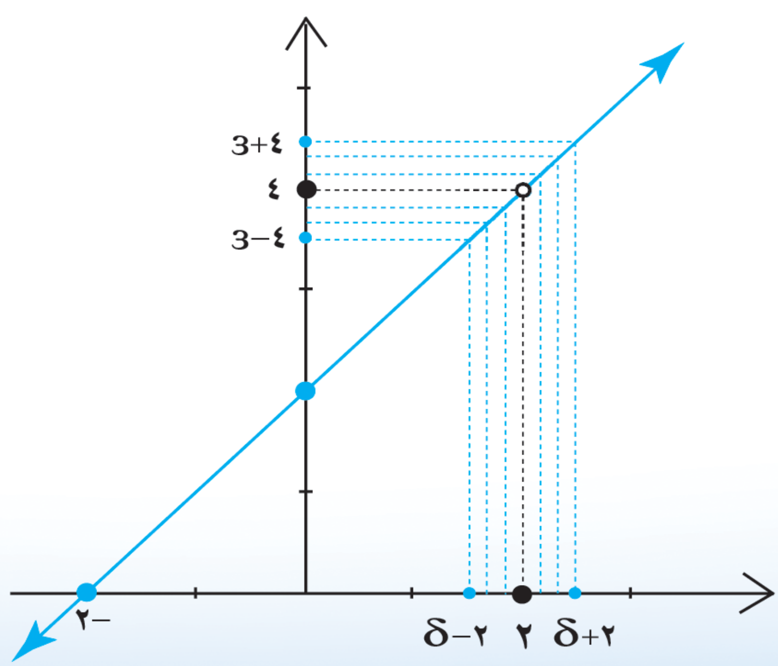
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي (القسم العلمي)

الجزء الأول



١٤٣٦هـ/ ٢٠١٥م

إيماناً منا بأهمية المعرفة ومواكبة لعصر التكنولوجيا تتشرف الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني بخدمة أبنائنا الطلاب والطالبات في ربوع الوطن الحبيب بهذا العمل آملين أن ينال رضا الجميع

فكرة وإعداد

أ. عادل علي عبدالله البقع

مساعد

أ. زينب محمود السمان

مراجعة وتدقيق

أ. ميسونة العبيدي

أ. فاطمة العجل

أ. أفراح الحزمي

متابعة

أمين الإدريسي

إشراف مدير عام

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

أ. محمد عبده الصرمي

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي (القسم العلمي)

(الجزء الأول)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

د. أمة الإله علي حُمد الحوري. أ. سالمين محمد باسلوم (منسقاً).
د. عوض حسين البكري. د. محمد علي مرشد.
د. محمد رشاد الكوري. أ. يحيى بكار مصفر.
د. محمد حسن عبده المسوري. أ. عبدالباري طه حيدر.
د. عبدالله سالم بن شحنة. أ. نصر محمد بدر.
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري. أ. جميلة إبراهيم الرازحي.
د. علي شاهر القرشي. أ. عادل علي مقبل البنا.
أ. مريم عبدالجبار سلمان. أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.
أ. يحيى محمد الكنز.

فريق المراجعة:

أ/ أحمد عبده الصغير الدبعي. أ/ سميرة حسن فضائل.
أ/ زايد مقبل عبدالخالق الأغبري. أ/ محمد صالح الخضر.
أ/ خالد محمد القلذي.

تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.

تدقيق: د/ أمة الإله علي حُمد الحوري.

إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

الإخراج الفني

صف وتصميم وإخراج : جلال سلطان علي.
إدخال التصويبات : أحمد محمد علي العوامي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي ... رددِيه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ ... وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي ... أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمَّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس ... اُخْلُدِي خَافِقَةً في كل قِمَّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي ... واذخُريني لَكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبِّي أُمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ علي حسين الحيمي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ.د/ صالح عوض عرم.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ شكيب محمد باجرش.
د/ عبدالله لملس.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ منصور علي مقبل.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

في اطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم، وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات، وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم، والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة، ومدروسة؛ لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي ، وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي – القسم العلمي » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين: الأساسية (١–٩)، والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك، وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ، ومراعاة للفروق الفردية، وتم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد؛ حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة؛ ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .

واتساقاً مع كتاب الصف الأول الثانوي والمواد المرافقة له ؛ فإن هذا الكتاب وما يرافقه من كتاب التمارين، ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما يحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء إستراتيجيات تهدف إلى تقديم الأجود (مادة وطريقة؛ فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا ذووالعلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

المحتويات

١ : ١ مراجعة وتمهيد

تعرفت سابقاً على العملية الثنائية ، والنظام الرياضي ذي العملية الواحدة ، وكمثال على ذلك درست بنية الزمرة وخواصها الأساسية .

تذكّر

يسمى الزوج المرتب (سـ ، ⁕) نظاماً رياضياً ذا عملية واحدة ، إذا كانت سـ مجموعة غير خالية والعملية ⁕ ثنائية (مغلقة) على سـ .

تدريب (١ – ١)

بين أيّاً مما يلي نظاماً رياضياً ذا عملية واحدة :

(ط ، +) ، (صـ ، ×) ، (ن ، +) ، (ط ، –) ، (صـ ، ÷) .

مثال (١ – ١)

بيّن فيما إذا كان كل من (ح ، ⁕) ، (صـ ، ⁕) نظاماً رياضياً ذا عملية واحدة . حيث العملية ⁕ معرفة كما يلي :

$$\text{س} \ast \text{ص} = \frac{\text{س ص}}{٢} \quad ; \quad \forall \ \text{س ، ص} \in \text{ح}$$

الحـل :

إذا كان س ، ص ∈ ح ، فإن س ص ∈ ح وبالتالي $\frac{\text{س ص}}{٢}$ ∈ ح ، وعليه فإن (ح ، ⁕) نظام رياضي ذو عملية واحدة . أما (صـ، ⁕) ليس نظاماً رياضياً ذا عملية واحدة ؛ لأن العملية ⁕ ليست مغلقة على صـ

إذ أن ١ ، ٣ ∈ صـ ، ١ ⁕ ٣ = $\frac{١ \times ٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$ ∉ صـ .

تذكّر

النظام الرياضي (سـ ، ⁕) يسمى زمرة ، إذا تحققت فيه الشروط الآتية :

١ – الخاصية التجميعية ؛ أي أن : أ ⁕ (ب ⁕ جـ) = (أ ⁕ ب) ⁕ جـ ؛ ∀ أ ، ب ، جـ ∈ سـ.

٢ – وجود العنصر المحايد ؛ أي أن : ∃ و ∈ س ، بحيث ا ∗ و = و ∗ ا = ا ؛ ∀ ا ∈ س
يسمى و عنصراً محايداً .
٣ – وجود النظير ، أي أن : ∀ ا ∈ س ، ∃ اَ ∈ س، بحيث ا ∗ اَ = اَ ∗ ا = و . يسمى اَ نظيراً للعنصر ا .
وإذا كانت العملية ∗ تبديلية ، سميت الزمرة (س ، ∗) زمرة تبديلية .

تدريب (١ – ٢)

بين أياً من الأنظمة الآتية يمثل زمرة، مع ذكر السبب :
(ط ، +) ، (صه ، +) ، (ح ، ×) ، (ح∗ ، ×) ، وإذا كانت أي منها زمرة فهل هي تبديلية؟

تـذكّـر

صهد = { ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . ، د – ١ } ،
صه∗د = { ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، د – ١ } .
نرمز لعملية الجمع على صهد بالرمز ⊕ ، وتعرف كما يلي :
ا ⊕ ب = باقي قسمة (ا + ب) على د .
نرمز لعملية الضرب على صهد بالرمز ⊙ وتعرف كما يلي :
ا ⊙ ب = باقي قسمة (ا ب) على د .

فمثلاً : صه٣ = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، صه∗٣ = { ١ ، ٢ } ،
صه٦ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، صه∗٦ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ومن تعريف العملية ⊕ على صه٦ مثلاً نجد أن :
٢ ⊕ ٣ = ٥ ، ٤ ⊕ ٢ = ٠ ، ٥ ⊕ ٣ = ٢
ومن تعريف العملية ⊙ على صه∗٥ مثلاً نجد أن :
٢ ⊙ ٣ = ١ ، ٣ ⊙ ٤ = ٢ ، ٤ ⊙ ٤ = ١

تدريب (١ – ٣)

بيّن أن (صه٤ ، ⊕) زمرة بينما (صه∗٤ ، ⊙) ليست زمرة .

مثال (١ – ٢)

برهن أن (صهد ، ⊕) زمرة تبديلية .

البرهان :

ليكن س ، ص ∈ ص~ن~ ، ومن تعريف العملية ⊕ نجد أن :

س ⊕ ص = باقي قسمة (س + ص) على ن ، وهو عدد ر بحيث ٠ ≤ ر < ن ، وهو ينتمي إلى ص~ن~ أي أن : س ⊕ ص = ر ∈ ص~ن~ .

الآن سنثبت توفر شروط الزمرة التبديلية في النظام الرياضي (ص~ن~ ، ⊕) على النحو التالي :

١ – لإثبات أن ⊕ تجميعية ، علينا أن نثبت أنه لكل س ، ص ، ع ∈ ص~ن~ :

(س ⊕ ص) ⊕ ع = س ⊕ (ص ⊕ ع)

نفرض أن

س ⊕ ص = ر~١~ أي أن س + ص = هـ~١~ ن + ر~١~ ، ر~١~ ، هـ~١~ ∈ ص~+~ .

ر~١~ ⊕ ع = ر~٢~ أي أن ر~١~ + ع = هـ~٢~ ن + ر~٢~ ، ر~٢~ ، هـ~٢~ ∈ ص~+~ .

فيكون (س ⊕ ص) ⊕ ع = ر~١~ ⊕ ع = ر~٢~ . أي أن : ر~١~ + ع = هـ~٢~ ن + ر~٢~ .

أي أن : س + ص + ع = هـ~١~ ن + ر~١~ + ع = هـ~١~ ن + هـ~٢~ ن + ر~٢~ = (هـ~١~ + هـ~٢~) ن + ر~٢~ .

أي أن : (س ⊕ ص) ⊕ ع = باقي قسمة (س + ص + ع) على ن .

بالطريقة نفسها يمكن إثبات أن :

س ⊕ (ص ⊕ ع) = باقي قسمة (س + ص + ع) على ن .

٢ – لهذه العملية عنصر محايد هو الصفر ٠ لأنه مهما كان س ∈ ص~ن~ ، فإن :

٠ ⊕ س = باقي قسمة (٠ + س) على ن .

= باقي قسمة (س + ٠) على ن .

= باقي قسمة س على ن .

= س .

أي أن : ٠ ⊕ س = س ⊕ ٠ = س .

٣ – لكل عنصر س ∈ ص~ن~ نظير بالنسبة للعملية ⊕ هو (ن – س) ∈ ص~ن~ .

ذلك لأن : س ⊕ (ن – س) = باقي قسمة (س + ن – س) على ن .

= باقي قسمة (ن – س + س) على ن = باقي قسمة ن على ن = صفر (العنصر المحايد) .

أي أن : س ⊕ (ن – س) = (ن – س) ⊕ س = ٠

٤ – س ⊕ ص = باقي قسمة (س + ص) على ن .

= باقي قسمة (ص + س) على ن (لأن + تبديلية على ص)

= ص ⊕ س . أي أن ⊕ تبديلية .

مما سبق نستنتج أن : (ص~ن~ ، ⊕) زمرة تبديلية .

مثال (١ – ٣)

بين أياً من (ص٥* ، ⊙) ، (ص٩* ، ⊙) يشكل زمرة .

الحـــل :

بما أن كل من ص٥* ، ص٩* مجموعة منتهية ، فيمكن تمثيل العملية المعرفة على كل منهما بالجدولين التالين :

⊙	١	٢	٣	٤
١	١	٢	٣	٤
٢	٢	٤	١	٣
٣	٣	١	٤	٢
٤	٤	٣	٢	١

جدول (١ – ١)

⊙	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٢	٢	٤	٦	٨	١	٣	٥	٧
٣	٣	٦	٠	٣	٦	٠	٣	٦
٤	٤	٨	٣	٧	٢	٦	١	٥
٥	٥	١	٦	٢	٧	٣	٨	٤
٦	٦	٣	٠	٦	٣	٠	٦	٣
٧	٧	٥	٣	١	٨	٦	٤	٢
٨	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

جدول (١ – ٢)

من الجدول (١ – ١) الخاص بالنظام (ص٥* ، ⊙) نلاحظ ما يلي :

- ١ إن العملية ⊙ ثنائية على ص٥* ، يتضح ذلك من كون أي عنصر في الجدول هو عنصر من المجموعة ص٥* .
- ٢ (٢ ⊙ ٣) ⊙ ٤ = ١ ⊙ ٤ = ٤ ، ٢ ⊙ (٣ ⊙ ٤) = ٢ ⊙ ٢ = ٤
أي أن : (٢ ⊙ ٣) ⊙ ٤ = ٢ ⊙ (٣ ⊙ ٤) ، وبصورة عامة يمكن التحقق من أن :
(ا ⊙ ب) ⊙ جـ = ا ⊙ (ب ⊙ جـ) ∀ ا ، ب ، جـ ∈ ص٥* .
أي أن العملية ⊙ تجميعية .
- ٣ للنظام (ص٥* ، ⊙) عنصر محايد هو (١) يتضح ذلك من تطابق عناصر الصف الأول مع عناصر الصف الرئيس مع عناصر العمود الأول مع العمود الرئيس وتقاطعهما هو العنصر (١) .
- ٤ لكل عنصر من ص٥* نظير بالنسبة للعملية ⊙ ، نوضحها في الجدول التالي :

العنصر	١	٢	٣	٤
النظير	١	٣	٢	٤

مما سبق نستنتج أن ($ص_٥^*$ ، ⊙) زمرة .

من الجدول (١ – ٢) نلاحظ أن العملية ⊙ ليست ثنائية على $ص_٩^*$ ذلك لأن ٣ ⊙ ٣ = ٠ ∌ $ص_٩^*$ ،
وهذا يكفي للقول أن ($ص_٩^*$ ، ⊙) ليس نظاماً ، وبالتالي ليس زمرة .

تدريب (١ – ٤)

١) بين أن الزمرة ($ص_٥^*$ ، ⊙) تبديلية .

٢ – باستخدام فكرة البرهان في المثال (١ – ٢) برهن أن النظام ($ص_د^*$ ، ⊙) زمرة تبديلية ، حيث د عدد أولي .

تـذكـر

في الزمرة (س ، *) تتحقق الخواص الأساسية الآتية :

١ ▪ أ * ب = أ * جـ ⟺ ب = جـ
ب * أ = جـ * أ ⟺ ب = جـ . (خاصية الحذف)

٢ ▪ للمعادلة أ * س = ب حل وحيد هو س = أ َ * ب ، حيث أ َ نظير العنصر أ
للمعادلة س * أ = ب حل وحيد هو س = ب * أ َ .

٣ – العنصر المحايد في الزمرة وحيد .

٤ – نظير أي عنصر في الزمرة وحيد .

مثال (١ – ٤)

ليكن (ح* ، ○) نظاماً رياضياً تجميعياً ، حيث العملية ○ معرفة على ح* على النحو التالي :

$$أ ○ ب = \frac{أ ب}{٢} .$$

١ – بين أن (ح* ، ○) زمرة تبديلية .

٢ – حل المعادلة س ○ ٤ = ٢ في كل من الزمرة (ح* ، ○) ، والزمرة ($ص_٥^*$ ، ⊙)

الحـــل :

١ – بما أن النظام (ح* ، ○) هو نظام رياضي تجميعي ، فعلينا فقط إيجاد العنصر المحايـد ، نظير كل عنصر ، والتحقق من أن العملية ○ تبديلية على ح* :

أولاً : نوجد العنصر المحايد (و) .

نفرض أن و هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية ○ ، فنجد أن :

$$\forall \ أ \in ح^* : \quad أ ○ و = \frac{أ و}{٢} = \frac{و أ}{٢} = و ○ أ \quad \text{(من تعريف العملية ○) .}$$

$$\because \ \frac{أ و}{٢} = أ \quad \text{(تعريف العنصر المحايد)} \qquad \therefore \ و = ٢$$

∴ العنصر المحايد (و) = ٢ .

ثانياً : نوجد النظير (ا َ) .

نفرض أن ا َ هو نظير العنصر ا بالنسبة للعملية ○ ، فنجد أن :

ا ○ ا َ = $\frac{ا\ ا َ}{٢}$ = $\frac{ا َ\ ا}{٢}$ = ا َ ○ ا (من تعريف العملية ○) .

$\frac{ا\ ا َ}{٢}$ = ٢ (من تعريف النظير و حيث و = ٢) .

∴ ا ا َ = ٤ ، ا َ = $\frac{٤}{ا}$

ثالثاً : الخاصية التبديلية :

ا ○ ب = $\frac{ا\ ب}{٢}$ = $\frac{ب\ ا}{٢}$ = ب ○ ا ∴ ○ عملية تبديلية

مما سبق نستنتج أن : (ح* ، ○) زمرة تبديلية .

٢ – أولاً : في الزمرة (ح* ، ○)

س ○ ٤ = ٢ ⟸ س = ٢ ○ (٤) َ (خاصية ٢)

⟸ س = ٢ ○ $\frac{٤}{٤}$ (لأن ا َ = $\frac{٤}{ا}$)

= ٢ ○ ١ = $\frac{٢ \times ١}{٢}$ = ١ (من تعريف العملية ○)

∴ س = ١

ثانياً : في الزمرة (ص٥* ، ⊙) ، ومن الجدول (١–١) السابق نجد أن :

س ⊙ ٤ = ٢ ⟸ س = ٢ ⊙ (٤) َ

= ٢ ⊙ ٤ لماذا ؟

= ٣ لماذا ؟

النظام ذو العمليتين :

تعريف (١ – ١)

يسمى الثلاثي المرتب (س ، * ، ○) نظاماً رياضياً ذا عمليتين ، إذا كانت س مجموعة غير خالية ، وكل من العمليتين * ، ○ ثنائية على س .

مثال (١ – ٥)

لتكن س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ولنعرّف العمليتين * ، ○ على النحو التالي :

∀ س ، ص ∈ س ، س * ص = $\frac{س + ص}{٢}$ ، س ○ ص = س .

