ⇐ الميل = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-١}{-١}$ = ١

نشتق الدالة ثانياً: ٢ص صَ + ٢ص + ٢س صَ − ٢س + ٠ = ٠

٢ص صَ + ٢س صَ = ٢س − ٢ص (بالقسمة على ٢ جميع الحدود)

ص صَ + س صَ = س − ص ⇐ صَ(ص + س) = س − ص ⇐ صَ = $\frac{\text{س − ص}}{\text{ص + س}}$

∵ المشتقة = الميل

$\frac{\text{س − ص}}{\text{ص + س}}$ = ١ ⇐ س − ص = ص + س ⇐ س − ص − ص − س = ٠ ⇐ −٢ص = ٠ ⇐ ص = ٠

وبالتعويض بـ ص في معادلة المستقيم نحصل على س :

∴ ص = س + ١ ⇐ ٠ = س + ١ ⇐ س = −١ ⇐ ∴ النقطة هي (−١ ، ٠)

وبالتعويض في الدالة بالنقطة نحصل على ل :

ص^{٢}+ ٢س ص − س^{٢}+ ل = ٠

(٠)^{٢} + ٢ × −١ × ٠ − (−١)^{٢} + ل = ٠ ⇐ −١ + ل = ٠ ⇐ $\boxed{\text{ل = ١}}$

مثال: أوجد معادلتي المماس والناظم لمنحنى الدالة ص^2 + س^3 = س^2 − ٢س + ٢ عند نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم ص + ١ = س

الحل: لإيجاد نقطة التماس لكتابة المعادلتين نستفيد من المعطى

∵ المنحنى يتقاطع مع المستقيم فنحل المعادلتين معاً :

تم اختيار ص بدلالة س ليسهل التعويض لأنه لدينا س^3 .

∵ ص + ١ = س ⇐ ص = س − ١

نعوض بـ ص = س − ١ في معادلة المنحنى: ص^2 + س^3 = س^2 − ٢س + ٢ فيكون:

(س−١)^2 + س^3 = س^2 − ٢س + ٢ ⇐ $\cancel{س^2}$ − $\cancel{٢س}$ + ١ + س^3 − $\cancel{س^2}$ + $\cancel{٢س}$ − ٢ = ٠

⇐ س^3 − ١ = ٠ ⇐ س^3 = ١ ⇐ س = ١ ، و ∵ ص = س − ١ ⇐ ص = ١ − ١ ⇐ ص = ٠

∴ النقطة هي: (١ ، ٠)

نوجد الميل من خلال اشتقاق الدالة والتعويض بالنقطة (١ ، ٠):

٢ص ص$'$ + ٣س^2 = ٢س − ٢ ⇐ ٢ص ص$'$ = −٣س^2 + ٢س − ٢ ⇐ ص$'$ = $\frac{-٣س^2 + ٢س - ٢}{٢ص}$

ص$'|_{(١ ، ٠)}$ = $\frac{-٣ \times ١ + ٢ \times ١ - ٢}{٢ \times ٠}$ = $\frac{-٣}{٠}$ (غير معرف)

∴ معادلة المماس هي: س = ١ ، ومعادلة الناظم هي: ص = ٠

مثال: إذا كان ص = ع^3 + ع ، ع = $\sqrt{س - ١}$ ، فأوجد معادلتي المماس والناظم عند ع = ٢

الحل: نوجد أولاً النقطة (س،ص):

∵ ع = ٢ ⇐ ص = ٢^3 + ٢ = ٨ + ٢ = ١٠ ، ∴ الإحداثي الصادي للنقطة (١٠)

∵ ع = $\sqrt{س - ١}$ ⇐ ع^2 = س − ١ ⇐ س = ع^2 + ١ = ٢^2 + ١ = ٥ = الإحداثي السيني

∴ النقطة (٥ ، ١٠)

نشتق الدالة بقاعدة التسلسل: $\frac{ءص}{ءع}$ = ٣ع^2 + ١ ، $\frac{ءع}{ءس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ = [٣ع^2 + ١] × $\frac{١}{٢\sqrt{س-١}}$ = ٣($\sqrt{س - ١}$)^2 + ١ × $\frac{١}{٢\sqrt{س-١}}$

= [٣(س−١) + ١] × $\frac{١}{٢\sqrt{س-١}}$

$\frac{ءص}{ءس}|_{(٥ ، ١٠)}$ = [٣(٥−١) + ١] × $\frac{١}{٢\sqrt{٥-١}}$ = ١٣ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١٣}{٤}$ = الميل

∴ معادلة المماس هي: ص − ١٠ = $\frac{١٣}{٤}$ (س − ٥) ⇐ ١٣س − ٤ص − ٢٥ = ٠

معادلة الناظم هي: ص − ١٠ = $\frac{-٤}{١٣}$ (س − ٥) ⇐ ٤س + ١٣ص − ١١٠ = ٠

مثال: إذا كان منحنى الدالة $س^2ص + أص^2 = ب$ يمر بالنقطة (١ ، ١) ومعادلة المماس عند تلك النقطة هي $٤س+٣ص = ٧$ ، فأوجد قيمتي أ ، ب .

الحل: نشتق الدالة ونساويها بالميل: $٢س ص + س^2 صَ + ٢أص صَ = ٠$

$صَ(س^2 + ٢أص) = -٢س ص \Leftarrow صَ = \frac{-٢س ص}{س^2+٢أص}$

نوجد الميل من معادلة المماس $٤س + ٣ص - ٧ = ٠ \Leftarrow$ الميل $= \frac{-أ}{ب} = \frac{-٤}{٣}$

$\because$ المشتقة = الميل $\Leftarrow \frac{-٢س ص}{س^2+٢أص} = \frac{-٤}{٣} \Leftarrow -٤س^2-٨أص = -٦س ص$

$\Leftarrow -٦س ص + ٤س^2+٨أص = ٠$ ، نعوض بالنقطة (١ ، ١) في المشتقة لأنها تحققها فيكون:

$-٦×١×١ + ٤×١ + ٨أ×١ = ٠ \Leftarrow ٨أ = ٢ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{١}{٤}}$

نعوض بقيمة أ مع النقطة (١ ، ١) في منحنى الدالة: $س^2ص + أص^2 = ب$ فيكون:

$١^2×١ + \frac{١}{٤}×١ = ب \Leftarrow ب = ١+\frac{١}{٤} \Leftarrow \boxed{ب = \frac{٥}{٤}}$

تدريبات: (١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د(س)= $س^2$ يساوي ٢ أوجد معادلتي المماس والناظم.

(٢) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لمنحنى الدالة $ص^2- س^2+ س ص + ٣ = ٠$ ، عند النقطة (١ ، -١) .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في معادلتي المماس والناظم

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١ – معادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + ٣ عند س = ٠ هي س – ص + ٣ = ٠ ( )

س٢: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) إذا كان المماس لمنحنى الدالة يوازي محور السينات فإن ميله يساوي .... [صفر ، غير معرف ، ١ ، –١]

س٣: أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة: س^{٢}+ص^{٢} = ٤س ص – ٣ عند النقطة (٢ ، ١).

....

....

....

....

س٤: أوجد معادلة الناظم لمنحنى الدالة س ص^{٢} + س – ص = ١ عند النقطة (٠ ، –١) .

....

....

....

....

س٥: أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة: س^{٣} + ص^{٣} – ٤س ص = ٦ عند النقطة (١ ، ١).

....

....

....

....

س٦: أوجد معادلة المماس للمنحنى س ص + ص = هـ^{س} عند النقطة (٠ ، ١) .

....

....

....

....

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

س٧: أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٢جاس + جتاس عندما س = ٠

....

....

....

....

س٨: أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة س^{٢} + ٣ص^{٢} = ٤ عند النقطة (١ ، ١) .

....

....

....

....

س٩: أوجد معادلة الناظم للدالة : ٣ص^{٢} = ٤ − س^{٢} ، عند النقطة (١ ، ١) .

....

....

....

....

س١٠: بيّن فيما إذا كانت الدالة: د(س) = س^{٢} + ٢س − ٣ ، تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [−٣ ، ١] ، وإذا حققت أوجد قيم جـ الناتجة عن المبرهنة .

....

....

....

....

س١١: بيّن إذا كانت الدالة: د(س) = س^{٤} − ٨س^{٢} ، تحقق شروط رول على الفترة [−٢ ، ٢] ، وإذا حققت فأوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة .

....

....

....

....

هـــامـــش

مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

تذكير:

١) مجموعة التعريف: كون مجموعة التعريف مهمة في مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة نضع لك الجدول الآتي للتذكير بها:

الدالـــة	مجموعة تعريفها
١) حدودية (كثيرة حدود)	ح (مجموعة الأعداد الحقيقية كلها)
٢) كسرية	ح /{أصفار المقام}
٣) جذرية تربيعية	الفترة التي تجعل ما تحت الجذر ⩾ ٠
٤) جذرية تكعيبية	الفترة التي تجعل ماتحت الجذر معرفاً
٥) اللوغاريتمية	الفترة التي تجعل ما بعد لو > ٠
٦) الأسية	الفترة التي تجعل الأس معرفاً
٧) جا + جتا	الفترة التي تجعل الزاوية معرفة

٢) الاتصال على فترة:

١– تكون الدالة متصلة على فترة إذا كانت متصلة عند كل عدد ينتمي لتلك الفترة.

٢– إذا كانت الدالة متصلة على فترة فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها .

٣– إذا كانت الدالة معرفة بقاعدة واحدة فهي متصلة على مجموعة تعرفها.

٤– إذا كانت الدالة معرفة بقاعدتين فهي متصلة على مجموعة تعريفها مع التأكد من الاتصال عند العدد الذي يتغير عنده تعريف الدالة.

الخلاصة: لمعرفة أن الدالة د متصلة على [٢،ب] نجري الآتي:

(١) نوجد م.ت الدالة د (٢) التأكد من أن [٢،ب] ⊂ م.ت

مثال: ابحث اتصال الدوال الآتية على الفترات المقابلة:

(١) د(س) = س + ١ ، [١ ، ٢] ، (٢) د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، [–١، ٣]

(٣) د(س) = { س – ٢ ، س ⩾ ٢ ، [–١ ، ٥]
{ ٣ – س ، س < ٢

الحل: (١) ∵ م.ت = ح ⇐ ∴ د متصلة على ح ⇐ د متصلة على [١ ، ٢].

(٢) ∵ م.ت = ح/{١} ⇐ ∴ د متصلة على ح/{١} ⇐ د غير متصلة على [-١ ، ٣] لأن:

١∈[-١ ،٣]

(٣) ∵ م.ت = ح

∵ الدالة معرفة بقاعدتين نتأكد من الاتصال عند س = ٢

أ) د معرفة عند س = ٢ ، د(٢) = ٠

ب) $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ (س-٢) = ٢-٢ = ٠

$\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (٣ - س) = ٣-٢ = ١

∴ $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) ≠ $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) ⇐ ∴ الدالة غير متصلة عند س = ٢

∵ الدالة متصلة على ح/{٢}

∴ الدالة غير متصلة على [-١ ، ٥] لأن ٢ ∈ [-١ ، ٥]

٣) الاشتقاق على فترة:

١- نقول عن دالة أنها قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة] ﻫ ، ب [إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند كل عدد في الفترة] ﻫ ، ب [.

٢- نقول عن دالة أنها قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة [ﻫ ، ب] إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة داخل الفترة [ﻫ ، ب] وكانت قابلة للاشتقاق يمين ب وكانت قابلة للاشتقاق يسار ﻫ . ومنه يمكن القول أنه إذا كان مجال (مجموعة تعريف) الدالة هو [ﻫ ، ب] فإن دَ(ﻫ) ، دَ(ب) غير موجودتين لأن الدالة غير معرفة في الجوار الأيسر للعدد ﻫ ، وغير معرفة في الجوار الأيمن للعدد ب [وعليه يتم التعامل مع الاشتقاق على فترات مفتوحة].

٣- تكون الدالة قابلة للاشتقاق على ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل س ∈ ح .

٤- إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على فترة فهي قابلة للاشتقاق على أي فترة جزئية منها .

٥- إذا كانت الدالة معرفة بقاعدة واحدة فهي قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريف المشتقة .

٦- إذا كانت الدالة معرفة بقاعدتين فهي قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريف المشتقة مع التأكد من قابلية الاشتقاق عند العدد الذي يتغير عنده تعريف المشتقة .

الخلاصة: لمعرفة أن د قابلة للاشتقاق على] ﻫ ، ب [نجري الآتي:

(١) نوجد دَ(س). (٢) نوجد م.ت المشتقة. (٣) التأكد من أن] ﻫ،ب [⊂ م.ت المشتقة.

مثال: ابحث قابلية اشتقاق الدوال الآتية على الفترات المقابلة:

(١) د(س) = س^{٢} + ٥ ،]−١ ، ٢[

(٢) د(س) = { س^{٢} ، س > ١ ،]−١ ، ٣[
٣س^{٢} ، س < ١ }

الحل: (١) دَ(س) = ٢س ، ∀ س ∈ ح ⇐ ∴ د قابلة للاشتقاق على ح

∴ د قابلة للاشتقاق على]−١ ، ٢[

(٢) د(س) = { س^{٢} ، س > ١ ،]−١ ، ٣[
٣س^{٢} ، س < ١ }

وهي معرفة ∀ س ∈ ح/{١} ، فنتأكد من الاشتقاق عند س = ١ (لأن القاعدة تتغير حول هذا العدد)

دَ(١$^{+}$) = ٢ × ١ = ٢ ، دَ(١$^{-}$) = ٣ × ١^{٢} = ٣

∴ د غير قابلة للاشتقاق على]−١ ، ٣[لأن ١ ∈]−١ ، ٣[

أولاً : مبرهنة رول:

ليس دائماً من السهل إيجاد قيم س التي تجعل المشتقة الأولى تساوي صفر [دَ(س) = ٠] لذا جاءت مبرهنة رول لتكون في مقدمة المبرهنات الهامة لإيضاح الشروط التي تحدد بها مثل هذه القيم.

نص مبرهنة رول:

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [؟ ، ب] وقابلة للاشتقاق على الفترة] ؟ ، ب [وكان د(؟) = د(ب) ، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل جـ ∈] ؟ ، ب [بحيث يكون دَ(جـ) = ٠

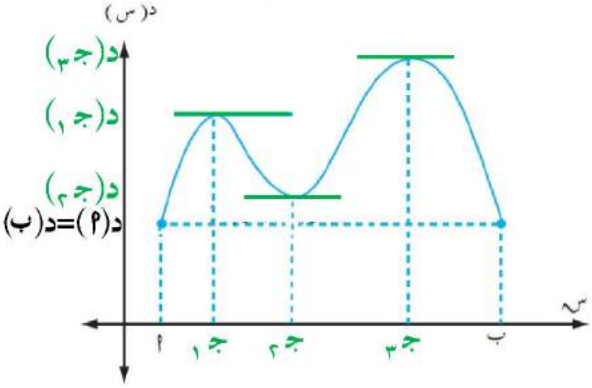
أي أنه : إذا حققت الدالة الشروط الآتية:

(١) د متصلة على [؟ ، ب] ، (٢) د قابلة للاشتقاق على] ؟ ، ب [، (٣) د(؟) = د(ب)

فإنه ∃ جـ ∈] ؟ ، ب [بحيث أن دَ(جـ) = ٠

المعنى الهندسي لمبرهنة رول:

إذا حققت الدالة شروط رول فإنه يوجد على الأقل نقطة واحدة عندها المماس موازياً لمحور السينات (مماس أفقي)



ممكن القول أن مسائل مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة نوعين إما يطلب منك تبيين الشروط وإيجاد قيمة جـ أو أن تحتوي المسألة على مجهول ويخبرك أنها محققة للشروط وعليك إيجاد قيمة المجهول وإيجاد جـ ، وستلاحظ الأمثلة الآتية:

مثال: بين فيما إذا كانت الدالة د(س) = ٣س − س^٣ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [−١،٢] وإذا حققت ذلك أوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة.

الحل: (١) م.ت = ح ، ∴ د متصلة على [−١،٢]

(٢) دَ(س) = ٣ − ٣س^٢ ، ∀ س ∈ ح (م.ت المشتقة = ح)

∴ د قابلة للاشتقاق على]−١،٢[

(٣) د(−١) = ٣(−١) − (−١)^٣ = −٣ + ١ = −٢

د(٢) = ٣(٢) − (٢)^٣ = ٦ − ٨ = −٢

∴ د تحقق مبرهنة رول على [−١،٢] ، ∴ يوجد على الأقل عدد واحد جـ ∈]−١،٢[بحيث أن:

دَ(جـ) = ٠ ⇐ ٣ − ٣جـ^٢ = ٠ ⇐ جـ^٢ = ١ ⇐ جـ = ±١ ، جـ = −١ ∉]−١،٢[قيمة مرفوضة

جـ = ١ ∈]−١،٢[، ∴ قيمة جـ = {١}

مثال: بين فيما إذا كانت الدالة د(س) = | س−٢ | تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [١ ، ٣] وإذا حققت أوجد قيمة جـ التي تعينها المبرهنة.

الحل:

$$د(س) = \begin{cases} س − ٢ & ، س \geqslant ٢ \\ −س+٢ & ، س < ٢ \end{cases}$$

(١) ندرس شروط الاتصال : (أ) د(٢) = ٢ − ٢ = ٠

(ب) $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ س − ٢ = ٢ − ٢ = ٠

$\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ − س + ٢ = −٢ + ٢ = ٠

(جـ) د(٢) = $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = ٠

∴ الدالة متصلة على [١ ، ٣]

(٢) ندرس شروط الاشتقاق :

$$دَ(س) = \begin{cases} ١ & ، س > ٢ \\ −١ & ، س < ٢ \end{cases}$$

نلاحظ أن : دَ(٢$^+$) = ١ ، دَ(٢$^-$) = −١ ⇐ دَ(٢$^+$) ≠ دَ(٢$^-$)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق على [١ ، ٣] ⇐ الدالة لاتحقق شروط مبرهنة رول.فلا توجد قيمة لـجـ

ملاحظة: لحل المعادلات المثلثية وإيجاد قيم س الموجودة بالزاوية من خلال الآتي:

أولاً: الجيب:
(١) جاس = ٠ ⇐ س = ك π
(٢) جاس = ١ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ك π
(٣) جاس = −١ ⇐ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ك π أو س = $\frac{-\pi}{٢}$ + ٢ك π

ثانياً: الجيب تمام:
(١) جتاس = ٠ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ك π
(٢) جتاس = ١ ⇐ س = ٢ك π
(٣) جتاس = −١ ⇐ س = π + ٢ك π

أولاً: الظل:
(١) ظاس = ٠ ⇐ س = ك π
(٢) ظاس = ١ ⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$ + ك π
(٣) ظاس = −١ ⇐ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ك π أو س = $\frac{-\pi}{٤}$ + ك π

حيث:
ك ∈ ص

مثال: بين أن لمنحنى الدالة د(س)= ٤جا ٢س مماساً أفقياً واحداً على الأقل على الفترة [٠، π] ، ثم أوجد قيمة جـ التي ينشأ عندها المماس.

