اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

1) $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$\{x / x \leq 2, x \in Z\}$

2) $-6.5 < x \leq 3$

$\{x / -6.5 < x \leq 3, x \in R\}$

$(-6.5, 3]$

3) $x < 3$

$\{x / x < 3, x \in R\}$

$(-\infty, 3)$

4) $x < 0$ أو $x > 8$

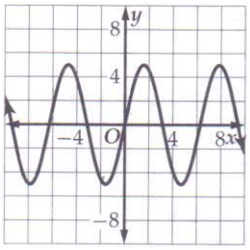
$\{x / x < 0$ أو $x > 8, x \in R\}$

$(8, \infty) \cup (-\infty, 0)$

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

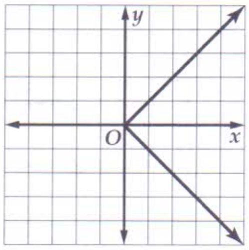
5) تمثل x رقم لوحة السيارة و y سنة صنع السيارة ونوعها. دالة

6)



دالة

7)



ليست دالة

8) $-x + y = 3x$ دالة

9) $x = 5(y-1)^2$ ليست دالة

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

10) $h(x) = x^2 - 8x + 1$

a) $h(-1)$ $\quad h(-1) = 10$

b) $h(2x)$ $\quad h(2x) = 4x^2 - 16x + 1$

c) $h(x+8)$ $\quad h(x+8) = x^2 + 8x + 1$

11) $f(a) = -3\sqrt{a^2 + 9}$

a) $f(4)$ $\quad f(4) = 15$

b) $f(3a)$ $\quad f(3a) = -9\sqrt{a^2+1}$

c) $f(a+1)$ $\quad f(a+1) = -3\sqrt{a^2+2a+10}$

حدّد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

12) $g(x) = \sqrt{-3x - 2}$

$\{x / x \leq \frac{-2}{3}, x \in R\}$

13) $h(t) = \dfrac{2t - 6}{t^2 + 6t + 9}$

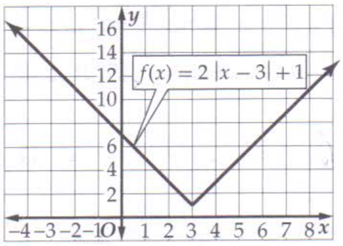
$\{t / t \neq -3, t \in R\}$

14) أوجد $f(-4)$ و $f(11)$ للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 16, & x < -2 \\ \sqrt{x - 2}, & -2 < x \leq 11 \\ -75, & x > 11 \end{cases}$$

$64, 3$

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوالّ والعلاقات

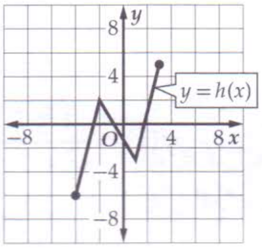


1) استعمل التمثيل البياني المجاور لتقدير قيمة $f(-2.5), f(1), f(7)$، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

$f(7) = 9$, $f(1) = 5$ $f(-2.5) = 12$

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها.

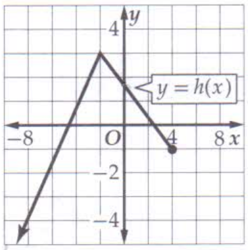
2)



المجال = $[-4, 3]$

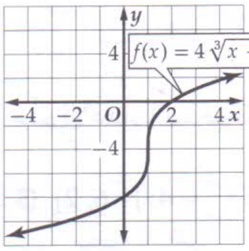
المدى = $[-6, 5]$

3)



المجال = $(-\infty, 4]$

المدى = $(-\infty, 3]$



4) استعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد المقطع y للدالة f وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.

$y = f(0) = -8$ ، صفر الدالة 2

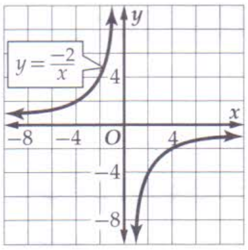
$y = f(0) = 4\sqrt[3]{0-1} - 4 = -4-4 = -8$

$4\sqrt[3]{x-1} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = 1$

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1+1 = 2$

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. وعزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقق منها جبريًّا:

5)



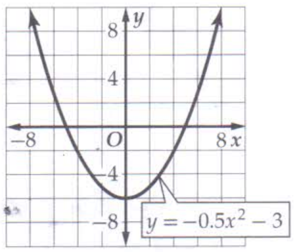
متماثل حول نقطة الأصل

$-y = \frac{+2}{+x}$

$-y = \frac{2}{x}$

$y = \frac{-2}{x}$

6)



متماثل حول المحور y

$y = -0.5(-x)^2 - 3$

$y = -0.5x^2 - 3$

7) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ بيانيًّا، ثم حلِّل منحناها؛ لتحدد إن كانت الدالة زوجيةً أم فرديةً أم غير ذلك. ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجيةً أو فرديةً فصِف تماثل منحناها.