فهل (س ، ✻ ، ○) نظام رياضي ذو عمليتين ؟

الحــــل :

إن العملية ✻ ليست ثنائية على س ، لأن: ٢ ، ٤ ∈ س ، ٢ ✻ ٤ = $\frac{٢ + ٤}{٢}$ = ٣ ∉ س .

وعليه فإن (س ، ✻ ، ○) ليس نظاماً رياضياً ذا عمليتين ، [على الرغم من أن العملية ○ ثنائية على س] .

تعريف (١ - ٢)

ليكن (س ، ✻ ، ○) نظاماً رياضياً ذا عمليتين ، يقال أن العملية ○ تتوزع على العملية ✻ إذا كان لكل ا ، ب ، جـ ∈ س ، يتحقق :

ا ○ (ب ✻ جـ) = (ا ○ ب) ✻ (ا ○ جـ) ،

(ا ✻ ب) ○ جـ = (ا ○ جـ) ✻ (ب ○ جـ) .

مثال (١ - ٦)

ليكن (ص ، ✻ ، ○) نظاماً رياضياً ذا عمليتين معرفتين على النحو التالي :

∀ ا ، ب ∈ ص ، فإن ا ✻ ب = ا + ٢ب ،

وأن ا ○ ب = ٢ ا ب .

فبيّن أن العملية ○ تتوزع على العملية ✻ .

الحــــل :

بفرض أن : ا ، ب ، جـ ∈ ص ، فإن :

الطرف الأيمن = ا ○ (ب ✻ جـ) = ا ○ (ب + ٢ جـ) (تعريف العملية ✻)

= ٢ ا (ب + ٢جـ) (تعريف العملية ○)

= ٢ ا ب + ٤ ا جـ ، لماذا ؟

الطرف الأيسر = (ا ○ ب) ✻ (ا ○ جـ) = ٢ ا ب ✻ ٢ ا جـ

= ٢ ا ب + ٤ ا جـ

∴ ا ○ (ب ✻ جـ) = (ا ○ ب) ✻ (ا ○ جـ) ...... (١)

∵ العملية ○ تبديلية .

∴ (ا ✻ ب) ○ جـ = جـ ○ (ا ✻ ب)

= (جـ ○ ا) ✻ (جـ ○ ب) ، ∵ ○ عملية إبدالية .

= (ا ○ جـ) ✻ (ب ○ جـ)

أي أن (ا ✻ ب) ○ جـ = (ا ○ جـ) ✻ (ب ○ جـ) ...... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن العملية ○ تتوزع على العملية ✻ .

تدريب (١ – ٥)

في المثال (١ – ٦) بيّن أن العملية ✻ لا تتوزع على العملية ○ .

تمارين ومسائل (١ – ١)

[١] بين أيا من الأنظمة الرياضية التالية يمثل زمرة :

أ) (ح* ، +) ، ب) (ح* ، ×) ،

جـ) (صـ$_٨$ ، ⊕) ، د) (صـ$_{١١}$ ، ⊙) ،

هـ) (صـ$_{١١}^*$ ، ⊙) ، و) (صـ$_{١٢}^*$ ، ⊕) .

[٢] ليكن (ح* ، ○) نظاماً رياضياً تجميعياً ، حيث العملية ○ معرفة على ح* على النحو التالي :

س ○ ص = ٣ س ص ، ∀ س ، ص ∈ ح* ، فاثبت أن (ح* ، ○) زمرة تبديلية .

[٣] إذا كان كل من النظامين (صـ$_٦$ ، ⊕) ، (صـ$_٧^*$ ، ⊙) زمرة تبديلية .

فأوجد حلَّ :

أ) المعادلة : س ⊕ ٢ = ١ في الزمرة (صـ$_٦$ ، ⊕)

ب) المعادلة : ٦ ⊙ س = ٤ في الزمرة (صـ$_٧^*$ ، ⊙)

[٤] لنعرف على ≈* العمليتين ✻ ، ○ على النحو التالي :

س ✻ ص = س + ص – ١

س ○ ص = س + ص – س ص .

فأجب عما يلي :

أ) هل (≈* ، ✻ ، ○) نظام رياضي ذو عمليتين ؟

ب) هل العملية ✻ تتوزع على العملية ○ ؟

جـ) هل العملية ○ تتوزع على العملية ✻ ؟

[٥] ليكن (س ، ✻) نظاماً رياضياً ذا عملية ، وليكن ا ، ب ، جـ ∈ س بحيث : ا ✻ ب = ا ✻ جـ

فهل من الضروري أن يكون ب = جـ ؟ ولماذا ؟

[٦] في الزمر المنتهية يمكننا تمثيل عملياتها في الجداول . فسِّر لماذا لا يمكن أن يتكرر عنصر ما في سطر ، أو عمود واحد .

[٧] ليكن ({ ٩ } ، ٭) نظاماً رياضياً ذا عملية .

أ) أوجد ٩ ٭ ٩ ، ب) هل العملية ٭ تبديلية ؟

جـ) هل العملية ٭ تجميعية على {٩}؟ ، د) هل للنظام عنصر محايد ؟

هـ) هل النظام زمرة ؟

١ : ٢ الحلقة

عندما ندرس نظاماً رياضياً ذا عمليتين ، مثل (س ، ٭ ، ○) فإننا نجد شروطاً معينة تحقق على النظامين (س، ٭) و (س ، ○) المشتقين من النظام الأساسي وهما نظامان ذو عملية واحدة ، وبالتالي يتكوّن لدينا نوع آخر من الأنظمة الرياضية .

تعريف (١ – ٣)

النظام الرياضي (س ، ٭ ، ○) يسمى (حلقة) إذا تحققت الشروط التالية :

١ – (س ، ٭) زمرة تبديلية

٢ – العملية ○ تجميعية على س .

٣ – العملية ○ تتوزع على العملية ٭ .

مثال (١ – ٧)

بيّن أن النظام الرياضي (ص ، + ، ×) حلقة ، حيث + ، × هما عمليتا الجمع والضرب المعرفتان على مجموعة الأعداد الصحيحة ص .

الحـــل :

– نعلم أن النظام (ص ، +) زمرة تبديلية .

– العملية × تجميعية على ص .

– عملية الضرب توزيعية على عملية الجمع .

وبحسب التعريف (١ – ٣) ، فإن (ص ، + ، ×) حلقة .

تدريب ١–٦

بيّن أن :

١ – كلاًّ من النظامين (ط ، + ، ×) ، (ح ، + ، ×) حلقة .

٢ – النظام (ح* ، × ، +) ليس حلقة ، وضح السبب .

تعريف (١ – ٤)

في الحلقة (سہ ، ⁎ ، ○) :

١ – إذا كانت العملية ○ تبديلية . سميت الحلقة (حلقة تبديلية)

٢ – إذا كان للنظام (سہ ، ○) عنصر محايد . سميت الحلقة (حلقة ذات عنصر محايد أو حلقة واحدية) .

ملحوظات :

١ ■ نستخدم في هذه الوحدة الرمزين ⁎ ، ○ لعمليتين مجردتين نقوم بتعريفهما كل مرة حسب الموقف الذي يردان فيه ، ولقد جرت العادة في كثير من الكتب أن يستبدل الرمزان ⁎ ، ○ بالرمزين + ، × وهذا لا يعني أنهما عمليتا الجمع والضرب العاديتان، وإنما عمليتان مجردتان – أيضاً .

٢ ■ نرمز لنظير العنصر ا بالنسبة للعملية ⁎ بالرمز اَ ، ولنظير العنصر ا بالنسبة للعملية ○ بالرمز ا⁻¹ .

بناء على ما سبق يمكن إعادة تعريف الحلقة كما يلي :

تعريف (١ – ٥)

يقال إن النظام الرياضي (سہ ، ⁎ ، ○) حلقة إذا تحققت فيه الشروط التالية :

١) العملية ⁎ تجميعية : (ا ⁎ ب) ⁎ جـ = ا ⁎ (ب ⁎ جـ) ∀ ا ، ب ، جـ ∈ سہ .

٢) يوجد عنصر محايد (و) بالنسبة للعملية ⁎ رمزه (و) ، أي أن: ∃ و ∈ سہ بحيث :

و ⁎ ا = ا ⁎ و = ا ∀ ا ∈ سہ .

٣) يوجد نظير لكل عنصر من سہ . أي أن ∀ ا ∈ سہ ∃ اَ ∈ سہ

بحيث : ا ⁎ اَ = اَ ⁎ ا = و

٤) العملية ⁎ تبديلية : ا ⁎ ب = ب ⁎ ا ∀ ا ، ب ∈ سہ .

٥) العملية ○ تجميعية . أي أن : (ا ○ ب) ○ جـ = ا ○ (ب ○ جـ) ∀ ا ، ب ، جـ ∈ سہ .

٦) العملية ○ تتوزع على العملية ⁎ . أي أن : ا ○ (ب ⁎ جـ) = (ا ○ ب) ⁎ (ا ○ جـ) ،

(ب ⁎ جـ) ○ ا = (ب ○ ا) ⁎ (جـ ○ ا) .

مثال (١ – ٨)

لتكن سہ = ح × ح = {(س ، ص) : س ، ص ∈ ح } .

ولنعرف على سہ العمليتين ⁎ ، ○ كما يلي :

(س١ ، ص١) ⁎ (س٢ ، ص٢) = (س١ + س٢ ، ص١ + ص٢) ،

(س$_1$ ، ص$_1$) ○ (س$_2$ ، ص$_2$) = (س$_1$س$_2$ ، ص$_1$ص$_2$) .

بين أن (سـ ، * ، ○) حلقة .

الحـــــل :

من تعريف العمليتين * ، ○ نجد أنهما مغلقتان على سـ . [تحقَّق من ذلك] .

١ ■ العملية * تجميعية على سـ لأنه مهما كانت (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) ، (س$_3$ ، ص$_3$) $\in$ سـ فإن :

(س$_1$ ، ص$_1$) * [(س$_2$ ، ص$_2$) * (س$_3$ ، ص$_3$)] .

= (س$_1$ ، ص$_1$) * (س$_2$ + س$_3$ ، ص$_2$ + ص$_3$)

= (س$_1$ + (س$_2$ + س$_3$) ، ص$_1$ + (ص$_2$ + ص$_3$))

= ((س$_1$ + س$_2$) + س$_3$ ، (ص$_1$ + ص$_2$) + ص$_3$) لأن العملية + تبديلية على ح .

= [(س$_1$ ، ص$_1$) * (س$_2$ ، ص$_2$)] * (س$_3$ ، ص$_3$)

٢ ■ يوجد عنصر محايد بالنسبة للعملية * هو (٠ ، ٠) ، ذلك لأن لكل (س ، ص) $\in$ سـ ، فإن

(س ، ص) * (٠ ، ٠) = (س + ٠ ، ص + ٠) = (٠ + س ، ٠ + ص) = (س ، ص) .

٣ ■ لكل عنصر (س ، ص) $\in$ سـ نظير بالنسبة للعملية * هو العنصر (– س ، – ص) لأن :

(س ، ص) * (– س ، – ص) = (س + (– س) ، ص + (– ص))

= (– س + س ، – ص + ص) = (٠ ، ٠) .

٤ ■ إن العملية * تبديلية على سـ لأن العملية + تبديلية على ح ، وبذلك نرى أن (سـ ، *) زمرة تبديلية .

٥ ■ العملية ○ تجميعية على سـ لأن : مهما كانت (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$)، (س$_3$ ، ص$_3$) $\in$ سـ فإن :

(س$_1$ ، ص$_1$) ○ [(س$_2$ ، ص$_2$) ○ (س$_3$ ، ص$_3$)]

= (س$_1$ ، ص$_1$) ○ (س$_2$س$_3$ ، ص$_2$ص$_3$)

= (س$_1$س$_2$س$_3$ ، ص$_1$ص$_2$ص$_3$)

= (س$_1$س$_2$) س$_3$ ، (ص$_1$ص$_2$) ص$_3$)

= [(س$_1$ ، ص$_1$) ○ (س$_2$ ، ص$_2$)] ○ (س$_3$ ، ص$_3$) .

٦ ■ العملية ○ تتوزع على العملية * ، لأن : مهما كانت (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) ، (س$_3$ ، ص$_3$) من سـ فإن :

(س$_1$ ، ص$_1$) ○ [(س$_2$ ، ص$_2$) * (س$_3$ ، ص$_3$)]

= (س$_1$ ، ص$_1$) ○ (س$_2$ + س$_3$ ، ص$_2$ + ص$_3$)

= (س$_1$ (س$_2$ + س$_3$) ، ص$_1$ (ص$_2$ + ص$_3$))

= (س$_1$س$_2$ + س$_1$س$_3$ ، ص$_1$ص$_2$ + ص$_1$ص$_3$)

= (س$_1$س$_2$ ، ص$_1$ص$_2$) * (س$_1$س$_3$ ، ص$_1$ص$_3$)

= ((س$_1$ ، ص$_1$) ○ (س$_2$ ، ص$_2$)) * [(س$_1$ ، ص$_1$) ○ (س$_3$ ، ص$_3$)]

مما سبق نستنتج أن (سـ ، * ، ○) حلقة .

تدريب (١ – ٧)

بَيِّن أن الحلقة (سـ ، ※ ، ○) المعرفة في المثال (١ – ٨) تبديلية ذات عنصر محايد . أوجده .

الخصائص الأساسية للحلقة :

إذا كانت (سـ ، ※ ، ○) حلقة فذلك يقتضي أن تكون (سـ ، ※) زمرة وبالتالي، فإن جميع خصائص الزمرة تتحقق في الحلقة بالنسبة للعملية ※ .

وهناك أيضاً خواص أساسية أخرى للحلقة تعتمد على العمليتين ※ ، ○ معاً ، سنبرهن فيما يلي بعضاً منها :

خاصية (١) :

في أية حلقة (سـ ، ※ ، ○) : أ ○ و = و ○ أ = و ∀ أ ∈ سـ ، حيث و هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية ※ .

البرهان :

بما أن و هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية ※ فإن :

و = و ※ و

⟸ أ ○ و = أ ○ (و ※ و) = (أ ○ و) ※ (أ ○ و) (لأن ○ تتوزع على ※)

أي أن : أ ○ و = (أ ○ و) ※ (أ ○ و) .... (١)

من ناحية أخرى ، بما أن (أ ○ و) ∈ سـ ، إذن يوجد (أ ○ و)′ ∈ سـ ؛ بحيث

و = (أ ○ و) ※ (أ ○ و)′ .

= [(أ ○ و) ※ (أ ○ و)] ※ (أ ○ و)′ (من (١)) .

= (أ ○ و) ※ [(أ ○ و) ※ (أ ○ و)′] (لأن ※ تجميعية)

= (أ ○ و) ※ و (من خاصية النظير)

= أ ○ و أي أن : أ ○ و = و

وبطريقة مشابهة يمكن إثبات أنَّ : و ○ أ = و

خاصية (٢) :

في أية حلقة (سـ ، ※ ، ○) ولكل أ ، ب ، جـ ∈ سـ يتحقق ما يلي :

١ ■ أ′ ○ ب = (أ ○ ب)′ = أ ○ ب′

٢ ■ أ′ ○ ب′ = أ ○ ب

٣ ■ أ ○ (ب ※ جـ′) = (أ ○ ب) ※ (أ ○ جـ)′

٤ ■ (ب ※ جـ′) ○ أ = (ب ○ أ) ※ (جـ ○ أ)′

البرهان :

١) بما أن (سـ ، ※ ، ○) حلقة فإن (سـ ، ※) زمرة تبديلية

وعليه فإن : $\forall$ ا $\in$ س يوجد اَ $\in$ س ؛ بحيث و = ا ✻ اَ ؛ حيث و العنصر المحايد بالنسبة لـ ✻ .

⟸ و ○ ب = (ا ✻ اَ) ○ ب ومن الخاصية (١)

⟸ و = (ا ○ ب) ✻ (اَ ○ ب) = (اَ ○ ب) ✻ (ا ○ ب) (لأن ✻ تبديلية)

بمعنى أن العنصر (ا ○ ب) هو نظير العنصر (اَ ○ ب) بالنسبة للعملية ✻ .

إذن (ا ○ ب)َ = اَ ○ ب

وباسلوب مشابه يمكن إثبات أن (ا ○ ب)َ = ا ○ بَ وعليه يكون : اَ ○ ب = (ا ○ ب)َ = ا ○ بَ .

■٢ من (١) باستبدال ب بـ بَ واستخدام الخاصية (بَ)َ = ب ينتج المطلوب مباشرة .

■٣ ا ○ (ب ✻ جَ) ✻ (ا ○ جـ) = ا ○ [(ب ✻ جَ) ✻ جـ]

= ا ○ [ب ✻ (جـ ✻ جَ)] = ا ○ [ب ✻ و] = ا ○ ب .

أي أن ا ○ (ب ✻ جَ) ✻ (ا ○ جـ) = ا ○ ب

⟸ ا ○ (ب ✻ جَ) ✻ (ا ○ جـ) ✻ (ا ○ جـ)َ = (ا ○ ب) ✻ (ا ○ جـ)َ

⟸ ا ○ (ب ✻ جَ) ✻ و = (ا ○ ب) ✻ (ا ○ جـ)َ

∴ ا ○ (ب ✻ جَ) = (ا ○ ب) ✻ (ا ○ جـ)َ .

٤) تبرهن بالاسلوب نفسه .

إنّ ما برهناه من خصائص للحلقة إضافة إلى خصائص الزمرة ، يسمح لنا بالقول إن العمليات في الحلقة (س ، ✻ ، ○) تجرى (من الناحية الصورية) كما تجرى في الأنظمة العددية المألوفة (ص ، + ، ×) ، (ح ، + ، ×) لذلك نسمي العنصر المحايد بالنسبة للعملية الأولى ✻ العنصر الصفري ، وأي عنصر من س غير العنصر المحايد بالنسبة للعملية ✻ يسمى العنصر غير الصفري .

إن الحلقة (س ، ✻ ، ○) بصورتها العامة هي تعميم لحلقة الأعداد الصحيحة (ص ، + ، ×) ، فالخصائص السابقة جميعها للحلقة هي بالضرورة متحققة في حلقة الأعداد الصحيحة ، لكن العكس ليس بالضرورة صحيحا . فمثلا في الحلقة (ص ، + ، ×) إذا وجد عددان حاصل ضربهما مساويا للصفر ، فإن أحد العددين على الأقل يجب أن يكون مساويا للصفر ، هذه الخاصية ليست بالضرورة صحيحة في أية حلقة (س، ✻ ، ○)، ففي الحلقة المعرَّفة في المثال (١ – ٨) نجد على سبيل المثال أن : (١ ، ٠) × (٠ ، ١) = (٠ ، ٠) في حين أن : (١ ، ٠) ≠ (٠ ، ٠) وأن (٠ ، ١) ≠ (٠ ، ٠) . أي أن هناك على الأقل عنصرين غير صفريين حاصل ضربهما هو العنصر الصفري .