الحل: (١) م.ت = ح ، ∴ د متصلة على [٠، π]
(٢) دَ(س) = ٨جتا ٢س ، ∀ س ∈ ح ، ∴ د قابلة للاشتقاق على]٠، π[
(٣) د(٠) = ٤جا ٢ × ٠ = ٤جا ٠ = ٤ × ٠ = ٠ ، د(π) = ٤جا ٢π = ٤ × ٠ = ٠
∴ د(٠) = د(π)
∴ يوجد على الأقل مماساً واحداً عند جـ ∈]٠ ، π[بحيث أن : دَ(جـ) = ٠
٨جتا ٢جـ = ٠ (بالقسمة على ٨)
⇐ جتا ٢جـ = ٠ (وحسب الملاحظة السابقة في حل المعادلات المثلثية)
⇐ ٢جـ = $\frac{\pi}{٢}$ + ك π
نوخذ قيم لـ ك = ١ ، ٢ ، ٣، ... (اخذنا قيم ك موجبة لأن الفترة التي لدينا موجبة)

* عندما ك = ٠ ⇐ ٢جـ = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ جـ = $\frac{\pi}{٤}$ ∈]٠ ، π[
* عندما ك = ١ ⇐ ٢جـ = $\frac{\pi}{٢}$ + π ⇐ ٢جـ = $\frac{٣\pi}{٢}$ ⇐ جـ = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∈]٠ ، π[
* عندما ك = ٢ ⇐ ٢جـ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢π ⇐ ٢جـ = $\frac{٥\pi}{٢}$ ⇐ جـ = $\frac{٥\pi}{٤}$ ∉]٠ ، π[

∴ قيم جـ = { $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$ }

مثال: بين فيما إذا كانت الدالة د(س) = هـ^جتاس^ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ثم أوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة.

الحل: (١) م.ت = ح ، ∴ د متصلة على $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

(٢) دَ(س) = − هـ^جتاس^ جاس ، ∀ س ∈ ح ، ∴ د قابلة للاشتقاق على $]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$

(٣) د(أ) = د$(\frac{-\pi}{4})$ = هـ^جتا $\frac{-\pi}{4}$^ = هـ^$\frac{1}{\sqrt{2}}$^ ، د(ب) = د$(\frac{\pi}{4})$ = هـ^جتا $\frac{\pi}{4}$^ = هـ^$\frac{1}{\sqrt{2}}$^

∴ د(أ) = د(ب)

∴ ∃ جـ ∈ $]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ بحيث دَ(جـ) = ٠

− هـ^جتاجـ^ جا جـ = ٠

إما هـ^جتاجـ^ مرفوض لأن الأساس لا يمكن يكون صفر

− جا جـ = ٠ ⇐ جا جـ = ٠ ⇐ جـ = ك π

* عندما ك = ٠: جـ = ٠ ∈ $]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$

* عندما ك = ١: جـ = π ∉ $]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$

∴ قيمة جـ = { ٠ }

سؤال وزاري ٢٠١٣−٢٠١٤: بين تحقق شروط مبرهنة رول للدالة د(س) = جتا^٢^س ، على الفترة $[٠, \pi]$ ، ثم أوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة.

الحل: (١) م.ت = ح ، ∴ د متصلة على $[٠, \pi]$

(٢) دَ(س) = −٢جتاس جاس = − جا٢س ، وهي قابلة للاشتقاق ∀ س ∈ ح

∴ د قابلة للاشتقاق على $]٠, \pi[$

(٣) د(أ) = د(٠) = جتا^٢^ ٠ = ١ ، د(ب) = د(π) = جتا^٢^ π = ١

∴ د(أ) = د(ب) ⇐ ∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[٠, \pi]$

∴ ∃ جـ ∈ $]٠, \pi[$ بحيث دَ(جـ) = ٠

∴ − جا٢جـ = ٠ ⇐ جا٢س = ٠

∴ ٢جـ = ك π

* عندما ك = ٠ ⇐ ٢جـ = ٠ ⇐ جـ = ٠ ∉ $]٠, \pi[$

* عندما ك = ١ ⇐ ٢جـ = ١ × π ⇐ جـ = $\frac{\pi}{2}$ ∈ $]٠, \pi[$ ⇐ ∴ قيمة جـ = $\{\frac{\pi}{2}\}$

تدريبات: بين فيما إذا كانت الدوال الآتية تحقق شروط مبرهنة رول على الفترات المقابلة ، وإذا حققت أوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة.

جـ = { ٢ }

(١) د(س) = س^{٢} − ٤س − ٦ ، [٠ ، ٤] ، (٢) د(س) = ١ + جتا π س ، [٠ ، ٢]

(٣) د(س) = جاس + جتاس ، [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ظاجـ = ١ جـ = { $\frac{\pi}{٤}$ }

ننتقل إلى أسئلة النوع الثاني وهي المسائل المطلوب فيها إيجاد قيمة المجهول ثم ج .

مثال: إذا كانت د(س) = لو(س^{٢} + ٥) تحقق مبرهنة رول على الفترة [ﻫ ، ٢] ، فأوجد قيمة ﻫ ، ثم ج الناتجة عن المبرهنة.

الحل: هنا الدالة تحقق مبرهنة رول لذلك كل ما يهمنا هو الشرط الثالث والذي من خلاله تتكوّن معادلة وإيجاد المجهول منها: د(ﻫ) = د(ب)

د(ﻫ) = د(٢)

لو(ﻫ^{٢} + ٥) = لو(٢^{٢} + ٥) [وبحسب خواص اللوغاريتم فإن "لو" ينتهي من الطرفين]

ﻫ^{٢} + ٥ = ٤ + ٥ (بطرح ٥ من الطرفين)

ﻫ^{٢} = ٤ ⇐ ﻫ = ± ٢ ⇐ ﻫ = ٢ (مرفوض لانه لايمكن للفترة أن تكون من ٢ إلى ٢)

∴ ﻫ = − ٢ ⇐ الفترة هي [− ٢ ، ٢]

نوجد ج فنشتق الدالة بالنسبة لـ ج فتكون :

دَ(ج) = $\frac{٢ ج}{ج^{٢} + ٥}$ ، ∵ دَ(ج) = ٠

∴ $\frac{٢ ج}{ج^{٢} + ٥}$ = ٠ ⇐ ٢ج = ٠ ⇐ ج = ٠ ∈]−٢ ، ٢[وهي قيمة ج المطلوبة.

مثال: إذا كانت د(س) = س + $\frac{ل}{س}$ تحقق مبرهنة رول على الفترة [١ ، ٤] ، فأوجد قيمة ل ثم ج الناتجة عن المبرهنة.

الحل: ∵ الدالة تحقق مبرهنة رول : ∴ د(ﻫ) = د(ب) ⇐ د(١) = د(٤)

١ + $\frac{ل}{١}$ = ٤ + $\frac{ل}{٤}$ (بالضرب في ٤)

٤ + ٤ل = ١٦ + ل ⇐ ٣ل = ١٢ ⇐ ل = ٤

نشتق الدالة بالنسبة لـ ج ثم نساوي المشتقة بالصفر للحصول على قيم ج

∴ دَ(ج) = ١ − $\frac{٤}{ج^{٢}}$

∴ دَ(ج) = ٠ ⇐ ١ − $\frac{٤}{ج^{٢}}$ = ٠ ⇐ ج^{٢} = ٤ ⇐ ج = ± ٢

ج = −٢ ∉]١ ، ٤[، ج = ٢ ∈]١ ، ٤[

مثال: الدالة د(س) = س^{٢} − ٤س^{٢} + ٥ تحقق مبرهنة رول على الفترة [أ ، أ+٢] ، أوجد قيمة أ ثم جـ الناتجة عن المبرهنة.

الحل: ∵ الدالة تحقق مبرهنة رول : ∴ د(أ) = د(ب) ⇐ د(أ) = د(أ+١)

أ^{٢}−٤أ+٥ = (أ+٢)^{٢} −٤(أ+٢) + ٥

أ^{٢}−٤أ+٥ = أ^{٢}+٤أ+٤ −٤أ −٨ + ٥ ⇐ −٤أ = −٤ ⇐ أ = ١

∴ الفترة هي [١ ، ٣]

نوجد جـ فنشتق الدالة ونساوي المشتقة بالصفر

د(س) = س^{٢} −٤س + ٥ ⇐ دَ(س) = ٢س − ٤ ⇐ دَ(جـ) = ٢جـ − ٤

دَ(جـ) = ٠ ⇐ ٢جـ − ٤ = ٠ ⇐ ٢جـ = ٤ ⇐ جـ = ٢ ∈]١ ، ٣[

مثال: إذا كانت د(س) = أس^{٣} − ب س^{٢} − ٣ تحقق مبرهنة رول على الفترة [٠ ، ٣] ، وكان المماس عند س = ١ عمودياً على المستقيم ٣ص+س+٢=٠ ، أوجد أ ، ب وكذلك جـ الناتجة عن المبرهنة.

الحل: ∵ الدالة تحقق مبرهنة رول : ∴ د(أ) = د(ب) ⇐ د(٠) = د(٣)

−٣ = ٢٧أ − ٩ب − ٣ ⇐ ٢٧أ − ٩ب = ٠ ⇐ ٣أ − ب = ٠ ......(١)

∵ دَ(س) = ٣أس^{٢} − ٢ب س

∵ المماس عند س = ١ عمودي على المستقيم ٣ص+س+٢=٠ ⇐ ميل المماس = − $\frac{١}{٣}$

وحسب قواعد سابقة فإن ميل المماس = − مقلوب ميل المستقيم ⇐ ميل المماس = ٣

∵ المشتقة عند النقطة = ميل المماس ، ∴ دَ(١) = ٣ ⇐ ٣أ − ٢ب = ٣ ......(٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج : ٣أ − ب = ٠

−(٣أ − ٢ب = ٣)

ب = −٣

وبالتعويض بقيمة ب في (١) يكون : ٣أ + ٣ = ٠ ⇐ ٣أ = −٣ ⇐ **أ = −١**

ومن التعويض بقيم أ ، ب فالدالة هي : د(س) = − س^{٣} + ٣س^{٢} − ٣

∵ الدالة تحقق مبرهنة رول : ∴ دَ(جـ) = ٠ ⇐ −٣جـ^{٢} + ٦جـ = ٠ ⇐ ٣جـ(جـ − ٢) = ٠

إما جـ = ٠ ∉]٠ ، ٣[أو جـ = ٢ ∈]٠ ، ٣[

∴ جـ = {٢}

تدريبات: (١) إذا كانت د(س) = س^{٣} − ٩س تحقق مبرهنة رول على الفترة [٠ ، ب] أوجد قيمة ب ، ثم جـ الناتجة عن المبرهنة.

$\boxed{\text{جـ} = \{\sqrt{٣}\}}$

(٢) إذا كانت د(س) = أس^{٢} + ب س + ء تحقق مبرهنة رول على الفترة [٠ ، ٣] والمماس عند النقطة (٢ ، −١) يوازي المستقيم ص = ٣س − ٧ أوجد قيم أ ، ب ، ء ، ثم جـ الناتجة عن رول.

$\boxed{\text{أ} = ٣ \text{ ، ب} = -٩ \text{ ، ء} = ٥ \text{ ، جـ} = \frac{٣}{٢}}$

ثانياً : مبرهنة القيمة المتوسطة:

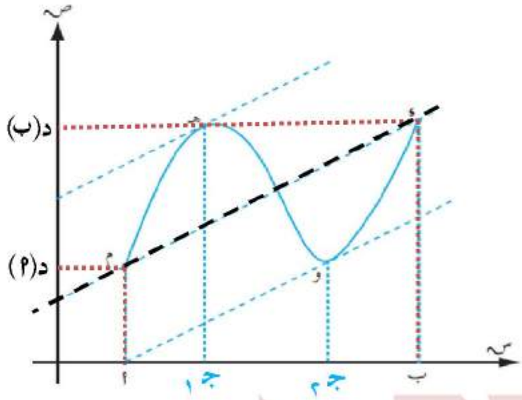
إن مبرهنة رول تعتبر حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة حيث أن الشرط الثالث في مبرهنة رول د(أ) = د(ب) لا يوجد في مبرهنة القيمة المتوسطة.

نص مبرهنة القيمة المتوسطة:

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق على الفترة] أ ، ب [، فإنه يوجد على الأقل عدداً واحداً جـ ∈] أ ، ب [بحيث يكون دَ(جـ) = $\frac{\text{د(ب)} - \text{د(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$

المعنى الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة:

إذا حققت الدالة مبرهنة القيمة المتوسطة فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل يكون عندها المماس موازياً للقاطع المار بالنقطتين (أ ، د(أ)) ، (ب ، د(ب)) .



مثال: بين فيما إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} + ٤س + ٢ ، تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [١ ، ٥] وإذا حققت أوجد قيمة جـ الناتجة منها.

الحل: (١) م.ت = ح ، ∴ د متصلة على [١، ٥]

(٢) دَ(س) = ٢س + ٤ ، ∀ س ∈ ح

∴ د قابلة للاشتقاق على]١ ، ٥[⇐ الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على [١ ، ٥]

∴ يوجد عدد واحد على الأقل جـ ∈]١ ، ٥[بحيث دَ(جـ) = $\frac{\text{د(ب)} - \text{د(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$

∴ ٢جـ + ٤ = $\frac{٤٧ - ٧}{٥ - ١}$ ⇐ ٢جـ + ٤ = ١٠ ⇐ ٢جـ = ٦ ⇐ جـ = ٣ ∈]١، ٥[

مثال: بين فيما إذا كانت الدالة د(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ ، تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٨] وإذا حققت أوجد قيم جـ التي تعينها المبرهنة.

الحل: (١) د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ، م.ت = ح ، ∴ د متصلة على [٠ ، ٨]

(٢) دَ(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$ ، ∀ س ∈ ح / {٠} ، ∴ د قابلة للاشتقاق على]٠ ، ٨[

∴ ∃ جـ ∈]٠ ، ٨[بحيث: دَ(جـ) = $\frac{\text{د(ب)} - \text{د(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$

$$\frac{١}{٣\sqrt[٣]{ج^{٢}}} = \frac{د(٨)-د(٠)}{٨-٠} \Leftarrow \frac{١}{٣\sqrt[٣]{ج^{٢}}} = \frac{\sqrt[٣]{٨}-\sqrt[٣]{٠}}{٨-٠} \Leftarrow \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}} = \frac{٢}{٨}$$

∴ $٣\sqrt[٣]{ج^{٢}} = ٤$ (القسمة على ٣) $\Leftarrow \sqrt[٣]{ج^{٢}} = \frac{٤}{٣}$ (تكعيب الطرفين) $\Leftarrow ج^{٢} = \frac{٦٤}{٢٧}$ (الجذر التربيعي)

$\Leftarrow ج = \pm\sqrt{\frac{٨}{٢٧}} \Leftarrow ج = \pm\frac{٨}{٣\sqrt{٣}}$

$ج = -\frac{٨}{٣\sqrt{٣}} \notin]٠ ، ٨[$ (مرفوض) ، ∴ $ج = \frac{٨}{٣\sqrt{٣}} \in]٠ ، ٨[$

مثال: بين فيما إذا كانت الدالة د(س) = لو(س−١) ، تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٢ ، هـ+١] وإذا حققت أوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة.

الحل: (١) م.ت =]١ ، ∞[، ∴ د متصلة على [٢ ، هـ+١] $\boxed{\text{م.ت: س−١ > ٠} \Rightarrow \text{س > ١}}$

(٢) $\bar{د}(س) = \frac{١}{س-١}$ ، ∀ س ∈ ح / {١} ، ∴ د قابلة للاشتقاق على]٢ ، هـ+١[

∴ يوجد على الأقل عدد واحد جـ ∈]٢ ، هـ+١[بحيث أن: $\bar{د}(ج) = \frac{د(ب)-د(أ)}{ب-أ}$

$$\frac{١}{س-١} = \frac{لو(هـ+١-١)-لو(٢-١)}{هـ+١-٢} = \frac{لوهـ - لو١}{هـ-١} \Leftarrow \frac{١}{س-١} = \frac{١-٠}{هـ-١}$$

$\Leftarrow$ جـ − ١ = هـ − ١ $\Leftarrow$ جـ = هـ ∈]٢ ، هـ+١[

عزيزي الطالب: نتطرق الآن إلى النوع الثاني من أسئلة مبرهنة القيمة المتوسطة وهي التي معطى فيها بأن الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وإيجاد قيمة المجهول وكما ستلاحظ في المثالين الآتيين:

مثال: بين فيما إذا كانت الدالة

$$د(س) = \begin{cases} م\,س^{٣} - س + ١ \quad ، \; ٠ \leqslant س < ١ \\ ٣س^{٢} - ل\,س \quad ، \; ١ \leqslant س \leqslant ٣ \end{cases}$$

تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٣] ، فأوجد قيمة ل ، م .

الحل ∵ الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٣] .

∴ فهي تحقق شروط الاتصال والاشتقاق.

- فنبدأ بشرط الاتصال والعدد الذي تتغير عنده القاعدة هو ١

∴ $\underset{س \to ١^{+}}{نهـا}\; ٣س^{٢} - ل\,س = ٣ \times ١^{٢} - ل \times ١ = ٣ - ل$

$\underset{س \to ١^{-}}{نهـا}\; م\,س^{٣} - س + ١ = م \times ١^{٣} - ١ + ١ = م$

ومن تساوي النهايتين ينتج: ٣ − ل = م $\Leftarrow$ ٣ − ل − م = ٠ ..... (١)

● الآن شرط الاشتقاق: ∵ الدالة قابلة للاشتقاق

$$\therefore د(س) = \begin{cases} ٣م س^{٢} - ١ & ، ٠ < س < ١ \\ ٦س - ل & ، ١ < س < ٣ \end{cases}$$

و قابلية الاشتقاق عند العدد الذي تتغير عنده قاعدة الدالة في الاشتقاق هو ١

$دَ(١^{+}) = ٦ \times ١ - ل = ٦ - ل$ ، $دَ(١^{-}) = ٣م \times ١^{٢} - ١ = ٣م - ١$

ومن تساوي المشتقتين ينتج: $٦ - ل = ٣م - ١ \Leftarrow ٧ - ل - ٣م = ٠$ ..... ②

بحل المعادلتين ① ، ② ينتج :

$$٣ - ل - م = ٠$$

$$-(\,٧ - ل - ٣م = ٠\,)$$

$$-٤ + ٠ + ٢م = ٠ \Leftarrow ٢م = ٤ \Leftarrow \boxed{م = ٢}$$

وبالتعويض بقيمة م = ٢ في ① يكون : $٣ - ل - ٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{ل = ١}$

مثال: إذا كانت جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة هي جـ = ٣ للدالة $د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢}$ ، على الفترة [٠ ، ب] ، أوجد قيمة ب .

الحل: ∵ الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على [٠ ، ب]

$$\therefore دَ(جـ) = \frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$$

$\because د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} \Leftarrow دَ(س) = ٣س^{٢} - ٤س \Leftarrow دَ(جـ) = ٣جـ^{٢} - ٤جـ$

و ∵ جـ = ٣

$\therefore دَ(٣) = ٣ \times ٩ - ٤ \times ٣ = ٢٧ - ١٢ = ١٥$

$$\because دَ(جـ) = \frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$$

$$\therefore ١٥ = \frac{ب^{٣} - ٢ب^{٢}}{ب - ٠}$$

$ب^{٣} - ٢ب^{٢} - ١٥ب = ٠$

$ب(ب^{٢} - ٢ب - ١٥) = ٠$

$ب(ب - ٥)(ب + ٣) = ٠$

إما ب = ٠ مرفوض لأن الفترة لاتصح بالشكل [٠ ، ٠] ، لماذا ؟

أو ب = −٣ وهو مرفوض أيضاً لأن الفترة لاتصح بالشكل [٠ ، −٣] ، لماذا ؟

أو ب = ٥ وعليه فالفترة تكون [٠ ، ٥]

تدريبات: (١) بين أن الدالة د(س) = $س^٣ - س^٢ + ١$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [−١ ، ٣] ، وإذا حققت أوجد قيمة ج الناتجة عن المبرهنة.

