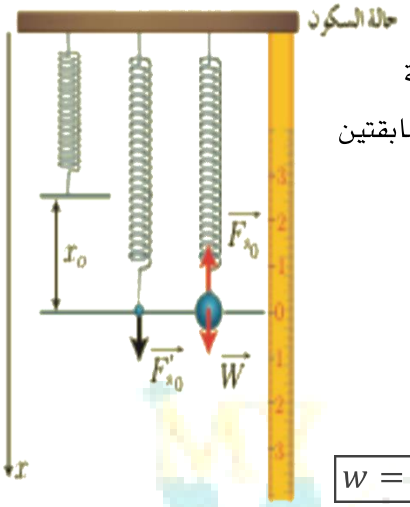
الدرس الأول

الحركة التوافقية البسيطة

النواس المرن

النواس المرن : هو عبارة عن جسم صلب كتلته (m) معلق بنهاية نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته (k) ، يهتز فيه الجسم بين وضعيين أعظميين طرفيين $(\pm x_{max})$ مروراً بوضع التوازن (مركز الاهتزاز $x = 0$)

سؤال نظري -1- برهن في النواس المرن أن محصلة القوى المؤثرة في الجسم المعلق إلى النابض هي قوة ارجاع تتناسب شدتها طرداً مع المطال؟ دورة 2016 ثانية



جملة المقارنة : خارجية ، **الجملة المدروسة:** (جسم صلب - نابض)

- **حالة السكون:** نعلق الجسم بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فيستطيل استطالة سكونية x_0 فيتوازن الجسم (يبقى ساكناً) في النقطة 0 (وضع التوازن) تحت تأثير القوتين السابقتين

يؤثر في مركز عطالة الجسم : قوة ثقل الجسم $\vec{w}$ ، $\overrightarrow{F_{s_0}}$: قوة توتر النابض

$$\xrightarrow{\text{الجسم ساكن}} \sum \vec{F} = \vec{0} \xrightarrow{\text{نعوض القوى}} \vec{w} + \overrightarrow{F_{s_0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور xx' نحو الأسفل نجد : $w - F_{s_0} = 0$

$$\Rightarrow \quad w = F_{s_0} \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

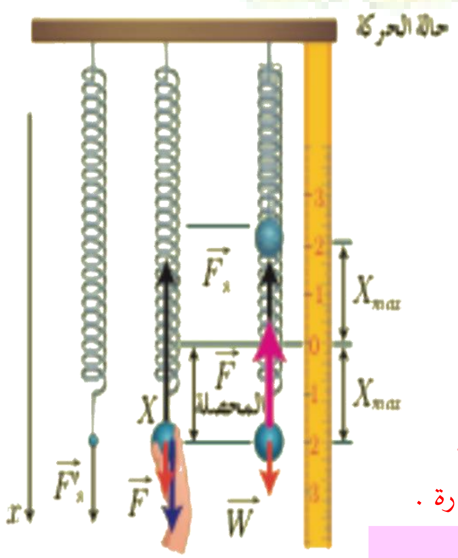
يؤثر على النابض : قوة توتر النابض $\overrightarrow{F'_{s_0}}$ التي تسبب له الاستطالة x_0

ولكن لنفس النابض $F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0$ بالتعويض في $(*)$ نجد : $\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $\boxed{w = kx_0}$

- **حالة الحركة:** نحرك (نزيح) الجسم شاقولياً نحو الأسفل بمقدار $\bar{x}$ ونتركه ليقوم بحركة اهتزازية إلى جانبي وضع التوازن

يؤثر في مركز عطالة الجسم : قوة ثقل الجسم $\vec{w}$ ، $\overrightarrow{F_s}$: قوة توتر النابض

فيخضع الجسم لتأثير قوتين : قوة توتر النابض $F_s = k(x_0 + \bar{x})$ ، قوة ثقل الجسم $\vec{w}$ ، ويؤثر في نهاية النابض قوة $\overrightarrow{F'_s} = \overrightarrow{F_s}$



$$\xrightarrow{\text{الجسم متحرك نطبق قانون نيوتن الثاني}} \sum \vec{F} = m\,\vec{a} \xrightarrow{\text{نعوض القوى}} \vec{w} + \overrightarrow{F_s} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على محور xx' نحو الأسفل نجد : $w - F_s = m\,\bar{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (**)$

يؤثر على النابض : قوة توتر النابض $\overrightarrow{F'_s}$ التي تسبب له الاستطالة $(x_0 + \bar{x})$

ولكن لنفس النابض $F'_s = F_s = k(x_0 + \bar{x})$ بالتعويض في $(**)$ نجد :

$$w - k(x_0 + \bar{x}) = m\,\bar{a} \xrightarrow{\text{ننشر}(-k)\text{ على القوس و من}(1)\text{ نعوض } w}$$

$$kx_0 - kx_0 - k\bar{x} = m\,\bar{a}$$

$$-k\bar{x} = m\,\bar{a}$$

$$-k\bar{x} = \sum \bar{F} = \bar{F}$$

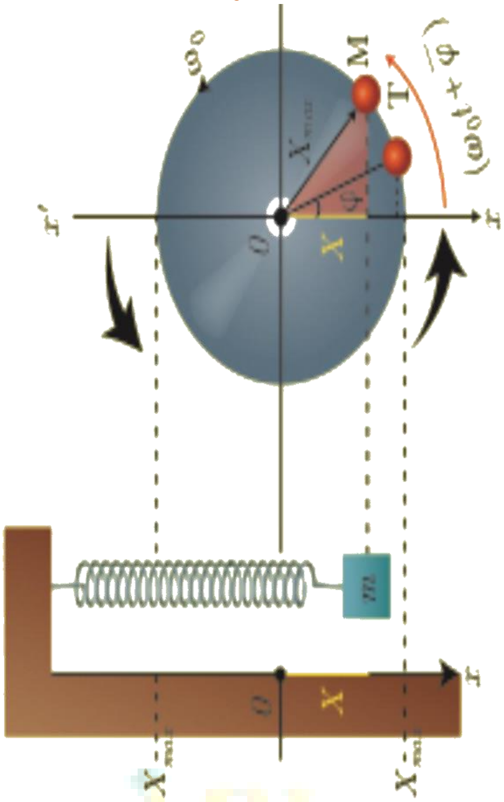
$\boxed{\bar{F} = -k\bar{x}}$ إن محصلة القوى في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة ارجاع تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً **(0)** وتتناسب شدتها طرداً مع المطال $\bar{x}$، وتعاكسه بالإشارة .

تطبيق: أكتب عناصر قوة الإرجاع

- نقطة التأثير : مركز عطالة الجسم الصلب الحامل : القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز العطالة

○ الجهة : نحو مركز التوازن 0 دوماً – الشدة : $\boxed{\bar{F} = |-k\bar{x}|}$

العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فرينل)



– الطّورُ الابتدائيُّ للحركة $\bar{\varphi}$ هو الزاويةُ بينَ الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة $t=0$.

– طورُ الحركة $(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ هو الزاويةُ بينَ الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة t.

– سعةُ الحركة X_{max} هي طويلةُ الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الثابتة عندَ الدوران.

– النبضُ الخاصُّ للحركة ω_0 يقابلُ السرعة الزاويّة الثابتة التي تدور بها النقطة M.

– مطالُ الحركة $\bar{x}$ هو مسقطُ الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على المحور $\overrightarrow{x'x}$ وهو متغيّر بتغيّر الزمن.

– النسبة: $\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi}) = \dfrac{\bar{x}}{X_{max}}$.

– التابعُ الزمنيُّ لحركة المسقط تابعٌ جَيبيٌّ من الشكل: $\bar{x}=X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ لذلك تُسمّى الحركةُ جَيبيّةً انسحابيّةً (توافقيّة بسيطة).

التابع الزمني للمطال : $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

دلالات الرموز :

✓ $\bar{x}$: المطال في اللحظة ويقدر بالمتر m

✓ X_{max} : المطال الأعظمي (سعة الاهتزاز) وتقدر بالمتر m

✓ ω_0 : النبض الخاص للحركة ويقدر $rad.s^{-1}$

✓ $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: طور الحركة في اللحظة t

✓ $\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي في اللحظة $t = 0$ ويقدر بالراديان rad

✓ ندعو كل من $\bar{\varphi}$, ω_0 , X_{max} ثوابت الحركة

سؤال نظري -2- انطلاقاً من العلاقة ($\bar{F} = m\bar{a} = -k\bar{x}$) استنتج طبيعة الحركة في النواس المرن (الهزازة التوافقية البسيطة) ومن ثم استنتج الدور الخاص (دورة 2013 - 2019 الأولى – 2015 الثانية)

$$\bar{F} = m\bar{a} = -k\bar{x}$$

لكن: $\bar{a} = (\bar{x})''_t$

نعوض فنجد: $m\,(\bar{x})''_t = -k\bar{x}$

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x} \dots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نشتق مرتين:

$$\bar{v} = (x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(x)''_t = -X_{max}\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2\bar{x} \dots (2)$$

بمطابقة 1 مع 2 نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ النبض الخاص للاهتزاز

- طبيعة الحركة: جيبية انسحابية بشرط $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$

وهذا محقق لأن m و k موجبان

نستنتج: سؤال دورة 2019

إن حركة النواس المرن هي حركة جيبية انسحابية الشكل العام للتابع الزمني للمطال (الموضع) يعطى بالعلاقة :

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

- استنتاج الدور:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \xrightarrow{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}} T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \xrightarrow{\text{نضرب بمقلوب المقام}}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$ علاقة الدور الخاص للنواس المرن غير المتخامد

من هذه العلاقة نستنتج أن الدور الخاص :

✓ لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max} ولا بتسارع الجاذبية الأرضية g

✓ يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m

✓ يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k

تطبيق (1) : نواس مرن ثابت صلابته $(k=50Nm^{-1})$ ويحمل جسماً صلباً كتلته $(m=2Kg)$ والمطلوب :