زوجية متماثلة حول المحور y

1-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة أم لا عند قيمة x المعطاة، وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

1) $f(x) = -\dfrac{2}{3x^2}; x = -1$

نعم متصلة ومعرفة عند $x=-1$
دالة تقترب من $-\frac{2}{3}$ عندما
x تقترب من -1
من الجهتين $f(-1) = -\frac{2}{3}$

2) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+4}; x = -4$

غير متصلة نوع الاتصال
لانهائي عند $x=-4$

3) $f(x) = x^3 - 2x + 2; x = 1$

نعم متصلة ، دالة معرفة
عند $x=1$ دالة تقترب من 1
عندما x تقترب من 1 من الجهتين
اي $f(1) = 1$

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3x+2};\ x = -1, x = -2$

غير متصلة ، للدالة نقطة عدم اتصال
قابل للإزالة عند $x=-1$ وعدم اتصال
لانهائي عند $x=-2$

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

5) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4; [-6, 2]$

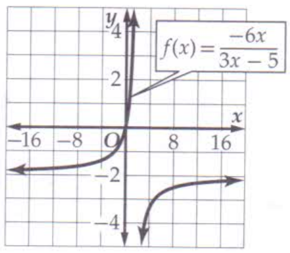
$[-5,-4]$ ، $[-1,0]$ و $[0,1]$

6) $g(x) = x^4 + 10x - 6; [-3, 2]$

$[-1,-2]$ و $[0,1]$

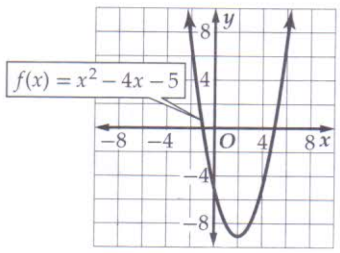
استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين؛ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًا:

7)



$\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

8)



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

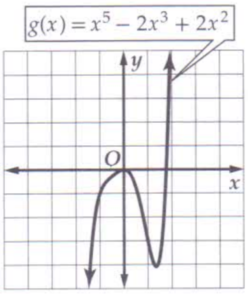
9) **إلكترونيات:** يوضح قانون أوم العلاقة بين المقاومة R ، وفرق الجهد E ، وشدة التيار I في دائرة كهربائية، وتُعطى هذه العلاقة بالقاعدة $R = \frac{E}{I}$. فإذا كان فرق الجهد ثابتًا، وتزايدت شدة التيار، فماذا يحدث للمقاومة؟

تتناقص المقاومة لتقترب من الصفر

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

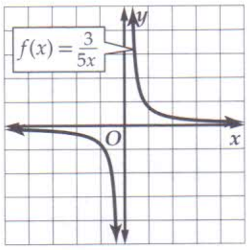
استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين ؛ لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا:

1)



متزايدة في (∞-، ٠)
ومتناقصة في (٠، 1.5)
ومتزايدة
(1.5، ∞)

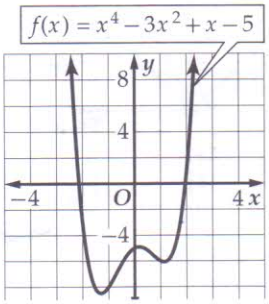
2)



متناقصة في الفترة
(٠، ∞-) ، (∞، ٠)

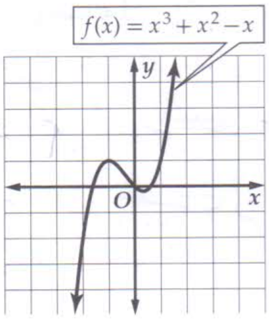
قدِّر قيم x التي يكون لكل من الدالتين الآتيتين عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

3)



* صغرى محلية قيمتها -8.5 عند x = -1.5
* عظمى محلية قيمتها -5 عند x = 0
* صغرى محلية قيمتها -6 عند x = 1

4)