تعريف (١ – ٦)

يقال أن الحلقة (س ، ✻ ، ○) تحوي قاسماً للصفر إذا وجد عنصران ا ، ب $\in$ س ، بحيث ا ≠ و ، ب ≠ و ، ا ○ ب = و ؛ حيث و هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية ✻ ، ويسمى كل من ا ، ب قاسماً للصفر .

تعريف (١ – ٧)

يقال للحلقة التبديلية (سـ ، $*$ ، $\circ$) أنها حلقة تامة إذا كانت لاتحوي قواسم للصفر ، أي إذا كان
ا $\circ$ ب = و $\Leftarrow$ ا = و ، أو ب = و $\forall$ ا ، ب $\in$ سـ .

مثال (١ – ٩)

بيّن أن الحلقة (صـ$_٣$، $\oplus$ ، $\odot$) حلقة تامة ، وأن الحلقة (صـ$_٤$، $\oplus$ ، $\odot$) ليست تامة .

الحــــل :

جدولا النظامين (صـ$_٣$ ، $\odot$) ، (صـ$_٤$ ، $\odot$) هما الجدولان (١ – ٣) ، (١ – ٤) على الترتيب :

$\odot$	٠	١	٢
٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٢
٢	٠	٢	١

جدول (١ – ٣)

$\odot$	٠	١	٢	٣
٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٢	٣
٢	٠	٢	٠	٢
٣	٠	٣	٢	١

جدول (١ – ٤)

ويلاحظ من جدول (١ – ٣) أن العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\oplus$ وهو الصفر لاينتج إلا عن ضرب عنصرين أحدهما الصفر نفسه ، وبحسب التعريفين (١ – ٦) ، (١ – ٧) ، فإن الحلقة (صـ$_٣$، $\oplus$ ، $\odot$) حلقة تامة بينما نلاحظ من جدول (١ – ٤) أن ٢ $\odot$ ٢ = ٠ وهذا يعني أن الحلقة (صـ$_٤$ ، $\oplus$، $\odot$) تحوي قاسماً للصفر ، وبالتالي فهي ليست تامة .

تمارين ومسائل (١ – ٢)

[١] لتكن (سـ ، $*$ ، $\circ$) حلقة ، بيّن أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

أ) النظام (سـ، $\times$) زمرة تبديلية .

ب) النظام (سـ ، $\circ$) زمرة .

جـ) كل عنصر من سـ له نظير بالنسبة للعملية $\circ$.

د) للمعادلة ا $*$ س = ب حلٌّ وحيدٌ في سـ .

[٢] لتكن (سـ ، $*$) زمرة تبديلية، والعمليتان $\circ$ ، Δ على سـ معرفتان على النحو التالي :

ا $\circ$ ب = و $\forall$ ا ، ب سـ (حيث و العنصر المحايد بالنسبة للعملية $*$) .

، ا Δ ب = ا $\forall$ ا ، ب $\in$ سـ .

فأثبت أن :

أ) (سـ ، ∗ ، ○) حلقة .

ب) (سـ ، ∗ ، Δ) ليست حلقة .

[٣] لتكن ∗ ، ○ عمليتين معرفتين على صـ على النحو التالي :

ا ∗ ب = ا + ب − ١

، ا ○ ب = ا + ب − اب ∀ ا ، ب ∋ صـ .

برهن أن : (صـ ، ∗ ، ○) حلقة تبديلية أحادية .

[٤] ليكن النظام (سـ ، ∗ ، ○) حلقة ، حيث سـ = { ا ، ب ، جـ ، ء } .

الجدول (١ − ٥) يعرِّف العملية ∗ على سـ فاكمل (١ − ٦) الذي يعرِّف العملية ○ على سـ .

∗	ا	ب	جـ	ء
ا	ا	ب	جـ	ء
ب	ب	ا	ء	جـ
جـ	جـ	ء	ا	ب
ء	ء	جـ	ب	ا

جدول (١ − ٥)

○	ا	ب	جـ	ء
ا	ا	ا	ا	ا
ب	ا	ب		
جـ	ا			ا
ء	ا	ب	جـ	

جدول (١ − ٦)

[٥] لتكن (سـ ، + ، ×) حلقة . نعرّف عليها عملية جديدة Δ كما يلي :

ا Δ ب = (ا × ب) + (ب × ا) ∀ ا ، ب ∋ سـ .

برهن أن : (سـ ، + ، Δ) حلقة تبديلية .

[٦] لتكن (صـ٦ ، ⊕ ، ⊙) حلقة تبديلية .

أ) بين أن الحلقة (صـ٦ ، ⊕ ، ⊙) ليست تامة .

ب) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ ⊙ س ⊕ ٤ = ٠ في هذه الحلقة .

[٧] برهن : أنه إذا كانت (سـ ، ∗ ، ○) حلقة تامة فإن قانوني الحذف يتحققان بالنسبة للعملية ○ . أي أن :

ا ○ ب = ا ○ جـ ⟸ ب = جـ .

ب ○ ا = جـ ○ ا ⟸ ب = جـ .

١ : ٣ الحقـــل

تعرَّفت في البند السابق على مفهوم الحلقة كمثال للنظام الرياضي ذي العمليتين (س ، * ، ○) . ولاحظت أن تعريف الحلقة لم يستوف شروطاً معينة هي موضوع هذا البند .

تعريف (١ – ٨)

يسمّى النظام (س ، * ، ○) حقلاً إذا كان النظام حلقة تبديلية واحدية ، ويوجد لكل عنصر غير صفري نظير ضربي .

تدريـــب ١–٨

تحقَّق من أن كلاًّ من النظامين (ن ، + ، ×) ، (ح ، + ، ×) حقل بينما النظام (صـ، + ، ×) ليس حقلاً .

لاحظ أن التعريف (١ – ٨) للحقل يعتمد على تعريف الحلقة ، لذلك سنعطي تعريفاً آخراً يكافئ التعريف (١ – ٨) ، لكنه أكثر تفصيلاً كما يلي :

تعريف (١ – ٩)

يسمّى النظام الرياضي (س ، * ، ○) حقلاً إذا تحققت فيه الشروط التالية :

١ – النظام الرياضي (س ، *) زمرة تبديلية .

٢ – النظام الرياضي (س* ، ○) زمرة تبديلية ، حيث س* = س / { و } .

٣ – العملية ○ تتوزّع على العملية * .

مثال (١ – ١٠)

لتكن ($ص_٣$ ، ⊕ ، ⊙) حلقة تبديلية واحدية (عنصرها المحايد ١)، بيِّن أن ($ص_٣$ ، ⊕ ، ⊙) حقل .

الحـــل :

بما أن ($ص_٣$ ، ⊕ ، ⊙) حلقة تبديلية واحدية ، وبحسب تعريف (١ – ٨) ، نحتاج فقط لإثبات أن لكل من ١ ، ٢ (العناصر غير الصفرية في $ص_٣$) نظيراً بالنسبة للعملية ⊙، لذلك نمثّل العملية ⊙ المعرّفة على $ص_٣^*$ في الجدول التالي :

⊙	١	٢
١	١	٢
٢	٢	١

جدول (١ – ٧)

يتضح من الجدول (١ – ٧) أن نظير ١ هو ١ نفسه ، نظير ٢ هو ٢ نفسه .

مثال (١ – ١١)

بيّن أن (ص$_{٤}$ ، $\oplus$ ، $\odot$) ليس حقلاً .

الحـــل :

نبحث عن مدى توفر شروط التعريف (١ – ٩) في النظام المعطى .

١- (ص$_{٤}$ ، $\oplus$) زمرة إبدالية . مثال (١ – ٢) .

٢ – (ص$_{٤}^{*}$ ، $\odot$) ليس زمرة ، لأن : ٢ $\odot$ ٢ = ٠ $\notin$ ص$_{٤}^{*}$. أي أن العملية $\odot$ ليست مغلقة في ص$_{٤}^{*}$.

إذا (ص$_{٤}$ ، $\oplus$ ، $\odot$) ليس حقلاً .

الخصائص الأساسية في الحقل :

إنّ كون الحقل هو حلقة ، فإنّ كل خصائص الحلقة التي بيناها سابقاً هي أيضاً خصائص للحقل .
هناك خصائص يتمتع بها الحقل ناتجة عن أنه كـون (س ، $\ast$ ، $\circ$) حقــلاً يقتضي أن يكون النظام (س* ، $\circ$) زمرة ، وفيما يلي نبرهن أهم تلك الخواص .

١ ■ كل حقل هو حلقة تامة : أي أنه إذا كان (س ، $\ast$ ، $\circ$) حقلاً فإن :

ا $\circ$ ب = و $\Leftarrow$ ا = و ، أو ب = و ، ا ، ب $\in$ س .

البرهان :

نفرض ا ، ب $\in$ س بحيث ا $\circ$ ب = و

ونفرض أيضاً ا $\neq$ و ، علينا أن نثبت أن ب = و .

بما أن ا $\neq$ و ، فإن له نظيراً بالنسبة للعملية $\circ$ ، أي أن ا$^{-1}$ $\in$ س .

$\because$ ا $\circ$ ب = و

$\therefore$ ا$^{-1}$ $\circ$ (ا $\circ$ ب) = ا$^{-1}$ $\circ$ و

$\Leftarrow$ (ا$^{-1}$ $\circ$ ا) $\circ$ ب = و   لماذا ؟

$\Leftarrow$ ى $\circ$ ب = و   (حيث ى العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\circ$) .

$\Leftarrow$ ب = و

وهذا ما يثبت أن (س ، $\ast$ ، $\circ$) حلقة تامة .

إن عكــس الخاصيـــة (١) ليس صحيحاً ، فمثلاً الحلقة (ص ، + ، $\times$) حلقة تامة ، مع ذلك فإن (ص ، + ، $\times$) ليس حقلا لأنه لا يوجد لأي عدد صحيح نظير ضربي في ص باستثناء العددين ١ ، – ١ .

٢ ■ في أي حقل (س ، $\ast$ ، $\circ$) يكون للمعادلة : (ا $\circ$ س) $\ast$ ب = جـ حل وحيد هو

س = ا$^{-1}$ $\circ$ (جـ $\ast$ بَ) حيث ا ، ب ، جـ $\in$ س ، ا $\neq$ و .

البرهان :

(ا $\circ$ س) $\ast$ ب = جـ

$\Leftarrow$ ا $\circ$ س = جـ $\ast$ بَ   [لأن (س ، $\ast$) زمرة تبديلية] .

$\Leftarrow$ س = أ$^{-1}$ ○ (جـ ✻ بَ)   لأن (س* ، ○) زمرة تبديلية

، أ ≠ و .

وهذا ما يثبت أن : أ$^{-1}$ ○ (جـ ✻ بَ) حل للمعادلة المعطاة .

وحيث أن نظير أي عنصر في الزمرة وحيد ، فإن كل من بَ ، أ$^{-1}$ وحيد ، وبالتالي ، فإن أ$^{-1}$ ○ (جـ ✻ بَ) حل وحيد للمعادلة (أ ○ س) ✻ ب = جـ .

مثال (١ – ١٢)

حل المعادلة : (٢ ○ س) ✻ ١ = ٢ في كل من الحقلين التاليتين :

أ) (ح ، + ، ×) .

ب) (صـ$_٣$ ، ⊕ ، ⊙) .

الحـــل :

أ) المعادلة (٢ ○ س) ✻ ١ = ٢ تكافئ المعادلة ٢ س + ١ = ٢ في الحقل (ح ، + ، ×) ، وبحسب الخاصية (٢) يكون للمعادلة حل وحيد هو : س = ٢$^{-١}$ (٢ – ١) = ٢$^{-١}$ (١) = ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$

أي أن س = $\frac{١}{٢}$.

ب) المعادلة المعطاه تكافئ المعادلة ٢ ⊙ س ⊕ ١ = ٢ في الحقل (صـ ، ⊕ ، ⊙) ، وبحسب الخاصية (٢) يكون للمعادلة حل وحيد هو :

س = ٢$^{-١}$ ⊙ (٢ ⊕ ١َ)   [لأن ١َ = ٢ في (صـ$_٣$ ، ⊕)]

= ٢$^{-١}$ ⊙ (٢ ⊕ ٢) = ٢$^{-١}$ ⊙ ١   (لماذا ؟)

= ٢ ⊙ ١   [لأن ٢ نظير نفسه في (صـ$_٣^*$ ، ⊙)]

= ٢

أي أن س = ٢ .

تمارين ومسائل (١ – ٣)

[١] بيّن مع التعليل صواب أو خطأ كلٍّ من العبارات التالية :

أ) كل حقل هو حلقة تامة .   ب) كل حلقة تامة هي حقل .

جـ) إذا كان النظام (س ، ✻ ، ○) حقلاً ، فإنه يكون لكل عنصر في النظام (س* ، ○) نظير .

د) إذا كان النظام (س ، ✻ ، ○) حلقة تبديلية واحدية ، فإن هذا النظام يكون حقلاً إذا كان فيه لكل عنصر غير صفري نظير ضربي .

[٢] ليكن (صمـ$_\circ$ ، ⊕ ، ⊙) حلقة واحدية عنصرها المحايد هو (١) :

أ) أثبت أن (صمـ$_\circ$ ، ⊕ ، ⊙) حقلٌ .

ب) حل المعادلة ٣ ⊙ س ⊕ ١ = ٤ في هذا الحقل .

[٣] ليكن (ح ، ✻ ، ×) حقلاً ، حيث × عملية الضرب ، والعملية ✻ معرفة على ح كما يلي :

أ ✻ ب = أ + ب + ٢ $\forall$ أ ، ب $\in$ ح .

أ) عيِّن العنصر المحايد بالنسبة للعملية ✻ .

ب) عيِّن صيغة لإيجاد نظير العنصر بالنسبة للعملية ✻ .

جـ) حل المعادلة (٣ × س) ✻ ٤ = ٨ في هذا الحقل .

[٤] في الحقل (س ، ✻ ، ○) ، أثبت أن للمعادلة س^٢ = س حلَّين ، هما العنصر المحايد بالنسبة للعملية ✻ والعنصر المحايد بالنسبة للعملية ○ . (حيث س^٢ = س ○ س) .

[٥] أعط مثالاً لكل من :

أ) حلقة تبديلية وليست تامة .

ب) حلقة تامة لكنها ليست حقلاً .

١ : ٤ حقل الأعداد الحقيقية

بعد أن تعرَّفت على الحقل وبعض خصائصه الأساسية ، ستتعرَّف في هذا البند على حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ×)

حيث :

+ هي عملية الجمع على الأعداد .

× هي عملية الضرب على الأعداد

٠ هو العنصر المحايد الجمعي .

١ هو العنصر المحايد الضربي .

− أ هو النظير الجمعي للعنصر أ .

أ$^{-١}$ هو النظير الضربي للعنصر غير الصفري أ .

ط $\subset$ صـ $\subset$ ن $\subset$ ح .

فإن الحقل (ح ، + ، ×) يحوي كلاً من الأنظمة العددية التالية (ط ، + ، ×) ، (صـ ، + ، ×) ، (ن ، + ، ×) .

ويتمتّع حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ×) بكافة خواص الحقل التي عرفتها بالإضافة إلى ذلك فإن حقل الأعداد الحقيقية يتمتّع بخواص خاصة قد لاتتحقّق لحقل آخر بوجه عام، وأهم تلك الخواص ما يلي :

١■ حقل الأعداد الحقيقية حقل مرتب . أي أنه إذا كان أ ، ب ∈ ح ، فإن العلاقة ≥ المعرفة على ح تتميز بالتالي :

• أ ≥ أ أي أن ≥ علاقة انعكاسية

• (أ ≥ ب ∧ ب ≥ أ) ⟸ أ = ب . أي أن ≥ علاقة تخالفية .

• (أ ≥ ب ∧ ب ≥ جـ) ⟸ أ ≥ جـ . أي أن ≥ علاقة متعدية .

وتسمى العلاقة ≥ علاقة ترتيب .

لذلك نقول أن الحقل (ح ، + ، ×) حقل مرتب .

الخواص التالية تنتج مباشرة من كون حقل الأعداد الحقيقية حقلا مرتّباً .

٢■ العلاقة ≥ علاقة ترتيب كلي على ح . أي أن : ∀ أ ، ب ∈ ح : أ ≥ ب أو أ ≤ ب .

٣■ ∀ أ ، ب ، جـ ∈ ح : أ ≥ ب ⟸ أ + جـ ≥ ب + جـ .

٤■ ∀ أ ، ب ، جـ ∈ ح : (أ ≥ ب ∧ جـ > ٠) ⟸ أ جـ ≥ ب جـ .

٥■ ∀ أ ، ب ، جـ ∈ ح : (أ ≥ ب ∧ جـ < ٠) ⟸ أ جـ ≤ ب جـ .

مثال (١ – ١٣)

أوجد مجموعة حل المتراجحة : $\frac{\text{٢ – ٣س}}{\text{٤}}$ ≥ ٥ ، لكل س ∈ ح .

الحــــل :

$\frac{\text{٢ – ٣س}}{\text{٤}}$ ≥ ٥ ⟸ ٢ – ٣ س ≥ ٢٠ (خاصية ٤)

⟸ –٣ س ≥ ١٨ (خاصية ٣)

⟸ س ≤ – ٦ (خاصية ٥)

∴ مجموعة الحل = { س : س ∈ ح ، س ≤ – ٦ } .

٦■ ∀ أ ، ب ∈ ح_+ : أ ≥ ب ⟸ $\text{أ}^{\text{٢}}$ ≥ $\text{ب}^{\text{٢}}$.

، ∀ أ ، ب ∈ ح_- : أ ≥ ب ⟸ $\text{أ}^{\text{٢}}$ ≤ $\text{ب}^{\text{٢}}$.