1- أحسب الدور الخاص للنواس و تواتر الاهتزاز ونبضه الخاص

2- إذا استبدلنا الكتلة المعلقة بكتلة أخرى $(m'=9m)$ ، أحسب الدور الخاص الجديد

3- أحسب قوة الإرجاع في نقطة مطالها $(2cm)$

.1 باعتبار أن $\pi^2 = 10 \Leftarrow \pi = \sqrt{10}$

➢ حساب الدور: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{50}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{25}} \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{5}\ sec}$$

➢ حساب التواتر: وهو مقلوب الدور

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{5}{2\pi} Hz$$

➢ حساب النبض الخاص:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5\, rad.s^{-1}$$

.2 الفرض : $m' = 9\,m$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}$$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{9m}{k}}$$

$$T_0 = 3\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$$

$$T_0' = 3T_0 \xrightarrow{T_0=\frac{2\pi}{5}sec} T_0' = 3 \times \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \boxed{T_0' = \frac{6\pi}{5}\ sec}$$

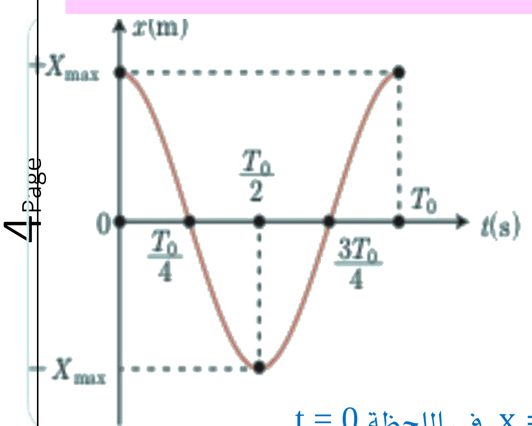
.3 $x = 2cm = 2 \times 10^{-2} m$

$$\bar{F} = -k\bar{x}$$

$$F = -50 \times 2 \times 10^{-2} = -100 \times 10^{-2} \Rightarrow \boxed{F = -1\ N}$$

سؤال نظري -3-

اكتب الشكل العام لتابع المطال موضحاً دلالات الرموز والواحدات الدولية، وفي شروط بدء مناسبة حيث $t = 0$ نفرض $\bar{x} = +X_{max}$ استنتج الشكل المختزل لتابع المطال ، ثم بيّن متى يكون المطال أعظمي ومتى يكون معدوم موضحاً بالرسم البياني لتابع المطال خلال دور واحد:



- **الشكل العام لتابع المطال : $\bar{x} = x_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$**

✓ $\bar{x}$: المطال أو (موضع الجسم) في اللحظة ويقدر بالمتر m

✓ X_{max} : سعة الحركة أو (المطال الأعظمي) وتقدر بالمتر m

✓ ω_0 : النبض الخاص للحركة ويقدر $rad.s^{-1}$

✓ $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: طور الحركة في اللحظة t

✓ $\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي في اللحظة $t = 0$ ويقدر بالراديان

✓ ندعو كال من X_{max} , ω_0 , $\bar{\varphi}$ ثوابت الحركة

- من شروط البدء المعطاة أن الجسم كان في مطاله الأعظمي الموجب $x = +x_{max}$ في اللحظة $t = 0$

نعوض الشروط في الشكل العام لتابع المطال: $\bar{x} = x_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$x_{max} = x_{max}\cos\bar{\varphi}$$
$$\cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

الشكل المختزل لتابع المطال (أبسط شكل): $\boxed{\bar{x} = x_{max}\cos\omega_0 t}$

تابع المطال بدلالة الدور : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}t}$

ملاحظة : لتحديد مطال الجسم (موضع الجسم x) في لحظة t معينة : نعوض اللحظة t المعطاة في تابع المطال $\boxed{\bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}t}$

مثال : حدد مطال الجسم في كل من اللحظات التالية : $\left(t = 0\ ,\ t = \frac{T_0}{2}\ ,\ t = \frac{3T_0}{2}\ ,\ t = \frac{3T_0}{4}\right)$

الحل :

✓ **الجسم في المطال الأعظمي الموجب** $t = 0 \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}(0) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos(0) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}(+1) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = +x_{max}}$

✓ **الجسم في المطال الأعظمي السالب** $t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{T_0}{2}\right) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos(\pi) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}(-1) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = -x_{max}}$

✓ **الجسم في المطال الأعظمي السالب** $t = \frac{3T_0}{2} \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{3T_0}{2}\right) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos(3\pi) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}(-1) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = -x_{max}}$

✓ **الجسم في مركز الاهتزاز** $t = \frac{3T_0}{4} \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{3T_0}{4}\right) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}(0) \Rightarrow \boxed{x = 0}$

✓ واعتماداً على الملاحظة السابقة في مايلي جدول لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دورين كاملين :

اللحظة t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{2T_0}{4} = \frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	$\frac{4T_0}{4} = T_0$	$\frac{5T_0}{4}$	$\frac{6T_0}{4} = \frac{3T_0}{2}$	$\frac{7T_0}{4}$	$\frac{8T_0}{4} = 2T_0$
المطال $\bar{x}$	$+x_{max}$	0	$-x_{max}$	0	$+x_{max}$	0	$-x_{max}$	0	$+x_{max}$

- المطال أعظمي (طويلة) في الوضعين الطرفيين $x = |\pm x_{max}|$ ، ومعدوم في مركز الاهتزاز (وضع التوازن) $x = 0$

تطبيق (2) :

نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته (k) نعلق في نهايته كتلة (m=1kg) فتهتز بدور $(T_0 = 2\ s)$

والمطلوب.

1- أحسب ثابت صلابة النابض

2- أحسب الاستطالة السكونية

3- إذا استبدلنا بالنابض نابض آخر ثابت صلابته $(k' = 2k)$ ، *أحسب الدور الجديد* (T'_0)

4- نشد الكتلة نحو الأسفل ونتركها بدون سرعة ابتدائية في المطال الاعظمي الموجب $(\bar{x} = 10cm$ و $t = 0)$ استنتج التابع الزمني

للمطال انطلاقاً من شكله العام مبيّناً قيم ثوابته (قبل استبدال النابض). باعتبار $(\pi^2 = 10)$

.1 يحسب k من : $k = m.\omega_0^2$ أو من علاقة الدور بعد تربيعها

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\xrightarrow{\text{نربع}} T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \xrightarrow{\text{نعزل } k} k = 4\pi^2\frac{m}{T_0^2}$$

$$k = 4\times 10\times\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{k = 10\ N.m^{-1}}$$

.2 $k\,x_0 = m.g$

$$x_0 = \frac{mg}{k} \xrightarrow{\text{نعوض}} x_0 = \frac{1\times10}{10}$$

$$\boxed{x_0 = 1(m)}$$

.3 $k' = 2k$

$$T'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right) \Rightarrow T'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}T_0$$

$$\boxed{\xrightarrow{\text{نعوض}} T'_0 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}sec}$$

.4 $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$$

ترك دون سرعة ابتدائية: $x = X_{max} = 10\ cm$

$$x = X_{max} = 10\times10^{-2} = 10^{-1}m$$

- تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء:

$t = 0$ ، $x = +X_{max}$ (مطال أعظمي موجب)

$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$	$+X_{max} = X_{max}cos\overline{\varphi}$ $cos\overline{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ $\boxed{\bar{x} = 10^{-1}\cos\pi t \quad (m)}$

تطبيق (3): هزازة جيبية انسحابية تحمل جسم كتلته **(m=100g)** نسحب الجسم نحو الأسفل ونتركه بدون سرعة ابتدائية فيرسم قطعة مستقيمة طولها **(L=10cm)** بتواتر **(f_0=5Hz)** باعتبار $(\pi^2 = 10)$ **والمطلوب :**

1– استنتج التابع الزمني انطلاقاً من شكله العام علماً أن الجسم كان في المطال الأعظمي الموجب ساكن آنياً لحظة بدء الزمن

2– أحسب ثابت صلابة النابض

من المعطيات: $m = 100.10^{-3} = 10^{-1}kg$

$f_0 = 5Hz$

تعيين X_{max} : طول القطعة $L = 10cm = 2X_{max}$

$\Rightarrow X_{max} = \frac{10}{2} = 5\ cm$

$\boxed{X_{max} = 5 \times 10^{-2}m}$

.1 $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega t + \overline{\varphi})$

$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 5 = 10\pi\ rad.s^{-1}$

- تعيين $\overline{\varphi}$ من شروط البدء:

$t = 0$ ، $x = +X_{max}$ (مطال أعظمي موجب)

$+X_{max} = X_{max}cos\overline{\varphi}$

$cos\overline{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

$\boxed{\bar{x} = 5 \times 10^{-2}cos10\pi t \quad (m)}$

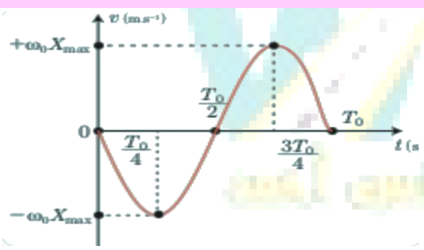
.2 $k = m.\omega_0^2$

$k = 10^{-1} \times (10\pi)^2 \Rightarrow 10^{-1}.100.\pi^2$

$\boxed{k = 100\ N.m^{-1}}$

سؤال نظري -4-

انطلاقاً من الشكل لتابع المطال $\bar{x} = x_{max}\cos\omega_0 t$ استنتج تابع السرعة ، وبيّن متى تكون السرعة أعظمية ومتى تكون معدومة موضحاً بالرسم البياني لتابع السرعة خلال دور واحد : دورة 2015 الأولى ـ2017 الأولى]



- **تابع السرعة : هو المشتق الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن ، نشتق فنجد**

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$
$$\bar{v} = -\omega_0 x_{max}\sin\omega_0 t$$
$$\bar{v} = -\omega_0 x_{max}\sin\frac{2\pi}{T_0}t$$

ملاحظة : * لتحديد سرعة الجسم في لحظة t معينة : نعوض اللحظة t المعطاة في تابع السرعة $\boxed{\bar{v} = -\omega_0 x_{max}\sin\frac{2\pi}{T_0}t}$