(٢) بين فيما إذا كانت الدالة د(س) = $\sqrt{س - ١}$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [١ ، ٣] ، وإذا حققت أوجد قيمة ج الناتجة عن المبرهنة. $\boxed{ج = \frac{٣}{٢}}$

(٣) بين فيما إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، ٠ \leqslant س < ١ \\ ٩ - س & ، ١ \leqslant س \leqslant ٢ \end{cases}$

لا تحقق عند الاشتقاق

تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٢] ، وإذا حققت أوجد قيمة ج الناتجة منها.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة

س١: بيّن تحقق شروط رول للدالة د(س)=جا^٢^س على الفترة[٠، π]، ثم أوجد قيم جـ الناتجة من المبرهنة

....

....

....

....

س٢: بيّن فيما إذا كانت الدالة د(س) = جا٢س تحقق شروط رول على الفترة [٠ ، π] ، ثم أوجد قيم جـ التي تعينها المبرهنة.

....

....

....

....

س٣: بيّن تحقق شروط القيمة المتوسطة للدالة د(س) = س^2+٢س على الفترة [٢ ، ٥] ، ثم أوجد قيمة جـ التي تعينها المبرهنة.

....

....

....

....

س٤: بيّن فيما إذا كانت الدالة د(س) = جتا٢س + س تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، π] ، وإذا حققت فما قيمة جـ .

....

....

....

....

س٥: بيّن أن الدالة د(س) = س^2 − ٦س تحقق شروط مبرهنة رول على [٠ ، ٦] ، ثم أوجد قيمة (جـ) الناتجة عن المبرهنة.

....

....

....

س٦: بيّن فيما إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} − ٢س − ١٠ تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [−٤ ، ٦] ، ثم أوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة .

....

....

....

....

س٧: إذا علمت أن الدالة د(س) = ٢س^{٢} − س^{٤} ، تحقق مبرهنة رول على الفترة [−١ ، ١] ، أوجد قيمة جـ التي تعينها المبرهنة .

....

....

....

....

س٨: بيّن فيما إذا كانت الدالة: د(س) = س^{٢} + ٢س − ٣ ، تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [−٣ ، ١] ، وإذا حققت أوجد قيم جـ الناتجة عن المبرهنة .

....

....

....

....

س٩: بيّن إذا كانت الدالة: د(س) = س^{٤} − ٨س^{٢} ، تحقق شروط رول على الفترة [−٢ ، ٢] ، وإذا حققت فأوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة .

....

....

....

....

اطراد الدوال

أولاً : تزايد الدوال وتناقصها:

مبرهنة (١) : لتكن الدالة د متصلة على [أ،ب] ، وقابلة للاشتقاق على] أ،ب [وكان:

١ دَ(س) > ٠ ، ∀ س ∈] أ،ب [، فالدالة تزايدية على [أ ، ب]

٢ دَ(س) < ٠ ، ∀ س ∈] أ،ب [، فالدالة تناقصية على [أ ، ب]

٣ دَ(س) = ٠ ، ∀ س ∈] أ،ب [، فالدالة ثابتة على [أ ، ب]

تعريف النقطة الحرجة: إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف ، ب∈ف ، فإن ب نقطة حرجة إذا كانت: دَ(ب) = ٠ ، أو دَ(ب) غير موجودة .

ملاحظة: إذا كانت ب تنتمي إلى مجموعة التعريف فإن دَ(ب) تكون غير موجودة عند:

(١) قيم س التي عندها المشتقة غير معرفة.

(٢) قيم س التي عندها المشتقة اليمنى لا تساوي المشتقة اليسرى.

(٣) عند اطراف الفترة المغلقة.

(٤) الأعداد التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

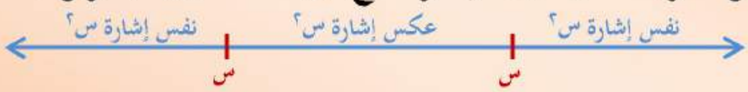
ملاحظة: عند تحديد اشارة مقدار جبري نستخدم احدى الطريقتين:

(١) طريقة عـامـة: بالتعويض بعدد ما من كل فترة في المقدار المطلوب إشارته.

(٢) طرق خاصة:

١ المعادلة من الدرجة الأولى فإن الإشارة نفس إشارة س على يمين الجذر وعكسها على يسارها:

٢ المعادلة من الدرجة الثانية فإن الإشارة تتبع $س^٢$ ما عدا بين الجذرين :



٣ إذا كانت المعادلة كسرية ندرس إشارة البسط والمقام:

$\frac{+}{+} = +$ (تزايدية) ، $\frac{-}{-} = +$ (تزايدية) ، $\frac{+}{-} = -$ (تناقصية)، $\frac{-}{(-)^٢} = -$ (تناقصية)...وهكذا.

- خطوات دراسة التزايد والتناقص:

١) التأكد من الاتصال وقابلية الاشتقاق.

٢) نشتق الدالة ونساوي المشتقة بالصفر ونوجد النقاط الحرجة ، وأيضا النقاط الحرجة عندما دَ(ب) غير موجودة ، بشرط أن تنتمي النقاط الحرجة إلى مجموعة التعريف .

٣) ندرس إشارة المشتقة الأولى على خط الأعداد: نضع ↗ أمام ⊕ و ↘ أمام ⊖ .

٤) نكتب فترات التزايد والتناقص وفق خط الأعداد.

ثانياً : القيم القصوى :

تذكير: من الرسم المقابل وحسب مادرسنا في الصف الثاني فإن :

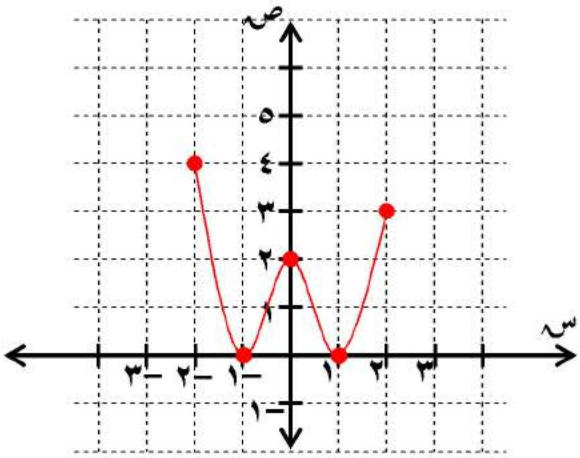
(٢ ، ٣) عظمى محلية (نسبية)

(−٢ ، ٤) عظمى مطلقة

(١ ، ٠) صغرى مطلقة

(−١ ، ٠) صغرى مطلقة

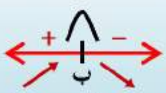
(٠ ، ٢) عظمى محلية



مبرهنة (٢) : (اختبار المشتقة الأولى):

إذا كانت الدالة د متصلة عند النقطة الحرجة ب فإن :

١ د(ب) قيمة عظمى محلية إذا كانت دَ(س) $\geqslant$ ٠ على يسار العدد ب ، دَ(س) $\leqslant$ ٠ على يمين العدد ب . أي أن:



٢ د(ب) قيمة صغرى محلية إذا كانت دَ(س) $\leqslant$ ٠ على يسار العدد ب ، دَ(س) $\geqslant$ ٠ على يمين العدد ب . أي أن:

خلاصة المبرهنة (٢): نقول عن د(ب) قيمة قصوى إذا تحقق مايلي:

١ أن تكون ب نقطة حرجة ، ٢ أن تتغير إشارة المشتقة الأولى جوار ب

مثال: حدد فترات التزايد والتناقص، ثم أوجد القيم القصوى للدوال: (١) $د(س) = س^{٣} + س^{٢} - س$

(٢) $د(س) = \frac{س^{٢} - ٣}{س - ٢}$. (٣) د(س) = لو(س−٣) . (٤) $د(س) = ٢س - هـ^{س}$

الحل: (١) $د(س) = س^{٣} + س^{٢} - س$

م.ت = ح ، الدالة متصلة على ح

$دَ(س) = ٣س^{٢} + ٢س - ١$

نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة:

$٣س^{٢} + ٢س - ١ = ٠ \Leftarrow (٣س-١)(س+١) = ٠$

∴ إما $س = \frac{١}{٣}$ ، أو س = −١ ، وهما النقطتين الحرجة.

ندرس الإشارة : ∞ + -١ − $\frac{١}{٣}$ + $-\infty$

من الشكل نلاحظ:

الدالة تزايدية في الفترة $]-\infty ، -١[\cup]\frac{١}{٣} ، \infty[$

الدالة تناقصية في الفترة $]-١ ، \frac{١}{٣}[$

للدالة قيمة عظمى عند ص=١ أو نقول

عند النقطة (−١ ، ١)

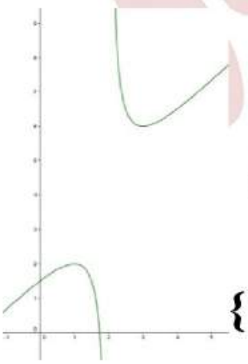
للدالة قيمة صغرى عند النقطة $(\frac{١}{٣} ، \frac{-٥}{٢٧})$

نلاحظ بأن حول س=−١ تغيرت الإشارة من + إلى − فكانت قيمة قصوى عظمى ويشار للقيمة القصوى إما ص=١ بالإعتماد على الإحداثي الصادي أو بذكر النقطة كاملة وهو الأفضل حيث عُوِّض في الدالة الأصلية بـ س=−١ ، فتنتج لدينا ص وهنا ص=١

(٢) $د(س) = \frac{س^{٢}-٣}{س-٢}$ ، م.ت = ح/{٢} ، الدالة متصلة على ح/{٢}

$دَ(س) = \frac{س^{٢}-٤س+٣}{(س-٢)^{٢}} \Leftarrow$(نساوي المشتقة بالصفر) $س^{٢}-٤س+٣ = ٠ \Leftarrow (س-٣)(س-١) = ٠$

∴ إما س = ٣ ، أو س = ١، وهما نقطتين حرجتين ناتجيتين من تساوي المشتقة بالصفر ولاتوجد نقطة حرجة عند س=٢ [لأن الدالة غير معرفة عند س=٢رغم أن المشتقة غير معرفة عند س=٢ لذلك يجب في النقطة الحرجة انتمائها لمجموعة تعريف الدالة]



∴ النقاط الحرجة هي{ ٣ ، ١ }،ندرس الإشارة حول النقاط الحرجة وحول س=٢:

∞ + ٣ − ٢ − ١ + $-\infty$

الدالة تزايدية في الفترة $]-\infty ، ١[\cup]٣ ، \infty[$ وتناقصية في الفترة$]١ ، ٣[/\{٢\}$

للدالة قيمة عظمى عند النقطة (١ ، ٢) ، و قيمة صغرى عند النقطة (٣ ، ٦)

(٣) د(س) = لو(س−٣)

نوجد مجموعة التعريف بجعل ما بعد لو > ٠

س−٣ > ٠ ⇐ س > ٣ ، ∴ م.ت =]٣ ، ∞[

نوجد المشتقة الأولى ونساويها بالصفر للحصول على النقاط الحرجة.

دَ(س) = ١/(س−٣) ⇐(نساوي المشتقة بالصفر) : ١/(س−٣) = ٠ ⇐ ١ ≠ ٠ [دَ(س) ≠ ٠]

لا توجد نقاط حرجة من مساواة المشتقة بالصفر.

كما نلاحظ أن م.ت المشتقة = ح/{٣} ، ولكن ٣ لا تعتبر نقطة حرجة لأن الدالة الأصلية غير معرفة عند س = ٣.

∴ لا توجد نقاط حرجة ، فندرس الإشارة على مجموعة تعريفها : ٣ + + + ∞

وكما نلاحظ أن الدالة تزايدية على مجموعة تعريفها أي تزايدية في الفترة]٣ ، ∞[

لا توجد للدالة قيمة قصوى ، لأنها تزايدية على مجموعة تعريفها أي مداها من]−∞ ، ∞[.

(٤) د(س) = ٢س − هـ^س

م.ت = ح ، نوجد المشتقة الأولى ونساويها بالصفر للحصول على النقاط الحرجة:

دَ(س) = ٢ − هـ^س ⇐ دَ(س) = ٠ ⇐ ٢ − هـ^س = ٠ ⇐ هـ^س = ٢ (بإدخال لو على الطرفين)

لو٢ = لو هـ^س ⇐ س = لو٢ ، ∴ للدالة نقطة حرجة واحدة عند س = لو٢

ندرس الإشارة حول النقطة الحرجة علماً أن لو٢ ≈ ٠,٧ : −∞ + لو٢ − ∞

الدالة تزايدية في الفترة]−∞ ، لو٢] ، وتناقصية في الفترة [لو٢ ، ∞[.

للدالة قيمة عظمى مطلقة عند النقطة (لو٢ ، (٢لو٢)−٢) .

مثال: بين أن الدالة د(س) = س + جاس تزايدية عل الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]

الحل: (١) م.ت = ح ⇐ ∴ الدالة متصلة على [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]

دَ(س) = ١ + جتاس ، ∀ س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[

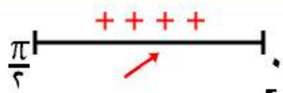
الحل بطريقة أولى: مثل ماسبق نجعل المشتقة تساوي صفر ونستخدم خط الأعداد لدراسة الإشارة:

دَ(س) = ٠ ⇐ ١ + جتاس = ٠ ⇐ جتاس = −١

∴ س = π + ٢ك π (نعوض بـ ك = ٠ ⇐ س = π ∉]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[)

∴ لاتوجد نقاط حرجة

ندرس الإشارة في الفترة $[\cdot ، \frac{\pi}{٢}]$



نلاحظ أن الدالة تزايدية في الفترة $[\cdot ، \frac{\pi}{٢}]$

الحل بطريقة أخرى: (طريقة بناء دالة المشتقة وملاحظة إشارتها)

∵ جتاس ≥ ٠ ، ∀ س ∈ $[\cdot ، \frac{\pi}{٢}]$ (جتاس في الربع الأول موجب)

∴ ١ + جتاس ≥ ٠ ، ∀ س ∈ $[\cdot ، \frac{\pi}{٢}]$

دَ(س) ≥ ٠ ، ∀ س ∈ $[\cdot ، \frac{\pi}{٢}]$

∴ الدالة تزايدية.

مثال: إذا كانت د(س) = س^٢ + ٢س قيمة قصوى محلية عند س = ١ ، فأوجد قيمة ٢ .

الحل: (١) ∵ للدالة قيمة قصوى عند س = ١ ، فإن س = ١ نقطة حرجة .

وكما هو معلوم أن النقطة الحرجة نتجت من دَ(س) = ٠ ، وعليه فإنه يمكن إيجاد قيمة ٢ كالآتي:

دَ(س) = ٢س + ٢ ، ∴ ٢س + ٢ = ٠ ⇐ ٢(١) + ٢ = ٠ ⇐ ٢ = −٢ $\boxed{\text{تحقق من ذلك}}$

تدريبات: (١) حدد فترات التزايد والتناقص ، ثم القيم القصوى للدوال:

Ⓐ د(س) = س^٣+٩س−٦س^٢ — $\boxed{\text{النقاط الحرجة = \{١ ، ٣\}}}$

Ⓑ د(س) = س^٣−٩س^٢+٢٤س+١ — $\boxed{\text{النقاط الحرجة = \{٢ ، ٤\}}}$

Ⓒ د(س) = ٣س + جتاس — $\boxed{\text{يظهر جاس = ٣ (مستحيل)،فلاتوجد نقاط حرجة}}$

Ⓓ د(س) = س−٣+ $\frac{٤}{س−١}$ — $\boxed{\text{النقاط الحرجة = \{−١ ، ٣\}}}$

(٢) أثبت أن د(س) = جاس + جتاس تزايدية على $[\cdot ، \frac{\pi}{٤}]$.

(٣) إذا كانت د(س) = س^٣ + لس نقطة حرجة عند س = ١ ، فأوجد قيمة ل .

....

....

....

....

....

....

مبرهنة (٣) : إذا كان للدالة د قيم قصوى محلية عند س = ب فإن:

دَ(ب) = ٠ ، أو دَ(ب) غير موجودة .

عكس مبرهنة (٣) : إذا كانت دَ(ب) = ٠ ، أو غير موجودة فإنه:

ليس بالضرورة أن تكون د(ب) قيمة قصوى محلية للدالة د .

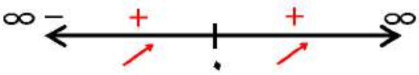
مثال توضيحي على عكس المبرهنة:

إذا كانت د(س) = س^{٣} ، فإن م،ت = ح

دَ(س) = ٣س^{٢} ، $\forall$ س $\in$ ح

نساوي الشتقة بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة: دَ(س) = ٠ ⇐ ٣س^{٢} = ٠ ⇐ س = ٠ (نقطة حرجة)

نلاحظ عند س = ٠ نقطة حرجة ، ولكن ليست هناك قيمة قصوى



خلاصة مهمة:

(١) كل قيمة قصوى تكون حرجة والعكس غير صحيح .

(٢) كل قيمة قصوى مطلقة تكون محلية والعكس غير صحيح ، إلاّ إذا كانت القيم القصوى المحلية وحيدة.

(٣) عند أطراف الفترة الواقعة في المجال يوجد دائماً قيم قصوى.

(٤) إذا لم تتغير إشارة دَ(س) حول ب فإن د(ب) ليس قيمة قصوى.

مبرهنة (٤) : (مبرهنة معرفة القيم القصوى المطلقة) :

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [٩ ، ب] فإنها تبلغ قيمتها القصوى المطلقة (العظمى أو الصغرى) عند أعداد تنتمي إلى الفترة [٩ ، ب] .

- خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة لدالة على [٩ ، ب]:

١) التأكد من الاتصال على [٩ ، ب].

٢) نوجد النقاط الحرجة في] ٩ ، ب [.

٣) نوجد القيم القصوى للدالة عند النقاط الحرجة وكذلك عند أطرافها د(٩) ، د(ب).

٤) ندرس القيم القصوى (العظمى والصغرى) [من خلال رسم خط الأعداد وملاحظة الإشارة حولهن].

٥) نوجد صور قيم س (النقاط الحرجة وعند الأطراف) فالأكبر في القيمة القصوى العظمى تكون عظمى مطلقة ، والأصغر في القيمة القصوى الصغرى تكون صغرى مطلقة.

مثال: إذا كانت د(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + س ، فأوجد القيم القصوى للدالة على الفترة [−١ ، ٢] موضحاً نوعها.

الحل: م.ت = [−١ ، ٢] ، الدالة متصلة على هذه الفترة .

دَ(س) = ٣س^{٢}−٤س+١ ، ∀ س ∈]−١ ، ٢[

نوجد النقاط الحرجة: ٣س^{٢}−٤س+١ = ٠ ⇐ (٣س−١) (س−١) = ٠ إما س = $\frac{١}{٣}$ ، س = ١

∴ النقاط الحرجة هي { $\frac{١}{٣}$ ، ١} ، فندرس الإشارة على خط الأعداد: −١ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٢ (+ ، − ، +)

نلاحظ من خط الأعداد أن هناك قيمتين عظمى محلية ومثلها صغرى محلية وللحكم على العظمى بأنها مطلقة علينا ايجاد الإحداثي الصادي للقيم العظمى فأعلى قيمة تكون مطلقة والأخرى محلية ، وفي القيم الصغرى المحلية فإن أصغر قيمة تكون مطلقة والأخرى تكون محلية.

نوجد القيم القصوى عند النقاط الحرجة وعند الأطراف بالتعويض بها في الدالة الأصلية فنتنج ص:

س = −١ ⇐ د(−١) = −٤ ⇐ (−١ ، −٤) صغرى مطلقة .