البرهان :

(أ ≥ ب ، أ ∈ ح_+) ⟸ $\text{أ}^{\text{٢}}$ ≥ أ ب (خاصية ٤)

(أ ≥ ب ، ب ∈ ح_+) ⟸ أ ب ≥ $\text{ب}^{\text{٢}}$ (خاصية ٤)

∴ ($\text{أ}^{\text{٢}}$ ≥ أب) ∧ (أب ≥ $\text{ب}^{\text{٢}}$) ⟸ $\text{أ}^{\text{٢}}$ ≥ $\text{ب}^{\text{٢}}$

بهذا نكون قد برهنّا أن :

∀ أ ، ب ∈ ح_+ : أ ≥ ب ⟸ $\text{أ}^{\text{٢}}$ ≥ $\text{ب}^{\text{٢}}$

تدريب (١ – ٩)

باستخدام الفكرة السابقة نفسها ، برهن أن :

$\forall$ أ ، ب $\in$ ح : أ $\geq$ ب $\Leftarrow$ أ^{٢} $\leq$ ب^{٢}

٧■ أ $\geq$ ب $\Leftarrow$ $\frac{١}{أ} \leq \frac{١}{ب}$ ، لكل أ ، ب موجبان معاً أو سالبان معاً .

، أ $\geq$ ب $\Leftarrow$ $\frac{١}{أ} \geq \frac{١}{ب}$. إذا كانت أ ، ب مختلفتي الإشارة .

مثال (١ – ١٤)

أوجد مجموعة حل المتراجحة الآتية، ومثِّل الحل على خط الأعداد : $\frac{٤}{س + ٣} > ٢$ ، س $\neq$ –٣ ، س $\in$ ح

الحـــل :

إن الشرط س $\neq$ –٣ يقتضي أن س $<$ –٣ ، أو س $>$ –٣ وبالتالي سنحل المتراجحة المعطاة في الفترة س $<$ –٣ ، والفترة س $>$ –٣ كل على حدة ، وتكون مجموعة الحل هي اتحاد مجموعة الحل في الفترتين .

أولاً – في الفترة س $>$ – ٣ يكون س + ٣ $>$ ٠ وبالتالي :

$\frac{٤}{س + ٣} > ٢ \Leftarrow \frac{س + ٣}{٤} < \frac{١}{٢}$ (خاصية ٧)

$\Leftarrow$ س + ٣ $<$ ٢

$\Leftarrow$ س $<$ – ١

فتكون مجموعة الحل في هذه الفترة =] –١ ، ∞ [$\cap$] – ٣ ، ∞ [

=] –١ ، ∞ [——— (١)

ثانياً – في الفترة س $<$ – ٣ يكون س+ ٣ $<$ ٠ ، وبالتالي

$\frac{٤}{س + ٣} > ٢ \Leftarrow \frac{س + ٣}{٤} > \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow$ س + ٣ $>$ ٢

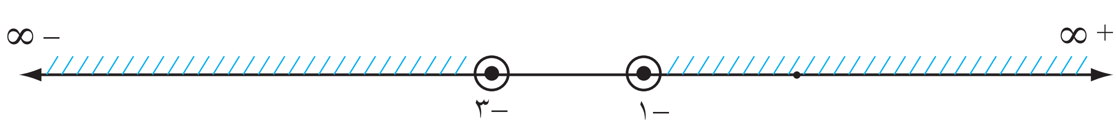
$\Leftarrow$ س $>$ – ١

وتكون مجموعة الحل في هذه الفترة =] – ∞ ، –١ [$\cap$] – ∞ ، –٣ [

=] – ∞ ، – ٣ [——— (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن مجموعة الحل للمتراجحة المعطاة =] – ∞ ، –٣ [$\cup$] –١ ، ∞ [

ويمكن تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد على النحو التالي :



تمارين ومسائل (١ - ٤)

[١] بفرض أنَّ: $\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع} \in \text{ح}$. بيّن صواب ، أو خطأ العبارات التالية :

أ) $\text{س} = \text{ص} \Rightarrow \text{س ع} = \text{ص ع}$.

ب) $\text{س} < \text{ص} \Rightarrow \text{ع س} < \text{ع ص}$.

جـ) $\text{ص} \neq ٠ \Rightarrow \text{ص}^{٢} > ٠$

د) $\frac{٢}{\text{س}} > ١ \Rightarrow \text{س} < ٢$.

[٢] استخدم خواص حقل الأعداد الحقيقية لحل المتراجحات التالية في ح :

أ) $\text{س} + ٣ < ٤$

ب) $٦\text{س} > ١٢$

جـ) $\frac{\text{س}}{-٢} \geq ٧$

د) $\frac{-\text{س}}{٥} + ٤ \geq -١$

هـ) $-٥\text{س} \geq ٢\text{س} - ٦$

و) $٧ - \text{س} \leq ٣$

ز) $\frac{\text{س}}{٥} < ٣$

ح) $\frac{١}{\text{س} - ٣} < ٤$ ، $\text{س} \neq ٣$.

[٣] أوجد مجموعة الحل لكلٍّ من أزواج المتراجحات التالية في ح ، ومثِّل الحل على خط الأعداد :

أ) $٢\text{س} < ٩$ أو $٣\text{س} \geq ٨$

ب) $٤\text{س} > -٢$ أو $\text{س} + ٢ > ٥$

جـ) $\frac{\text{س}}{٢} + ١ \leq ٧$ أو $\text{س} - ١١ > ٧$

د) $٢\text{س} - ٢ < ٣$ أو $\frac{٣\text{س}}{٢} + ١ > ٢$

هـ) $٦\text{س} - ١ \geq ٢$ أو $٢\text{س} + \frac{١}{٢} < \frac{١}{٢}$.

٢ : ١ الدوال الحقيقيـــة

مراجعة (أنواع التطبيقات ، والتطبيق العكسي) :

درست أن التطبيق ت : سہ ← صہ يعيِّن لكل س ∈ سہ عنصراً وحيداً ص ∈ صہ . تسمى ص صورة العنصر س ، وفق التطبيق ت ، والتي يرمز لها بالرمز ت (س) = ص .

ويلاحظ أن التطبيق يتعين بثلاثة مكونات هي المجال ، المجال المقابل وقاعدة التطبيق ، كما أنه يمثّل بأزواج مرتبة أو جدولياً أو بمخططات سهمية أو بيانية .

الدالة الحقيقية :

تذكَّر بعض أنواع التطبيقات :

ليكن التطبيق ت : سہ ← صہ :

١ – إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل هو صورة لعنصر واحد على الأقل من عناصر المجال فإن التطبيق يسمَّى تطبيقاً غامراً ، أي ∀ ص ∈ صہ ∃ س ∈ سہ بحيث ت(س) = ص

٢ – إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من عناصر المجال ، يسمَّى التطبيق تطبيقاً متبايناً ، أي إذا كان ت($س_١$) = ت($س_٢$) ⟸ $س_١$ = $س_٢$

أو إذا كان $س_١$ ≠ $س_٢$ ⟸ ت($س_١$) ≠ ت($س_٢$) ∀ $س_١$ ، $س_٢$ ∈ سہ

٣ – إذا كان التطبيق غامراً ومتبايناً في آن واحد ، فإنه يسمَّى تقابلاً .

٤ – يكون للتطبيق ت : سہ ← صہ تطبيق عكسي $ت^{-١}$: صہ ← سہ إذا كان ت تقابلاً .

مثال (٢ – ١)

ليكن ت : ح ← ح تطبيقاً معرفاً بالقاعدة : ت(س) = ٢س – ٧ . أثبت أن للتطبيق ت تطبيقاً عكسياً $ت^{-١}$ ، ثم أوجد قاعدته .

الحــــل : نثبت أولاً أن ت تقابل .

١ ■ لإثبات أن ت متباين :

نفرض أن ت($س_١$) = ت($س_٢$) ⟸ ٢$س_١$ – ٧ = ٢$س_٢$ – ٧

⟸ ٢$س_١$ = ٢$س_٢$

⟸ $س_١$ = $س_٢$

∵ ت($س_١$) = ت($س_٢$) ⟸ $س_١$ = $س_٢$ ، ∴ التطبيق متباين .

٢ ▪ لإثبات أن ت غامر : نحل المعادلة ص = ٢س – ٧ ، وإيجاد س بدلالة ص .

$$ص = ٢س - ٧ \Leftarrow ٢س = ص + ٧ \Leftarrow س = \frac{ص + ٧}{٢} .$$

واضح أن المعادلة $س = \frac{ص + ٧}{٢}$ لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\forall$ ص $\in$ ح .

∴ ت غامر .

وبما أن ت متباين ، وغامر فهو تقابل .

إذن له تطبيق عكسي $ت^{-١}$ ، وقاعدته : $ت^{-١}(س) = \frac{س + ٧}{٢}$.

التطبيق ت : سـ ⟵ صـ مجاله سـ ومجاله المقابل صـ وعندما تكون سـ $\subset$ ح ، صـ $\subset$ ح حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية يسمَّى هذا التطبيق **دالة حقيقية** وأينما وردت كلمة دالة نقصد بها دالة حقيقية ، ويرمز لها بأحد الحروف ت أو د أو ر أو هـ أو ... وهكذا .

تعريف (٢ – ١)

الدالة الحقيقية هي تطبيق مجاله ومجاله المقابل مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

فمثلاً : ت(س) = س + ١ ، حيث ت : ح ⟵ ح ، دالة حقيقية .

د(س) = $س^{٢}$ ، حيث د : ح ⟵ $ح^{+}$ ، دالة حقيقية .

هـ(س) = $س^{٢}$ – س – ٦ ، حيث هـ : [–٢ ، ٢] ⟵ ح ، دالة حقيقية .

أما التطبيق ر : { ا ، ب ، جـ } ⟵ ح ، حيث ا ، ب، جـ حروف هجائية، ليست دالة حقيقية لأن مجاله {ا ، ب ، جـ} $\not\subset$ ح .

ملحوظة : كثيراً ما يهمل ذكر المجال والمجال المقابل في الدالة الحقيقية ويكتفىٰ بذكر قاعدتها .

مجموعة تعريف الدالة ومداها :

التطبيق الذي قاعدته ت(س) = ا س + ب ($\forall$ ا ، ب $\in$ ح) هو دالة ح ⟵ ح ؛ لأننا نحصل على صورة العنصر س بضربه في العدد ا أولاً ، ثم نضيف الناتج إلى العدد ب . ويلاحظ أنه يمكن إجراء عمليتي الضرب والجمع الداخلتين في قاعدة هذه الدالة لكل س $\in$ ح ، لذا يكون مجال هذه الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية كلها ، وهذا ما يسمي مجموعة تعريف هذه الدالة .

تعريف (٢ – ٢)

مجموعة تعريف الدالة هي أوسع مجموعة جزئية من ح تحقق عناصرها العمليات الداخلة في تركيب قاعدة هذه الدالة .

بناءً على التعريف السابق لمجموعة التعريف؛ فإنها تكون هي مجال الدالة الحقيقية ، أما مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر مجموعة التعريف .

تعريف (٢ - ٣)

مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر مجموعة التعريف ، وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل .
أي مدى الدالة = { ص : ص $\in$ صـ ، ص = د(س) $\forall$ س $\in$ سـ } .

مثال (٢ - ٢)

أوجد مجموعة تعريف كل من :

أ) د(س) = $س^٣ + ٥$ ب) هـ(س) = $\frac{س + ٢}{س^٢ - ٩}$

الحـــل :

أ) مجموعة تعريف الدالة د(س) = $س^٣ + ٥$ هي مجموعة قيم س الحقيقية التي تجعل $س^٣ + ٥$ عدداً حقيقياً.

$\therefore$ مجموعة تعريف الدالة (م . ت) = ح

مجموعة تعريف أي دالة حدودية هي ح .

ب) هـ(س) = $\frac{س + ٢}{س^٢ - ٩}$

هذه الدالة هـ كسرية، وهنا لا يمكن إجراء العمليات الداخلة في تركيب هذه القاعدة عندما يكون المقام يساوي صفراً ، حيث إن القسمة على الصفرِ غير معرَّفة في مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) ؛ لذا يكون مجموعة تعريفها ح ماعدا مجموعة أصفار المقام . ولإيجاد أصفار المقام .

نفرض المقام $س^٢ - ٩ = ٠ \Leftarrow (س - ٣) (س + ٣) = ٠$

إما $س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$ أو $س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٣$

$\therefore$ م .ت = ح / { ٣ ، -٣ }

وبشكل عام: مجموعة تعريف الدالة الكسرية هي ح / { أصفار المقام }.

مثال (٢ - ٣)

أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية :

أ) د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٣ س - ١٠}$

ب) هـ(س) = $\begin{cases} س + ٤ & ، س < ٠ \\ س - ١ & ، س > ٠ \end{cases}$

الحــــل :

أ) د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٣ س - ١٠}$ مجموعة تعريف هذه الدالة هي كل الأعداد الحقيقية التي تجعل ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

$\therefore$ $س^{٢} + ٣ س - ١٠ \geq ٠$ $\Longleftarrow$ (س − ٢) (س + ٥) ≥ ٠

عندما (س − ٢) (س + ٥) = ٠ $\Longleftarrow$ س = ٢ أو س = −٥

ويمكن تمثيل ذلك على خط الأعداد كما في الشكل (٢ − ١)

شكل (٢ − ١)

$\therefore$ م . ت = ح /] −٥ ، ٢ [.

كما يمكن تحديد إشارة المقدار (س−٢) (س + ٥) بشكل مفصل كما يلي :

	∞	٢	−٥	− ∞
إشارة (س − ٢)	+	−	−	
إشارة (س + ٥)	+	+	−	
إشارة [(س − ٢) (س + ٥)]	+	−	+	

يلاحظ أن معامل $س^{٢}$ موجب فإشارة المقدار بين الجذرين −٥ ، ٢ سالبة .

أي أن : م . ت = [−∞ ، −٥] ∪ [٢ ، ∞ [= ح /] −٥ ، ٢ [

$\therefore$ مجموعة تعريف الدالة الجذرية هي كل الأعداد الحقيقية التي تجعل ما تحت الجذر عدداً غير سالب .

وتلاحظ أنه إذا كانت الدالة من الدرجة الثانية ولها جذران مختلفان فلتحديد إشارتها نميز حالتين :

١ − معامل $س^{٢}$ موجب فالدالة موجبة خارج الجذرين .

٢ − معامل $س^{٢}$ سالب فالدالة موجبة بين الجذرين .

ب) هـ(س) = $\begin{cases} س + ٤ \text{ ، } س < ٠ \\ س - ١ \text{ ، } س > ٠ \end{cases}$.

يلاحظ أن هذه الدالة معرَّفة بأكثر من قاعدة :

الأولى س + ٤ عند س $<$ ٠ ،

والثانية س − ١ عندما س $>$ ٠

ولكن غير معرفة عند س = ٠ .

إذن م . ت الدالة هـ = ح / { ٠ } .

تدريب (٢ − ١)

أوجد مجموعة تعريف الدالة د(س) = $\sqrt{٣ + ٢س - س^٢}$

مثال (٢ − ٤)

أوجد مجموعة التعريف لكلٍ من الدالتين التاليتين:

أ) د(س) = $\frac{س}{\sqrt{س - ٤} - ٥}$ ، ب) د(س) = $\frac{\sqrt{س}}{س^٢ - ٢س - ١٥}$

الحـــل :

أ) د(س) = $\frac{س}{\sqrt{س - ٤} - ٥}$ الدالة كسرية.

يلاحظ أن دالة البسط هي كثيرة حدود، ∴ م . ت البسط = ح.

المقام دالة جذرية مجموعة تعريفها ما تحت الجذر $\geq$ ٠ أي أن:

س − ٤ $\geq$ ٠ $\Leftarrow$ س $\geq$ ٤ ∴ م . ت المقام = [٤ ، + ∞[.

ولكي تكون الدالة الكسرية معرفة يجب أن يكون المقام $\neq$ ٠

لذلك نضع $\sqrt{س - ٤}$ − ٥ = ٠ $\Leftarrow$ $\sqrt{س - ٤}$ = ٥ $\Leftarrow$ س − ٤ = ٢٥ $\Leftarrow$ س = ٢٩

∴ م . ت الكلية للدالة الكسرية = (م . ت البسط ∩ م . ت المقام) / {أصفار المقام}

=]− ∞ ، + ∞[∩ [٤ ، + ∞[/ {٢٩} = [٤ ، + ∞[/ {٢٩}.

ب) د(س) = $\frac{\sqrt{س}}{س^٢ - ٢س - ١٥}$.

يلاحظ أن البسط دالة جذرية مجموعة تعريفها [٠ ، ∞[والمقام دالة كثيرة حدود مجموعة تعريفها ح .

ولإيجاد أصفار المقام نضع س٢ − ٢س − ١٥ = ٠ .

$\Leftarrow$ (س + ٣) (س − ٥) = ٠ $\Leftarrow$ س = −٣ أو س = ٥

مجموعة تعريف د

= (مجموعة تعريف البسط ∩ مجموعة تعريف المقام) / {أصفار المقام} .

= [٠ ، ∞[∩ ح / {−٣ ، ٥} .

= [٠ ، ∞[/ {٥} حيث −٣ $\notin$ [٠ ، ∞[

مثال (٢ - ٥)

أوجد مجموعة تعريف الدالة التالية :

$$د(س) = \frac{١}{\sqrt{٢س - ١}} - \sqrt{١ - س^٢} \ .$$

الحـــل :

$$د(س) = \frac{١}{\sqrt{٢س - ١}} - \sqrt{١ - س^٢} \ .$$

نعتبر د فرق دالتين : الأولى $\frac{١}{\sqrt{٢س - ١}}$ مجموعة تعريفها $]\frac{١}{٢} ، \infty[$

والثانية $\sqrt{١ - س^٢}$ مجموعة تعريفها $[-١ ، ١]$

إذن م . ت د = (م . ت الأولى) $\cap$ (م . ت الثانية)

$=]\frac{١}{٢} ، \infty[\cap [-١ ، ١] =]\frac{١}{٢} ، ١]$

مدى الدالـــة :

من طرق إيجاد المدى ما يلي :

١) طريقة إيجاد الصورة العكسية.

٢) طريقة المميز.

٣) طريقة البناء.

٤) طريقة إكمال المربع.

مثال (٢ - ٦)

أوجد مدى كل من الدوال التالية :

أ) $د(س) = ٢س - ٥$ ؛ ب) $د(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$ ؛ جـ) $د(س) = س^٢ - ٣$.

الحـــل :

ولإيجاد مدى الدالة نتبع طريقة إيجاد الصورة العكسية (أي إيجاد س بدلالة ص) في كل دالة .

أ) $د(س) = ٢ س - ٥$ ، مجموعة تعريفها ح .

نضع $ص = ٢س - ٥ \Longleftarrow س = \frac{ص + ٥}{٢}$.

يلاحظ $\forall$ ص $\in$ ح يمكن إيجاد قيمة $س = \frac{ص + ٥}{٢} \in$ ح .