* لتحديد اتجاه حركة الجسم حسب اشارة سرعته فإذا كانت السرعة سالبة فحركة الجسم في الاتجاه السالب أي (من $+x_{max}$ إلى $-x_{max}$) والعكس صحيح

مثال : حدد سرعة وجهة حركة الجسم في كل من اللحظات التالية : $\left(t = 0\ ,\ t = \frac{T_0}{2}\ ,\ t = \frac{3T_0}{2}\ ,\ t = \frac{3T_0}{4}\right)$

✓ **الحل :** اعتماداً على الملاحظة السابقة وفي مايلي جدول لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دورين كاملين :

اللحظة t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{2T_0}{4} = \frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	$\frac{4T_0}{4} = T_0$	$\frac{5T_0}{4}$	$\frac{6T_0}{4} = \frac{3T_0}{2}$	$\frac{7T_0}{4}$	$\frac{8T_0}{4} = 2T_0$
السرعة $\bar{v}$	0	$-\omega_0 x_{max}$	0	$+\omega_0 x_{max}$	0	$-\omega_0 x_{max}$	0	$+\omega_0 x_{max}$	0
اتجاه الحركة	معدومة	اتجاه سالب	معدومة	اتجاه موجب	معدومة	اتجاه سالب	معدومة	اتجاه موجب	معدومة

- السرعة عظمى : $\sin\omega_0 t = \pm 1 \Rightarrow \cos\omega_0 t = 0$

عظمى طويلة $\Rightarrow x = 0 \;\Rightarrow v_{max} = |\pm\omega_0 x_{max}|$

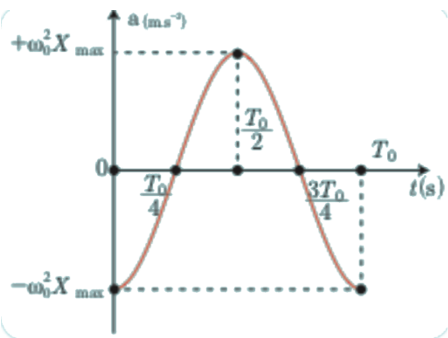
أي تكون السرعة عظمى (طويلة) عند المرور بوضع التوازن (0)

- السرعة معدومة : $v = 0 \Rightarrow \sin\omega_0 t = 0 \Rightarrow \cos\omega_0 t = \pm 1 \Longrightarrow x = \pm x_{max}$

أي تنعدم السرعة عند المرور في الوضعين الطرفيين (المطالين الأعظميين)

سؤال نظري -5-

انطلاقاً من الشكل لتابع المطال $\bar{x} = x_{max}\cos\omega_0 t$ **استنتج تابع التسارع ، وبيّن متى يكون التسارع أعظمي ومتى يكون معدوم ، موضحاً بالرسم البياني لتابع التسارع خلال دور واحد** [دورة 2014, 2018 الثانية]



- تابع التسارع: هو المشتق الأول لتابع السرعة أو المشتق الثاني لتابع المطال

$$\bar{a} = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$$
$$\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 x_{max}\sin\omega_0 t$$
$$\bar{a} = (\bar{v})'_t = -\omega_0^2 x_{max}\cos\omega_0 t$$
$$\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}t$$

نلاحظ: التسارع غير ثابت تتغير قيمته بتغيير المطال **فالحركة متغيرة فقط** $\bar{a} = -\omega_0^2\,\bar{x} \;\neq const.$

أي يتناسب التسارع طرداً مع المطال $\bar{x}$ ويعاكسه اشارة ويتجه دوماً نحو مركز الاهتزاز

ملاحظة : لتحديد تسارع الجسم في لحظة t معينة : **نعوض اللحظة t المعطاة في تابع التسارع** $\boxed{\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}t}$

مثال : حدد تسارع الجسم في كل من اللحظات التالية : $\left(t = 0\,,\; t = \frac{T_0}{2}\;,\; t = \frac{3T_0}{2}\;,\; t = \frac{3T_0}{4}\right)$

✓ الحل : اعتماداً على الملاحظة السابقة وفي مايلي جدول لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دورين كاملين :

اللحظة t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{2T_0}{4} = \frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	$\frac{4T_0}{4} = T_0$	$\frac{5T_0}{4}$	$\frac{6T_0}{4} = \frac{3T_0}{2}$	$\frac{7T_0}{4}$	$\frac{8T_0}{4} = 2T_0$
التسارع $\bar{a}$	$-\omega_0^2 x_{max}$	0	$+\omega_0^2 x_{max}$	0	$-\omega_0^2 x_{max}$	0	$+\omega_0^2 x_{max}$	0	$-\omega_0^2 x_{max}$

- يكون التسارع أعظمي (طويلة) : عند المرور في الوضعين الطرفيين $x = \pm x_{max} \;\Rightarrow a_{max} = |\pm\omega_0^2 x_{max}|$
- يكون التسارع معدوم : في وضع التوازن (مركز التوازن) $x = 0 \;\Rightarrow a = 0$

تطبيق (4) :

هزازة توافقية بسيطة كانت في مبدأ الزمن في المطال الأعظمي السالب وسعة الاهتزاز (10cm) ساكنة آنياً فاهتزت بدور خاص (8s) باعتبار أن $(\pi^2 = 10)$ **، والمطلوب :**

1- استنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام

2- استنتج تابع السرعة وتابع التسارع .

من المعطيات : سعة الاهتزاز $X_{max} = 10.10^{-2} = 10^{-1} m$

الدور الخاص $T_0 = 8(sec)$

.1 $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega t + \bar{\varphi})$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} rad.s^{-1}$

- سعة الاهتزاز : $X_{max} = 0.1\ m$

.2 تابع السرعة هو مشتق تابع المطال بالنسبة للزمن لمرة واحد

$\bar{v} = (\bar{x})'_t \Rightarrow \;\bar{v} = -\frac{\pi}{4}\times 0.1\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi\right)$

$\boxed{\bar{v} = -\frac{\pi}{40}\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi\right) \quad m.s^{-1}}$

تابع التسارع هو المشتق الثاني للمطال أو المشتق الأول للسرعة بالنسبة للزمن.

تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء: $t=0$ ، $x=-X_{max}$

$$-X_{max}=X_{max}\cos\bar{\varphi}$$

$$\cos\bar{\varphi}=-1 \Rightarrow \varphi=\pi\ rad$$

$$\boxed{\bar{x}=0.1\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\pi\right)\quad (m)}$$

$$\bar{a}=(\bar{v})'_t=-\frac{\pi}{40}\times\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\pi\right)$$

$$\boxed{\bar{a}=-\frac{1}{16}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\pi\right)\ (m.s^{-2})}$$

تطبيق (5) :

نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته (k) نعلق في نهايته جسم كتلته (m=1kg) نشدّه نحو الأسفل فيكون التابع الزمني لمطال حركته $\bar{x}=0.4\cos 20t$ ، **والمطلوب :**

1- أوجد سعة الاهتزاز ودور الحركة وتواترها

2- أوجد ثابت صلابة النابض و الاستطالة السكونية

3- أوجد تابع السرعة وتابع التسارع

4- حدد موضع الجسم لحظة بدء الزمن

5- حدد موضع الجسم في لحظة $\left(t=\frac{\pi}{60}s\right)$

من المعطيات: $\bar{x}=0.4\cos(20t+0)$ قارن مع الشكل العام:

$$\bar{x}=X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

.1

- سعة الاهتزاز: $x_{max}=0.4\ m$

النبض الخاص: $\omega_0=20rad.s^{-1}$

- دور الحركة: $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}sec$
- التواتر هو مقلوب الدور: $f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{10}{\pi}\ Hz$

.2

- ثابت الصلابة: $k=m.\omega_0^2=1.(20)^2=400\ N.m^{-1}$
- الاستطالة السكونية: $x_0=\frac{mg}{k}=\frac{1\times10}{400}=\frac{1}{40}m$

.3

- تابع السرعة: $\bar{v}=(\bar{x})'_t$

$$\bar{v}=-0.4\times 20\sin 20t$$

$$\boxed{\bar{v}=-8\sin 20t\quad m.s^{-1}}$$

- تابع التسارع: $\bar{a}=(\bar{v})'_t$

$$\bar{a}=-8\times 20\cos 20t$$

$$\boxed{\bar{a}=-160\cos 20t\quad m.s^{-2}}$$

.4 لتحديد موضع جسم أي المطال (x) يجب تعويض الزمن بقيمته في تابع المطال ، لحظة بدء الزمن $t=0$

$$x=0.4\cos 20(0)\xrightarrow{\cos(0)=1}\boxed{x=0.4\ m}$$

.5 $t=\frac{\pi}{60}sec$

$$x=0.4\cos\left(20\times\frac{\pi}{60}\right)\xrightarrow{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}}x=0.4\times\frac{1}{2}\rightarrow\boxed{x=0.2\ m}$$

سؤال نظري -6-

استنتج علاقة الطاقة الميكانيكية في الهزازة التوافقية البسيطة (النواس المرن) ، وبيّن شكل الطاقة في كل من الوضعين الطرفيين ووضع التوازن وبالاقتراب والابتعاد عن كل منهما موضحاً بالرسم البياني [دورة 2016 أولى]

- **الطاقة الميكانيكية (الكلية E_{tot}) هي مجموع طاقتين كامنة مرونية وحركية**

$$E_{tot\ \text{ميكانيكية}}=E_{k\ \text{حركية}}+E_{p\ \text{كامنة}}$$

علماً أن : $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ الطاقة الكامنة المرونية , $E_k=\frac{1}{2}mv^2$ الطاقة الحركية

$$E_{tot}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$

نعوض كل من تابع المطال وتابع السرعة في علاقة الطاقة E_{tot}

تابع المطال : $\bar{x}=x_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$

تابع السرعة : $\bar{v}=(\bar{x})'_t=-\omega_0 x_{max}\sin\omega_0 t+\bar{\varphi})$

$$E_{tot}=\frac{1}{2}m\omega_0^2X_{max}^2\sin^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})+\frac{1}{2}kX_{max}^2\cos^2(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