س = $\frac{١}{٣}$ ⇐ د($\frac{١}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$ ⇐ ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٤}{٢٧}$) عظمى محلية .

س = ١ ⇐ د(١) = ٠ ⇐ (١ ، ٠) صغرى محلية .

س = ٢ ⇐ د(٢) = ٢ ⇐ (٢ ، ٢) عظمى مطلقة .

مثال: إذا كانت د(س) = { س^{٢} ، −١ ⩽ س < ٢
٦− س ، ٢ ⩽ س ⩽ ٣

فأوجد القيم القصوى للدالة على الفترة [−١ ، ٣] موضحاً نوعها.

الحل: م.ت = [−١ ، ٣] ، الدالة متصلة على هذه الفترة . (−١ ، ٢ ، ٣: س^{٢} ، ٦− س)

ويمكنك التأكد من الاتصال عند العدد الذي تتغير عنده القاعدة أي عند س = ٢ .

دَ(س) = { ٢س ، −١ < س < ٢
−١ ، ٢ < س < ٣

(−١ ، ٢ ، ٣: ٢س ، −١)

لإيجاد النقاط الحرجة أولاً: من دَ(س)= ٠ ، (أ) ٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ، (ب) −١ ≠ ٠

ثانياً: من دَ(س) غير موجودة : نبحث الاشتقاق عند العدد الذي تتغير عنده قاعدة المشتقة الأولى وهو س = ٢ ،كما يلي: دَ(٢$^{+}$) = −١ ، دَ(٢$^{-}$) = ٢×٢ = ٤ ، ∴ دَ(٢$^{+}$) ≠ دَ(٢$^{-}$)

∵ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ⇐ س = ٢ نقطة حرجة . [الدالة معرفة عند س=٢]

∴ النقاط الحرجة هي { ٠ ، ٢} ، فندرس الإشارة على خط الأعداد: −١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ (− ، + ، −)

مثل ما سبق في المثال السابق فالقيم العظمى تحدد من خط الأعداد والأكبر فيهم تكون مطلقة والبقية محلية ، وكذلك بالنسبة للقيم الصغرى تحدد من خط الأعداد والأصغر تكون مطلقة والبقية محلية.

نوجد القيم القصوى عند النقاط الحرجة وعند الأطراف بالتعويض بها في الدالة الأصلية فتنتج ص:

س = −١ ⇐ د(−١) = ١ ⇐ النقطة (−١ ، ١) عظمى محلية .

س = ٠ ⇐ د(٠) = ٠ ⇐ النقطة (٠ ، ٠) صغرى مطلقة .

س = ٢ ⇐ د(٢) = ٤ ⇐ النقطة (٢ ، ٤) عظمى مطلقة .

س = ٣ ⇐ د(٣) = ٣ ⇐ النقطة (٣ ، ٣) صغرى محلية .

تدريبات: (١) أوجد القيم القصوى للدالة د(س) = س^{٣} − ٣س + ٢ في [−٤ ، ٢] مبيناً نوعها .

(٢) أثبت أن للدالة د(س) = |س| + ٢ نقطة حرجة عند س = ٠ موضحاً نوعها .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مبرهنة (٥) : (اختبار المشتقة الثانية):

إذا كانت ب في مجال الدالة د ، دَ(ب) = ٠ وكان:

١ دً(ب) < ٠ فإن د(ب) قيمة عظمى محلية .

٢ دً(ب) > ٠ فإن د(ب) قيمة صغرى محلية .

ملاحظات:

١ إذا كان دً(ب) = ٠ ، فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل وعلينا العودة إلى اختبار المشتقة الأولى .

٢ النقاط الحرجة التي عندها المشتقة الأولى غير موجودة يجب اختبارها اختبار المشتقة الأولى فقط .

مثال: أوجد القيم القصوى للدوال الآتية باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

(١) د(س) = س^٤ − ٢س^٢ . (٢) د(س) = س + $\frac{١}{س}$

الحل: (١) د(س) = س^٤ − ٢س^٢

م.ت = ح ⇐ ∴ الدالة د متصلة وقابلة للاشتقاق على ح

دَ(س) = ٤س^٣ − ٤س ، بوضع دَ(س) = ٠ يكون:

٤س^٣ − ٤س = ٠ ⇐ ٤س(س^٢−١) = ٠ ⇐ إما ٤س = ٠ ⇐ س = ٠

أو س^٢−١ = ٠ ⇐ س^٢ = ١ ⇐ س = ± ١

∴ النقاط الحرجة هي : {−١ ، ٠ ، ١} .

نوجد المشتقة الثانية ونعوض بالنقاط الحرجة لإيجاد القيم القصوى:

دً(س) = ١٢س^٢ − ٤

دً(٠) = ١٢ × (٠)^٢ − ٤ = −٤ < ٠ ⇐ للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٠) .

دً(−١) = ١٢×(−١)^٢ − ٤ = ٨ > ٠ ⇐ للدالة قيمة صغرى محلية عند (−١ ، −١) .

دً(١) = ١٢ × (١)^٢ − ٤ = ٨ > ٠ ⇐ للدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، −١) .

تذكر: للحصول على الإحداثي الصادي لنقطة القيمة القصوى نعوض بالنقاط الحرجة وهي قيم في س ، نعوض بهذه النقاط في الدالة فنحصل على صورها (قيم ص)

(٢) د(س) = س + $\frac{١}{س}$

م.ت = ح* = ح/{٠} ، ∴ الدالة د متصلة وقابلة للاشتقاق على ح*

دَ(س) = ١ − $\frac{١}{س^٢}$ ، بوضع دَ(س) = ٠ يكون:

لم يتم أخذ النقطة الحرجة س = ٠ ، لأن الدالة غير معرفة عند س=٠ حسب المبرهنة (٥)، وكذلك حسب هذه المبرهنة نأخذ القيم الحرجة فقط المتكوّنة من دَ(س) = ٠ ، أي : عندما دَ(ب) = ٠ وليس عندما دَ(ب) غير موجودة.

$١ - \frac{١}{س^٢} = ٠ \Leftarrow س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

نوجد المشتقة الثانية ونعوض بالنقاط الحرجة للحصول على القيم القصوى:

$دً(س) = ٠ - \left(\frac{-٢س}{س^٤} \right) = \frac{٢}{س^٣}$

$دً(-١) = \frac{٢}{-١} = -٢ < ٠$ ، للدالة قيمة عظمى محلية عند (-١ ، -٢) .

$دً(١) = \frac{٢}{١} = ٢ > ٠$ ، للدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٢) .

تدريبات: (١) أوجد القيم القصوى للدوال الآتية باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

(١) $د(س) = س^٣ - ٣س + ٢$. (٢) $د(س) = س^٤ - ٢س^٣ + س^٢$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ثالثاً : فترات التقعر ونقاط الانعطاف :

مبرهنة (٦) : إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق الثاني على الفترة ف ⊃ ح، فإن :

١ منحنى الدالة مقعر للأعلى إذا كانت دً(س) > ٠

٢ منحنى الدالة مقعر للأسفل إذا كانت دً(س) < ٠

تعريف نقطة الانعطاف: يقال للنقطة (ب ، د(ب)) ، نقطة انعطاف إذا تحقق ما يلي:

١ دً(ب) = ٠ ، أو دً(ب) غير موجودة .

٢ تغيّر إشارة المشتقة الثانية [دً(س)] جوار العدد ب .

- **خطوات دراسة فترات التقعر:**

١) نوجد دَ(س) ومنها نوجد دً(س) .

٢) نوجد نقاط الانعطاف بوضع دً(س) = ٠ . وأيضاً نقاط الانعطاف عندما دً(ب) غير موجودة .

٣) ندرس إشارة المشتقة الثانية على خط الأعداد: نضع ∪ أسفل + و ∩ أعلى − .

٤) نكتب فترات التقعر وفق خط الأعداد.

مثال: أوجد فترات التقعر ونقاط الإنعطاف للدالة د(س) = ٦س^{٣} − س^{٤}

الحل: دَ(س) = ١٨س^{٢} − ٤س^{٣}

دً(س) = ٣٦س − ١٢س^{٢} ، نضع دً(س) = ٠ لإيجاد نقاط الإنعطاف

٣٦س − ١٢س^{٢} = ٠ ⇐ ١٢س (٣ − س) = ٠ ⇐ س = ٠ ، س = ٣ ، وهما نقاط انعطاف.

ندرس الإشارة: ∞ − ⟵ (−) ٠ (+) ٣ (−) ⟶ ∞

فيما سبق درسنا إشارة المشتقة الثانية حول نقاط الإنعطاف وهما (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٨١) .

∴ في الفترة]− ∞ ، ٠ [∪] ٣ ، ∞ [الدالة مقعرة نحو الأسفل .

في الفترة [٠ ، ٣] الدالة مقعرة نحو الأعلى .

خلاصة:

فوائد المشتقة الأولى	فوائد المشتقة الثانية
(١) إيجاد النقاط الحرجة .	(١) إيجاد نقاط الإنعطاف .
(٢) معرفة فترات التزايد والتناقص .	(٢) معرفة فترات التقعر .
(٣) تحديد القيم القصوى ونوعها .	(٣) تحديد القيم القصوى .

تدريب: أوجد نقاط الإنعطاف وفترات التقعر للدالتين:

(١) د(س) = $س^٣ - ٣س^٢ + ١$. (٢) د(س) = س − $\frac{١}{س^٢}$

....

....

....

....

....

....

....

تدريب شامل لاطراد الدالة: إذا كانت د(س) = $\frac{س^٢}{س+١}$ ، فأوجد :

(١) النقاط الحرجة وفترات التزايد والتناقص .

(٢) القيم القصوى .

(٣) نقاط الإنعطاف وفترات التقعر.

النقاط الحرجة = {−٢ ، ٠} ، نقاط الإنعطاف = لاتوجد

دَ(س) = $\frac{س^٢+٢س}{(س+١)^٢}$ ، دً(س) = $\frac{٢}{(س+١)^٣}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

دراسة تغيّر الدالة

تعريف الفروع اللانهائية: نقول أن للدالة فروع لانهائية إذا كان من الممكن أن يسعى أحد المتغيرين إلى اللانهاية (الموجبة أو السالبة) ، أي إذا احتوت مجموعة تعريف الدالة أو مداها على $\pm \infty$.

- خطوات دراسة تغيّر الدالة:

١) نوجد م.ت للدالة والفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة (خاصة بالدوال الكسرية) .

٢) نجد دَ(س) ومنها نتعرف على [النقاط الحرجة، وفترات التزايد والتناقص، والقيم القصوى].

٣) نجد دً(س) ومنها نتعرف على [نقاط الإنعطاف وفترات التقعر] .

٤) نحدد النقاط المساعدة [النقاط المساعدة هي نقاط تقاطع المنحنى مع المحورين] :

لإيجاد نقاط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ في الدالة الأصلية ومنها نجد قيم ص .

لإيجاد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ في الدالة الأصلية ومنها نجد قيم س .

٥) نلخص النتائج السابقة في جدول عدا النقاط المساعدة :

س	نضع م.ت مع الخارج منها ، والنقاط الحرجة ، ونقاط الإنعطاف .
دَ(س)	نضع صفر مقابل النقاط الحرجة و إشارة دَ(س) بين الأصفار .
دً(س)	نضع صفر مقابل نقاط الإنعطاف و إشارة دً(س) مع رمز التقعر بين الأصفار .
د(س)	نضع قيم الدالة عند أطراف م.ت وعلى يمين ويسار الخارج منها وقيم الدالة عند النقاط الحرجة ونقاط الإنعطاف (عن طريق التعويض بها في الدالة الأصلية) ، ورمز التزايد والتناقص بين هذه القيم .

٥) نرسم بيان الدالة بالإستفادة من :

(أ) المستقيمات المقاربة إن وجدت .

(ب) النقاط المساعدة .

(ج) الجدول (أول ما يتم رسمه من الجدول النقاط) .

سنعطي عزيز الطالب مثال أو أكثر على كل نوع من الدوال المهمة مع تدريبات لتجيد دراسة تغيّر أنواع مختلفة من الدوال مع وضع ترقيم في الحل لكل خطوة من خطوات دراسة تغير الدالة:

مثال على دالة حدودية: ادرس تغيرات الدالة د(س) = $س^{٣}$ − ٣س ، وارسم بيانها .

الحل: (١) م.ت = ح =]−∞ ، ∞[

نجد نهاية الفروع اللانهائية لمعرفة اتجاهها في المحور الصادي:

$\lim_{س \to ∞}$ $س^{٣}$−٣$س^{٢}$−٣ = ∞ ، $\lim_{س \to -∞}$ $س^{٣}$−٣$س^{٢}$−٣ = −∞

(٢) دَ(س) = ٣$س^{٢}$−٣ ، نساويها بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة .

٣$س^{٢}$−٣ = ٠ ⇐ $س^{٢}$ = ١ ⇐ س = ± ١

∞ ← + | ١ − | −١ + → −∞

(٣) دً(س) = ٦س ، نساويها بالصفر لإيجاد نقاط الانعطاف .

٦س = ٠ ⇐ س = ٠

∞ ← ⊕ | ٠ ⊖ → −∞

(٤) نجد النقاط المساعدة:

نضع س = ٠ ⇐ ص = $٠^{٣}$ − ٣ × ٠ = ٠ ⇐ ص = ٠ ⇐ النقطة (٠ ، ٠)

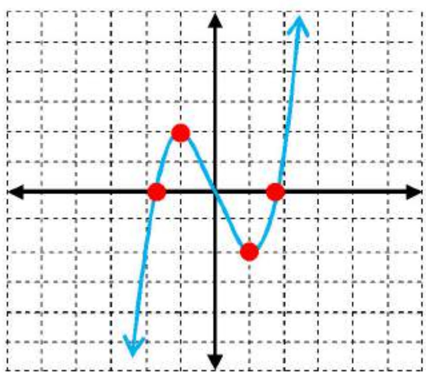
نضع ص = ٠ ⇐ $س^{٣}$−٣س = ٠ ⇐ س($س^{٢}$−٣) = ٠ ⇐ إما س = ٠ أو س = ±$\sqrt{٣}$

∴ النقاط المساعدة هي: (٠ ، ٠) ، ($\sqrt{٣}$ ، ٠) ، (−$\sqrt{٣}$ ، ٠)

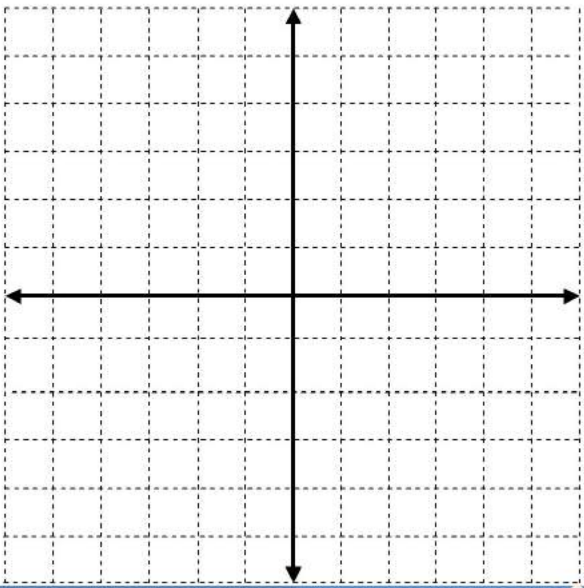
(٥) نكوّن الجدول:

س	+∞		١		٠		−١		−∞
دَ(س)		+	٠		−		٠	+	
دً(س)			⊕		٠		⊖		
د(س)	+∞	↗	−٢	↘	٠	↘	٢	↗	−∞

(٦) نرسم الدالة: عند الرسم نحدد النقاط المساعدة والنقاط من الجدول ثم مستخدمين الجدول ومن جهة اليسار مع مراعاة التزايد والتناقص والتقعر في المنحنى.



تدريب: ادرس تغيرات الدالة د(س) = $س^٣ - ٣س^٢$ ، وارسم بيانها .



مثال على دالة المقياس: ادرس تغيرات الدالة د(س) = |− س٢ − ٥س| − ٤ ، وارسم بيانها .

الحل: (١) م.ت = ح =]−∞ ، ∞[

نهـا(س ← ∞) |− س٢ − ٥س| − ٤ = ∞ ، نهـا(س ← −∞) |− س٢ − ٥س| − ٤ = ∞ (دالة المقياس تخرج +)

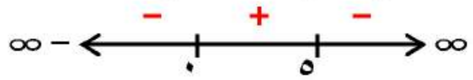
(٢) نوجد دَ(س) ، لكن يجب إعادة تعريف القيمة المطلقة .

نوجد جذور داخل القيمة المطلقة كما يلي:

− س٢ + ٥س = ٠ ⇐ س(− س+٥) = ٠ ⇐ إما س = ٠ ، أو س = ٥

∴ نعيد التعريف في الفترات الثلاث وهي:]−∞ ، ٠] ، [٠ ، ٥] ، [٥ ، ∞[

حيث نحدد الإشارة إما بالتعويض في دالة المقياس أو بالإعتماد على الطريقة المختصرة فنلاحظ أن س٢ سالب فتكون سالبة في الأطراف وعليه تكون الدالة:



د(س) = { −(− س٢+٥س) −٤ ، س ⩾ ٥ ؛ (− س٢+٥س) − ٤ ، ٠ < س < ٥ ؛ −(− س٢+٥س) −٤ ، س ⩽ ٠ } = { س٢−٥س−٤ ، س ⩾ ٥ ؛ − س٢+٥س − ٤ ، ٠ < س < ٥ ؛ س٢−٥س−٤ ، س ⩽ ٠ }

الآن نشتق الدالة فتكون:

دَ(س) = { ٢س−٥ ، س > ٥ ؛ −٢س+٥ ، ٠ < س < ٥ ؛ ٢س−٥ ، س < ٠ }

قد تلاحظ عزيزي الطالب أن الحل مطولاً في أمثلة دراسة تغير دالة أو أي أمثلة أخرى ، لأن الغرض هو الشرح التفصيلي للمثال لتتمكن من استيعابه دون مساعدة خارجية ، ولكن عند حلك للتدريبات أو مسائل التمارين أو الأختبار فلا داعي للتطويل فكثير من الخطوات لاداعي لذكرها.