* عظمى قيمتها 1 عند x = -1
* صغرى وقيمتها 0 عند x = 0.5

5) الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة للدالة: $h(x) = x^5 - 6x + 1$. وحدّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

قيمة عظمى محلية تقدر بـ 6.02 عند x = -1.05 ، وقيمة صغرى تقدر بـ -4.12 عند x = 1.05

أوجد متوسط معدل التغير لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

6) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5; [-4, -2]$

الإجابة -132

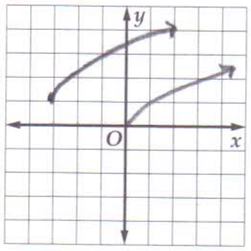
7) $g(x) = -3x^3 - 4x; [2, 6]$ الإجابة -160

8) فيزياء: إذا كان ارتفاع صاروخ $h(t)$ بالقدم بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا يُعطَى بالقاعدة $h(t) = -16t^2 + 32t + 0.5$ فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ.

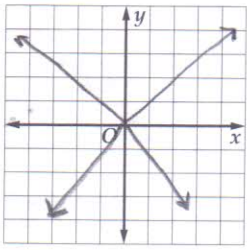
16.5 ft

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

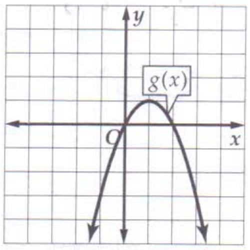
1) استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$؛ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$ بيانيًّا .



2) استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$؛ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = -|2x|$ بيانيًّا.



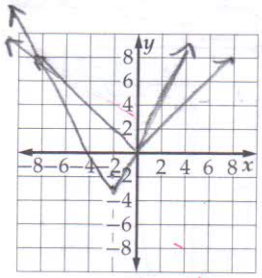
3) صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى $g(x)$ في التمثيل المجاور، ثم اكتب معادلة $g(x)$.



منحنى الدالة g(x) هو انعكاس لمنحنى f(x) حول المحور x ثم انسحاب وحدة لليمين ووحدة الى الأعلى

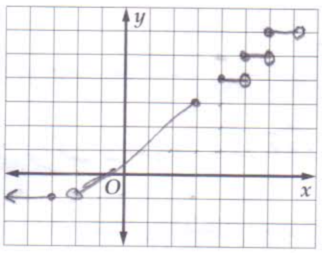
$g(x) = -(x-1)^2+1$

4) عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = 2|x+2| - 3$. ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثّلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

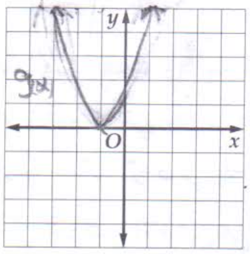


منحنى الدالة g(x) هو تضييق رأسي لمنحنى f(x)=|x| ثم انسحاب وحدتين الى اليسار و 3 وحدات الى ~~الأعلى~~ الأسفل

5) مثّل الدالة بيانيًّا $f(x) = \begin{cases} -1\,, & x \le -3 \\ 1+x\,, & -2 < x \le 2 \\ [\![x]\!]\,, & 4 \le x \le 6 \end{cases}$.



6) استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3$؛ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \left|(x+1)^3\right|$



العمليات على الدوال وتركيب دالتين

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كلٍّ مما يأتي، وحدّد مجال كلٍّ من الدوال الناتجة:

1) $f(x) = 2x^2 + 8, g(x) = 5x - 6$

$(f+g)(x) = 2x^2+5x+2$ ، والمجال: $(-\infty, \infty)$

$(f-g)(x) = 2x^2-5x+4$ ، والمجال: $(-\infty, \infty)$

$(f\cdot g)(x) = 10x^3-12x^2+40x-48$ ، والمجال: $(-\infty, \infty)$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2+8}{5x-6}$ ، المجال: $\{x / x \neq \frac{6}{5}, x \in R\}$

2) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt{x+1}$

$(f+g)(x) = x^3 + \sqrt{x+1}$ ، المجال $= [-1, \infty)$

$(f-g)(x) = x^3 - \sqrt{x+1}$ ، المجال $= [-1, \infty)$

$(f\cdot g)(x) = x^3\sqrt{x+1}$ ، والمجال $= [-1, \infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}$ والمجال $= [-1, \infty)$

أوجد $[f\circ g](x), [g\circ f](x), [f\circ g](3)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