$\therefore$ المدى = ح

ب) $\text{د(س)} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$ مجموعة تعريفها ح / {٢}

نضع $\text{ص} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$

$\Leftarrow$ ص (س − ٢) = س + ١ ... لماذا ؟

$\Leftarrow$ ص س − ٢ ص = س + ١

$\Leftarrow$ ص س − س = ٢ ص + ١

$\Leftarrow$ س (ص − ١) = ٢ ص + ١

$\Leftarrow$ $\text{س} = \frac{٢\text{ص} + ١}{\text{ص} - ١}$

$\therefore$ المدى = ح / {١}

جـ) د(س) = $\text{س}^{٢}$ − ٣ ، مجموعة تعريفها ح

نضع ص = $\text{س}^{٢}$ − ٣ $\Leftarrow$ $\text{س}^{٢}$ = ص + ٣

$\Leftarrow$ س = $\pm \sqrt{\text{ص} + ٣}$

$\therefore$ ص + ٣ $\geq$ ٠ $\Leftarrow$ ص $\geq$ −٣

$\therefore$ المدى = [−٣ ، ∞ [

مثال (٢ − ٧)

أوجد مدى كلٍ من الدالتين التاليتين:

أ) $\text{د(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢}$ ب) د(س) = $\sqrt{-\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٣}$

الحل :

أ) $\text{د(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢}$ ، مجموعة تعريفها ح

$\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢}$ $\Leftarrow$ ص ($\text{س}^{٢}$ + ٢) = س

$\Leftarrow$ ص $\text{س}^{٢}$ − س + ٢ص = ٠

يلاحظ أنهُ في هذه الدالة يتعذّر إيجاد س بدلالة ص ، ولإيجاد المدى في هذه الحالة نكوّن المعادلة من الدرجة الثانية ذات متغير واحد ولكي يكون لهذه المعادلة حل في ح يجب أن نستخدم طريقة المميّز فيكون المميّز (Δ) = ب^{٢} − ٤أ جـ $\geq$ ٠ لذا نبحث عن قيم ص التي من أجلها يمكن إيجاد قيم س .

من المعادلة ص س^{٢} − س + ٢ص = ٠

أ = ص ، ب = −١ ، جـ = ٢ ص

Δ = ب^{٢} − ٤ أ جـ

= (−١)^{٢} − ٤ × ص × ٢ص

= ١ − ٨ص^{٢}

وبما أن $\Delta \geq$ ٠ $\Leftarrow$ ١ − ٨ص^{٢} $\geq$ ٠

$\Leftarrow$ ٨ ص^{٢} $\leq$ ١

$\Leftarrow$ ص^{٢} $\leq \frac{١}{٤ \times ٢}$

$\Leftarrow$ |ص| $\leq \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow \frac{-١}{٢\sqrt{٢}} \leq$ ص $\leq \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

المدى = [$-\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$]

ب) د(س) = $\sqrt{-س^{٢} - ٢س + ٣}$ مجموعة تعريفها [−٣ ، ١] ،

نضع ص = $\sqrt{-س^{٢} - ٢س + ٣}$ ، وبالتالي يكون ص $\geq$ ٠

$\Leftarrow$ ص^{٢} = −س^{٢} − ٢س + ٣ $\Leftarrow$ س^{٢} + ٢س − ٣ + ص^{٢} = ٠

أ = ١ ب = ٢ جـ = −٣ + ص^{٢}

Δ = ب^{٢} − ٤ أ جـ

= ٤ − ٤ × ١ (−٣ + ص^{٢})

= ٤ + ١٢ − ٤ص^{٢} = ١٦ − ٤ص^{٢}

$\Delta \geq$ ٠ $\Leftarrow$ ١٦ − ٤ص^{٢} $\geq$ ٠

$\Leftarrow$ −٤ص^{٢} $\geq$ −١٦

$\Leftarrow$ ص^{٢} $\leq$ ٤

$\Leftarrow$ |ص| $\leq$ ٢

$\Leftarrow$ −٢ $\leq$ ص $\leq$ ٢ ، $\because$ ص $\geq$ ٠

$\therefore$ المدى = [٠ ، ٢]

مثال (٢ − ٨)

أوجد مدى الدوال التالية :

أ) د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$ ،

ب) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ١}$.

جـ) د(س) = س^{٢} + ٤س + ٣ .

الحــــل :

أ) د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$

∵ م . ت د(س) = [٢ ، ∞ [

لإيجاد المدى يمكن بناء الدالة حسب مجموعة تعريفها .

أي س ≥ ٢

⟸ س − ٢ ≥ ٠ ⟸ $\sqrt{\text{س} - ٢}$ ≥ ٠

⟸ ص^{٢} ≥ ٠ ⟸ ص ≥ ٠

∴ المدى = [٠ ، ∞ [

ب) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ١}$ م . ت = ح (لماذا؟)

نقوم بالقسمة المطوّلة ، لتعذر بناء الدالة (لوجود س٢ في البسط والمقام)

د(س) = ١ − $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$.

	١
س^{٢} + ١	س^{٢}
	− س^{٢} $\overline{+}$ ١
	− ١

ومن مجموعة التعريف يتم البناء كما يلي :

− ∞ < س < ∞ لماذا ؟

٠ ≤ س^{٢} < ∞ (س^{٢} ≥ ٠)

١ ≤ س^{٢} + ١ < ∞ (إضافة ١ إلى أطراف المتراجحة) .

$$\frac{١}{\infty} < \frac{١}{س^{٢} + ١} \le \frac{١}{١}$$ [بأخذ مقلوب كل طرف: $\frac{١}{\infty} \longrightarrow ٠$]

$$٠ < \frac{١}{س^{٢} + ١} \le ١$$

$$-١ \le \frac{-١}{س^{٢} + ١} < ٠$$ [بالضرب في -١]

$$١ - ١ \le ١ - \frac{١}{س^{٢} + ١} < ١$$ ، [بإضافة ١ إلى أطراف المتراجحة]

$\Leftarrow ٠ \le ص < ١$

المدى = $[٠ ، ١[$

جـ) $د(س) = س^{٢} + ٤س + ٣$ ، م . ت (د) = ح ، ولإيجاد المدى تستخدم طريقة المميز.

$ص = س^{٢} + ٤س + ٣ \Leftarrow س^{٢} + ٤س + ٣ - ص = ٠$

$أ = ١$ ، $ب = ٤$ ، $جـ = ٣ - ص$

$\Delta = ١٦ - ٤(٣ - ص) \ge ٠$

$\Leftarrow ٤ + ٤ص \ge ٠$

$\Leftarrow ١ + ص \ge ٠$

$\Leftarrow ص \ge -١$

المدى = $[-١ ، \infty[$

مثال (٢ − ٩)

أوجد مجموعة تعريف ومدى الدالة التالية :

أ) $د(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$.

ب) $$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س < ٠ \\ س & ، ٠ \le س \le ١ \\ \frac{١}{س} & ، س > ١ \end{cases}$$

الحـــل :

أ) لإيجاد م . ت للدالة $د(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$.

بما أن $٩ - س^{٢} \ge ٠ \Leftarrow - س^{٢} \ge -٩$

⟸ $س^{٢}$ ≥ ٩ ⟸ |س| ≥ ٣

⟸ −٣ ≤ س ≤ ٣

∴ م . ت = [−٣ ، ٣]

ولإيجاد المدى نبني الدالة من مجموعة التعريف حيث

−٣ ≤ س ≤ ٣ ⟸ ٠ ≤ $س^{٢}$ ≤ ٩

⟸ ٠ ≥ −$س^{٢}$ ≥ −٩ (بالضرب في −١)

٩ ≥ ٩ − $س^{٢}$ ≥ ٠ (إضافة ٩)

٣ ≥ $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ ≥ ٠

٣ ≥ ص ≥ ٠ ∴ المدى = [٠ ، ٣]

ب) د(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س < ٠ \\ س & ، ٠ \le س \le ١ \\ \frac{١}{س} & ، س > ١ \end{cases}$

م . ت د(س) = ح

أما المدى عند س < ٠ ⟸ ص = $س^{٢}$ > ٠ ⟸ ص ∈] ٠ ، ∞ [

عند ٠ ≤ س ≤ ١ ⟸ ٠ ≤ ص ≤ ١ ⟸ ص ∈ [٠ ، ١]

عند س > ١ ⟸ ص = $\frac{١}{س}$ ، ٠ < $\frac{١}{س}$ < ١ ⟸ ص ∈] ٠ ، ١ [

∴ المدى =] ٠ ، ∞ [∪ [٠ ، ١] ∪] ٠ ، ١ [= [٠ ، ∞ [

تمارين ومسائل (٢ − ١)

أولاً – أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

[١] د(س) = ٢$س^{٣}$ + ٥$س^{٢}$ − س .

[٢] د(س) = $\frac{س + ٢}{س^{٢} - ٨١}$.

[٣] د(س) = $\sqrt{٢س - ١}$.

[٤] د(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$.

[٥] د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} - س + ٦}}$.

[٦] د(س) = $\frac{س}{\sqrt{٢س^{٢} - ١}}$.

[٧] د(س) = $\frac{س}{س^{٢} - س + ٦}$.

[٨] د(س) = $\sqrt{\frac{١١}{س + ٢}}$.

[٩] $د(س) = \sqrt{س} + \sqrt{س - ١}$.

[١٠] $د(س) = \dfrac{س^٢ - ١}{س - ١}$.

[١١] $د(س) = \dfrac{٥}{٣ - \sqrt{س - ١}}$.

[١٢] $د(س) = \dfrac{\sqrt{س + ٢}}{س - ٥}$.

[١٣] $د(س) = س \sqrt{س - ٢}$.

[١٤] $د(س) = \sqrt{س - ٣} - ١$

[١٥] $د(س) = ٣$.

[١٦] $د(س) = \begin{cases} -١ &، \quad س \leq ٠ \\ ٢ &، \quad س > ٠ \end{cases}$

[١٧] $د(س) = \begin{cases} س + ٢ &، \quad س \leq ٠ \\ -١ &، \quad س > ٠ \end{cases}$

[١٨] إذا كانت $ت(س) = ٢س + ١$ ، $هـ(س) = س^٢ - ١٦$ عيّن مجموعة تعريف كل من :

أ) $\dfrac{هـ(س)}{ت(س)}$ ، ب) $\dfrac{\sqrt{هـ(س)}}{\sqrt{ت(س)}}$ ، هـ) $\sqrt{\dfrac{ت(س)}{هـ(س)}}$.

ثانياً – أوجد مجموعة تعريف ومدى الدوال التالية :

[١٩] $د(س) = \dfrac{س}{س - ١}$.

[٢٠] $د(س) = \dfrac{٥}{س^٢ + ٤}$.

[٢١] $د(س) = \sqrt{٦٤ - س^٢}$.

[٢٢] $د(س) = |س + ٩|$.

[٢٣] $د(س) = \dfrac{١}{س + ٢}$.

[٢٤] $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٥}$.

[٢٥] $د(س) = س^٢ - ٦س + ٥$.

[٢٦] $د(س) = \sqrt{١ - س} + ٧$.

[٢٧] $د(س) = -س^٢ + ٢س - ٣$.

[٢٨] $د(س) = \sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$

[٢٩] $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٢س - ٣}$.

[٣٠] $د(س) = \dfrac{س}{\sqrt{س^٢ - ١}}$.

[٣١] $د(س) = \dfrac{٢س - ١}{(س - ١)(س + ٢)}$.

[٣٢] $د(س) = \dfrac{س^٢ + ٥}{س + ٦}$.

[٣٣] $د(س) = \begin{cases} س + ١ & \text{عندما } س \leq ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$.

[٣٤] $د(س) = س^٢ + ٩$.

[٣٥] $د(س) = ٣ - س^٢$.

٢ : ٢ بعض أنواع الدوال وتمثيلها

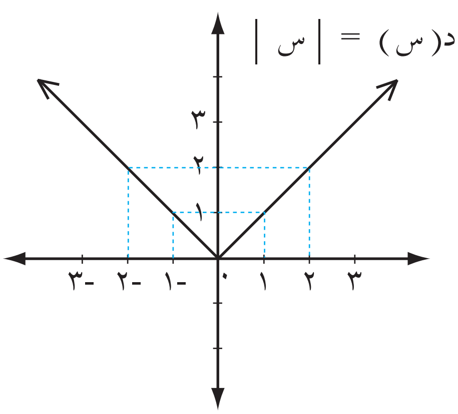
أولاً : دالة المقياس :

تذكر أن $|س| = \begin{cases} س &، \quad س \geq ٠ \\ -س &، \quad س \leq ٠ \end{cases}$

يسمَّى $|س|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي س ، $|س| = \sqrt{س^٢}$

تدريب (٢ - ٢)

أوجد $|-٤|$ ، $\left|\frac{٢}{٣}\right|$ ، $|١٠١|$.



شكل (٢ - ٢)

تعريف (٢ - ٤)

$د(س) = |س| = \begin{cases} س & \text{إذا كانت } س \geq ٠ \\ -س & \text{إذا كانت } س \leq ٠ \end{cases}$

تسمى الدالة (د) دالة المقياس .

مثال (٢ - ١٠)

أعد تعريف الدالة : $د(س) = |س + ٣|$ على فترات عديدة ؛ ثم مثِّلها بيانياً ، وحدِّد مجموعة تعريفها ومداها .

الحـــل :

من تعريف دالة المقياس :

$$د(س) = |س + ٣| = \begin{cases} س + ٣ &، \quad س + ٣ \geq ٠ \\ -(س + ٣) &، \quad س + ٣ \leq ٠ \end{cases}$$

$$\Leftarrow |س + ٣| = \begin{cases} س + ٣ &، \quad س \geq -٣ \\ -س - ٣ &، \quad س \leq -٣ \end{cases}$$

ولتمثيل هذه الدالة نكوّن جدولين: أحدهما للدالة $د_١(س) = س + ٣$ عندما $س \geq -٣$

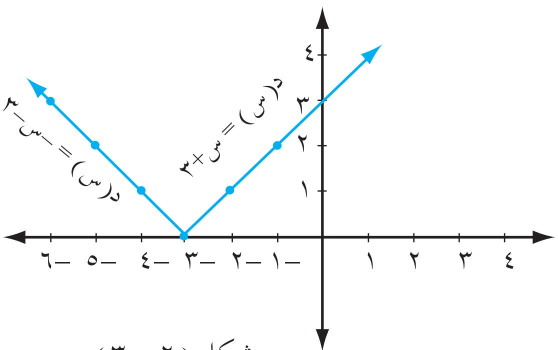
والآخر للدالة $د_٢(س) = -س - ٣$ عندما $س \leq -٣$ كما يلي :

س ≥ −٣

س	−٢	−١	٠
$د_{١}$(س)	١	٢	٣

س < −٣

س	−٤	−٥	−٦
$د_{٢}$(س)	١	٢	٣



شكل (٢ – ٣)

يلاحظ أن مجموعة تعريفها ح .

بما أن د(س) = |س + ٣| ≥ ٠

∴ ص ≥ ٠

المدى = [٠ ، ∞[

وباستخدام طريقة البناء:

− ∞ < س < ∞

− ∞ < س + ٣ < ∞

٠ ≤ |س + ٣| < ∞

٠ ≤ ص < ∞

مثال (٢ – ١١)

أعد تعريف كل من الدوال التالية وعيِّن مجموعة تعريفها ومداها .

هـ(س) = |٢س − ٥| + ٣ .

الحـــل :

هـ(س) = |٢س − ٥| + ٣ = { (٢س − ٥) + ٣ ، س ≥ $\frac{٥}{٢}$ ؛ −(٢س − ٥) + ٣ ، س < $\frac{٥}{٢}$ }

= { ٢س − ٢ ، س ≥ $\frac{٥}{٢}$ ؛ ٨ − ٢س ، س < $\frac{٥}{٢}$ }

يلاحظ أن مجموعة التعريف هـ = ح

لإيجاد المدى : |٢س − ٥| ≥ ٠

|٢س − ٥| + ٣ ≥ ٣

هـ(س) ≥ ٣

المدى = [٣ ، ∞[

تدريب (٢ – ٣)

أعد تعريف الدالة د(س) = | س^{٢} – ٩ | ، ثم أوجد مجموعة تعريفها ومداها .

مثال (٢ – ١٢)

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التالية:

| ٢س + ٤ | + س – ٤ = ٠

الحـــل :

بما أن | ٢ س + ٤ | = { ٢ س + ٤ ، س ≤ – ٢ ؛ –٢س – ٤ ، س ≥ – ٢ }

إذن |٢س + ٤| + س –٤ = { ٢ س + ٤ + س – ٤ ، س ≤ –٢ ؛ –٢س – ٤ + س – ٤ ، س ≥ – ٢ }

= { ٣ س ، س ≤ – ٢ ؛ – (س + ٨) ، س ≥ –٢ }

عندما ٣ س = ٠ ⟸ س = ٠ ∋] –٢ ، ∞ [

∴ س = ٠ حل للمعادلة .

وعندما – س – ٨ = ٠ فإن س = – ٨ ∋] – ∞ ، –٢ [

∴ س = – ٨ حل للمعادلة .

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، – ٨ } .

ثانياً : دالة الصحيح :

تدريب (٢ – ٤)

لتكن [س] = ه حيث ه ≤ س < ه + ١ ، فإن ه هي أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي س .

أوجد [٤] ، [٢,٥] ، [–١,٥] . [$\frac{٣}{٢}$] ؛ ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أنه إذا ارتبط س ⟵ [س] ، فإننا نحصل على دالة تسمَّى دالة صحيح س .

تعريف (٢ – ٥)

الدالة د : ح ⟵ ص ، والتي قاعدتها د(س) = [س] تسمَّى دالة صحيح س ؛ حيث [س] هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي س .

وبصيغة أخرى :

إذا كان س ∈ ح ، ن ∈ ص ، حيث ن ≤ س < ن + ١ ، فإن د(س) = [س] = ن

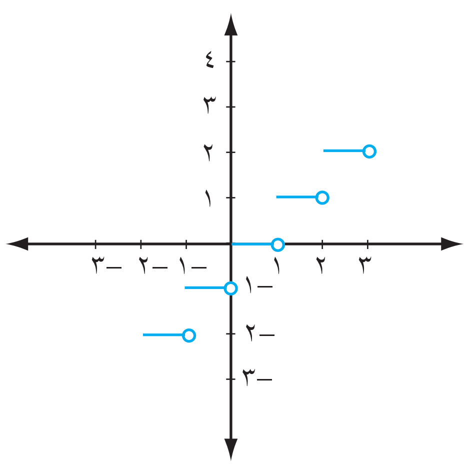
مثال (٢ – ١٣)

مثل بيانياً الدالة : د(س) = [س] .