نوجد النقاط الحرجة لكل قاعدة :

٢س−٥ = ٠ ⇐ س = ٥/٢ ∌ [٥ ، ∞[

−٢س+٥ = ٠ ⇐ س = ٥/٢ ∈ [٠ ، ٥]

٢س−٥ = ٠ ⇐ س = ٥/٢ ∌]−∞ ، ٠]

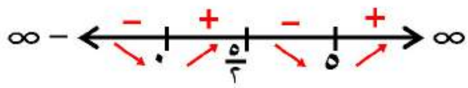
∴ س = ٥/٢ نقطة حرجة . كما نلاحظ أن المشتقة غير موجودة عند نقاط تغير القواعد أي عند س = ٠ ، س = ٥ ونبينها كما يلي:

دَ(٠⁺) = −٢ × ٠ +٥ = ٥ ، دَ(٠⁻) = ٢ × ٠ −٥ = −٥ ، ∴ دَ(٠⁺) ≠ دَ(٠⁻)

دَ(٥⁺) = ٢ × ٥ − ٥ = ٥ ، دَ(٥⁻) = −٢ × ٥ +٥ = −٥ ، ∴ دَ(٥⁺) ≠ دَ(٥⁻)

∴ النقاط الحرجة هي { ٠ ، ٥/٢ ، ٥ }

ندرس إشارة المشتقة الأولى:



(٣) نوجد دً(س)

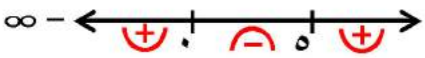
دً(س) = { ٢ ، س > ٥ ؛ −٢ ، ٠ < س < ٥ ؛ ٢ ، س < ٠ }

نضع دً(س) = ٠ ، فنلاحظ أن ٢ ≠ ٠ ، −٢ ≠ ٠ ، ٢ ≠ ٠ ، لاتوجد نقاط انعطاف عندما دً(س) = ٠

كما نلاحظ عدم وجود المشتقة الثانية عند نقاط تغيّر القواعد وهما س = ٠ ، س = ٥ :

دً(٠⁺) = −٢ ، دً(٠⁻) = ٢ ، ∴ دً(٠⁺) ≠ دً(٠⁻)

دً(٥⁺) = ٢ ، دً(٥⁻) = −٢ ، ∴ دً(٥⁺) ≠ دً(٥⁻)

∴ س = ٠ ، س = ٥ ، نقاط انعطاف ، فندرس الإشارة: 

(٤) النقاط المساعدة: (عند س = ٠ حسب انتمائها للقاعدة) القاعدة الأولى والثالثة معاً :

نضع س = ٠ (في القاعدة الثالثة) ⇐ ص = −٤ ⇐ النقطة (٠ ، −٤)

نضع ص = ٠ ⇐ س² −٥س −٤ = ٠ ⇐ س = (٥ + √٤١)/٢ ⇐ النقطة ((٥ + √٤١)/٢ ، ٠)

استخدمنا القانون العام لحل المعادلة ⇐ س = (٥ − √٤١)/٢ ⇐ النقطة ((٥ − √٤١)/٢ ، ٠)

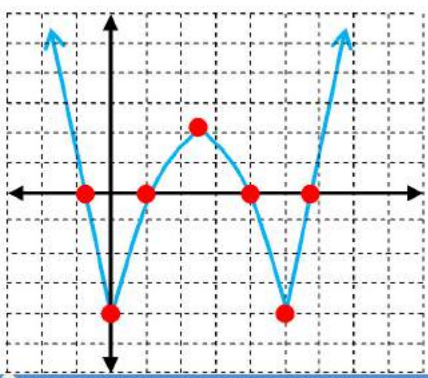
القاعدة الثانية : نضع ص = ٠ ⇐ −س² +٥س −٤ = ٠ ⇐ س² −٥س +٤ = ٠

⇐ (س −٤)(س −١) = ٠ ⇐ س = ٤ ، س = ١ ⇐ النقاط (٤ ، ٠) (١ ، ٠)

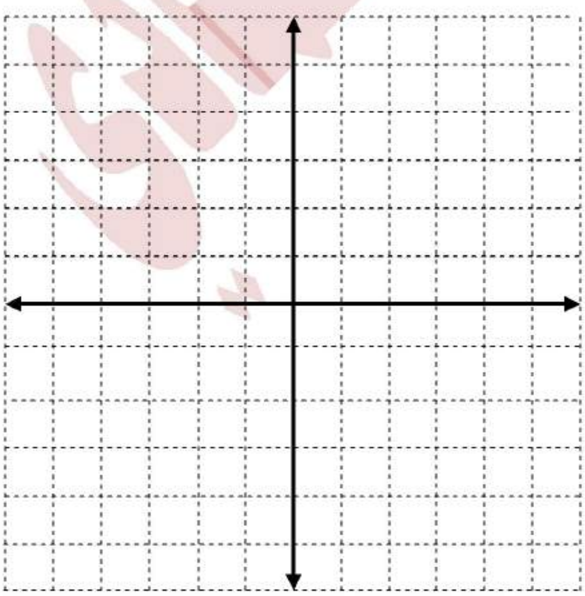
(٥) الجدول:

س	∞		٥		٥/٢		٠		−∞
دَ(س)		+	٠	−	٠	+	٠	−	
دً(س)		+	٠		−		٠	+	
د(س)	∞	↗	−٤	↘	٩/٤	↗	−٤	↘	−∞

(٦) الرسم:



تدريب: ادرس تغيرات الدالة د(س) = | $س^{٢}$ − ٤س + ٣ | ، وارسم بيانها .



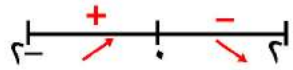
مثال لدالة جذر تربيعي: ادرس تغيرات الدالة $د(س) = \sqrt{4 - س^2}$ ، وارسم بيانها .

الحل: (١) م.ت = ح = $[-2 ، 2]$

لا توجد فروع لا نهائية.

(٢) نوجد المشتقة الأولى ومنها نتعرف على النقاط الحرجة والتزايد والتناقص والقيم القصوى:

$د'(س) = \frac{-س}{\sqrt{4-س^2}}$ ، $\frac{-س}{\sqrt{4-س^2}} = 0 \Leftarrow -س = 0 \Leftarrow س = 0 \in [-2،2]$ نقطة حرجة

ندرس الإشارة: 

(٣) $د''(س) = \frac{-4}{(4-س^2)^{\frac{3}{2}}}$ ، $\frac{-4}{(\sqrt{4-س^2})^3} = 0 \Leftarrow -4 \neq 0$ لا توجد نقاط انعطاف.

ندرس الإشارةعلى مجموعة تعريفها: 

(٤) نوجد النقاط المساعدة:

نضع $س = 0 \Leftarrow ص = \sqrt{4 - 0^2} \Leftarrow ص = \sqrt{4} \Leftarrow ص = 2 \Leftarrow$ النقطة $(0 ، 2)$

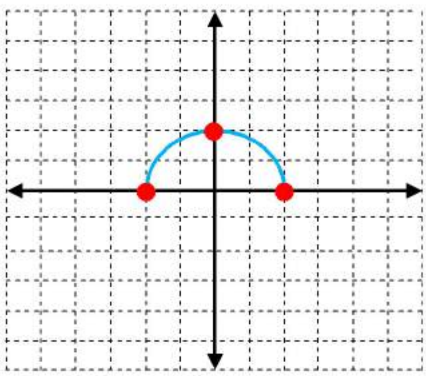
نضع $ص = 0 \Leftarrow \sqrt{4-س^2} = 0 \Leftarrow 4 - س^2 = 0 \Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = \pm 2$

∴ النقاط المساعدة هي : $(0 ، 2)$ ، $(2 ، 0)$ ، $(-2 ، 0)$

(٥) نكوّن الجدول:

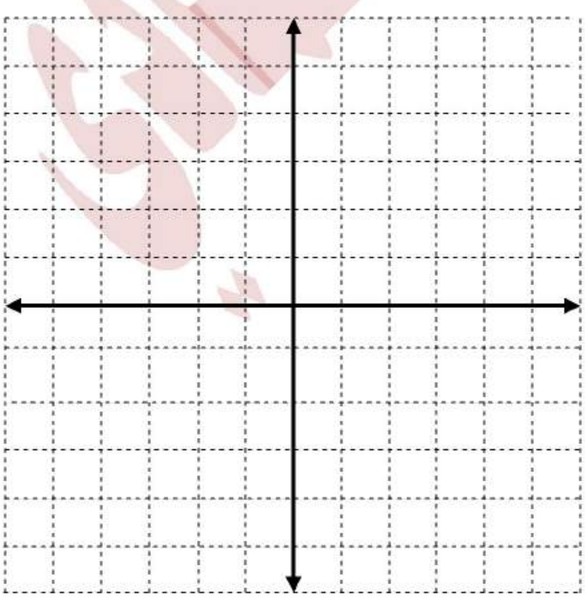
س	٢		٠		٢-
د'(س)		−	٠	+	
د''(س)			⊖		
د(س)	٠	↘	٢	↗	٠

(٦) الرسم:



إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

تدريب: ادرس تغيرات الدالة د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤}$ ، وارسم بيانها .



سننتقل بك عزيزي الطالب إلى مسائل دراسة تغير الدالة الكسرية وهي الأهم ، وما تتميز به الدوال الكسرية وجود المستقيمات المقاربة ، وهنا سنوضح لك المستقيمات المقاربة أولاً وكل ما يتعلق بها.

تعريف المستقيمات المقاربة: هي المستقيمات التي يقترب منها المنحنى بلا حدود .

- أنواع المستقيمات المقاربة:

(١) المستقيم المقارب الرأسي (العمودي) (الموازي لمحور الصادات):

يكون للدالة مستقيم مقارب رأسي إذا كان: (أ) م.ت = ح /{ج} ، (ب) $\underset{س \to ج}{\text{نهـا}}$ د(س) = ±∞

وتكون معادلة المستقيم المقارب الرأسي هي: $\boxed{\text{س} = \text{ج}}$

(٢) المستقيم المقارب الأفقي (الموازي لمحور السينات):

يكون للدالة مستقيم مقارب أفقي إذا كان: $\underset{س \to \pm\infty}{\text{نهـا}}$ د(س) = م ، م ∈ ح

(أي يكون للدالة مستقيم مقارب أفقي إذا كانت درجة البسط أصغر من أو تساوي درجة المقام)

وتكون معادلة المستقيم المقارب الأفقي هي: $\boxed{\text{ص} = \text{م}}$

(٣) المستقيم المقارب المائل (القاطع للمحورين):

يكون للدالة مستقيم مقارب مائل إذا كان: (أ) $\underset{س \to \pm\infty}{\text{نهـا}}$ د(س) = ±∞

(أي يكون للدالة مستقيم مقارب مائل إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام بدرجة واحدة)

ولإيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل نقوم بقسمة البسط على المقام:

فتكون معادلته:

ص = ناتج القسمة
ص = م س + ب

الناتج
المقام | البسط
......
......
الباقي

❖ ملاحظات مهمة:

(١) بعد قسمة البسط على المقام يمكن كتابة الدالة على الصورة:

د(س) = الناتج ± $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$ ، وذلك لتسهيل الحصول على المشتقات العليا.

(± حسب إشارة الباقي) .

(٢) لرسم المستقيم المائل نحتاج نقطتين سهلتين اختياريتين:

مثلاً لرسم المستقيم ص = س − ١ ،

نضع س = ٠ ⇐ ص = ٠ − ١ ⇐ ص = −١ ⇐ النقطة (٠ ، −١)

ونضع ص = ٠ ⇐ ٠ = س − ١ ⇐ س = ١ ⇐ النقطة (١ ، ٠)

ثم تحديد النقطتين في الإحداثي ورسم مستقيم يمر بهما .

(٣) لا يمكن أن يجتمع مائل مع أفقي أبداً [فسّر ذلك].

(٤) يجب في دراسة تغيّر الدالة الكسرية أن لا تتحول إلى دالة حدودية مثل الدوال الآتية فلا ندرس تغيرها كدوال كسرية :

$د(س) = \frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$ حيث $د(س) = \frac{\cancel{(س-٢)}(س+٢)}{\cancel{س-٢}} \Leftarrow د(س) = س+٢$ دالة حدودية .

$د(س) = \frac{س-١}{١-س}$ حيث $د(س) = \frac{-\cancel{(١-س)}}{\cancel{١-س}} \Leftarrow د(س) = -١$ دالة ثابتة .

❖ ملاحظات هامة حول صور الدوال الكسرية:

١ إذا كانت الدالة مثل الدالتين: $د(س) = \frac{س^{٢}-١١س+٥}{س-٢}$ ، $د(س) = \frac{س^{٣}-٢س+١}{س^{٢}}$

نوجد في هذه الحالة المستقيمات الرأسية ، ثم نجري عملية القسمة لإيجاد معادلة المائل .

٢ إذا كانت الدوال كالدوال: $د(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $د(س) = س + ١ + \frac{١}{س}$ ، $د(س) = س - \frac{٤}{س^{٢}}$ ، نلاحظ أن للدالة مستقيمات رأسية ومائلة ولا تحتاج إلى اجراء القسمة (لأنها مقسومة جاهزة) وعليه فإن معادلة المائل للدوال الثلاث على التوالي هي: $ص = س$ ، $ص = س+١$ ، $ص = س$.

٣ إذا كانت الدالة مثل الدوال: $د(س) = ٢ - \frac{١}{س}$ ، $د(س) = ٤ - \frac{١}{س-٣}$ ، $د(س) = ١ + \frac{٢}{س-١}$

للدالة مستقيمات رأسية وأفقية ، وعليه فإن معادلة المستقيم الأفقي للدوال الثلاث على التوالي هي:

$ص = ٢$ ، $ص = ٤$ ، $ص = ١$.

٤ إذا كانت الدالة مثل الدالة: $د(س) = ١ + \frac{س^{٢}}{س-١}$ ، نوحد المقامات ثم نجري عملية القسمة (لأنه لازال درجة البسط > درجة المقام) أو نجري عملية القسمة ونجمّع الحدود المتشابهة .

٥ إذا كانت الدالة مثل الدوال: $د(س) = \frac{٣س}{س^{٢}+١}$ ، $د(س) = \frac{٤}{س^{٢}+٥}$ ، $د(س) = \frac{س^{٣}+س^{٢}}{س^{٢}+٣}$ ،

نلاحظ أن م.ت = ح كاملة [المقام ≠ ٠] وبالتالي لا يوجد مستقيم رأسي وفي الغالب الرسم لايكون متناظر (عادي) [كذلك إذا كان المقام $س^{٢}$ فإن الرسم لايكون متناظر و م.ت إذا كان المقام $س^{٢}$ هو $ح / \{٠\}$] .

من الجماليات في مادة الرياضيات

... الشعور بالسعادة عقب حل المسائل الرياضياتية ... لأنه شعور بالنصر والنجاح ...

فكن من ... أهل السعادة الرياضياتية

مثال: ادرس تغيرات الدالة د(س) = $\frac{٢\text{س}}{\text{س} - ١}$ ، وارسم بيانها .

الحل: (١) م.ت = ح/{١}

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{٢\text{س}}{\text{س} - ١} = \frac{٢}{+٠} = \infty$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{٢\text{س}}{\text{س} - ١} = \frac{٢}{-٠} = -\infty$

∴ للدالة مستقيم مقارب رأسي معادلته $\boxed{\text{س} = ١}$

$\lim\limits_{\text{س} \to \pm\infty} \frac{٢\text{س}}{\text{س} - ١} = ٢ \in \text{ح}$

∴ للدالة مستقيم مقارب أفقي معادلته $\boxed{\text{ص} = ٢}$

للدالة فروع لانهائية ، لكن لن نوجدها لأنه تم إيجادها عندما أوجدنا المستقيم المقارب الأفقي.

(٢) دَ(س) = $\frac{-٢}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ ، $\frac{-٢}{(\text{س} - ١)^{٢}} = ٠ \Leftarrow -٢ \neq ٠$

∴ لاتوجد نقاط حرجة ، فندرس الاشارة على مجموعة تعريفها لمعرفة التزايد والتناقص .

ندرس الإشارة: ∞ ← (−) ↘ ١ (−) ↘ → −∞

(٣) دً(س) = $\frac{٤}{(\text{س} - ١)^{٣}}$ ، $\frac{٤}{(\text{س} - ١)^{٣}} = ٠ \Leftarrow ٤ \neq ٠$

∴ لاتوجد نقاط انعطاف ، فندرس الاشارة على مجموعة تعريف الدالة وهي ح/{١} لمعرفة التقعر .

ندرس الإشارة: ∞ ← (+) ١ (−) → −∞

(٤) النقاط المساعدة:

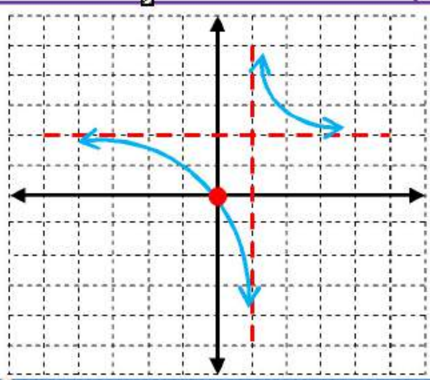
نضع س = ٠ ⇐ ص = ٠ ⇐ (٠ ، ٠)

نضع ص = ٠ ⇐ س = ٠ ⇐ (٠ ، ٠) ، ∴ توجد نقطة مساعدة واحدة هي (٠ ، ٠)

(٥) الجدول:

س	∞		١		∞−
دَ(س)		−	‖	−	
دً(س)		+	‖	−	
د(س)	٢	↘	∞+ ‖ ∞−	↘	٢

(٦) الرسم:



مثال: ادرس تغيرات الدالة د(س) = $\frac{س^2+3}{س-1}$ ، ثم ارسم بيانها .

الحل: (١) م.ت = ح/{١}

$\underset{س\leftarrow 1^+}{نهـا}\ \frac{س^2+3}{س-1} = \frac{4}{+0} = \infty$ ، $\underset{س\leftarrow 1^-}{نهـا}\ \frac{س^2+3}{س-1} = \frac{4}{-0} = -\infty$

∴ للدالة مستقيم مقارب رأسي معادلته $\boxed{س = 1}$

$\underset{س\leftarrow \pm\infty}{نهـا}\ \frac{س^2+3}{س-1} = \pm\infty$

∴ للدالة مستقيم مقارب مائل نوجد معادلته بالقسمة:

$$\begin{array}{r|l} س+1 & \\ \hline س^2+3 & س-1 \\ -(س^2-س) & \\ \hline س+3 & \\ -(س-1) & \\ \hline 4 & \end{array}$$

فتكون المعادلة هي: $\boxed{ص = س+1}$

نوجد نقطتين تحقق المعادلة لرسم المستقيم:

س = ٠ ⇐ ص = ١ ⇐ (٠ ، ١) ، ص = ٠ ⇐ س = -١ ⇐ (-١ ، ٠)

نضع د(س) بالصورة الآتية ليسهل اشتقاقها: د(س) = س+١+ $\frac{4}{س-1}$

(٢) دَ(س) = ١ − $\frac{4}{(س-1)^2}$ ، ١ − $\frac{4}{(س-1)^2}$ = ٠ ⇐ $\frac{4}{(س-1)^2}$ = ١

⇐ $(س-1)^2 = 4$ ⇐ (س−١) = ±٢ ⇐ إما س−١ = ٢ ⇐ س = ٣

⇐ أو س−١ = −٢ ⇐ س = −١

∴ النقاط الحرجة = {−١ ، ٣}   −∞ + −١ − ١ − ٣ + ∞

(٣) دً(س) = $\frac{8}{(س-1)^3}$ ، $\frac{8}{(س-1)^3}$ = ٠ ⇐ ٨ ≠ ٠

∴ لاتوجد نقاط انعطاف ، فنبحث التقعر على مجموعة تعريف الدالة:

ندرس الإشارة: −∞ (−) ١ (+) ∞

(٤) النقاط المساعدة: نضع س = ٠ ⇐ ص = −٣ ⇐ (٠ ، −٣)

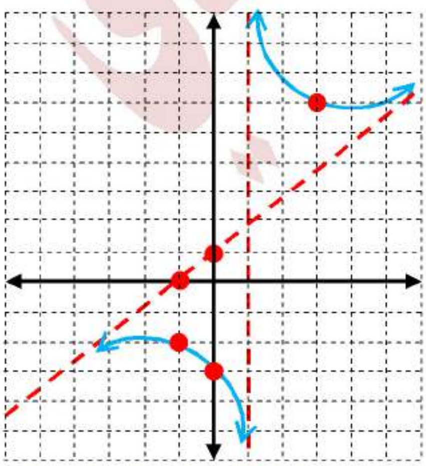
نضع ص = ٠ ⇐ س = ±$\sqrt{-3}$ ∉ ح

∴ لدينا نقطة مساعدة واحدة هي (٠ ، −٣)

(٥) الجدول:

∞−		١−		١		٣		∞	س
	+	٠	−	‖	−	٠	+		دَ(س)
		−		‖		+			دً(س)
∞−	↗	٢−	↘	∞− ‖ ∞+	↘	٦	↗	∞	د(س)

(٦) الرسم:



مثال: ادرس تغيرات الدالة د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{١ - س}^{٢}}$ ، ثم ارسم بيانها .