ولكن: $k = m\omega_0^2$ نعوض ونخرج عامل مشترك $\sin^2x+\cos^2x=1$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2\left[\sin^2(\omega_0 t + \overline{\varphi}) + \cos^2(\omega_0 t + \overline{\varphi})\right]$$

$\sin^2x+\cos^2x=1$ $\boxed{\Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = const}$

نلاحظ أن الطاقة الميكانيكية ثابتة وتتناسب طرداً مع مربع سعة الاهتزاز

- **مناقشة الطاقة :**

✓ في الوضعين الطرفيين :

$$x = x_{max} \to v = 0 \to E_k = 0 \to E_{tot} = E_p$$

✓ عند مرور المتحرك في وضع التوازن :

$$x = 0 \to E_p = 0 \to E_{tot} = E_k$$

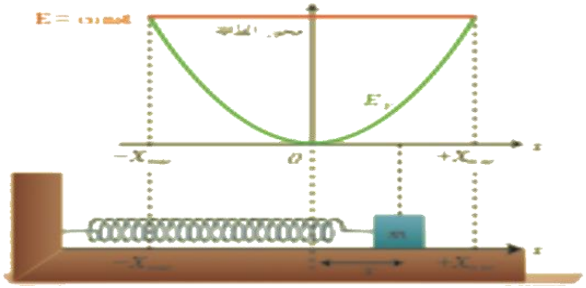
✓ باقتراب المتحرك من مركز التوازن :

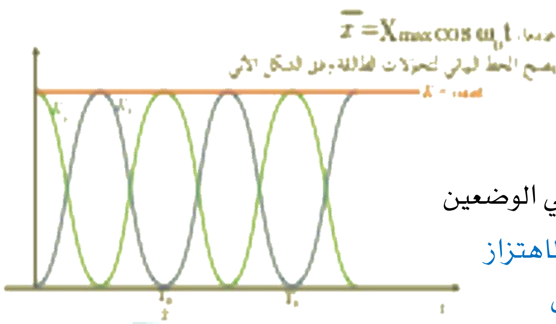
تزداد v فتزداد E_k وتنقص

E_p حتى تنعدم في مركز التوازن 0 وتبقى E_{tot} ثابتة .

✓ **بابتعاد الجسم عن مركز التوازن**

تتناقص v فتنقص E_k وتزداد E_p لتصبح $E_{tot} = E_p$ في الوضعين الطرفيين $x = \pm x_{max}$ وتبقى E_{tot} ثابتة . نلاحظ أنه يحدث أثناء الاهتزاز تبادل من كامنة إلى حركية وبالعكس مع بقاء الطاقة الميكانيكية بإهمال القوى المبددة للطاقة.





تطبيق (6) : نقطة مادية كتلتها (1kg) تهتز بحركة توافقية بسيطة وبسعة اهتزاز (10cm) وبنبض خاص ($\omega_0 = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$) ولحظة بدء الزمن ($x = +X_{max}$) وباعتبار ($\pi^2 = 10$) **والمطلوب :**

1- أحسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة

2- أحسب قيمة التسارع لحظة بدء الزمن وشدة قوة الإرجاع حينئذ

3- أحسب الطاقة الحركية للنقطة المادية في نقطة مطالها (0.01m)

4- أحسب الطاقة الحركية في نقطة مطالها ($\frac{x_{max}}{3}$)

من المعطيات : $\omega_0 = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$ ، $m = 1\ kg$

سعة الاهتزاز: $X_{max} = 10 \times 10^{-2} = 10^{-1}\ m$

.1 $E = \frac{1}{2}k\ X_{max}^2$

نحسب k أولاً: $k = m.\omega_0^2 = 1.\frac{\pi^2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} N.m^{-1}$

$E_{tot} = \frac{1}{2} . \frac{5}{2} . 10^{-2}$

$\boxed{E_{tot} = \frac{5}{4} \times 10^{-2}\ J}$

.2 لحظة بدء الزمن: $t = 0 \Longrightarrow x = +X_{max}$

حساب التسارع : $\bar{a} = -\omega_0^2 . x = -\omega_0^2 . X_{max}$

$\boxed{\bar{a} = -\frac{\pi^2}{4} \times 10^{-1} = -\frac{1}{4}\ m.s^{-2}}$

حساب شدة قوة الإرجاع: $\bar{F} = |-k\bar{x}|$

.3 $x = 0.01\ m = 1 \times 10^{-2} m$

$E_k = E_{tot} - E_p = \frac{1}{2}kX_{max} - \frac{1}{2}kx^2$

$E_k = \frac{1}{2}k(x_{max}^2 - x^2)$

$E_k = \frac{1}{2} \times \frac{10}{4}(100 \times 10^{-4} - 1 \times 10^{-4})$

$E_k = \frac{10}{8}(99 \times 10^{-4})$

$\boxed{E_k = \frac{99}{8} . 10^{-3} J}$

.4 $E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)$

فرضاً: $x = \frac{X_{max}}{3} \Longleftarrow E_k = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{9}\right)$

$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{9}\right) \to E_k = \left(1 - \frac{1}{9}\right)E_{tot}$

$\bar{F} = \left\lvert -\frac{10}{4} \times 10^{-1} \right\rvert \rightarrow \boxed{F = \frac{1}{4} N}$	$E_k = \frac{8}{9} E_{tot} \rightarrow E_k = \frac{8}{9} \times \frac{5}{4} \times 10^{-2}$ $\boxed{E_k = \frac{1}{9} . 10^{-1} J}$

تطبيق (7) : اقرأ الخط البياني المجاور وأجب عن الأسئلة الآتية:

1- ماذا يمثل الخط البياني.

2- عين شروط البدء واستنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام.

3- عين زمن مرور الجسم بوضع التوازن للمرة الأولى.

1. يمثل تابع المطال في النواس المرن.

2. من الخط البياني : في اللحظة $t = 0$ يكون الجسم في $x = +X_{max}$

$v = 0$, $x = +X_{max} = 5cm = 5 \times 10^{-2}$

استنتاج التابع: $\bar{x} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

حساب T_0 من الخط البياني:

$\frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow T_0 = \frac{4}{2} = 2 \; sec$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \; rad . s^{-1}$

تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء:عند $t = 0$ يكون الجسم في $x = +X_{max}$

$+X_{max} = X_{max} cos\bar{\varphi}$

$cos\bar{\varphi} = +1 \Longrightarrow \varphi = 0$

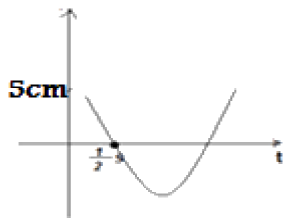
$\boxed{\bar{x} = 5.10^{-2} \cos(\pi t) \quad (m)}$

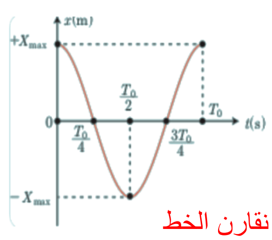
3.

زمن المرور الأول: $t = \frac{T_0}{4}$

$t = \frac{T_0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} sec$

- أو فوراً من الرسم البياني: $\frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} sec$





نقارن الخط البياني المعطى مع الخط البياني لتابع المطال

سؤال نظري -7- أثبت صحة العلاقة: $v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$ في الحركة التوافقية البسيطة.

الطريقة الأولى:

$$E_{tot} = E_P + E_k$$

$$\xrightarrow{\text{نعزل } E_k} E_k = E_{tot} - E_P$$

$$\xrightarrow{\text{نعوض قانون كل طاقة}} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\xrightarrow{\text{نخرج عامل مشترك } \frac{1}{2}k} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)$$

$$\xrightarrow{\text{نختصر } \frac{1}{2}} mv^2 = k(X_{max}^2 - x^2)$$

$$\xrightarrow{\text{نعزل } v^2} v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2 - x^2)$$

لكن: $\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$v^2 = \omega_0^2(X_{max}^2 - x^2) \xrightarrow{\text{نجذر الطرفين}}$$

العلاقة الذهبية : $\boxed{v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}}$

من هذه العلاقة نستطيع حساب سرعة حركة جسم عُلم مطاله $\bar{x}$

الطريقة الثانية:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \frac{x^2}{X_{max}^2} = COS^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Rightarrow \frac{v^2}{\omega^2 X_{max}^2} = \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نجمع المعادلتين كل طرف إلى طرف نجد:

$$\frac{x^2}{X_{max}^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

ولكن : $\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 1$

$$\frac{x^2}{X_{max}^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = 1 \xrightarrow{\text{نوحد المقامات}}$$

$$\frac{\omega_0^2 x^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = 1 \xrightarrow{\text{المقام مشترك}} \frac{\omega_0^2 x^2 + v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = 1$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 x^2 + v^2 = \omega_0^2 X_{max}^2$$

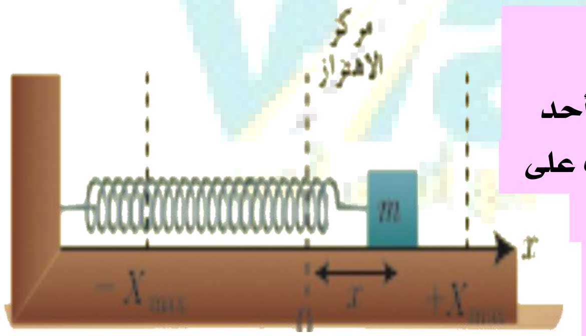
$$\xrightarrow{\text{نعزل } v^2} v^2 = \omega_0^2 X_{max}^2 - \omega_0^2 x^2 \xrightarrow{\text{نخرج عامل مشترك}}$$

$$v^2 = \omega_0^2(X_{max}^2 - x^2) \xrightarrow{\text{نجذر الطرفين}}$$

$$\boxed{v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}}$$

سؤال نظري -8-

نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k، مثبت من أحد طرفيه، ويربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملس، كما في الشكل المجاور، نشد الجسم مسافة أفقية مناسبة ، ونتركه دون سرعة ابتدائية. **المطلوب:**



a. ادرس حركة الجسم، و استنتج التابع الزمني للمطال.

b. استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الموضعين: A و B $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ و $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$ ، ماذا تستنتج؟

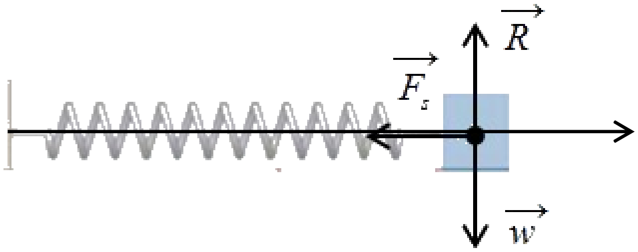
a) دراسة حركة الجسم واستنتاج التابع الزمني للمطال :

جملة المقارنة: خارجية.