الحـــل :

استنادا إلى تعريف دالة الصحيح د(س) = [س] ، فإنه يمكن كتابتها على النحو التالي :

د(س) = [س] =
...
–٢ ، –٢ ≤ س < –١
–١ ، –١ ≤ س < ٠
٠ ، ٠ ≤ س < ١
١ ، ١ ≤ س < ٢
٢ ، ٢ ≤ س < ٣
...



شكل (٢ – ٤)

ويلاحظ أنها دالة متعدِّدة القواعد كما يظهر جزء من تمثيلها في الشكل (٢ – ٤) ومداها الأعداد الصحيحة (ص) .

ملاحظات :

١ ■ [س] ≤ س < [س] + ١

٢ ■ [س + ن] = [س] + ن ، ∀ س ∈ ح ، ن ∈ ص .

٣ ■ الدالة د(س) = [س] ليست زوجية ولا فردية .

٤ ■ على كل فترة [ن ، ن + ١ [من المجال (ح) تكون الدالة ثابتة وتساوي ن .

مثال (٢ – ١٤)

اكتب الفترة العددية التي ينتمي إليها س في كل من :

أ) [س] = –٦ ، ب) [س + ٧] = ٧ ، جـ) $\frac{[س – ٤]}{[س – ٢]} = \frac{٣}{٤}$

الحـــل :

أ) من التعريف [س] = –٦ ⟸ –٦ ≥ س > –٦ + ١

⟸ –٦ ≥ س > –٥

∴ س ∈ [–٦ ، –٥ [

ب) [س + ٧] = ٧ ⟸ ٧ ≥ س + ٧ > ٨

⟸ ٠ ≥ س > ١

∴ س ∈ [٠ ، ١ [

جـ)

$\frac{[س – ٤]}{[س – ٢]} = \frac{٣}{٤}$ ⟸ ٤ [س – ٤] = ٣ [س – ٢]

٤([س] – ٤) = ٣([س] – ٢)

٤ [س] – ١٦ = ٣[س] – ٦

٤[س] – ٣ [س] = ١٦ – ٦

[س] = ١٠

١٠ ≥ س > ١١

∴ مجموعة الحل = [١٠ ، ١١ [

مثال (٢ – ١٥)

أوجد مجموعة تعريف الدالة : د(س) = $\frac{س}{[س]}$.

الحـــل :

د(س) = $\frac{س}{[س]}$ دالة كسرية ولكي تكون معرفة [س] ≠ ٠ ، ولكي نجد أصفار المقام

نضع [س] = ٠ ⟸ س ∈ [٠ ، ١ [

∴ م . ت للدالة (د) = ح / [٠ ، ١ [

بعض خواص الدوال وتمثيلها

تتنوَّع الدوال الحقيقية كثيراً وفقاً لبعض خواصها أو سماتها .. وفي هذا البند تتعرَّف على بعض أنواع الدوال الهامة من خلال خواصها وكيفية تمثيلها في المستوى الديكارتي .

أولاً : الدوال الزوجية والفردية :

تدريب (٢ – ٥)

لتكن : ١) د(س) = س^{٢} + ٤ . أوجد : د(١) ، – د(١) ، د(–١)

٢) هـ(س) = ٢س^{٣} + س . أوجد : هـ(٣) ، – هـ(٣) ، هـ(–٣)

ستلاحظ أن د(١) = د(–١) ، ومثل هذه الدالة تسمَّى دالة زوجية ، وأن هـ(–٣) = –هـ(٣) ، ومثل هذه الدالة تسمَّى دالة فردية .

تعريف (٢ – ٦)

لتكن د دالة معرَّفة على المجموعة مه ⊃ ح :

تسمَّى د دالة زوجية إذا كان : د(– س) = د(س) ، ∀ س ∈ مه .

وتسمَّى د دالة فردية إذا كان : د(– س) = – د(س) ، ∀ س ∈ مه .

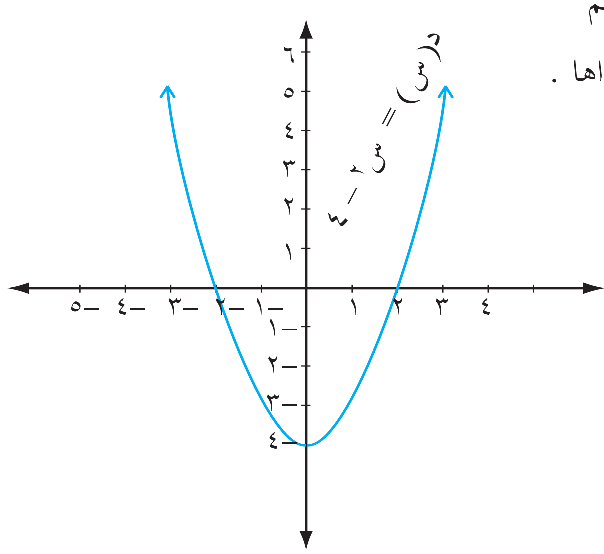
مثال (٢ – ١٦)

بيِّن نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية ثم مثِّل كلاً منها بيانياً ؛ ومن الرسم أوجد مجموعة تعريفها ومداها .

أ) د(س) = س^{٢} – ٤

ب) د(س) = س^{٣}

جـ) د(س) = س^{٢} – ٣س



شكل (٢ – ٦)

الحـــل :

أ) د(س) = س^{٢} – ٤ واستناداً للتعريف .

د(– س) = (– س)^{٢} – ٤ = س^{٢} – ٤ = د(س)

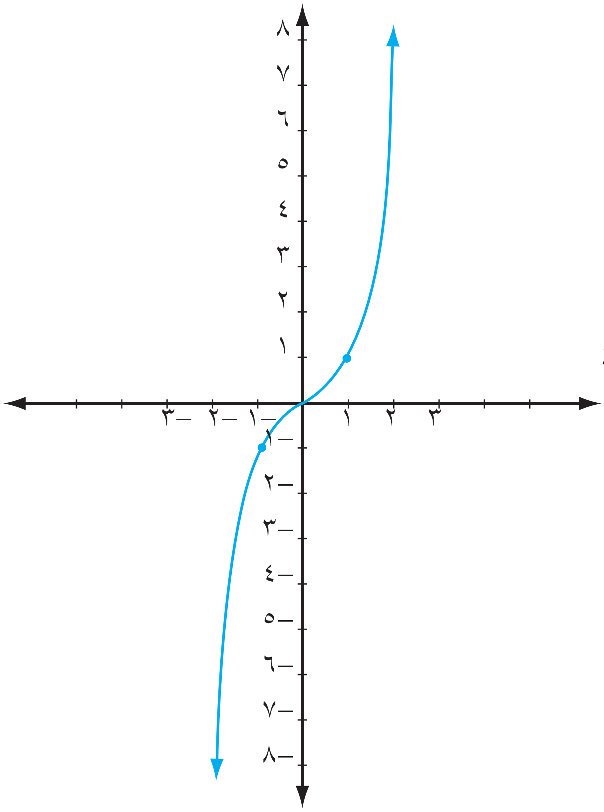
د(– س) = د(س) ، فالدالة زوجية

ولتمثيل هذه الدالة نكوّن الجدول التالي :

س	– ٣	– ٢	– ١	٠	١	٢	٣
د(س)	٥	٠	– ٣	–٤	–٣	٠	٥

ومن الرسم شكل (٢–٦)   م . ت = ح

والمدى =] –٤ ، ∞ [، والدالة الزوجية متماثلة حول محور الصادات .



شكل (٢ – ٧)

ب) د(س) = $س^{٣}$

د(–س) = (– س $)^{٣}$

= – $س^{٣}$

= – د(س)   ∴ الدالة فردية ،

ولتمثيل هذه الدالة نكوّن الجدول التالي :

س	...	–٢	–١	٠	١	٢	...
د(س)	...	–٨	–١	٠	١	٨	...

ومن الرسم شكل (٢–٧) م .ت = ح ، والمدى = ح ،

والدالة الفردية متماثلة حول نقطة الأصل .

جـ) د(س) = $س^{٢}$ – ٣س

د(– س) = (– س $)^{٢}$ – ٣ (– س)

= $س^{٢}$ + ٣س

يلاحظ أن د (– س) ≠ د(س) ،

وكذلك د(– س) ≠ – د(س)

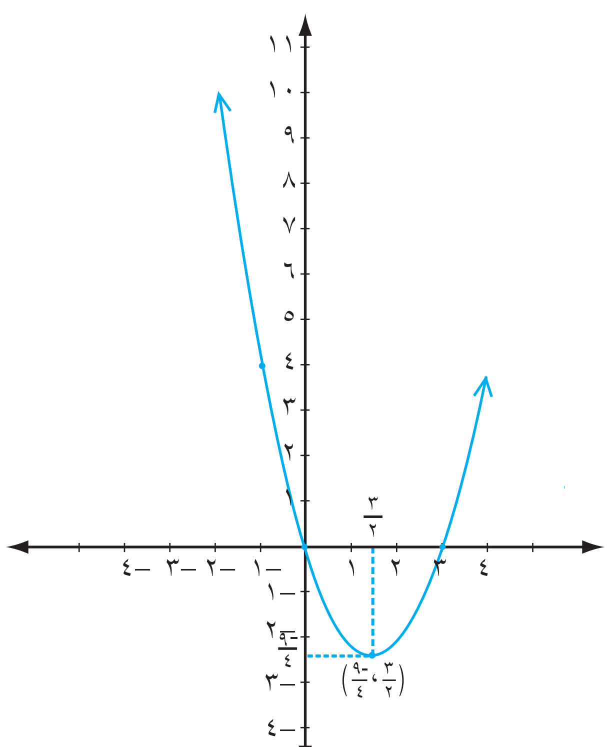
مثل هذه الدالة لا زوجية ولا فردية .

ويمكن تمثيل ذلك بعد تكوين الجدول التالي :

س	...	–٢	–١	٠	١	٢	٣	٤	...
د(س)	...	١٠	٤	٠	–٢	–٢	٠	٤	...

ومن الرسم شكل (٢–٨)   م . ت = ح

والمدى =] –٢ ، ∞ [



شكل (٢ – ٨)

مثال (٢ - ١٧)

بيِّن نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية :

أ) هـ(س) = س − جاس

$$ب)\ د(س) = \begin{cases} -\frac{١}{س} &،\ س < ٠ \\ \frac{١}{س} &،\ س > ٠ \end{cases}$$

الحــــل :

أ) هـ(س) = س − جاس

هـ(− س) = (− س) − جا(− س)

= − س + جا س

= − (س − جاس) لأن [جا(− س) = − جاس]

= − هـ(س) فالدالة هـ فردية .

$$ب)\ د(س) = \begin{cases} -\frac{١}{س} &،\ س < ٠ \\ \frac{١}{س} &،\ س > ٠ \end{cases}$$

الدالة معرفة بقاعدتين وغير معرفة عند الصفر

∴ م . ت = ح / { ٠ } .

$$د(-س) = \begin{cases} \frac{-١}{-س} &،\ -س < ٠ \\ \frac{١}{-س} &،\ -س > ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{١}{س} &،\ س > ٠ \\ \frac{١}{-س} &،\ س < ٠ \end{cases}$$ بعد تبديل كتابة القاعدتين

∴ الدالة زوجية .

تلاحظ أن الدالة التي على صورة د(س) = س ^{ن} ، حيث ن عدد زوجي تكون دالة زوجية ، وهي متماثلة حول محور الصادات ، وعندما يكون ن عدداً فردياً تكون هذه الدالة فردية ، وهي متماثلة حول نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

ثانياً : الدالة الدورية :

تدريب (٢ – ٦)

إذا كانت د(س) =] س [– س ، فأوجد د(س + ١) ماذا تلاحظ ؟

مثل هذه الدالة تسمَّى دالة دورية ، ودورها العدد ١ .

تعريف (٢ – ٧)

الدالة د المعرفة على ى ⊂ ح هي دالة دورية إذا تحقق ما يلي :

- **إذا وجد عدد ر > ٠ ، وكان ∀ س ∈ ى ⟸ (س + ر) ∈ ى**
- **د(س) = د (س + ر) .**
- **ر أصغر عدد حقيقي موجب يحقق ما سبق [ويسمَّى ر دور الدالة] :**

مثال (٢ – ١٨)

بين أيّاً من الدوال التالية دورية وعيِّن دورها .

أ) د(س) =] س + $\frac{١}{٥}$ [. ب) د(س) = س –] س – $\frac{١}{٢}$ [

الحـــل :

أ) من التعريف د(س + ر) =] س + ر + $\frac{١}{٥}$ [ولكي يكون د(س + ر) = د(س)

∴] س + ر + $\frac{١}{٥}$ [=] س + $\frac{١}{٥}$ [، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان ر = ٠ .

∴ الدالة غير دورية لعدم توفر الشرط أن ر > ٠ .

ب) د(س + ر) = س + ر –] س + ر – $\frac{١}{٢}$ [.

ولكي يكون د(س + ر) = د(س)

⟸ س + ر –] س + ر – $\frac{١}{٢}$ [= س –] س – $\frac{١}{٢}$ [.

⟸ ر –] س + ر – $\frac{١}{٢}$ [= –] س – $\frac{١}{٢}$ [.

⟸] س + ر – $\frac{١}{٢}$ [=] س – $\frac{١}{٢}$ [+ ر .

] س – $\frac{١}{٢}$ [+ ر =] س – $\frac{١}{٢}$ [+ ر ،

ر عدد صحيح، وأصغر عدد صحيح موجب يحقق التساوي هو العدد (١) .

∵] س – $\frac{١}{٢}$ [+ ١ =] س – $\frac{١}{٢}$ [+ ١

∴ د(س + ر) = د(س)

∴ الدالة دورية ودورها (١)

مثال (٢ – ١٩)

مثِّل الدالة : د(س) = جاس ، بيانياً ؛ ومن الرسم :

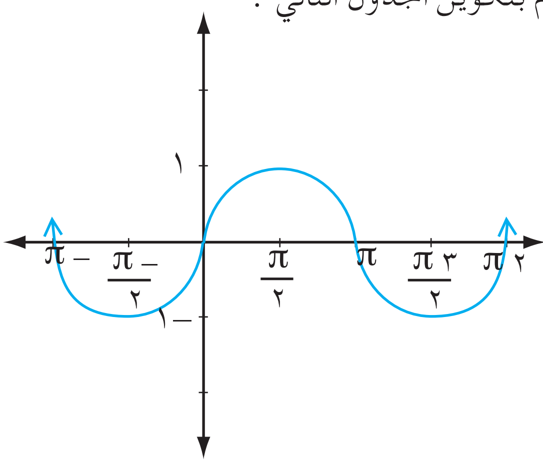
أ) أوجد مجموعة تعريفها ومداها .

ب) بيِّن أنها دورية ودورها ٢ π .

الحــــل :

أ) الدالة د(س) = جاس تسمَّى دالة مثلثية ولتمثيلها أولاً نقوم بتكوين الجدول التالي :

س	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	٣ $\frac{\pi}{٢}$	٢ π
جاس	٠	١	٠	–١	٠



شكل (٢ – ٩)

والآن يمكننا أن نقوم بتمثيلها كما في الشكل (٢ – ٩)

يلاحظ من الرسم : م . ت = ح .

المدى = [–١ ، ١] .

ب) والدالة د(س) = جاس دورية ودورها ٢ π .

ولإثبات ذلك يجب تحقق : د(س + ر) = د(س) .

∵ جا(س + ٢ ك π) = جاس ، ك ∈ ص ....(١) .

، جا (س + ر) = جاس ....(٢) .

وأصغر عدد حقيقي موجب هو ر = ٢ π . (بأخذ ك = ١)

∴ الدالة دورية ودورها = ٢ π . ويمكن ملاحظة ذلك على الرسم .

تدريب (٢ – ٧)

١) بيِّن أن الدالة د(س) = جتا س دورية ، وأوجد دورها مبيناً ذلك بالرسم .

٢) بيِّن أن الدالة د(س) = ظا س دورية ، ودورها π .

تمارين ومسائل (٢ - ٢)

أولاً : أعد تعريف كلٍّ من الدوال التالية وعيِّن مداها :

[١] $د(س) = |٢س - ٧|$.

[٢] $د(س) = |س + ٢| - ٤$.

[٣] $د(س) = \left|\frac{١}{٢} س\right| - ١$.

[٤] $د(س) = |٤ س^{٢} - ١٦|$.

[٥] $د(س) = |٢ س - ١| - ٣ + ٢ س$.

ثانياً : أوجد مجموعة تعريف ومدى كلٍّ من الدوال التالية :

[١] $د(س) = [س + ١١]$.

[٢] $د(س) = [\frac{١}{٢} س + ١]$.

ثالثاً : أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية كل على حدة :

[١] $|س + ٤| + ٢س + ٥ = ٠$.

[٢] $٣ \sqrt{س^{٢}} - ٢ |س| - ١ = ٠$.

[٣] $٢ |س + ١| - ٥ = ٠$.

[٤] $س^{٢} - ٥ |س| + ٦ = ٠$.

[٥] $[١ - ٣س] = -٥$.

[٦] $[\frac{١}{س}] = -٢$.

[٧] $[س] - س = ٠$.

[٨] $\frac{[س - ١]}{[س - ٣]} = \frac{١}{٢}$.

رابعاً : بيِّن نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك على مجموعة تعريف كل منها :

[١] $د(س) = ٣س - ٤س^{٣}$.

[٢] $د(س) = س^{٤} - ٥س^{٢} + ١$.

[٣] $د(س) = \frac{س^{٣} + ٢}{٢ س - ٣}$

[٤] $د(س) = ٢ س - جا ٣ س$.