الحل: (١) م.ت = ح/{±١}

$\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}^{+}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{١ - س}^{٢}} = \frac{\text{١}}{-\text{٠}} = -\infty$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}^{-}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{١ - س}^{٢}} = \frac{\text{١}}{+\text{٠}} = \infty$

$\underset{\text{س}\leftarrow\text{-١}^{+}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{١ - س}^{٢}} = \frac{\text{١}}{-\text{٠}} = -\infty$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow\text{-١}^{-}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{١ - س}^{٢}} = \frac{\text{١}}{+\text{٠}} = \infty$

∴ للدالة مستقيمان رأسيان معادلتيهما : $\boxed{\text{س = ١}}$ ، $\boxed{\text{س = -١}}$

$\underset{\text{س}\leftarrow\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{١ - س}^{٢}} = \text{٠} \in$ ح

∴ للدالة مستقيم مقارب أفقي معادلته $\boxed{\text{ص = ٠}}$ (وهو محور الصادات)

(٢) دَ(س) = $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ١}}{(\text{١- س}^{٢})^{٢}}$ ، $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ١}}{(\text{١- س}^{٢})^{٢}}$ = ٠ ⇐ س² + ١ = ٠ ⇐ س = ±$\sqrt{\text{-١}}$ ∉ ح

∴ لاتوجد نقاط حرجة فندرس التزايد والتناقص على مجموعة تعريف الدالة :

ندرس الإشارة: ∞ ← + ↗ ١ + ↗ -١ + ↗ → -∞

(٣) دً(س) = $\frac{\text{٢س}^{٣}\text{ + ٦س}}{(\text{١- س}^{٢})^{٣}}$ ، $\frac{\text{٢س}^{٣}\text{ + ٦س}}{(\text{١- س}^{٢})^{٣}}$ = ٠ ⇐ ٢س³+٦س = ٠ ⇐ ٢س(س²+٣) = ٠

⇐ إما ٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ، أو س²+٣ = ٠ ⇐ س = ±$\sqrt{\text{-٣}}$ ∉ ح

∴ نقاط الانعطاف = { ٠ } ، فنبحث التقعر : ∞ (−) ١ (+) ٠ (−) -١ (+) -∞

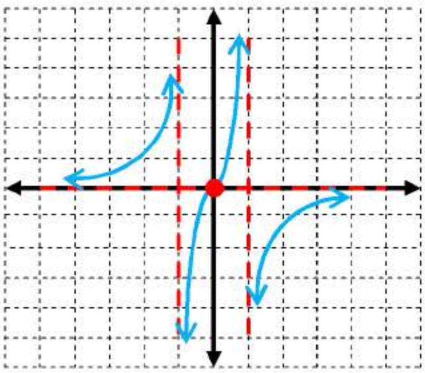
(٤) النقاط المساعدة:

نضع س = ٠ ⇐ ص = ٠ ⇐ (٠ ، ٠)

نضع ص = ٠ ⇐ س = ٠ ⇐ (٠ ، ٠) ، ∴ توجد نقطة مساعدة واحدة هي (٠ ، ٠)

(٥) الجدول: (٦) الرسم:

س	∞	١	٠	-١	-∞
دَ(س)	+		+		+
دً(س)	(−)		(−) ٠ (+)		(+)
د(س)	٠ ↗ -∞		∞ ↗ ٠ ↗ -∞		∞ ↗ ٠



مثال: ادرس تغيرات الدالة د(س) = ٢س − $\frac{١}{س^٢}$ ، ثم ارسم بيانها .

الحل: سيتم الحل هنا بشكل مختصر وأسرع لأن الشرح المفصل قد تم في الأمثلة السابقة .

(١) م.ت = ح/{٠}

$\lim\limits_{س \to ٠}$ د(س) = − ∞ ⇐ $\boxed{س = ٠}$ مقارب رأسي .

$\lim\limits_{س \to \pm\infty}$ د(س) = ± ∞ ⇐ $\boxed{ص = ٢س}$ مقارب مائل

ممكن معرفة معادلة المائل من الدالة لأنها مقسومة جاهزة .

(٢) دَ(س) = ٢ − $\frac{٠ - ٢س}{س^٤}$ = ٢ + $\frac{٢}{س^٣}$ ، ٢ + $\frac{٢}{س^٣}$ = ٠ ⇐ ٢س^٣ = −٢ ⇐ س = −١ نقطة حرجة

ندرس التزايد والتناقص في الجدول دون عمل خط الأعداد .

(٣) دً(س) = ٠ − $\frac{٦س^٢}{س^٦}$ = $\frac{٦}{س^٤}$ ⇐ دً(س) ≠ ٠ ⇐ ليس للدالة نقطة انعطاف

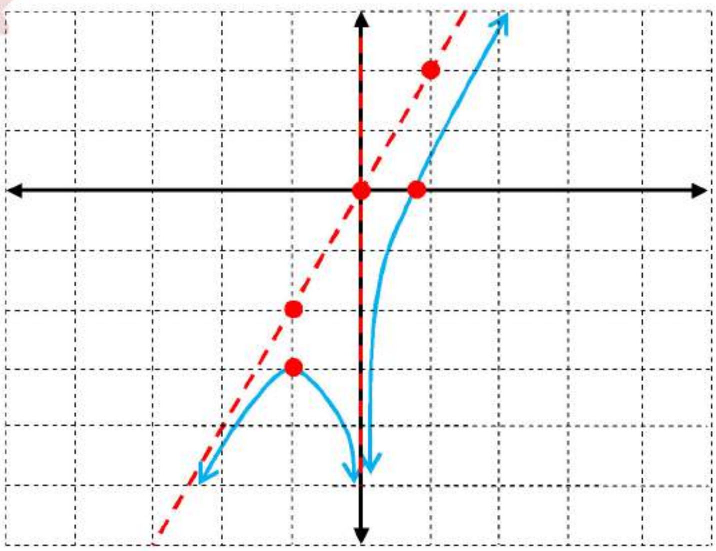
ندرس فترات التقعر في الجدول دون عمل خط الاعداد .

(٤) ص = ٠ ⇐ س = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$ ، س ≠ ٠ (المنحنى لايقطع محور الصادات)

(٥)

−∞		−١		٠		∞	س
	+	٠	−	‖	+		دَ(س)
	∩			‖	∩		دً(س)
−∞	↗	−٣	↘	−∞ ‖ +∞	↗	∞	د(س)

(٦)



مثال: ادرس تغيرات الدالة د(س) = ٢ − $\frac{١}{س - ١}$ ، ثم ارسم بيانها .

الحل: سيتم الحل هنا بشكل مختصر وأسرع لأن الشرح المفصل قد تم في الأمثلة السابقة .

(١) م.ت = ح/{١}

$\lim_{س \to ١^+}$ ٢ − $\frac{١}{س - ١}$ = ٢ − $\frac{١}{+٠}$ = ٢ − ∞ = − ∞

$\lim_{س \to ١^-}$ ٢ − $\frac{١}{س - ١}$ = ٢ − $\frac{١}{-٠}$ = ٢ − (−∞) = ∞ ⇐ $\boxed{س = ١}$ مقارب رأسي

$\lim_{س \to \pm\infty}$ د(س) = ٢ ⇐ $\boxed{ص = ٢}$ مقارب أفقي

ممكن معرفة معادلة الأفقي من الدالة لأنها مقسومة جاهزة.

(٢) دَ(س) = ٠ + $\frac{١}{(س - ١)^٢}$ ⇐ دَ(س) ≠ ٠ لاتوجد قيم قصوى

(٣) دً(س) = − $\frac{٢}{(س - ١)^٣}$ ⇐ دً(س) ≠ ٠

لا توجد نقطة حرجة ولا نقطة انعطاف، ولاتوجد قيم قصوى وندرس التزايد والتناقص والتقعرة مباشرة في الجدول.

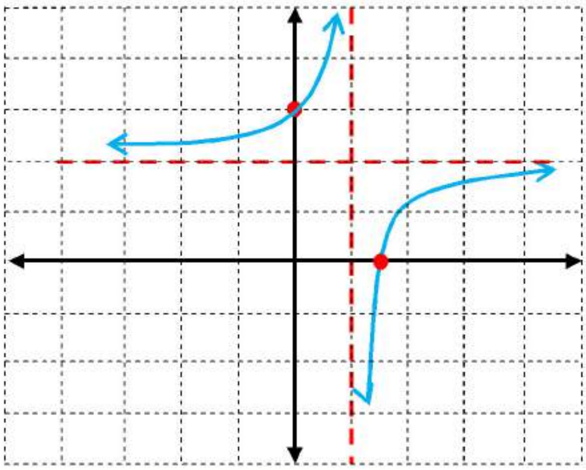
ليس للدالة نقطة انعطاف فقط عند س = ١ نقطة انعطاف. لماذا؟

(٤) س = ٠ ⇐ ص = ٣ ⇐ (٠ ، ٣) ، ص = ٠ ⇐ س = $\frac{٣}{٢}$ ⇐ ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

(٥)

س	∞			١			−∞
دَ(س)		+				+	
دً(س)		−				+	
د(س)	٢	↗	−∞		∞	↗	٢

(٦)

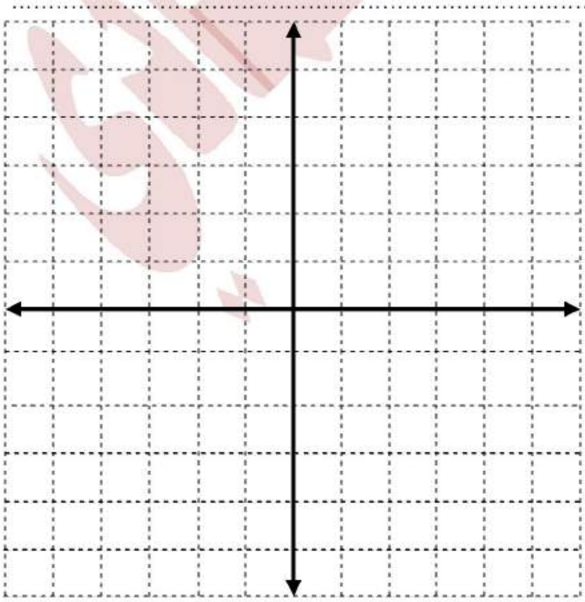


اللهم لك الحمد أولاً وآخراً وظاهراً وباطناً

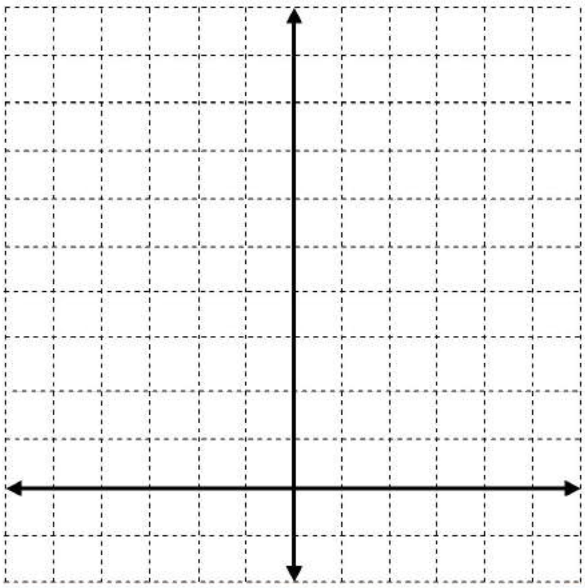
كل الشكر لمن ساعدني في إتمامه

إعداد وتصميم وطباعة الأستاذ / صوفي رمضان حمادي
شبام – حضرموت – ٢٠٢٠م
soramnet@gmail.com - +٩٦٧-٧٧٠٠٦٠٧٦٦

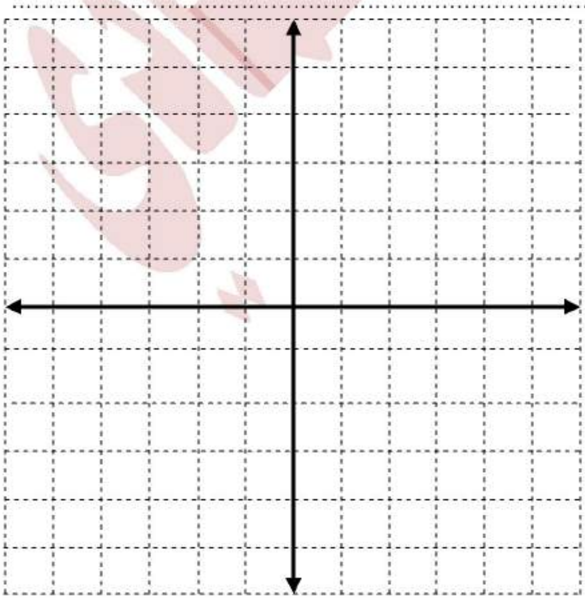
تدريب: ادرس تغيرات الدالة د(س) = س + $\frac{١}{س - ٢}$ ، وارسم بيانها .



تدريب: ادرس تغيرات الدالة د(س) = $\frac{٨}{س^{٢} + ١}$ ، وارسم بيانها .



تدريب: ادرس تغيرات الدالة د(س) = ٢ − $\frac{١}{س}$ ، وارسم بيانها .



(ورقة عمل) أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في دراسة تغير الدالة

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١ – للدالة د(س) = $\frac{٣س+١}{٣س-١}$ مقارب أفقي معادلته ص = $\frac{٢}{٣}$ ( )

٢ – منحنى الدالة د(س) = س^{٢}+٣ مقعراً نحو الأعلى ( )

٣ – كل نقطة حرجة تكون قيمة قصوى ( )

٤ – الدالة د(س) = س^{٣}– ٣س^{٢} ، تناقصية ، $\forall$ س $\in$ [٠ ، ٢] ( )

٥ – للدالة د(س) = $\sqrt{س^{٢}+٤}$ ، مستقيم مقارب أفقي ( )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١ – إذا كانت د(س) = س^{٢}– ك س تمر بنقطة حرجة عند س = ١ ، فإن قيمة ك = ...

٢ – الدالة د(س) = س^{٣}– ٦س^{٢} تناقصية على الفترة = ...

٣ – لتكن دً (س) > ٠ ، $\forall$ س $\in$] م،ب [فإن المنحنى مقعر نحو ....

٤ – للدالة د(س) = س^{٣}– ٣س^{٢} + ٥ ، نقطة انعطاف عند س = ...

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) للدالة د(س) = ٣س – هـ^{س} نقطة حرجة عند س = ... [٣ ، لو٣ ، ٢لو٣ ، ٣لو٢]

٢) إذا كانت دً (س) = $\frac{م س-٣}{س+١}$ ونقطة انعطاف عند س = ١ فإن قيمة م ....

[–٣ ، –$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ٣]

٣) المقارب الرأسي للدالة د(س) = $\frac{٦س+١}{٣س-٦}$ هو ....

[س = ٢ ، س = ٣ ، ص = ٣ ، ص = ٢]

٤) إذا كان للدالة د(س) = س^{٢}–٣م س+١قيمة قصوى عند س=١فإن قيمة م = ...

[١ ، –١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر :

العمود الأيسر	العمود الأيمن
٣	١ – إذا كان ص = ٣ مقارب أفقي للدالة ص = $\frac{٣س}{بس + ٣}$ ، فإن قيمة ب = ...
٤	٢ – للدالة د(س) = س^{٢} – ٦س قيمة صغرى عند س = ...
١	٣ – إذا كانت د(س)= ٢س^{٤} – ٣أس^{٢} تمر بنقطة انعطاف عند س=–١ فإن قيمة
٠	أ = ...
١	٤ – للدالة د(س)= $\frac{س - ٢}{س + ٢}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ...
٢	٥ – للدالة د(س)= س – $\frac{١}{٢س^{٢}}$ ، مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ...

س٥: ادرس تغيرات الدالة : د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ ، ثم ارسم بيانها .

....

....

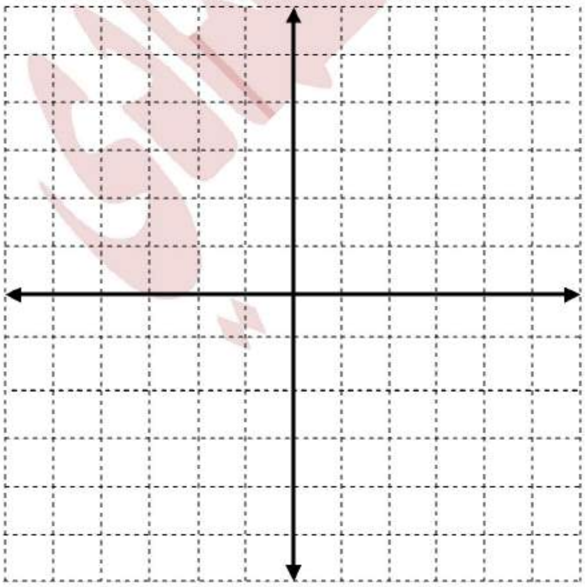
....

....

....

....

....



....

....

....

....

س	∞	٢	∞ −
صَ	−		−
صً	+		−
ص	١ ∞		∞ − ١

س٦: مستعيناً بالجدول أكمل ما يلي :

١ –مجموعة تعريف الدالة ....

٢ –الدالة تناقصية على ....

٣ –منحنى الدالة مقعر نحو الأعلى على الفترة ....

٤ – المقارب الأفقي هو ....

س٧: إذا كانت د(س) = س + $\frac{١}{س}$ فأوجد الآتي :

(١) م.ت للدالة ....

(٢) معادلة المستقيم المقارب المائل ....

(٣) للدالة نهاية عظمى عند النقطة ....

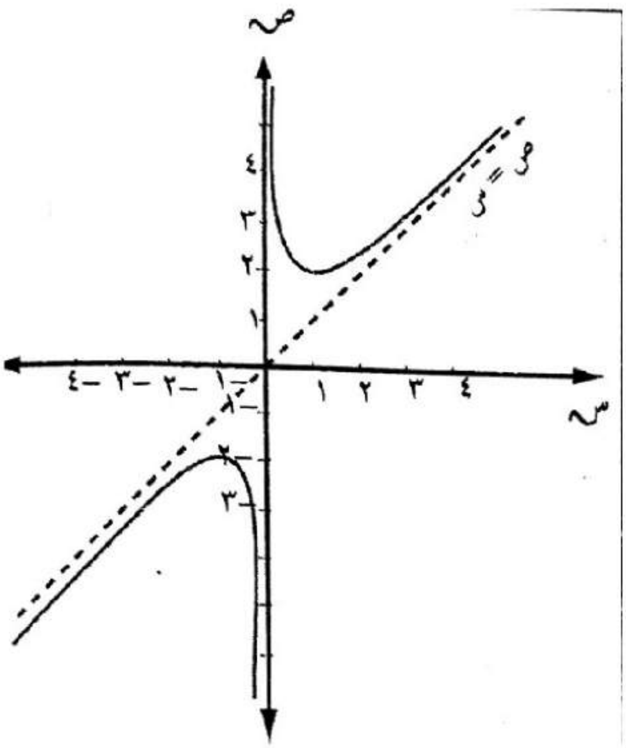
(٤) للدالة نهاية صغرى عند النقطة ....

س٨: إذا كانت د(س) = س^{٣} – ٣س ، أوجد :

(١) مجموعة تعريف الدالة ....

(٢) نقاط انعطاف الدالة ....

(٣) فترات تزايد وتناقص الدالة ....



س٩: من الشكل المرسوم جانباً أوجد :

(١) مجموعة التعريف . (٢) المستقيمات المقاربة .