الجملة المدروسة: النواس المرن

- يؤثر في مركز عطالة الجسم:

قوة توتر النابض: $\vec{F_s}$ ، قوة الثقل: $\vec{W}$ ، قوة رد فعل السطح: $\vec{R}$



بتطبيق قانون نيوتن الثاني: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{R} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجّه كما في الشكل: $(*)$ $\quad -F_s = m\bar{a}$

- تؤثر على النابض : القوة $\overrightarrow{F_s'}$ التي تسبّب له الاستطالة x حيث: $F_s' = F_s = k\bar{x}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $-k\bar{x} = m\bar{a}$

بما أن حركة الجسم مستقيمة فالتسارع الناظمي معدوم و التسارع الكلي هو : تسارع مماسي $\bar{a} = \bar{a}_t = (\bar{x})_t''$

$$-k\bar{x} = m(\bar{x})_t''$$

$\boxed{(\bar{x})_t'' = -\left(\frac{k}{m}\right)\bar{x} \ldots\ldots (1)}$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقق من صحة الحل: نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن نجد: $(\bar{x})_t' = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$(\bar{x})_t'' = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\boxed{(\bar{x})_t'' = \omega_0^2\bar{x} \ldots\ldots (2)}$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد ان: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ وهذا محقق لأنّ k, m موجبان.

حركة الجسم هي **حركة جيبية انسحابية** التابع الزمني للمطال يعطى بالعلاقة: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

b) **استنتاج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة** X_{max} : $E_{tot} = E_P + E_k \Rightarrow E_k = E_{tot} - E_p$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)}$$

$$\bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2} \Rightarrow E_{k_A} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}k\,X_{max}^2\right) = \frac{3}{4}E_{tot}$$

$$\boxed{\bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2} \Rightarrow E_{k_A} = \frac{3}{4}E_{tot}}$$

$$\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow E_{k_B} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k\,X_{max}^2\right) = \frac{1}{2}E_{tot}$$

$$\boxed{\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow E_{k_B} = \frac{1}{2}E_{tot}}$$

أي أن المطال الذي تتساوى عنده الطاقتين الكامنة المرونية والحركية هو $\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$

النتيجة: تنقص الطاقة الحركية للجسم بازدياد مطاله و بالتالي تزداد طاقته الكامنة.

سؤال نظري -9-

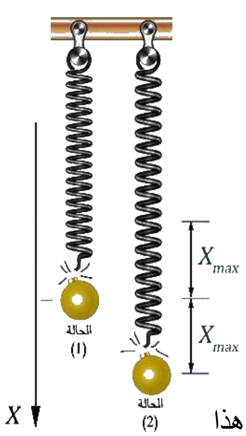
جسم معلق بنابض مرن شاقولي حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص، ما نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتيين، ولماذا؟

a. مركز الاهتزاز، وهو يتحرك بالاتجاه السالب؟
b. المطال الأعظمي الموجب؟

لحظة انفصال الجسم يخضع لقوة ثقله فقط $\overrightarrow{W} = m\vec{g}$

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{W} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{const}$$



a. **الانفصال في مركز الاهتزاز:** في مركز الاهتزاز تكون سرعة الجسم عظمى أي عند انفصال الجسم في هذا المطال تكون سرعته الابتدائية عظمى أي أن الجسم يُقذف (حالة قذف شاقولي نحو الاعلى لأن الجسم مزود بسرعة ابتدائية و الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

طورها الاول صعود (متباطئة بانتظام) وطورها الثاني هبوط (متسارعة بانتظام).

b. **الانفصال في المطال الأعظمي الموجب:** في المطالين الأعظميين تنعدم سرعة الجسم أي عند انفصال الجسم في هذا المطال تكون سرعته الابتدائية معدومة أي أنه يسقط سقوطاً حراً .

ملاحظات حل مسائل النواس المرن

1. الدور الخاص وواحدته (sec) :
T_0 حسب المعطيات من إحدى الطرق الثلاثة
$$\begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_{0\,\text{النبض}}} \\ T_0 = \frac{t\ \text{زمن الهزات}}{N\ \text{عدد الهزات}}\ \text{تجريبياً} \end{cases}$$

✓ الدور الخاص للنواس المرن لاعلاقة له بالجاذبية g ولا بسعة الاهتزاز X_{max} (يعني لما يغيرين يبقى الدور كما هو $T'_0 = T_0$)

✓ الدور الخاص للنواس المرن له علاقة بالكتلة m (تناسب طردي) وبثابت صلابة النابض k (تناسب عكسي)

2. الاستطالة السكونية: $mg = kx_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{m.g}{k}}$

وإذا لم تعطى قيم $m\ ,\ k$

✓ نستطيع تبديل $k = m.\omega_0^2$ فيكون $x_0 = \frac{m.g}{k} \Rightarrow x_0 = \frac{m.g}{m.\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}}$

✓ $mg = kx_0 \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{x_0}{g} \xRightarrow{\text{نعوض بدل } \frac{m}{k} \text{ في علاقة الدور}} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}} \xRightarrow{\text{نربع ونعزل } x_0}$

3. $\begin{cases} \text{قوة الارجاع } (N)\ \ \bar{F} = -k\bar{x} \\ \text{التسارع } (m.s^{-2})\ \ \bar{a} = -\omega_0^2\bar{x} \end{cases}$ لما يطلبن رح يعطي قيمة المطال أو x (اللحظة $t = 0$ تكون مثلاً $x = +X_{max}$)

✓ شدة قوة الارجاع بالقيمة المطلقة والتسارع عندئذٍ يكون موجب $a = \frac{F\ \text{قوة الإرجاع}}{m} \xLeftarrow{\text{محصلة القوى هي قوة إرجاع}} a = \frac{\sum F}{m} \Leftarrow \sum F = m.a$

4. ثابت صلابة النابض k $(N.m^{-1})$

✓ إذا أعطانا النبض الخاص ω_0 : $\boxed{k = m.\omega_0^2}$

✓ أو نحسبه من علاقة الدور بعد تربيعها: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow{\text{نربع}} T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow \boxed{k = 4\pi^2\frac{m}{T_0^2}}$

5. استنتاج التابع الزمني:

1) نكتب الشكل العام: $\boxed{\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$

2) نعين الثوابت: $\omega_0\ ,\ X_{max}\ ,\ \bar{\varphi}$

3) نعوض الثوابت بالشكل العام

♥ تعيين ω_0 النبض الخاص $(rad.s^{-1})$: $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$ أو $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

♥ تعيين سعة الحركة ، سعة الاهتزاز ، ضمن جدول مرونة النابض ، $\frac{\text{طول القطعة المستقيمة}}{2} \xRightarrow{\text{تعني كلها}} \boxed{X_{max}}$

♥ تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء ↓

في الوضعيين الطرفيين $x = \pm X_{max}$ تنعدم السرعة في كلا الاتجاهين $v = 0$	الاتجاه الموجب: $v > 0$ السرعة موجبة ، الاتجاه السالب: $v < 0$ السرعة سالبة
▪ شروط البدء : $t = 0\ ,\ x = +X_{max}$ تركت دون سرعة ابتدائية نعوض شروط البدء بتابع المطال : $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ $+X_{max} = X_{max}\cos(\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$	▪ شروط البدء : $t = 0\ ,\ x = \frac{X_{max}}{2}$ الاتجاه سالب مثلاً نعوض شروط البدء بتابع المطال : $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ $\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(\frac{\pi}{2}(0) + \bar{\varphi})$ $\Rightarrow \cos\varphi = +\frac{1}{2} \begin{cases} \text{إما) } \varphi = +\frac{\pi}{3}\ rad \\ \text{أو) } \varphi = -\frac{\pi}{3}\ rad \end{cases}$

شروط البدء : $t=0\ ,\ x=-X_{max}$ تركت دون سرعة ابتدائية نعوض شروط البدء بتابع المطال : $\bar{x}=X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ $-X_{max}=X_{max}\cos(\bar{\varphi})\Rightarrow\cos\varphi=-1\Rightarrow\boxed{\varphi=\pi\,rad}$	نختار φ قيمة التي تجعل السرعة سالبة: $\bar{v}=(\bar{x})'_t=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$ نعوض شروط البدء $v<0\ ,\ t=0$ لأن الاتجاه سالب: $\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin\bar{\varphi}<0$ مقبول $\varphi=+\frac{\pi}{3}\Rightarrow\bar{v}=\underbrace{-}_{سالب}\omega_0 X_{max}\underbrace{\sin\left(+\frac{\pi}{3}\right)}_{موجب}<0\Rightarrow v<0$ مرفوض $\varphi=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\bar{v}=\underbrace{-}_{سالب}\omega_0 X_{max}\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{سالب}>0\Rightarrow v>0$

6. السرعة الخطية لمركز عطالة الجسم:
   - تابع السرعة: $\bar{v}=(\bar{x})'_t=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$
   - السرعة العظمى طويلةً (موجبة): $\boxed{v_{max}=\omega_0 X_{max}}$
   - سرعة المرور الاول بوضع التوازن في كلا الاتجاهين $(t=0\ ,x=\pm X_{max})$: $\boxed{v=\pm\omega_0 X_{max}}$

7. تعيين (زمن) أو لحظات المرور بوضع التوازن لعدة مرات :