[٥] $د(س) = \frac{س^{٢} + جتا ٢ س}{س^{٤} + ١}$.

$$[٦]\ \text{د(س)} = \begin{cases} \text{٢ س} & \text{، س} > ٠ \\ -\text{٢ س} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$$

$$[٧]\ \text{د(س)} = \text{س}^{٢}\ \text{جتاس} \ .$$

$$[٨]\ \text{د(س)} = \left(\frac{\text{١ + س}}{\text{١ − س}}\right)^{٣} + \left(\frac{\text{١ − س}}{\text{١ + س}}\right)^{٣} \ .$$

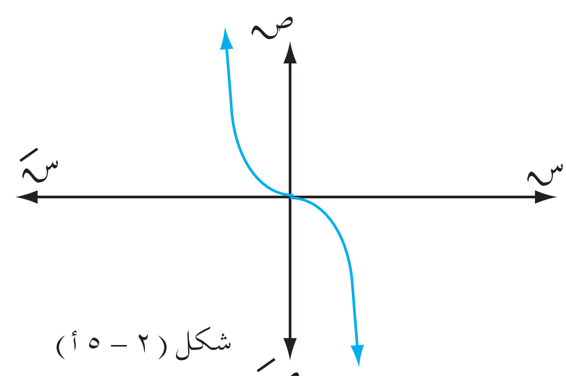
$$[٩]\ \text{د(س)} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + |\text{س}|}} \ .$$

$$[١٠]\ \text{د(س)} = \text{س}^{٣} \sqrt{\frac{١ - |\text{س}|}{١ + |\text{س}|}} \ \text{، س} \in [-١ \text{،} ١] .$$

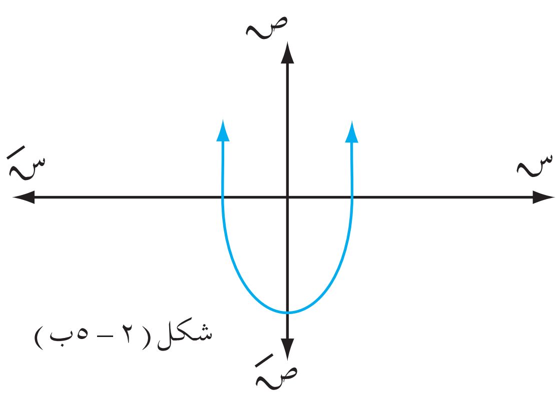
$$[١١]\ \text{د(س)} = \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{\text{س + جا س}} \ .$$

$$[١٢]\ \text{د(س)} = \begin{cases} \text{س + ٥} & \text{، س} \in [-٥ \text{،} -٢[\\ ٣ & \text{، س} \in [-٢ \text{،} ٢] \\ \text{٥ − س} & \text{، س} \in]٢ \text{،} ٥] \end{cases}$$

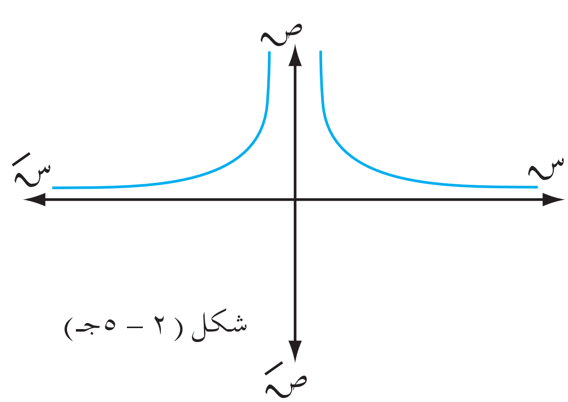
[١٣] بيِّن نوع الدوال المرسومة التالية من حيث كونها زوجية أو فردية لكل من:



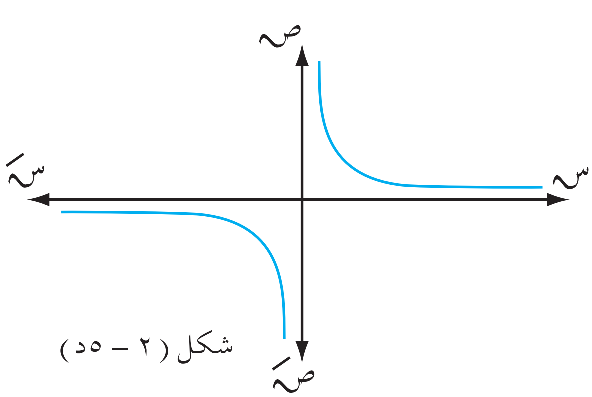
شكل (٢ – ٥ أ)



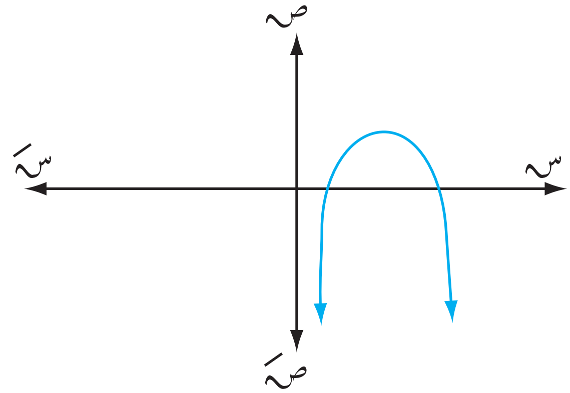
شكل (٢ – ٥ب)



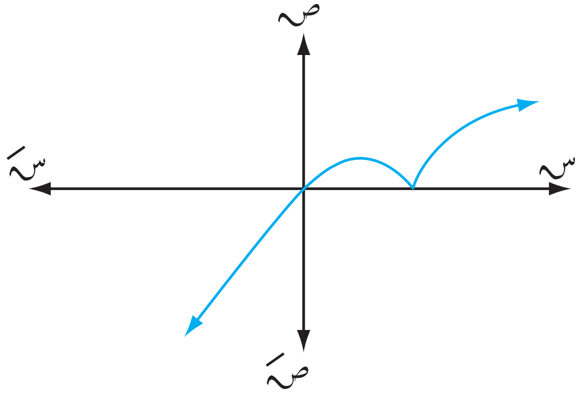
شكل (٢ – ٥جـ)



شكل (٢ – ٥د)



شكل (٢ – ٥هـ)



شكل (٢ – ٥و)

خامساً : مثّل الدوال التالية بيانياً .ومن الرسم أوجد المدى ومجموعة التعريف وبيّن أيّها زوجية وأيّها فردية :

[١] د(س) = س^{٢} − ٢س ، س ∈ [−١ ، ٣] .

[٢] د(س) = $\begin{cases} ٢س & ، س < ١ \\ ٣ & ، س \geq ١ \end{cases}$.

[٣] د(س) = | ٣س − ١ | ، −١ ≤ س < ٢ .

[٤] د(س) = [س − ٤] ، ٣ ≤ س < ٥ .

[٥] د(س) = $\sqrt{٤ - س}$.

[٦] د(س) = − | س − ١١ | .

[٧] د(س) = (س − ٢)^{٢} .

[٨] د(س) = | س − ٤ | + | س + ١ | + ٥ .

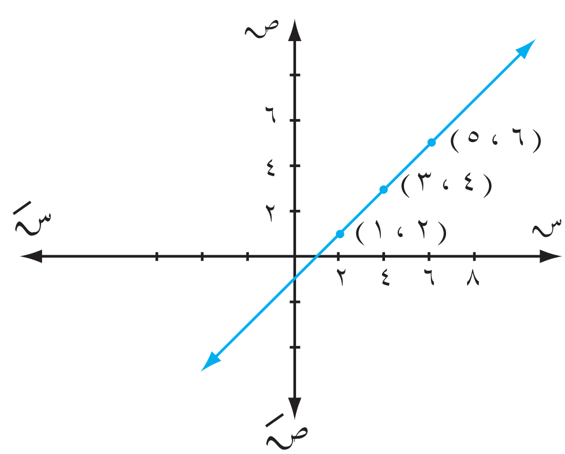
[٩] د(س) = $\begin{cases} -س & ، س \geq ٠ \\ [س] - ٣ & ، -٤ < س < ٠ \end{cases}$

[١٠] د(س) = جتا ٢ س .

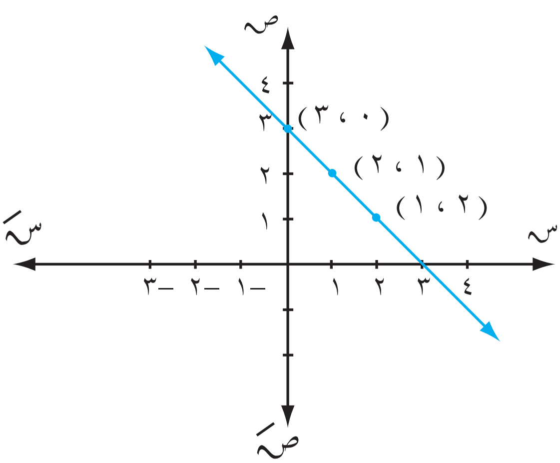
[١١] مثّل الدالة : د(س) = جتاس ، ثم بيّن أنها دورية وعيّن دورها .

٢ : ٣ اطّـــراد الـدوال

تأمل في الشكلين (٢– ١٠ أ) ، (٢– ١٠ب) ، ماذا تلاحظ ؟



شكل (٢ –١٠ أ)



شكل (٢ – ١٠ ب)

في الشكل (٢ – ١٠ أ) تلاحظ أن قيم الدالة د(س) والتي تكون مدى الدالة د مرتبة ترتيباً تصاعدياً مثل ترتيب عناصر المجال ، أي أن قيمة الدالة تتزايد بزيادة قيمة س ، نسمِّي مثل هذه الدالة دالة تزايدية .

وفي الشكل (٢ – ١٠ب) تلاحظ أن عناصر د (س) مرتبة ترتيباً تنازلياً معاكس لترتيب عناصر س ، أي أن قيمة الدالة تتناقص بزيادة قيمة س ، نسمِّي مثل هذه الدالة دالة تناقصية .

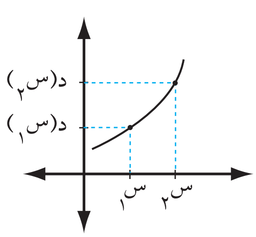
تعريف (٢ –٨)

لتكن د : م ← ح حيث م ⊂ ح ، يقال للدالة د :

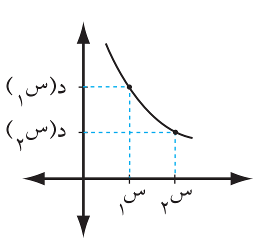
١ ■ تزايدية إذا كان ∀ $س_1$ ، $س_2$ ∈ م ، $س_1 < س_2$
⟸ د($س_1$) < د($س_2$) .

٢ ■ تناقصية إذا كان ∀ $س_1$ ، $س_2$ ∈ م ، $س_1 < س_2$
⟸ د($س_1$) > د($س_2$) .

نسمِّي تزايد وتناقص الدالة : اطراد الدالة .



شكل (٢ – ١١)



شكل (٢ – ١٢)

مثال (٢ − ٢٠)

ابحث اطراد الدوال التالية :

أ) د(س) = ٢س + ٣ ، ب) د(س) = ٢ − س ، جـ) د(س) = ٥ .

الحـــل :

أ) نفرض أن : $س_١$ ، $س_٢ \in ح$ ، $س_١ < س_٢$.

$\Leftarrow$ $٢س_١ < ٢س_٢$

$\Leftarrow$ $٢س_١ + ٣ < ٢س_٢ + ٣$

$\Leftarrow$ $د(س_١) < د(س_٢)$

من التعريف : بما أن $س_١ < س_٢$ $\Leftarrow$ $د(س_١) < د(س_٢)$ ، فالدالة تزايدية .

ب) نفرض أن $س_١$ ، $س_٢ \in ح$ ، $س_١ < س_٢$.

$\Leftarrow$ $-س_١ > -س_٢$

$\Leftarrow$ $٢ - س_١ > ٢ - س_٢$

$\Leftarrow$ $د(س_١) > د(س_٢)$

من التعريف : بما أن $س_١ < س_٢$ $\Leftarrow$ $د(س_١) > د(س_٢)$ فالدالة تناقصية .

جـ) د(س) = ٥ ، دالة ثابتة ؛ فهي دالة لا تزايدية ولا تناقصية .

مثال (٢ − ٢١)

ابحث اطراد الدوال التالية ومثِّلها بيانياً :

أ) هـ(س) = $\frac{١}{س}$ ، ب) ر(س) = |٧ − س| .

الحـــل :

أ) هـ(س) = $\frac{١}{س}$ ، م.ت = ح / {٠} =]−∞ ، ٠[∪]٠ ، +∞[= $ح^- \cup ح^+$

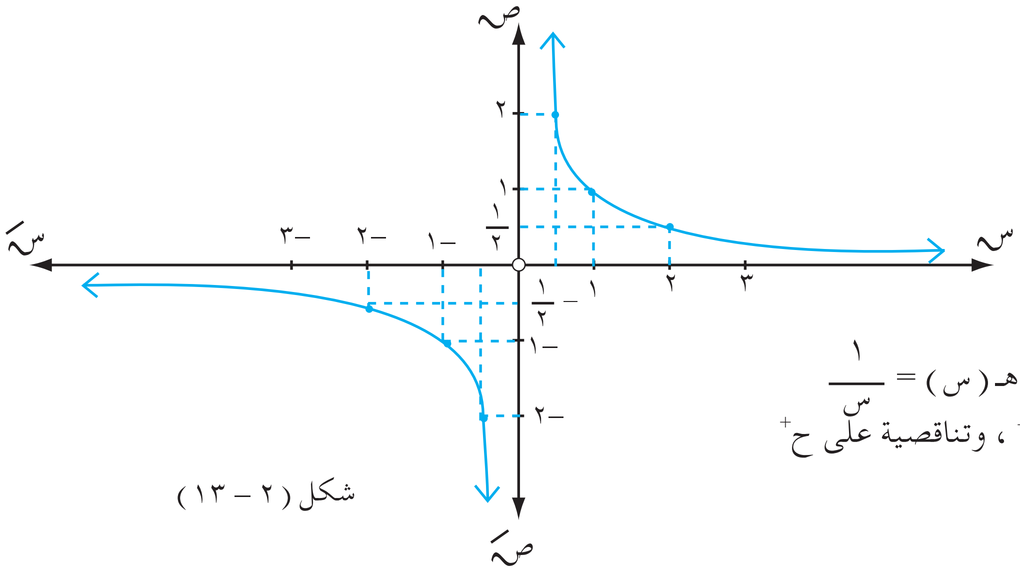
نفرض $س_١$ ، $س_٢ \in ح^+$ ، $س_١ < س_٢$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{س_١} > \frac{١}{س_٢}$ $\Leftarrow$ $د(س_١) > د(س_٢)$.

الدالة هـ تناقصية على الفترة]٠ ، +∞[

نفرض أن $س_١$ ، $س_٢ \in ح^-$ ، $س_١ < س_٢$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{س_١} > \frac{١}{س_٢}$ ∴ الدالة تناقصية على]−∞،٠[.

ويمكن تمثيل هذه الدالة بعد تكوين الجدول التالي :

س	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٢}$	−١	−٢
د(س)	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٣	−٣	−٢	−١	$-\frac{١}{٢}$



شكل (٢ - ١٣)

نُلاحظ أن الدالة هـ(س) = $\frac{١}{س}$

تناقصية على $ح^-$ ، وتناقصية على $ح^+$

ب) د(س) = |٧ - س| .

يعاد تعريف الدالة :

د(س) = |٧ - س| = { ٧ - س ، س ≤ ٧ ؛ س - ٧ ، س ≥ ٧ }

لدراسة اطراد الدالة :

١ ■ لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈ [٧ ، ∞ [

$س_1$ < $س_2$ ⇐ $س_1$ - ٧ < $س_2$ - ٧

⇐ د($س_1$) < د($س_2$) فالدالة تزايدية في الفترة [٧ ، ∞ [

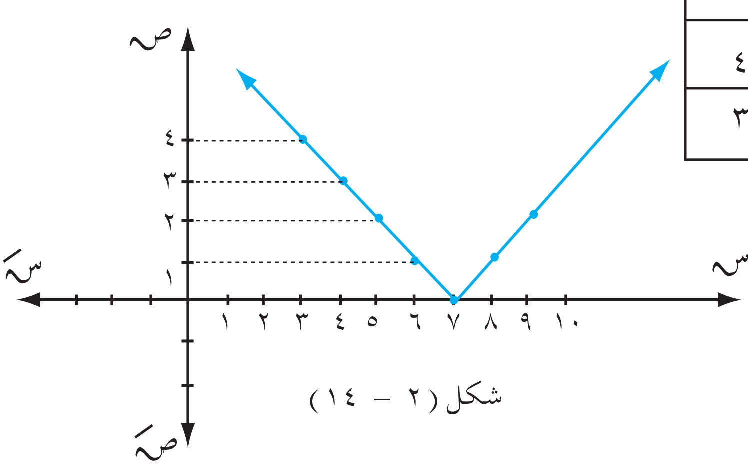
٢ ■ لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈] -∞ ، ٧]

∵ $س_1$ < $س_2$ ⇐ -$س_1$ > -$س_2$

⇐ ٧ - $س_1$ > ٧ - $س_2$

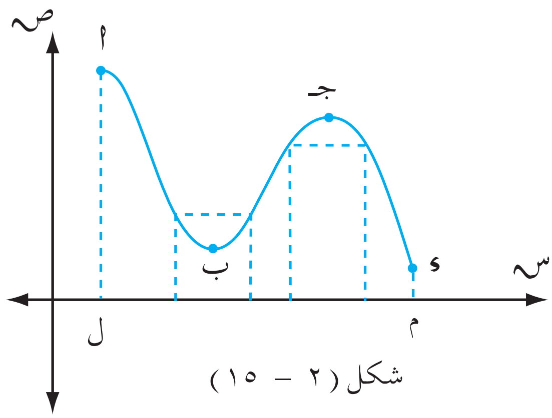
⇐ د($س_1$) > د($س_2$) فالدالة تناقصية في الفترة] -∞ ، ٧]

	س ≥ ٧			س ≤ ٧		
س	٩	٨	٧	٦	٥	٤
د(س)	٢	١	٠	١	٢	٣



شكل (٢ - ١٤)

القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة :



شكل (٢ - ١٥)

تأمل الشكل (٢ - ١٥) إنه يمثل دالة على الفترة [ل ، م] $\subset$ ح تلاحظ أن جـ أخذت قيمة عظمى ، ولكن ليست أعلى قيمة، فنسمي جـ قيمة عظمى نسبية (محلية) .

أمّا النقطة أ أخذت قيمة أعلى من أي نقطة للدالة فنسمّي أ قيمة عظمى مطلقة . أي أن : $\forall$ س $\in$ [ل ، م] النقطة أ لها قيمة أعلى من أي نقطة (س ، د(س)) للدالة .