(٣) فترات التزايد والتناقص . (٤) فترات التقعر .

(٥) عدد الفروع اللانهائية .

....

....

....

....

....

....

ورقة عمل ١٠٠ سؤال اختيار من متعدد في التفاضل والتكامل

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) إذا كانت ص = $هـ^{٤\text{لوس}}$ فإن صَ = ... [٤س ، $\frac{٤}{س}$ ، ٤$س^{٣}$]

٢) إذا كان $\int_{م}^{٢م}$ ٢س ءس = ١٢ فإن م = ... [٢ ، ٣ ، ٤]

٣) إذا كانت د(س) = $هـ^{\text{جاس}}$ ، فإن دَ(π) = ... [١ ، ٠ ، –١]

٤) $\int$ $جا^{٥}$س جتا س ءس = ... [$\frac{جا^{٦}س}{٦}$ + ث ، $\frac{جتا^{٦}س}{٦}$ + ث ، ظاس + ث]

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢}-١}{جا \pi س}$ = ... [$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-٢}{\pi}$ ، $\frac{٢}{\pi}$]

٦) إذا كانت $ص^{٤}$ + $س^{٤}$ = ٥ ، فإن صَ = ... [$\frac{ص^{٣}}{س^{٣}}$ ، $\frac{س^{٣}}{ص^{٣}}$ ، $-\frac{س^{٣}}{ص^{٣}}$ ، $-\frac{ص^{٣}}{س^{٣}}$]

٧) $\int_{٣م}^{٦م} \frac{ءس}{س}$ = ... [لو٦م ، لو٣م ، لو٢ ، لو٣]

٨) $\int$ $س^{ن}$ ءس = ... عندما ن = –١ [$\frac{س^{-١+١}}{-١+١}$ ، لوس ، $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$]

٩) إذا كانت ص = لو جتاس ، فإن صَ = ... [ظتاس ، ظاس ، – ظاس]

١٠) $\int$ $ظا^{٥}$س $قا^{٢}$س ءس = ... [$\frac{ظا^{٦}س}{٦}$ + ث ، $\frac{قا^{٣}س}{٣}$ + ث ، $\frac{ظتا^{٦}س}{٦}$ + ث]

١١) $\lim_{س \to ٠}$ س ظتا٥س = ... [٥ ، $\frac{١}{٥}$ ، صفر]

١٢) إذا كانت د(س) = جاس + جتاس ، فإن دَ($\frac{\pi}{٤}$) = ... [٢ ، صفر ، ٢$\sqrt{٢}$ ، –١]

١٣) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}}$ = ... [$\sqrt{س}$ + ث ، لو$\sqrt{س}$ + ث ، ٢$\sqrt{س}$ + ث]

١٤) إذا كانت د(س) = ٢$جا^{٢}$س ، فإن دَ($\frac{\pi}{٤}$) = ... [٣ ، ٢ ، ١ ، ٠]

١٥) $\int_{-٣}^{٣}$ ٤لو $هـ^{س}$ ءس = ... [٩ ، صفر ، ١]

١٦) إذا كانت ص = لو ($س^{٤}$+١) ، فإن صَ = ... [$\frac{٤س^{٣}}{س^{٤}+١}$ ، $\frac{٤س^{٣}}{س^{٣}-١}$ ، $\frac{٤س^{٣}}{س^{٤}-١}$]

١٧) $\int_{٠}^{٦}$ جا $\frac{\pi}{٦}$ ءس = ... [٣ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$]

١٨) إذا كانت دَ(س) = ٣$س^{٢}$ – $\frac{٢}{س}$ ، فإن د(س) = ... [٣$س^{٤}$ – ٢لوس ، $س^{٣}$ – ٢لوس ، $س^{٣}$ – ٢س]

١٩) $\int$ $قا^{٢}$س ظا س ءس = ... [$\frac{قا^{٣}س}{٣}$ + ث ، $\frac{ظا^{٢}س}{٢}$ + ث ، $\frac{ظتا^{٢}س}{٢}$ + ث]

٢٠) إذا كانت ص = $٢^{\text{ظاس}}$ فإن صَ = ..[لوجتاس × $٢^{\text{ظاس}}$ ×لو٢ ، $قا^{٢}$س × $٢^{\text{ظاس}}$ ×لو٢ ، $قتا^{٢}$س × $٢^{\text{ظاس}}$ ×لو٢]

٢١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ (٢س – π) قاس = ... [٢ ، –١ ، صفر ، –٢]

٢٢) $\int_{-٢}^{٣}$ جـ ءس = ... [– جـ ، ٥ جـ ، جـ]

٢٣) إذا كانت ص = $هـ^{٢س}$ ، فإن صَ – ٢ص = ... [–١ ، ١ ، صفر ، –٢]

٢٤) $\int_{٠}^{\pi}$ جاس ءس = ... [١ ، –٢ ، ٢ ، صفر]

٢٥) الحدين الأدنى والأعلى للتكامل $\int_{٠}^{٣} \sqrt{٥س^{٢} + ٤}$ ءس هما .... [(٤ ، ٢٠) ، (٦ ، ٢١) ، (٥ ، ٢٥)]

٢٦) إذا كانت د(س) = $جتا^{٢}$س ، فإن دَ($\frac{\pi}{٤}$) = ... [٢ ، –١ ، صفر ، –٢]

٢٧) $\int_{0}^{ك}$ ٣س^{٢} ءس = ٢٧ ، فإن ك = ... [٣ ، −٣ ، −$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$]

٢٨) نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{جا \pi س}{س - ١}$ = ... [−π ، π ، ١ ، −١]

٢٩) $\int_{0}$ جا $\frac{\pi}{٦}$ ءس = ... [٤ ، ٦ ، ٢ ، ١]

٣٠) إذا كانت دَ(س) = $\frac{١}{س}$ + ٣س^{٢} فإن د(س) = ... [لوس + ٢س^{٣} ، لوس + س^{٣} ، لوس − س^{٣}]

٣١) $\int_{0}^{لو٦}$ هـ^{س} ءس = ... [٦ ، −٦ ، ٥ ، صفر]

٣٢) إذا كانت ص = ٣هـ^{س} − ٣س^{٢} فإن قيمة س التي تجعل صً = صفر هي ...... [٢ ، ٢لو٢ ، لو٢]

٣٣) $\int_{٣}^{٤}$ $\frac{٥ ءس}{س}$ = ... [٥لو١٢ ، ٥لو$\frac{٤}{٣}$ ، ٥لو$\frac{٣}{٤}$]

٣٤) للدالة د(س) = $\frac{٣س - ٢}{س + ١}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ... [−١ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$]

٣٥) $\int$ ظا^{٢}س ءس = ... [ظاس − س + ث ، ظتاس − س + ث ، ظتاس + ث]

٣٦) لتكن الدالة د(س) = س^{٢} − لس + ٩ تحقق رول على [٠ ، ٤] فإن ل = ... [٤ ، −٤ ، ٢ ، −٢]

٣٧) للدالة د(س) = س^{٢} − ٦س − ٥ نقطة حرجة عند س = ... [٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٣]

٣٨) $\int$ هـ$^{لو\sqrt{س}}$ ءس = ... [$\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث ، $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ث ، $\frac{٢}{٣}$ لوس + ث]

٣٩) $\int_{٢}^{٢}$ د(س) ءس = ... [صفر ، ٤ ، ١ ، −١]

٤٠) إذا كانت ص = ع^{٣} ، ع = هـ^{٣لوس} فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ... [٨س^{٩} ، ٩س^{١٢} ، ٩س^{٨}]

٤١) $\int$ $\frac{٩س}{س^{٢} - ٩}$ ءس = ... [$\frac{١}{٢}$ لو|س^{٢}−٩| + ث ، $\frac{٩}{٢}$ لو|س^{٢}−٩| + ث ، ١٨لو|س^{٢}−٩| + ث]

٤٢) إذا كانت الدالة د(س) = $\frac{أ س - ٢}{س - ٢}$ مقارب أفقي عند ص = ٢ ، فإن أ = ... [٤ ، ١ ، ٢ ، −٢]

٤٣) للدالة د(س) = هـ^{٢لوس} − ٨س نقطة حرجة عند س = ... [٣ ، ٤ ، ٢ ، ٦]

٤٤) $\int_{٢}^{٢}$ س^{٣} ءس = ... [٢٦ ، ٨ ، ٤ ، صفر]

٤٥) $\int$ ظاس ءس = ... [لو|جاس| + ث ، − لو|جتاس| + ث ، لو|جتاس| + ث]

٤٦) نهـا$_{س \to ٠}$ ٢س قتا٤س = ... [٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، −٢ ، ١]

٤٧) إذا كانت د(س) = س^{٢} − س^{٣} تحقق القيمة المتوسطة على [−٣ ، ٢] فإن جـ = ...[−٢ ، ٤ ، ٢ ، ١]

٤٨) إذا كانت ص = لوع ، ع = هـ^{جاس} ، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ...[ظاس ، جتاس ، − جتاس ، − ظاس]

٤٩) $\int_{0}^{\pi}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$ ءس = ... [−π ، صفر ، π ، ١]

٥٠) $\int$ هـ$^{٢لو\sqrt{س}}$ ءس = ... [$\frac{س^{٢}}{٢}$ + ث ، س^{٢} + ث ، $\frac{٦}{٢}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ث]

٥١) إذا كانت ص = هـ$^{لوس^{٣}}$ فإن صَ = ... [س^{٣} ، ٣س^{٢} ، ٣س ، س^{٤}]

٥٢) $\int$ هـ$^{٢س + ١}$ ءس = ... [هـ$^{٢س + ١}$ + ث ، $\frac{هـ^{٢س + ١}}{لو٢}$ + ث ، $\frac{هـ^{٢س + ١}}{٢}$ + ث]

٥٣) نهـا$_{س \to ١}$ (س−١) ظتاπس = ... [−π ، $\frac{١}{\pi}$ ، $\frac{١}{-\pi}$ ، π]

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

٥٤) إذا كانت ص = ٥$^{\text{ظاس}}$ فإن صَ = ... [قا^{٢}س × ٥$^{\text{ظاس}}$لوه ، لوظتاس ، قتا^{٢}س × ٥$^{\text{ظاس}}$لوه]

٥٥) ∫ جتا^{٣}س جاس ءس = ... [$\frac{\text{جتا}^{٤}\text{س}}{٤}$ + ث ، $\frac{-\text{جتا}^{٤}\text{س}}{٤}$ + ث ، $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{٢}$ + ث]

٥٦) إذا كانت س^{٢} + ص^{٢} = ٥ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... [$\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، $\frac{-\text{س}}{\text{ص}}$ ، $\frac{-\text{ص}}{\text{س}}$]

٥٧) $\int_{-١}^{٢}$ ٢ه ءس = ... [٣ه ، ٤ه ، ٥ه ، ٦ه]

٥٨) إذا كانت ص = لوجتاس ، فإن صَ = ... [ظتاس ، − ظتاس ، ظاس ، − ظاس]

٥٩) ∫ قا^{٢}أس ءس = ... [$\frac{\text{ظاأس}}{\text{أ}}$ + ث ، $\frac{-\text{ظتاأس}}{\text{أ}}$ + ث ، $\frac{-\text{ظاأس}}{\text{أ}}$ + ث]

٦٠) للدالة د(س) = $\frac{\text{س}-٣}{\text{س}-٤}$ مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ... [١ ، ٤ ، ٣ ، −٤]

٦١) $\lim_{\text{س}\to ١}$ $\frac{\text{جا}\,\pi\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}$ = ... [$\frac{\pi}{٢}$ ، $-\frac{\pi}{٢}$ ، π ، ٢π]

٦٢) إذا كانت ص = لو(س^{٢}+١) ، فإن صَ = ... [$\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$ ، $\frac{٢}{\text{س}^{٢}+١}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$]

٦٣) $\int_{٠}^{٣}$ ٢جا $\frac{\pi}{٦}$ ءس = ... [٦ ، ٣ ، ١ ، −٣]

٦٤) ∫ ظتاس ءس = ... [لو|جاس| + ث ، − لو|جاس| + ث ، لو|جتاس| + ث]

٦٥) إذا كانت د(س) = ه$^{\text{جتاس}}$ ، فإن دَ($\frac{\pi}{٢}$) = ... [−١ ، صفر ، ١ ، $\frac{١}{٢}$]

٦٦) $\int_{٠}^{\text{ك}}$ ٣س^{٢} ءس = ٨ ، فإن قيمة ك = ... [٢ ، −٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$]

٦٧) إذا كانت ص = لوجاس ، فإن صَ = ... [ظاس ، − ظتاس ، ظتاس ، − ظاس]

٦٨) $\int_{\text{أ}}^{٣\text{أ}}$ $\frac{\text{ءس}}{\text{س}}$ = ... [لوأ ، لو٢أ ، لو٢ ، لو٣]

٦٩) $\int_{٠}^{\text{لو}٣}$ ه$^{٢\text{س}}$ ءس = ... [$\frac{٥}{٢}$ ، ٤ ، ٢ ، −٢]

٧٠) إذا كانت الدالة د(س) = س^{٤} − ٢س^{٢} تحقق رول على [−٢ ، ٢] فإن جـ = ... [١ ، ٢ ، −٢ ، ٣]

٧١) للدالة د(س) = $\frac{٢\text{س}+٣}{\text{س}-٢}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ... [−٢ ، ٢ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$]

٧٢) إذا كانت ص = لو$\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}$ فإن صَ = ... [$\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣}$ ، $\frac{٢}{\text{س}^{٢}+٣}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣}$]

٧٣) ∫ ٢ظاس ءس = ... [٢لو|جتاس| + ث ، −٢لو|جتاس| + ث ، ٢لو|جاس| + ث]

٧٤) $\lim_{\text{س}\to ١}$ $\frac{\text{جا}\,\pi\text{س}}{\text{س}^{٢}-\text{س}}$ = ... [$\frac{\pi}{٢}$ ، $-\pi$ ، $-\frac{\pi}{٢}$ ، π]

٧٥) إذا كانت دَ(س) = ٢س − ٦ فإن دَ(٣) قيمة ..... [صغرى ، عظمى ، نقطة انعطاف ، نقطة حرجة]

٧٦) ∫ جا^{٣}س جتاس ءس = ... [$\frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + ث ، $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{٢}$ + ث ، $\frac{\text{جا}^{٤}\text{س}}{٤}$ + ث]

٧٧) إذا كانت د(س) = ٣جا^{٢}س فإن دَ($\frac{\pi}{٤}$) = ... [٣ ، ٦ ، −٣ ، ٢]

٧٨) إذا كانت دَ(س) = $\frac{\text{س}-٤}{\text{س}+١}$ فإن للدالة قيمة حرجة عند س = ... [−٤ ، ٤ ، ١ ، −١]

٧٩) $\int_{٠}^{\text{لو}٤}$ ه$^{\text{س}}$ ءس = ... [٤ ، ٢ ، ٣ ، −٣]

٨٠) إذا كانت دً(س) = ٣س − ٩ فإن للدالة نقطة انعطاف عند س = ... [٤ ، ٢ ، ٣ ، −٣]

٨١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (س−٢) جتا $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ = ... [صفر ، ١ ، −١ ، ٢]

٨٢) للدالة د(س) = $\frac{\text{٢س} - ٣}{\text{٣س} - ٢}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ... [$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٣}{٢}$]

٨٣) $\int_{-٣}^{٢}$ ظا($\frac{\pi}{٤}$) ءس = ... [−١ ، ٥ ، −٥ ، ١]

٨٤) $\int$ ص ءس = $\text{س}^{٤}$ + ث ، فإن ص = ... [$\text{٤س}^{٢}$ ، $\text{٣س}^{٣}$ ، $\text{٤س}^{٣}$ ، $\text{٣س}^{٤}$]

٨٥) إذا كانت دَ(س) = ٤س + ٨ فإن د(−٢) = ... [٨ ، صفر ، −٨ ، ١٠]

٨٦) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$ ٢ ظاس $\text{قا}^{٢}$س ءس = ... [٢ ، ٣ ، −٣ ، ٤]

٨٧) للدالة د(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$ مستقيم مقارب أفقي معادلته ص = ... [−٢ ، ١ ، ٢ ، −١]

٨٨) قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{١}^{٥}$ (س−١) ءس = ... [٣ ، ٢ ، −٣ ، −٢]

٨٩) إذا كانت د(س) = $\text{هـ}^{\text{قاس}}$ ،فإن دَ(س) = ...[قاس ظاس $\text{هـ}^{\text{قاس}}$ ، قتاس ظاس $\text{هـ}^{\text{قاس}}$ ، قاس ظتاس $\text{هـ}^{\text{قاس}}$]

٩٠) $\int \text{قا}^{٢}$٣س ءس = ... [$\frac{١}{٣}$ ظتا٣س + ث ، $\frac{١}{٣}$ ظا٣س + ث ، ظا٣س + ث]

٩١) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جتاس}}{\text{٢س} - \pi}$ = ... [$\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $-\frac{\pi}{٢}$]

٩٢) للدالة د(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٢}$ مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ... [٢ ، ١ ، −٢ ، −١]

٩٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{٥أ}} \frac{\text{ءس}}{\text{س}}$ = ... [لو٤ ، لو٥ ، لو٦ ، لو٤أ]

٩٤) للدالة د(س) = $\text{س}^{٣}$ − $\text{٣س}^{٢}$ + ٥ نقطة انعطاف عند س = ... [−١ ، ٢ ، ١ ، −٢]

٩٥) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قا}^{٢}$س ءس = ... [$\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، ٣ ، −٣]

٩٦) $\int_{٠}^{\text{لو٣}}$ ٣ $\text{هـ}^{\text{س}}$ ءس = ... [٩ ، ٦ ، ٣ ، ٢]

٩٧) للدالة د(س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{٢س} - ٤}$ مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ... [٢ ، ٣ ، $\frac{١}{٢}$ ، −٢]

٩٨) $\int_{١}^{٣}$ ($\text{٣ف}^{٢}$ − ٤ف) ءف = ... [٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢]

٩٩) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{جتا ٢س}}$ = ...[$\frac{١}{٢}$ لو|قا٢س+ظا٢س| + ث ، ٢لو|قا٢س+ظا٢س| + ث ، لو|قا٢س+ظا٢س| + ث]

١٠٠) إذا كان للدالة د(س) = $\text{٦س}^{٢}$ − ٢أس نقطة حرجة عند س = ١ فإن أ = ...[٤ ، ٦ ، −٦ ، ٢]

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية (المكلا)

بسم الله الرحمن الرحيم
اختبار مادة : التفاضل والتكامل
للشهادة الثانوية (القسم العلمي)
العام الدراسي : ٢٠١٧ / ٢٠١٨م

اليوم: السبت
التاريخ: ١٤ / ٧ / ٢٠١٨م
الزمن: ثلاث ساعات
الفترة: واحدة

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية : يمنع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال الأول

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (✗) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي:

(١) $\lim_{ص \to 0} \frac{جا^2 \frac{ص}{2}}{(\frac{ص}{2})^2} = 1$ (✓)

(٢) إذا كانت ص = $س^3$ ، فإن ص‴ = ٣ (✓)

(٣) للدالة د(س) = $\sqrt{س^2+4}$ ، مستقيم مقارب أفقي (✗)

ب) أحسب التكاملات الآتية : (١) $\int س\, هـ^{س}\, ءس$ (٢) $\int \frac{س}{س^2+1}\, ءس$

① تكامل بالتجزئة ع = س ⇐ ءع = ءس ، ءص = $هـ^{س}$ ءس ⇐ ص = $هـ^{س}$

$\int ع\, ءص = ع ص - \int ص\, ءع = س هـ^{س} - \int هـ^{س} ءس = س هـ^{س} - هـ^{س} + ث = هـ^{س}(س-1)+ث$

② $\int \frac{س}{س^2+1}$ ءس ، نفرض ع = $س^2+1$ ⇐ ءع = ٢س ءس ⇐ $\frac{1}{2س}$ ءع = ءس

∴ $\int \frac{س}{ع} \times \frac{1}{2س} ءع = \int \frac{ءع}{2ع} = \frac{1}{2} لو|ع| + ث = \frac{1}{2} لو|س^2+1| + ث$

٥

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها :

(١) إذا كان جـ عدداً ثابتاً فإن $\int_{أ}^{ب} جـ\, ءس$ = جـ (ب − أ)

(٢) $\frac{ء}{ءس}(3^{س}) = 3^{س} \times لو 3$

(٣) $\int جا(5س+1)\, ءس = -\frac{1}{5} جتا(5س+1) + ث$

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = $\frac{\pi}{2}$ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{جتا\, س}{س - \frac{\pi}{2}} & عند\ س \neq \frac{\pi}{2} \\ أ & عند\ س = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

د($\frac{\pi}{2}$) = أ

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا\, س}{س - \frac{\pi}{2}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - س)}{-(\frac{\pi}{2} - س)} = -1$

∴ الدالة متصلة عندما د($\frac{\pi}{2}$) = $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ د(س)

∴ أ = −١

٥

أ) إذا كانت د(س) = س^{٣} − ٣س ، أوجد:

(١) مجموعة تعريف الدالة ح كاملة لأنها كثيرة حدود

(٢) نقاط انعطاف الدالة

(٣) فترات تزايد وتناقص الدالة

ب) بيّن فيما إذا كانت الدالة : د(س) = س^{٢} + ٢س − ٣ ، تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [−٣ ، ١] ، وإذا تحققت، أوجد قيم جـ الناتجة عن المبرهنة.