1) نعدم تابع المطال لأن في وضع التوازن $x=0$ ← $0=X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$

$$X_{max}\neq 0\Rightarrow\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})=0$$

2) نضع بدل (0) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ لأن $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=0$ حيث k عدد الدورات التي ينعدم عندها الـ$\cos$: $k=0,1,2,3,4,,$

فيصبح: $\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\Rightarrow\omega_0 t+\bar{\varphi}=\frac{\pi}{2}+\pi k$

3) نعزل الزمن t من المعادلة السابقة حيث تكون قيم $\omega_0,\ \bar{\varphi}$ معلومة من تابع المطال مسبقاً : $\boxed{t=\dfrac{\frac{\pi}{2}-\bar{\varphi}+\pi k}{\omega_0}}$

4) نعوض $k=0$ للحصول على زمن المرور الأول و $k=1$ للمرور الثاني و $k=2$ للمرور الثالث

نكشة : إذا عوضنا $k=0$ للمرور الأول ونتج زمن سالب هنا نرفضه ونعتبر ناتج تعويض $k=1$ هو زمن المرور الأول

8. زمن الوصول من المطال الأعظمي الموجب إلى المطال الأعظمي السالب (الزمن بين الوضعيين المتناظرين $\pm X_{max}$): $\boxed{t=\frac{T_0}{2}}$

9. الطاقات :

الطاقة الكامنة المرونية التي يقدمها المجرب (بدون ماكس) : $\boxed{E_p=\frac{1}{2}kX^2}$	الطاقة الميكانيكية (الكلية) (مع ماكس) : $\boxed{E_{tot}=\frac{1}{2}kX^2_{max}}$ ، $\boxed{E_{tot}=E_k+E_p}$

الطاقة الحركية (من الفرق) : $\boxed{E_k=E_{tot}-E_p}$

$$E_k=\frac{1}{2}kX^2_{max}-\frac{1}{2}kX^2\Rightarrow E_k=\frac{1}{2}k\left[X^2_{max\ \text{سعة الحركة}}-X^2_{\text{معطاة بالطلب}}\right]$$

♥ الطاقة الحركية عند مرور المتحرك بوضع التوازن

$$x=0\Rightarrow E_p=0\Rightarrow E_k=E_{tot}=\frac{1}{2}kX^2_{max}$$

تحديد موضع (مطال X) مركز عطالة الجسم عندما تتساوى الطاقتين الكامنة والحركية $E_k=E_p$

$$E_{tot}=E_k+E_p\xrightarrow{\text{نضع } E_p \text{ بدل } E_k}E_{tot}=E_p+E_p\Rightarrow E_{tot}=2E_p\xrightarrow{\text{نعوض القوانين}}\frac{1}{2}kX^2_{max}=2.\frac{1}{2}kX^2\xrightarrow{\text{نختصر}}X^2=\frac{X^2_{max}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{نجذر الطرفين}}\boxed{x=\pm\frac{x_{max}}{\sqrt{2}}}$$

10. تحديد موضع (مطال x) مركز عطالة الجسم في اللحظة t او لحظة بدء الزمن $t = 0$

نعوض هذا الزمن المعطى في تابع المطال فتنتج لدينا قيمة x تكون هي موضع الجسم في ذلك الزمن المعطى

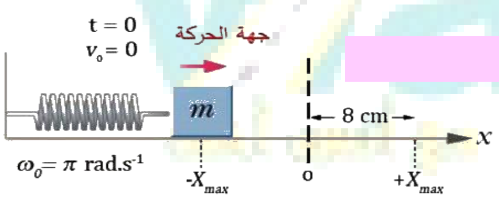
11. التوابع الزمنية الموجودة داخل الكتاب وخارجه :

اسم التابع و قانونه	التابع الزمني	تفصيل التابع الزمني	القيمة العظمى الطويلة له
المطال (موضع الجسم) : $\bar{x}$	$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{x} = X_{max}$
السرعة: $\bar{v} = (\bar{x})'_t$	$\bar{v} = -\,v_{max}.\,sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{v} = -\,\omega_0 X_{max} sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$v_{max} = \omega_0 X_{max}$
التسارع: $\bar{a} = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$	$\bar{a} = -\omega_0^2.\bar{x}$	$\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$a_{max} = \omega_0^2 x_{max}$
قوة الإرجاع : $\bar{F} = -k\bar{x}$ نعوض تابع المطال $\bar{x}$	$\bar{F} = -F_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{F} = -kX_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$F_{max} = kX_{max}$ $F_{max} = m\omega_0^2 X_{max}$
كمية الحركة : $\bar{p} = m.\bar{v}$ نعوض تابع السرعة $\bar{v}$	$\bar{p} = -p_{max} sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{p} = -m.v_{max} sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$p_{max} = m.v_{max}$ $p_{max} = m.\omega_0 X_{max}$
الطاقة الكامنة المرونية : $E_P = \frac{1}{2}kx^2$	$\overline{E_P} = E_{P_{max}} cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\overline{E_P} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$E_{P_{max}} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$ $E_{P_{max}} = \frac{1}{2}m.\omega_0^2 x_{max}^2$
الطاقة الحركية : $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$\overline{E_k} = E_{k_{max}} sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\overline{E_k} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$E_{k_{max}} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ $E_{k_{max}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_{max}^2$

اختبر نفسي:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي

1. تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:



a. $x = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

b. $x = 8\cos(\pi t - \pi)$

c. $x = 0.008\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

d. $x = 0.8\, cos\pi t$

الحل: تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:

الإجابة الصحيحة: (a $\boxed{\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)}$

توضيح اختيار الإجابة

- شروط البدء $t = 0$, $\bar{x} = -X_{max} = -0.08m$, $v_0 = 0$

نبدل في التابع الزمني للمطال $-0.08 = 0.08\, cos\bar{\varphi} \Rightarrow cos\varphi = -1 \Rightarrow \bar{\varphi} = \pi\, rad$

$\omega_0 = \pi\, rad.s^{-1}$

$\boxed{\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)}$

2. الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة فيكون التابع الزمني للسرعة هوك

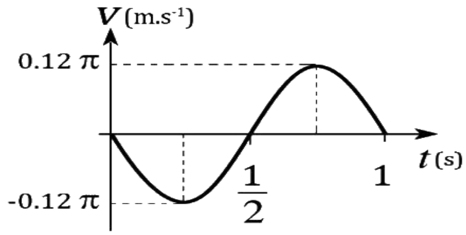
a. $v = 0.06\pi\, cos\pi t$

.b $v = -0.06\pi\cos 2\pi t$

.c $v = -012\pi\sin 2\pi t$

.d $v = 0.12\pi\sin\pi t$

الحل: الرسم البياني جانباً يمثّل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة، فيكون التابع الزمني للسرعة هو:



الإجابة الصحيحة: c) $\boxed{\bar{v} = -0.12\pi\sin 2\pi t}$

توضيح اختيار الإجابة

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$
- $v_{\max} = 0.12\,\pi\ m.s^{-1}$
- $v_{max} = \omega_0 X_{max} \implies X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{0.12\pi}{2\pi} = 0.06m$
- $(t = 0 \text{ ، } v = 0)$ نبدل في التابع الزمني للسرعة $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ فنجد:

$$0 = -2\pi \times 0.06\sin(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \sin(\bar{\varphi}) = 0$$

إما: $\bar{\varphi} = 0\ \text{rad}$ الحل مقبول لأنه يحقق السرعة **سالبة** في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}s$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Longrightarrow \bar{v} = -2\pi \times 0.06\sin\left(2\pi\frac{1}{4} + 0\right) = -0.12\pi\ m.s^{-1}$$

أو: $\bar{\varphi} = \pi\ \text{rad}$ الحل مرفوض لأنه يحقق السرعة **موجبة** في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}s$

$$\bar{v} = -\omega X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Longrightarrow \bar{v} = -2\pi \times 0.06\sin\left(2\pi\frac{1}{4} + \pi\right) = +0.12\pi\ m.s^{-1}$$

3. يمثل الشكل المجاور هزازتان توافقيتان (1) و(2) تنطلقان من الموضع نفسه، وفي اللحظة نفسها فإنهما بعد مضي $3s$ من بدء حركتهما:

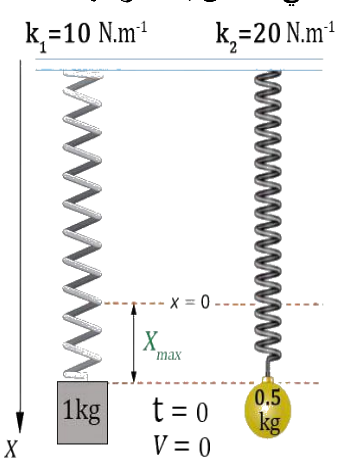
.a تلتقيان في مركز الاهتزاز.

.b تلتقيان في الموضع $+X_{max}$

.c لا تلتقيان لأن مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$.

.d لا تلتقيان لأن مطال الأولى $-X_{max}$ ، ومطال الثانية $+X_{max}$.

الحل: يمثّل الشكل المجاور هزازتان توافقيتان تنطلقان من الموضع نفسه وفي اللحظة نفسها، فإنهما بعد مضي $3s$ من بدء حركتهما:



الإجابة الصحيحة: d) لا تلتقيان.

توضيح اختيار الإجابة

- دور النواس الأول: $T_{0_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2s$
- دور النواس الثاني: $T_{0_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{20}} = 1s$

بعد مضي $3s$:

سينجز النواس الأول هزة ونصف $\frac{t}{T_{0_1}} = \frac{3}{2} = 1.5$ أي سيكون في المطال $\bar{x} = -X_{max}$

سينجز النواس الثاني ثلاث هزات $\frac{t}{T_{0_2}} = \frac{3}{1} = 3$ أي سيكون في المطال $\bar{x} = +X_{max}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية: تم الحل سابقاً في أسئلة النظري رقم 9-8-7

ثالثاً: حل المسائل الآتية:
(في جميع المسائل) $(4\pi = 12.5 \text{ ،} \pi^2 = 10 \text{ ، } g = 10m.s^{-2})$

المسألة الأولى (درس):

تتألف هزازة جيبية انسحابية من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10 N.m^{-1}$ ، مثبت من أحد طرفيه،ويحمل في طرفه الآخر جسماً كتلته m، ويُعطى التابع الزمني لمطال حركتهما بالعلاقة: $\bar{x} = 0.1 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ ، **المطلوب:**

1. أوجد قيم ثوابت الحركة ودورها الخاص.
2. احسب كتلة الجسم m.
3. احسب قيمة السرعة في موضع مطاله $x = 6\ cm$ و الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور.
4. حدد موضع الجسم وجهة حركته لحظة بدء الزمن

الحل.