3) $f(x) = x + 5, g(x) = x - 3$

$(f\circ g)(x) = x+2$ ، $(f\circ g)(3) = 5$

$(g\circ f)(x) = x+2$

4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, g(x) = 3x$

$(f\circ g)(x) = 54x^3-27x^2+1$ ، $(f\circ g)(3) = 1216$

$(g\circ f)(x) = 6x^3-9x^2+3$

5) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, g(x) = 2x - 3$

$(f\circ g)(x) = 8x^2-34x$

$(g\circ f)(x) = 4x^2-10x-1$

$(f\circ g)(3) = 4$

6) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5, g(x) = 2x - 1$

$(f\circ g)(x) = 12x^2-16x+10$

$(g\circ f)(x) = 6x^2-4x+9$

$(f\circ g)(3) = 70$

حدّد مجال $f\circ g$، ثم أوجد $f\circ g$ لكل زوج من الدوال في السؤالين الآتيين:

7) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = 3x$

$(f\circ g)(x) = \sqrt{3x-2}$

المجال $= \{x | x \geq \frac{2}{3}, x \in R\}$

8) $f(x) = \frac{1}{x-8}$, $g(x) = x^2 + 5$

$(f\circ g)(x) = \frac{1}{x^2-3}$

المجال $= \{x | x \neq \pm\sqrt{3}, x \in R\}$

أوجد دالتين f و g في كلٍّ من السؤالين 9, 10 ، بحيث يكون $h(x) = [f\circ g](x)$. على ألا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$

9) $h(x) = \sqrt{2x-6} - 1$

إجابة ممكنة:

$f(x) = \sqrt{x} - 1, g(x) = 2x - 6$

10) $h(x) = \frac{1}{3x+3}$

إجابة ممكنة:

$f(x) = \frac{1}{3x}, g(x) = x+1$

11) **مطعم:** دخل ثلاثة أشخاص مطعمًا، وطلب كلٌّ منهم الوجبة نفسها. إذا تقاضى صاحب المطعم 18% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، فاكتب الدوال الثلاث على النحو الآتي: الأولى تمثّل تكلفة الوجبات الثلاث قبل استيفاء بدل الخدمة، والثانية تكلفة الوجبة بعد استيفاء الخدمة، وأما الثالثة فتمثّل تركيب الدالتين الذي يعطي تكلفة الوجبات الثلاث متضمنة بدل الخدمة.

$f(x) = 3x$ ، حيث تكلفة الوجبة الواحدة ، $g(x) = 1.18x$ ، $g(f(x)) = 3.54x$

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

1) $f(x) = 3|x| + 2$ لا

2) $f(x) = -\sqrt{x+3} - 1$ نعم

3) $f(x) = x^5 + 5x^3$ نعم

4) $f(x) = \frac{x}{5} + 9$ نعم

في كلٍّ مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب: غير موجودة.

5) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ $f^{-1}(x) = x^3 + 1$

6) $f(x) = \frac{2x-1}{x+7}$ $f^{-1}(x) = \frac{7x+1}{2-x}, x \neq 2$

7) $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$ غير موجودة

8) $f(x) = \sqrt{x-2}$ $f^{-1}(x) = x^2 + 2;\ x \geq 0$

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

9) $f(x) = 2x + 3;\ g(x) = \frac{x-3}{2}$

$f[g(x)] = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 = x$

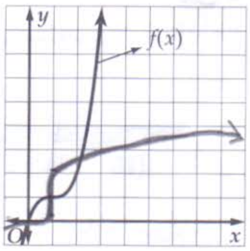
$g[f(x)] = \frac{2x+3-3}{2} = x$

10) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 6;\ x \geq 0;\ g(x) = \sqrt{2x+12}$

$f[g(x)] = \frac{(\sqrt{2x+12})^2}{2} - 6 = x$

$g[f(x)] = \sqrt{2\left(\frac{x^2}{2} - 6\right) + 12} = x$

11) استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل أدناه لتمثيل $f^{-1}(x)$



12) **مكافحة الحرائق:** تستعمل الطائرات الماء في إطفاء حرائق الغابات. ويعطى الزمن الذي يستغرقه الماء للوصول إلى الأرض بالثواني بالدالة $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{4}$، حيث h ارتفاع الطائرة بالقدم. أوجد الدالة العكسية لها. وإذا استغرق الماء 8 ثوانٍ للوصول إلى الأرض، فأوجد ارتفاع الطائرة.

$f^{-1}(x) = 16x^2;\ 1024ft$