① الدالة متصلة ∈ [−٣ ، ١] لأنها كثيرة حدود

② الدالة قابلة للاشتقاق ∈]−٣ ، ١[لأنها كثيرة حدود

③ د(−٣) = ٩ − ٦ − ٣ = ٠ ، د(١) = ١ + ٢ − ٣ = ٠

∴ د(−٣) = د(١)

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

∴ يوجد على الأقل عدد جـ ∈]−٣ ، ١[بحيث د̄(جـ) = ٠

∵ د̄(جـ) = ٢جـ + ٢ ⟸ ٢جـ + ٢ = ٠ ⟸ جـ = −١ ∈]−٣ ، ١[

السؤال الثالث — ٥

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين فيما يأتي :

(١) إذا كانت ص = هـ^{٢س} ، فإن ص َ − ٢ص = ... [−١ ، ١ ، صفر ، −٢].

(٢) $\int_{١}^{٣}$ (٣ف^{٢} − ٤ف) ءف = ... [٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢].

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ٤س}{\text{ظا} ٢س}$ = ... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤].

ب) مستخدماً تعريف التكامل المحدد أحسب $\int_{٠}^{٢}$ ٣ + ٢س ءس

نقسم الفترة [٠ ، ٢] إلى ن فترة جزئية بحيث Δس = $\frac{ب - أ}{ن}$ = $\frac{٢}{ن}$

نختار س$_ر^*$ = أ + $\frac{ب-أ}{ن}$ ر = $\frac{٢}{ن}$ ر

∴ د(س$_ر^*$) = ٣ + ٢($\frac{٢}{ن}$ ر) = ٣ + $\frac{٤}{ن}$ ر

وباستخدام تعريف التكامل المحدد

∴ $\int$ (٣ + ٢س) ءس = نها$_{ن \to \infty}$ $\frac{٢}{ن}$ مجـ (٣ + $\frac{٤}{ن}$ ر)

∴ $\frac{٢}{ن}$ [٣ن + $\frac{٤}{ن}$ مجـ ر] = $\frac{٦ن}{ن}$ + $\frac{٨}{ن^٢}$ × $\frac{ن(ن+١)}{٢}$

= ٦ + $\frac{٤ن}{ن}$ + $\frac{٤}{ن}$ = ٦ + ٤ + $\frac{٤}{ن}$

نها$_{ن \to \infty}$ (٦ + ٤ + $\frac{٤}{ن}$) = ٦ + ٤ + ٠ = ١٠

السؤال الرابع — ٥

السؤال الخامس

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب):

(أ)	(ب)
(١) للدالة د(س) = ٢س + $س^٢$ ، نقطة حرجة عند س = ...١-......	صفر
(٢) قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل : $\int_{0}^{2}$ (س+١) ءس = ...١......	١
(٣) للدالة د(س) = س − $\frac{١}{٢س^٢}$ ، مستقيم مقارب رأسي معادلته س = ...صفر......	٢
	١-
	٢-

ب) أوجد معادلة الناظم للدالة: $٣ص^٢ = ٤ - س^٢$ ، عند النقطة (١ ، ١)

$٦ص\,ص' = -٢س \Leftarrow ص' = \frac{-٢س}{٦ص} = \frac{-س}{٣ص}$

$ص'|_{(١،١)} = \frac{-١}{٣} = م$

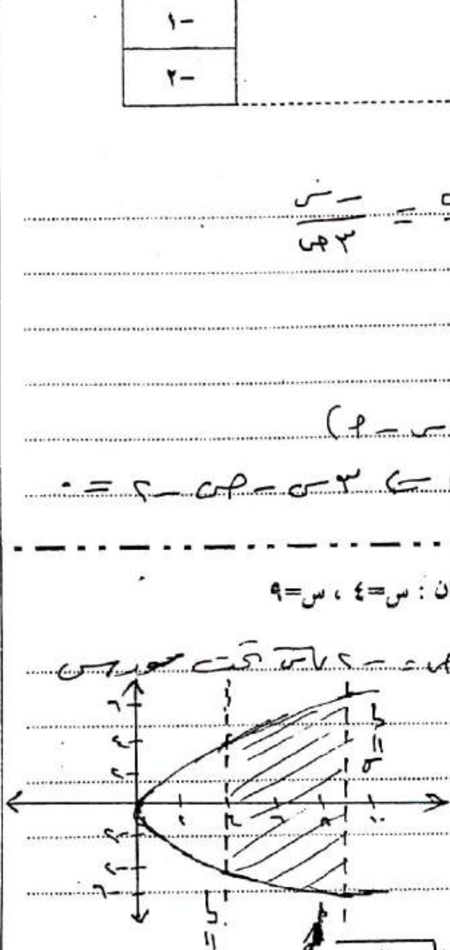
∴ معادلة الناظم هي : $ص - د(أ) = \frac{-١}{م}(س - أ)$

$ص - ١ = ٣(س - ١) \Leftarrow ٣س - ص - ٢ = ٠$

السؤال السادس

أ) احسب مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ: $ص^٢ = ٤س$ ، والمستقيمان : س=٤ ، س=٩

∵ $ص^٢ = ٤س \Leftarrow ص = \pm ٢\sqrt{س}$ ، $ص = ٢\sqrt{س}$ فوق محور س ، $ص = -٢\sqrt{س}$ تحت محور س



$م = \int_{٤}^{٩} |(٢\sqrt{س} - (-٢\sqrt{س}))|\,ءس$

$= \int_{٤}^{٩} |٤\sqrt{س}|\,ءس = \frac{٨}{٣}\sqrt{س^٣}\Big|_{٤}^{٩}$

$= \frac{٨}{٣}\sqrt{٩^٣} - \frac{٨}{٣}\sqrt{٤^٣} = \frac{٨}{٣}(٣^٣ - ٢^٣)$

$= \frac{٨}{٣}(٢٧ - ٨) = \frac{٨}{٣} \times ١٩ = \frac{١٥٢}{٣}$ وحدة مربعة

ب) احسب التكاملات الآتية : (١) $\int \frac{ءس}{س^٢ - ٢س - ٣}$ (٢) $\int س\sqrt{٢س^٢+١}\,ءس$

(١) $\frac{١}{س^٢-٢س-٣} = \frac{١}{(س-٣)(س+١)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+١} = \frac{أ(س+١) + ب(س-٣)}{(س-٣)(س+١)}$

عندما س = ٣ ⟸ ٤أ = ١ ⟸ $\boxed{أ = \frac{١}{٤}}$ ، عندما س = −١ ⟸ −٤ب = ١ ⟸ $ب = \frac{-١}{٤}$

∴ $\int \frac{ءس}{س^٢-٢س-٣} = \frac{١}{٤}\int \frac{ءس}{س-٣} - \frac{١}{٤}\int \frac{ءس}{س+١} = \frac{١}{٤}لو|س-٣| - \frac{١}{٤}لو|س+١| + ث$

(٢) $\int س\sqrt{٢س^٢+١}\,ءس$ بتكامل بالتعويض نفرض $ع = ٢س^٢ + ١ \Leftarrow ءع = ٤س\,ءس \Leftarrow ءس = \frac{ءع}{٤س}$

∴ $\int س\sqrt{ع}\,\frac{ءع}{٤س} = \frac{١}{٤}\int ع^{\frac{١}{٢}}\,ءع = \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣}ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٦}(٢س^٢+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{١}{٦}\sqrt{(٢س^٢+١)^٣} + ث$

٥

٥

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية (المكلا)

بسم الله الرحمن الرحيم
اختبار مادة : التفاضل والتكامل
لإتمام شهادة الثانوية العامة (القسم العلمي)
العام الدراسي : ٢٠١٨ / ٢٠١٩م

اليوم: السبت
التاريخ: ٢٩ / ٦ / ٢٠١٩م
الزمن: ثلاث ساعات
الفترة: واحدة

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية :	يسمح باستخدام الآلة الحاسبة العادية

السؤال الأول

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، و علامة (✗) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي:

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{جاس}{١+٣س}$ = صفر	غير زد × صغير	(✓)

(٢) معادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة ص = س^٣ + ٣ عند س = ٠ هي س ـ ص + ٣ = ٠	(✗)

(٣) إذا كان $\int_١^٢$ د(س) ءس = ٤ فإن $\int_١^٢$ (٢د(س) ـ ٣) ءس = ٥	(✓)

ب) بيّن إذا كانت الدالة : د(س) = س^٤ ـ ٨س^٢ تحقق شروط رول على [−٢ ، ٢] ، وإذا حققت فأوجد قيمة جـ الناتجة عن المبرهنة.

① د كثيرة حدود ⇐ الدالة متصلة في [−٢ ، ٢]
② د′(س) = ٤س^٣ − ١٦س ، موجودة ∀ س ∈ ح
∴ الدالة قابلة للاشتقاق في]−٢ ، ٢[
③ د(−٢) = ١٦ − ٣٢ = −١٦ ، د(٢) = ١٦ − ٣٢ = −١٦
∴ د(−٢) = د(٢)
∴ الدالة تحقق شروط رول للفترة [−٢ ، ٢]
∴ عليه يوجد على الأقل عدد جـ بحيث د′(جـ) = ٠
٤جـ^٣ − ١٦جـ = ٠
٤جـ (جـ^٢ − ٤) = ٠
إما جـ = ٠ ∈ [−٢ ، ٢]
أو جـ^٢ − ٤ = ٠
⇐ جـ^٢ = ٤ ⇐ جـ = ±٢ ∉]−٢ ، ٢[
∴ جـ = {٠}

٥

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يناسبها :

(١) $\int_أ^ب$ د(س) ءس + $\int_ب^أ$ د(س) ءس = صفر

(٢) $\int$ جتا^{٢}س جاس ءس = $-\frac{جتا^٣س}{٣}$ + ث

(٣) إذا كان ص = ٢^{جاس} فإن ص′ = ٢^{جاس} × جتاس × لو٢

غير مطلوب

ب) أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د(س) متصلة عند س = صفر ، إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{٤س^٢ + ظا^٢ أس}{س^٢} & عندما\ س > ٠ \\ ٣ + أ\ جتاس & عندما\ س \leq ٠ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{٤س^٢ + ظا^٢ أس}{س^٢} = \frac{٤س^٢}{س^٢} + \frac{ظا^٢ أس}{س^٢} = \lim_{س \to ٠^+} (٤ + \frac{٤}{٤} \frac{ظا^٢ أس}{س^٢})$
= ٤ + ٤ = ٨ ...... ①
$\lim_{س \to ٠^-}$ (٣ + أ جتاس) = ٣ + أ × ١ = ٣ + أ ...... ②
من ① و ② وحسب تعريف النهاية فإن ٣ + أ = ٨ ⇐ أ = ٨ − ٣ ⇐ أ = ٥

٥

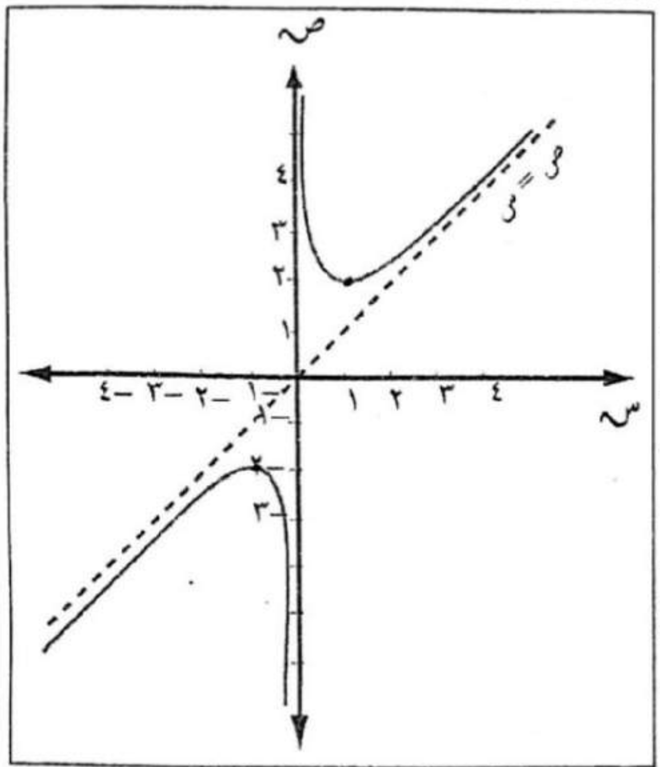
السؤال الثالث — ٥

من الشكل المرسوم جانباً أوجد:

(١) مجموعة التعريف. (٢) المستقيمات المقاربة.

(٣) فترات التزايد والتناقص. (٤) فترات التقعر.

(٥) عدد الفروع اللانهائية.



(١) م . ت = ح / {٠}

(٢) المقارب الرأسي هو س = ٠

المقارب المائل معادلته ص = س

(٣) الدالة تزايدية في الفترة

]−∞ ، −١] ∪ [١ ، ∞[

الدالة تناقصية في الفترة [−١ ، ١]

(٤) الدالة مقعرة نحو الأعلى في الفترة]٠ ، ∞[

ومقعرة نحو الأسفل في الفترة]−∞ ، ٠[

(٥) مجموعة تعريف الدالة غير منتهية من الجهتين ولا تحتوي على ... معطاة

وعليه فإن عدد الفروع اللانهائية = ٤ فروع

السؤال الرابع — ٥

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين فيما يأتي :

(١) إذا كان للدالة د(س) = س^{٢} ـ ٣أس+١ قيمة قصوى عند س=١ فإن قيمة أ = ... [١ ، −١ ، ٢/٣ ، ٣/٢].

(٢) الحد الأعلى للتكامل $\int_{٠}^{لو٢}$ هـ^{س} ءس = ... [١ ، ٠ ، لو٢ ، ٢لو٢].

(٣) إذا كان $\int_{ك}^{٠}$ ٣س^{٢} ءس = −٢٧ فإن ك= ... [٣ ، −٣ ، ١/٣ ، −١/٣].

ب) إذا كان ص = ٣+ جا٢س فأثبت أن ٤ص + ص″ = ١٢

Saafy

ص′ = ٠ + ٢ جتا٢س ⟸ ص′ = ٢ جتا٢س

ص″ = −٤ جا٢س

الطرف الأيمن = ٤ص + ص″

= ٤(٣ + جا٢س) + (−٤ جا٢س)

= ١٢ + ~~٤جا٢س − ٤جا٢س~~

= ١٢

= الطرف الأيسر

(هـ . ط)

السؤال الخامس

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب):

(أ)	(ب)
(١) إذا كان $ص^٣ - س^٢ = ١$ فإن $ص'\Big|_{(١،١)}$ = ...١......	٢
(٢) $\int_{هـ}^{هـ^٣} \frac{ءس}{س}$ = ...٢......	١
(٣) إذا كان د(س) = $س^٢ - س$ ، ه(س) = $\frac{١}{س}$ فإن $(د \circ ه)'(-١)$ = ...	٥
	٣

ب) باستخدام تعريف التكامل المحدد احسب $\int^{٢} (٢س + ١)\, ءس$

بتجزئة الفترة [٠ ، ٢] إلى ن فترات جزئية متساوية طول كل منها $\Delta س = \frac{ب-أ}{ن} = \frac{٢}{ن}$

نختار $س^*_ر$ ... $س^*_ر = أ + \frac{ب-أ}{ن} ر = ٠ + \frac{٢}{ن} ر = \frac{٢ر}{ن} \Rightarrow د(س^*_ر) = \frac{٤ر}{ن} + ١$

$ج = \sum \Delta س \times د(س^*_ر) = \frac{٢}{ن}\left[\frac{٤}{ن}\sum ر + \sum ١\right] = \frac{٢}{ن}\left[\frac{٤}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} + ن\right]$

$= \frac{٤ن + ٤}{ن} + ٢$

$\therefore \lim_{ن \to \infty}\left[\frac{٤ن+٤}{ن} + ٢\right] = ٤ + ٢ = ٦ \Rightarrow \int_{٠}^{٢} (٢س+١)\, ءس = ٦$ وحدة مربعة

السؤال السادس

أ) احسب التكاملات الآتية : (١) $\int \frac{٢س\, ءس}{١ - جا^٢ س}$ (٢) $\int جتا٢س \sqrt{١ - جا٢س}\, ءس$

(١) $\int \frac{٢س\, ءس}{١ - جا^٢س} = \int \frac{٢س}{جتا^٢س} ءس = \int ٢س\, قا^٢س\, ءس$

$ق = ٢س \Rightarrow ءق = ٢\, ءس$

$ءهـ = قا^٢س\, ءس \Rightarrow هـ = ظاس$

$\int ق\, ءهـ = ق هـ - \int هـ\, ءق$

$= ٢س\, ظاس - \int ظاس \times ٢\, ءس$

$= ٢س\, ظاس - ٢(- لو|جتاس|) + ث$

$= ٢س\, ظاس + ٢ لو|جتاس| + ث$

(٢) $\int جتا٢س (١ - جا٢س)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$

نضع $ع = ١ - جا٢س$

$ءع = ٠ - ٢جتا٢س\, ءس$

$\frac{ءع}{-٢جتا٢س} = ءس$

$\therefore \int جتا٢س\, ع^{\frac{١}{٢}} \times \frac{ءع}{-٢جتا٢س}$

$= \frac{-١}{٢} \times \frac{ع^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{-١}{٣}\sqrt{(١ - جا٢س)^٣} + ث$

ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) هو ٢+ جاس وكان بيان الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ٢) فأوجد معادلة المنحنى.

$د'(س) = ٢ + جاس$

$\therefore \int (٢ + جاس)\, ءس = ٢س - جتاس + ث$

$\therefore د(س) = ٢س - جتاس + ث$

$\because$ بيان الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

$\therefore ٢ = ٢ \times ٠ - جتا٠ + ث$

$٢ = -١ + ث$

$\therefore ث = ٣$

$\therefore$ الدالة الأصلية $د(س) = ٢س - جتاس + ٣$