-1 $\bar{x} = 0.1 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

- **بالمطابقة** بين تابع المطال المعطى في المسألة مع الشكل العام لتابع المطال نعيّن الثوابت : $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نجد: $X_{max} = 0.1\ m$ ، $\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$ ، $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} rad$

- **نحسب الدور الخاص للحركة من علاقة نبض الحركة** : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} \Longrightarrow \boxed{T_0 = 2sec}$$

-2 **حساب كتلة الجسم** : إما من علاقة الدور الخاص بعد تربيعها أو من علاقة النبض الخاص في النواس المرن

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{\pi^2} = \frac{10}{10} \Longrightarrow \boxed{m = 1kg}$$

-3 **لحساب السرعة في موضع مطاله** $\bar{x}$ **معطى** : $\bar{x} = 6\ \text{cm}$ **ويتحرك بالاتجاه الموجب:**

من العلاقة الذهبية : $v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

$$v = \pi\sqrt{(1 \times 10^{-1})^2 - (6 \times 10^{-2})^2} = \pi\sqrt{1 \times 10^{-2} - 36 \times 10^{-4}}$$

$$\xrightarrow{1\times10^{-2}=100\times10^{-4}} v = \pi\sqrt{100 \times 10^{-4} - 36 \times 10^{-4}} = \pi\sqrt{64 \times 10^{-4}}$$

$$\overset{\text{نجذر}}{\Longrightarrow} v = 8\pi \times 10^{-2} \xrightarrow{(\text{باعتبار } 4\pi=12.5 \Rightarrow 8\pi=25)} \boxed{v = 25 \times 10^{-2}\ m.s^{-1}}$$

-4 لتحديد موضع x الجسم لحظة بدء الزمن $t = 0$ نعوض في تابع المطال $\bar{x} = 0.1 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\overset{t=0}{\Longrightarrow} \bar{x} = 0.1 \cos\left(\pi(0) + \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \boxed{\bar{x} = 0}$$ موضع الجسم في مركز الاهتزاز

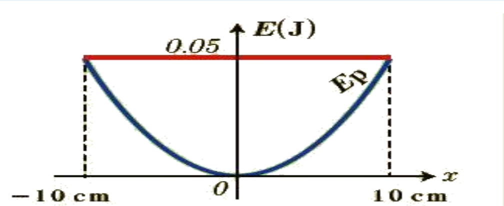
لتحديد جهة الحركة : نعوض الزمن $t = 0$ بتابع السرعة $\boxed{v < 0} \Longleftarrow \bar{v} = (\bar{x})'_t = -0.1\pi \sin\left(\pi(0) + \frac{\pi}{2}\right)$

بما أن السرعة سالبة $v < 0$ أي اتجاه الحركة هو الاتجاه السالب .

المسألة الثانية (درس)

يوضّح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بتغير الموضع لهزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته $m = 0.4$kg، **المطلوب:**

1. استنتج قيمة ثابت صلابة النابض k.
2. احسب الدور الخاص للحركة .
3. احسب قيمة السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.



الحل :

-1 حساب قيمة ثابت صلابة النابض k من علاقة الطاقة الميكانيكية

من الرسم البياني نستنتج : قيمة الطاقة الميكانيكية $E_{tot} = 0.05 = 5 \times 10^{-2} J$

سعة الحركة $X_{max} = 10cm = 10 \times 10^{-2} = 10^{-1} m$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2$$ علاقة الطاقة الميكانيكية

$$5\times10^{-2} = \frac{1}{2}k\times(10^{-1})^2 \Rightarrow 5\times10^{-2} = \frac{1}{2}k\times10^{-2} \xRightarrow[\text{نختصر}]{10^{-2}} 5 = \frac{1}{2}k \Rightarrow \boxed{k = 10N.m^{-1}}$$

2- حساب الدور الخاص : إما من علاقة الدور أو من علاقة النبض الخاص

طريقة (1): من علاقة الدور الخاص للنواس المرن : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4\times10^{-1}}{10}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{100}} = 2\pi\times\frac{2}{10} = \frac{4\pi}{10} \xRightarrow{\text{باعتبار } 4\pi=12.5} \frac{12.5}{10} \Rightarrow \boxed{T_0 = 1.25\ sec}$$

طريقة (2): من علاقة النبض الخاص للنواس المرن : نحسب أولاً النبض الخاص ومن ثم نحسب منه الدور الخاص

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{10}{0.4} = \frac{100}{4} = 25 \Rightarrow \omega_0 = 5\,rad.s^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{10} = \frac{12.5}{10} \Rightarrow \boxed{T_0 = 1.25\ sec}$$

3- عند المرور في مركز الاهتزاز ينعدم المطال $x = 0$

طريقة (1): من الطاقات :

عند المرور في مركز الاهتزاز تنعدم الطاقة الكامنة المرونية وتكون الطاقة الحركية مساوية للطاقة الميكانيكية.

$$E_{tot} = E_P + E_k$$
$$x = 0 \Rightarrow E_P = 0$$
$$E_{tot} = E_k$$
$$\frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{\frac{kX_{max}^2}{m}}$$
$$v = \sqrt{\frac{10\times10^{-2}}{4\times10^{-1}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{2}\ m.s^{-1}}$$

طريقة (2): من الطاقات

عند المرور في مركز الاهتزاز تنعدم الطاقة الكامنة المرونية وتكون الطاقة الحركية مساوية للطاقة الميكانيكية.

$$E_{tot} = E_P + E_k$$
$$x = 0 \Rightarrow E_P = 0$$
$$E_{tot} = E_k$$
$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{m}}$$
$$v = \sqrt{\frac{2\times0.05}{0.4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$
$$\boxed{v = \frac{1}{2}\ m.s^{-1}}$$

طريقة (3): من العلاقة الذهبية

$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$:

عند المرور في مركز الاهتزاز ينعدم المطال $x = 0$

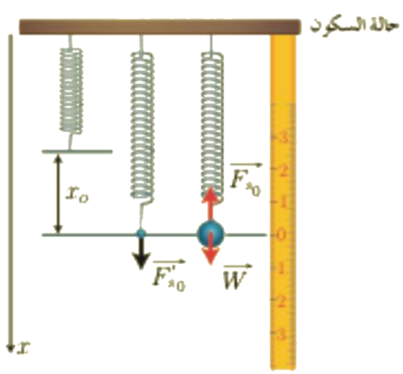
$$v = 5\sqrt{(10^{-1})^2 - (0)^2}$$
$$v = 5\sqrt{10^{-2}} = 5\times10^{-1}$$
$$\boxed{v = 0.5 = \frac{1}{2}\ m.s^{-1}}$$

المسألة الثالثة (درس) :

نشكل هزازة توافقية بسيطة من جسم كتلته $m = 1\ kg$ معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فينجز 10 هزات في 8 s ويرسم في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها 24cm، **المطلوب:**

1. استنتج قيمة الاستطالة السكونية لهذا النابض، ثم احسب قيمتها.
2. احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة).
3. احسب قيمة التسارع في مطال $x = 10cm$.
4. احسب الطاقة الكامنة المرونية في موضع مطاله $x = -4\ cm$ ، و احسب الطاقة الحركية عندئذٍ.

الحل :



1- **جملة المقارنة:** خارجية. **الجملة المدروسة:** النواس المرن.

تؤثر في مركز عطالة الجسم: قوة توتر النابض: $\overrightarrow{F_{S_0}}$ ، قوة الثقل: $\vec{W}$

$$\sum\vec{F} = \vec{0}\ \text{(الجسم ساكن)}$$
$$\vec{W} + \overrightarrow{F_{S_0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجّه نحو الأسفل كما في الشكل:

$$W - F_{S_0} = 0$$
$$W = F_{S_0} \ldots\ldots(1)$$

تؤثر على النابض القوة $\overrightarrow{F'_{S_0}}$ التي تسبّب له الاستطالة x_0 حيث:: $F'_{S_0} = F_{S_0} = kx_0$

بالتعويض في (1) نجد: $mg = kx_0$

علاقة الاستطالة السكونية : $\boxed{x_0 = \frac{mg}{k}}$

يجب حساب $\mathbf{k}$ ثابت صلابة النابض من علاقة الدور بعد تربيعها

حساب الدور الخاص: $\mathbf{T_0}$تجريبياً $= \frac{\text{زمن الهزات } t}{\text{عدد الهزات } N} = \frac{8}{10} \Longrightarrow T_0 = 0.8sec$

حساب $\mathbf{k}$ من علاقة الدور: $\mathbf{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow{\text{نربع}} T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{k = 4\pi^2\frac{m}{T_0^2}}} \xRightarrow{\pi^2=10} k = \frac{4\times10\times1}{64\times10^{-2}} = \frac{4000}{64} = 62.5\,N.m^{-1}$

حساب الاستطالة السكونية : $\boxed{x_0 = \frac{1\times10}{62.5} = 0.16\,m}$

-2 حساب قيمة السرعة العظمى (طويلة): $v_{max} = X_{max}\omega_0$

نحسب أولاً النبض الخاص : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{5\pi}{2}rad.s^{-1}$

نحسب سعة الحركة ولدينا بنص المسألة قطعة مستقيمة طولها $24cm \leftarrow$ $\boxed{\boldsymbol{X_{max} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة}}{2} = \frac{24\times10^{-2}}{2} = 12\times10^{-2}m}}$

$v_{max} = 12\times10^{-2}\times\frac{5\pi}{2} \Longrightarrow \boxed{v_{max} = 0.3\,\pi\,m.s^{-1}}$

-3 قيمة التسارع في مطال $\bar{x} = 10cm = 10\times10^{-2} = 10^{-1}m$

$\bar{a} = -\omega_0^2.\bar{x} = -\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2\times10^{-1} \Longrightarrow \boxed{\bar{a} = -6.25\,m.s^{-2}}$

-4 الطاقة الكامنة المرونية في موضع $\bar{x} = -4cm = -4\times10^{-2}m$

$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times62.5\times(-4\times10^{-2})^2 \Longrightarrow \boxed{E_P = 5\times10^{-2}\,J}$

- الطاقة الميكانيكية (الكلية): $E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2}\times62.5(12\times10^{-2})^2 \Longrightarrow \boxed{E_{tot} = 45\times10^{-2}J}$

- الطاقة الحركية في موضع مطاله $\bar{x}$هي حاصل طرح الطاقة الكامنة المرونية من الطاقة الميكانيكية

$E_k = E_{tot} - E_P = 45\times10^{-2} - 5\times10^{-2} = 40\times10^{-2} \Longrightarrow \boxed{E_k = 4\times10^{-1}J}$

المسألة الرابعة (درس) :

تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثبت صلابته $k = 16\,N.m^{-1}$ بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $1\,s$، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1\,m$، و بفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب.

المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.
2. عيّن لحظتي المرور الأول و الثالث للكرة في موضع التوازن.
3. احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = +0.1\,m$.
4. احسب كتلة الكرة.

الحل :

-1 التابع الزمني لمطال الحركة: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ ، ثوابت الحركة $(X_{max}\,,\omega_0\,,\bar{\varphi})$

$X_{max} = 0.1m$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,rad.s^{-1}$

نعوض شروط البدء $\left(x = \frac{X_{max}}{2}m \text{ ، } t = 0\right)$ في التابع الزمني:

$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(0 + \bar{\varphi}) \Longrightarrow cos\bar{\varphi} = \frac{1}{2} \Longrightarrow (\bar{\varphi} = \frac{\pi}{3}rad$ أو $\bar{\varphi} = \frac{5\pi}{3}rad\,)$

$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

في اللحظة $(t = 0)$ السرعة سالبة : $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi})$

أما $\bar{\varphi} = +\frac{\pi}{3}$ **مقبول** يوافق شروط البدء يحقق سرعة سالبة $\bar{v} = -\omega_0 X_m \sin\left(+\frac{\pi}{3}\right) < 0$

أو $\bar{\varphi} = +\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ **مرفوض** يخالف شروط البدء يحقق سرعة موجبة $\bar{v} = -\omega_0 X_m \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني: $\boxed{\bar{x} = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)}$

2- تعيين لحظتي المرور الأول و الثالث للكرة في موضع التوازن $\boxed{\bar{x} = 0}$: أي نعدم تابع المطال

$$0 = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \xrightarrow{\text{نعزل } t} 2\pi t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \xrightarrow{\text{نقسم الطرفين على } \pi} 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k \xrightarrow{\text{نقسم الطرفين على } 2}$$

$$\xrightarrow{\text{نوحد المقامات}} \boxed{t = \frac{1}{12} + \frac{k}{2}}$$

(**المرور الأول:** $k = 0$ $\quad t = \frac{1}{12}s$) (**المرور الثاني:** $k = 1$ $\quad t = \frac{7}{12}s$)

(**المرور الثالث:** $k = 2$ $\quad t = \frac{13}{12}s$)

3- شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $\bar{x} = +0.1m$: $F = |-k\bar{x}| = |16 \times 10^{-1}| \Rightarrow \boxed{F = 1.6\ N}$

4- كتلة الكرة: من علاقة الدور بعد تربيعها $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{k(T_0)^2}{4\pi^2} = \frac{16\times 1}{40} \Rightarrow \boxed{m = 0.4\ kg}$

المسألة (1) عامة:

تشكل هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن، مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10 N.m^{-1}$ يُثبت إلى سقف من إحدى نهايتيه، ويربط بنهايته الثانية جسم كتلته $m = 0.1\ kg$ فإذا علمت أنه بدء الزمن كان الجسم في الموضع $x = 0$ وهو يتحرك بالاتجاه السالب بسرعة $v = -3\ m.s^{-1}$، **المطلوب:**

1- احسب نبض الحركة.
2- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة.
3- احسب شدة قوة الإرجاع عندما $x = 3\ cm$.

الحل:

1. حساب نبض الحركة: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 10\ rad.s^{-1}}$

2. التابع الزمني لمطال الحركة: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ ، ثوابت الحركة $(X_{max}, \omega_0, \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = 10\ rad.s^{-1}$$

تعيين X_{max} من السرعة العظمى: (في موضع التوازن تكون السرعة عظمى)

$$v_{max} = -\omega_0 X_{max} \Rightarrow -3 = -10X_{max} \Rightarrow X_{max} = 0.3\ m$$

نعوض شروط البدء $(x = 0 ، t = 0)$ في التابع الزمني:

$$0 = X_{max}\cos(0+\bar{\varphi}) \Longrightarrow cos\bar{\varphi} = 0 \Longrightarrow (\bar{\varphi} = \frac{3\pi}{2}rad \text{ أو } \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}rad\ )$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

في اللحظة $(t = 0)$ السرعة سالبة : $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi})$

إما $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}rad$ **مقبول** يوافق شروط البدء يحقق سرعة سالبة $\bar{v} = -\omega_0 X_m \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

أو $\bar{\varphi} = +\frac{3\pi}{2}rad = -\frac{\pi}{2}rad$ **مرفوض** يخالف شروط البدء يحقق سرعة موجبة $\bar{v} = -\omega_0 X_m \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني: $\boxed{\bar{x} = 0.3\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$

3. شدة قوة الإرجاع: $F = ?\ ,\ x = 3\times10^{-2}m$

$$F = |-k\bar{x}|$$

$$F = |-10\times3\times10^{-2}|$$

$$\boxed{F = 0.3\ N}$$

المسألة (2) عامة: تهتز نقطة مادية كتلتها $0.5\ kg$ لحركة توافقية بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولية وبدور $4s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8\ cm$ فإذا علمت أن النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحركة بالاتجاه السالب، **والمطلوب:**

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.
2. عين لحظتي المرور الأول و الثالث في مركز الاهتزاز.
3. عين الموضع التي تكون فيه شدة محصلة القوى عظمى واحسب قيمتها وحدد موضعاً تنعدم فيه شدة هذه المحصلة.
4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض وهل تتغير هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلقة؟
5. احسب الكتلة التي تجعل الدور الخاص $1s$.

الحل :

1. التابع الزمني لمطال الحركة: $\bar{x} = X_{max}\,cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ ، ثوابت الحركة $(X_{max}\,, \omega_0\,, \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1} \quad ، \quad X_{max} = 8\times10^{-2}m$$

نعوض شروط البدء $\left(x = \frac{X_{max}}{2}m \text{ ، } t = 0\right)$ في التابع الزمني:

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos(0+\bar{\varphi}) \Longrightarrow cos\bar{\varphi} = \frac{1}{2} \Longrightarrow (\bar{\varphi} = \frac{5\pi}{3}rad \text{ أو } \bar{\varphi} = \frac{\pi}{3}rad\ )$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

في اللحظة $(t = 0)$ السرعة سالبة : $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\bar{\varphi})$

إما $\bar{\varphi} = +\frac{\pi}{3}$ **مقبول** يوافق شروط البدء يحقق سرعة سالبة $\bar{v} = -\omega_0 X_m \sin\left(+\frac{\pi}{3}\right) < 0$

أو $\bar{\varphi} = +\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ **مرفوض** يخالف شروط البدء يحقق سرعة موجبة $\bar{v} = -\omega_0 X_m \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0$

نعوض ثوابت الحركة في التابع الزمني: $\boxed{\bar{x} = 0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)}$

2. $\boxed{\text{تعيين لحظتي المرور الأول و الثالث للكرة في موضع التوازن}}$ $\boxed{: \bar{x} = 0}$ أي نعدم تابع المطال

$$0 = 0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \xRightarrow{\text{نعزل } t} \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \xRightarrow{\text{نقسم الطرفين على } \pi} \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k \xRightarrow{\text{نضرب } 2}$$

$$\xRightarrow{\text{نوحد المقامات}} \boxed{t = \frac{1}{3} + 2k}$$

(المرور الأول: $k = 0$ $\boxed{t = \frac{1}{3}s}$) (**المرور الثاني:** $k = 1$) **(المرور الثالث:** $k = 2$ $\boxed{t = \frac{13}{3}s}$)

3. شدة محصلة القوى هي نفسها شدة قوة الإرجاع $F = m.a$

- $F = F_{max}$ عندما $a = a_{max} = \omega_0^2 X_{max}$ وذلك في الوضعين الطرفيين

حساب شدة محصلة القوى العظمى : $F_{max} = m\omega_0^2 X_{max}$

$$F_{max} = 0.5 \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times 8 \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-1} \times \frac{10}{4} \times 8 \times 10^{-2} \Rightarrow \boxed{F_{max} = 0.1\ N}$$

$F = 0$ معدومة عند المرور بمركز الاهتزاز حيث $x = 0$

4. حساب ثابت صلابة النابض : $k = m.\omega_0^2$

$$k = 5 \times 10^{-1} \times \frac{10}{4} \Rightarrow \boxed{k = \frac{5}{4} m.N^{-1}}$$

5. لا تتغير قيمة ثابت صلابة النابض باستبدال الكتلة المعلقة لأنه لاعلاقة ل k بالكتلة المعلقة m

حساب m' من علاقة الدور T_0' بعد تربيعها وعزل m'

$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}$ بالتربيع : $m' = \frac{(T_0')^2 k}{4\pi^2} = \frac{(1)^2 \times \frac{5}{4}}{4 \times 10} \Rightarrow \boxed{m' = \frac{1}{32} kg}$