بالمثل النقطة ب أخذت قيمة صغرى ولكنها ليست أصغر قيمة لهذه الدالة، فتسمى ب قيمة صغرى نسبية « محلية »؛ والنقطة ء أخذت قيمة أصغر منها وأصغر من أي نقطة للدالة فتسمِّي ء قيمة صغرى مطلقة ، أي $\forall$ س $\in$ [ل ، م] النقطة ء لها قيمة أصغر من أي نقطة (س ، د(س)) للدالة .

تعريف (٢ - ٩)

إذا كانت هـ دالة معرَّفة على ف $\subset$ ح .

١ ■ نقول إن لهذه الدالة قيمة عظمى مطلقة عند ب فيما إذا كان $\forall$ س $\in$ ف ، هـ(س) $\geq$ هـ(ب) .

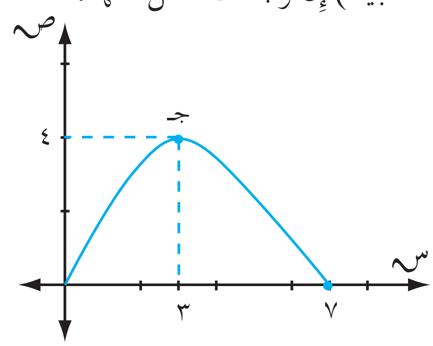
٢ ■ نقول إن للدالة هـ قيمة عظمى نسبية عند جـ فيما إذا أمكن إيجاد عددين أ ، ب بحيث يكون [أ ، ب] $\subset$ ف ، أ < جـ < ب ويتحقق ما يلي :
$\forall$ س $\in$ [أ ، ب] ، هـ(س) $\leq$ هـ(جـ) .

٣ ■ نقول إن للدالة قيمة صغرى مطلقة عند ء فيما إذا كان $\forall$ س $\in$ ف ، هـ(س) $\leq$ هـ(ء) .

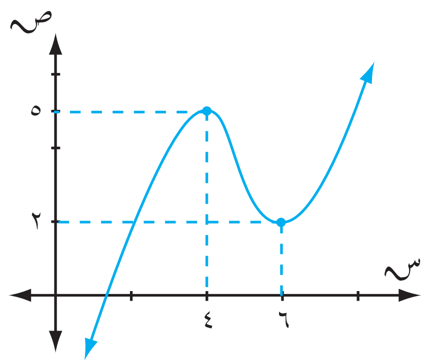
٤ ■ نقول إن للدالة هـ قيمة صغرى نسبية عند و فيما إذا أمكن إيجاد عددين أ ، ب بحيث يكون [أ ، ب] $\subset$ ف ، أ < و < ب ويتحقق ما يلي :
$\forall$ س $\in$ [أ ، ب] ، هـ(س) $\leq$ هـ(و) .

مثال (٢ – ٢٢)

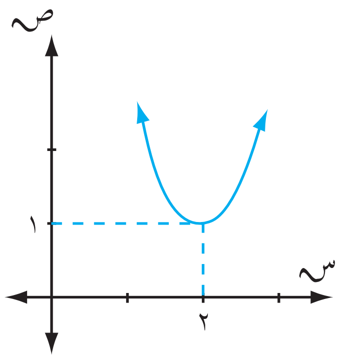
بين اطراد الدوال المرسومة في الأشكال [٢ –١٦ (أ – جـ)] ، ثم أوجد القيم العظمى والصغرى (المطلقة والنسبية) إن وجدت لكل منها :



شكل (٢ – ١٦ أ)



شكل (٢ – ١٦ب)



شكل (٢ – ١٦جـ)

الحـــل :

١ ■ يلاحظ في الشكل (٢ –١٦ أ) أن الدالة تزايدية في الفترة [٠ ، ٣] وتناقصية على الفترة [٣ ، ٧]، وأن ٤ قيمة عظمى مطلقة للدالة .

٢ ■ يلاحظ في الشكل (٢ –١٦ ب) أن الدالة تزايدية على الفترة] – ∞ ، ٤] وتناقصية على الفترة [٤ ، ٦] وتزايدية على الفترة [٦ ، ∞ [وأن ٥ قيمة عظمى نسبية، وأنه لايوجد لهذه الدالة قيمة عظمى مطلقة لأنها تسعى نحو + ∞ كذلك أن ٢ قيمة صغرى نسبية وأنه لا يوجد لهذه الدالة قيمة صغرى مطلقة لأنها تسعى نحو – ∞ .

٣ ■ يلاحظ في الشكل (٢ – ١٦جـ) أن الدالة تناقصية في الفترة] – ∞ ، ٢] وتزايدية في الفترة [٢ ، ∞ [و أن ١ قيمة صغرى مطلقة للدالة .

الدالة المحدودة :

بعض الدوال قد يكون مداها محصوراً بين عددين من المجال المقابل ، تسمَّى مثل هذه الدوال دوالاً محدودة كما أن بعضها يكون محدوداً من أعلى أو من أسفل .

تعريف (٢ – ١٠)

نقول إنّ الدالة د المعرّفة على ﻫ ⊃ ح :

١ ■ محدودة من أعلى إذا وجد عدد حقيقي ل بحيث د(س) ≤ ل ، ∀ س ∈ ﻫ ، ويسمَّى العدد ل حداً علوياً للدالة د .

٢ ■ محدودة من أسفل (أدنى) إذا وجد عدد حقيقي ك بحيث د(س) ≥ ك ، ∀ س ∈ ﻫ ، ويسمَّى العدد ك حداً سفلياً للدالة د .

٣ ■ محدودة إذا كانت د محدودة من أعلى ومن أسفل ، أي يوجد عددان حقيقيان ك ، ل ، بحيث يكون (ك ≤ د (س) ≤ ل) ∀ س ∈ ﻫ

مثال (٢ – ٢٣)

أثبت أن : أ) د(س) = $\sqrt{س}$ محدودة من أسفل . ب) د(س) = $\frac{س^٢}{س^٢ + ٢}$ محدودة .

الحـــل :

أ) د معرفة بشرط س ≥ ٠ .

∴ م . ت للدالة د = [٠ ، ∞ [والمدى = [٠ ، ∞ [

∴ د(س) ≥ ٠ ، ∀ س ∈ [٠ ، ∞ [= و .

من مجموعة التعريف نجد أن : ٠ ≤ س < ∞

∴ ٠ ≤ $\sqrt{س}$ < ∞ .

∴ ٠ ≤ ص < ∞ .

وبالتالي فإن الدالة محددة من أسفل وليست محددة من أعلى .

ب) م . ت للدالة د(س) = $\frac{س^٢}{س^٢ + ٢}$ هي ح .

∴ ∀ س ∈ ح ⟸ ٠ ≤ $س^٢$ < $س^٢$ + ٢ . . . لماذا ؟

⟸ $\frac{٠}{س^٢ + ٢}$ ≤ $\frac{س^٢}{س^٢ + ٢}$ < $\frac{س^٢ + ٢}{س^٢ + ٢}$.

⟸ ٠ ≤ د(س) < ١ .

∴ الدالة محدودة ، ومداها [٠ ، ١ [

مثال (٢ – ٢٥)

أثبت أن الدالة : د(س) = $س^٢$ – ٤س + ٧ محدودة في [–١ ، ٢] ثم عيِّن حدَّيها الأعلى والأدنى .

الحـــل :

د(س) = $س^٢$ – ٤س + ٧ .

⟸ د(س) = ($س^٢$ – ٤س + ٤) + ٧ – ٤ بإكمال مربع

د(س) = $(س – ٢)^٢$ + ٣ .

من مجموعة التعريف –١ ≤ س ≤ ٢ ⟸ –٣ ≤ س – ٢ ≤ ٠

⟸ ٠ ≤ $(س – ٢)^٢$ ≤ ٩

⟸ ٣ ≤ $(س – ٢)^٢$ + ٣ ≤ ١٢

∴ الدالة محدودة في الفترة [–١ ، ٢] وحدها الأدنى = ٣ ، وحدها الأعلى = ١٢

تمارين ومسائل (٢ – ٣)

[١] ادرس اطراد الدوال التالية :

■١ $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س} - ١$

■٢ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ١$

■٣ $\text{د}(\text{س}) = ٤ - \text{س}^{٢}$

■٤ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥$

■٥ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$

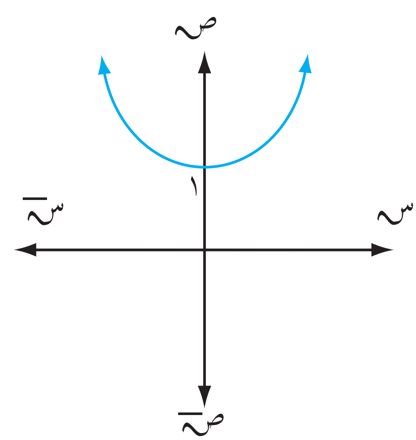
■٦ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\dfrac{١}{\text{س}^{٣} + ١}}$

■٧ $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} - ٣|$

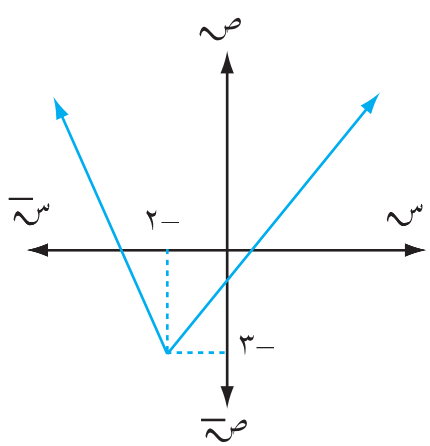
■٨ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٢}$.

■٩ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ٥ & ، \quad \text{س} \geq ٢ \\ ٢ - \text{س} & ، \quad \text{س} < ٢ \end{cases}$

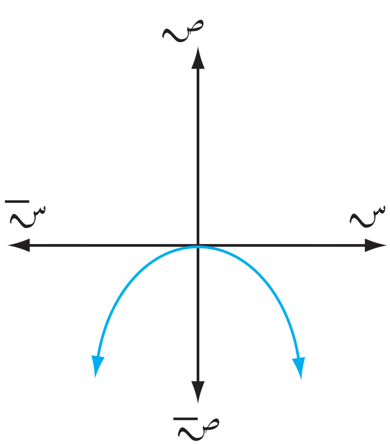
[٢] ابحث اطراد الدوال المرسومة التالية ، ثم أوجد مجموعة تعريفها ومداها :



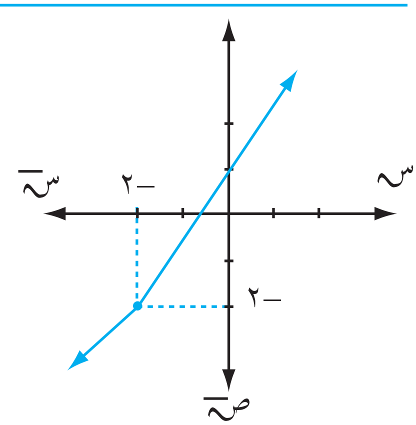
شكل (٢ – ١٧ أ)



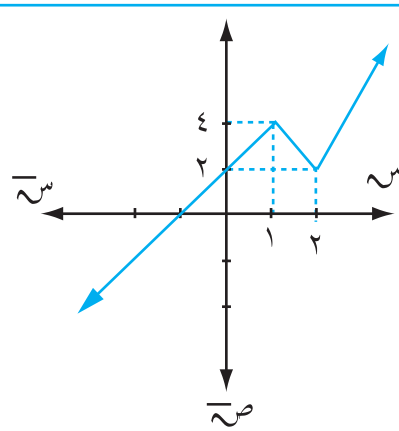
شكل (٢ – ١٧ ب)



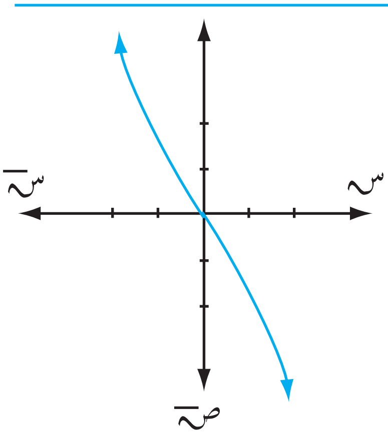
شكل (٢ – ١٧ جـ)



شكل (٢ – ١٧د)



شكل (٢ – ١٧ هـ)



شكل (٢ – ١٧و)

[٣] مثِّل الدوال التالية ، ومن الرسم أوجد المدى ، وابحث اطراد كل منها :

■١ $د(س) = س^{٢} - ٢س - ٣$.

■٢ $د(س) = ٦س - س^{٢} - ٥$.

■٣ $د(س) = (س + ١)^{٢} - ٢$.

■٤ $د(س) = ٣ - (س - ٢)^{٢}$.

■٥ $د(س) = ٢ + س\ |س|$.

■٦ $د(س) = ٤ - (س + ٢)^{٢}$.

■٧ $د(س) = \begin{cases} -\frac{١}{٢}س &، س \geq ٠ \\ \frac{١}{٢}س &، س < ٠ \end{cases}$

[٤] أثبت أن الدوال التالية محدودة وأوجد مداها :

■١ $د(س) = س^{٢} - ١$.

■٢ $د(س) = س^{٢} + ٥س - ٣$ في $[-١ ، ٢]$.

■٣ $د(س) = \frac{١}{س^{٢} + ٢}$.

■٤ $د(س) = \frac{٣}{٢س^{٢} + ١}$.

■٥ $د(س) = \frac{٢س^{٢} + ١}{٣س^{٢} + ١}$.

■٦ $د(س) = \frac{١}{٢ + جا\ س}$.

■٧ $د(س) = \frac{٩}{\sqrt{٣س^{٢} + ٢}}$.

٣ : ١ المتتاليات

المتتالية هي مجموعة من العناصر موضوعة في ترتيب متتال ، فمثلاً أشهر العام الميلادي هي : يناير ، فبراير ، مارس ، أبريل ، . . . ، ديسمبر . . . إلخ.

ويمكن وضعها بالصورة :

{(١ ، يناير) ، (٢ ، فبراير) ، (٣ ، مارس) ، (٤ ، أبريل) ، . . . ، (١٢ ، ديسمبر) } .

ويسمى هذا الوضع ببيان المتتالية . فإذا أخذنا (٤ ، أبريل) فمعنى ذلك أن الشهر الرابع من التقويم الميلادي هو أبريل . أي أن المتتالية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية (ط*) .

لتكن ح دالة معرفة كالتالي :

$$ح(ن) = \frac{١}{ن} ، ن \in ط^* \qquad .... (١)$$

نلاحظ أن : ح (ن) دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية (ط*) وأن :

$$ح(١) = ١ \quad ، \quad ح(٢) = \frac{١}{٢} \quad ، \quad ح(٣) = \frac{١}{٣} \quad ، \quad ح(٤) = \frac{١}{٤} \quad ، \; ... \; إلخ.$$

ويمكن كتابة هذه الدالة بصورة مجموعة من الأزواج المرتبة :

$\{(١ ، ١) ، (٢ ، \frac{١}{٢}) ، (٣ ، \frac{١}{٣}) ، (٤ ، \frac{١}{٤}) ، ...\}$ ، ولأن مجال الدالة هو ط* ، فإنه يمكن كتابة مداها مرتبا على الصورة : ح (١) ، ح (٢) ، ح (٣) ، ح (٤) ، . . . الخ . أي أن مدى الدالة هـو :

$١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}$ ، . . . إلخ ، وهي متتالية غير منتهية .

ولتكن لدينا الدالة : $ح(ن) = ٢ن + ٣ \;،\; ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\} \qquad .... (٢)$

إنها مجموعة من الأزواج المرتبة على الصورة: {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ١١) ، (٥ ، ١٣) } ، وأن مدى هذه الدالة هو مجموعة أعداد يمكن ترتيبها على النحو : ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ .

ويسمى الترتيب أعلاه متتالية منتهية ، لأن مجال هذه الدالة مجموعة جزئية منتهية من ط* على المجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، . . .}.

تعريف (٣ – ١)

المتتالية هي دالة حقيقية مجالها ط* أو مجموعة جزئية منها على الشكل {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . ، م}

بين أيًّا من الدوال الآتية تمثل متتالية :

مثال (٣ − ١)

أ) $ح(ن) = \frac{ن}{٣} - ١$ ، $ن \in ط^*$.

ب) $هـ(ن) = \frac{ن}{ن+١}$ ، $ن \in \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$.

جـ) $ت(ن) = ن$ ، $ن \in ح$

الحـــل :

أ) ح (ن) متتالية لأن مجال الدالة مجموعة الأعداد الطبيعية ($ط^*$) .

ب) هـ (ن) متتالية لأن مجال الدالة مجموعة جزئية من $ط^*$.

جـ) ت (ن) ليست متتالية لأن مجال الدالة ليست $ط^*$.

مثال (٣ − ٢)

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات الآتية :

أ) $ك(ن) = ن^٢$ ، $ن \in ط^*$

ب) $هـ(ن) = \frac{(-١)^ن}{ن}$ ، $ن \in ط^*$

الحـــل :

أ) ك(١) = ١ ، ك (٢) = ٤ ، ك (٣) = ٩ ، ك (٤) = ١٦ إذن الحدود الأربعة الأولى من ك(ن) هي :
١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦

ب) هـ (١) = −١ ، هـ(٢) = $\frac{١}{٢}$ ، هـ(٣) = $-\frac{١}{٣}$ ، هـ(٤) = $\frac{١}{٤}$ إذن الحدود الأربعة الأولى من هـ(ن) هي : −١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$

الحد العام للمتتالية :

تأمل المتتالية : ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ... نجد أن :

ح(١) = ١ = $١^٢$ ، ح(٢) = ٤ = $٢^٢$.

ح(٣) = ٩ = $٣^٢$ ، ح(٤) = ١٦ = $٤^٢$ ، وهكذا ...

فالحد الذي ترتيبه ن (الحد النوني) هو ح(ن) = $ن^٢$ ،

ويطلق عادة على الحد النوني للمتتالية بالحد العام. وسنرمز له بالرمز $ح_ن$. أي أن : ح (ن) = $ح_ن$ ،

وسنكتب $ح_١$ بدلا من ح (١) ، $ح_٢$ بدلاً من ح(٢) ... وهكذا .

ونستخدم الرمز $\langle$ ح$_{ن}$ $\rangle$ لنعني المتتالية التي حدها العام ح$_{ن}$ حيث ن رتبة الحد، ونكتب المتتالية على الشكل: $\langle$ ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ح$_{٣}$ ، ... ، ح$_{ن}$ ، ... $\rangle$.

وإذا عرفنا قاعدة الحد العام للمتتالية نستطيع كتابة المتتالية بالتعويض عن ن بـ ١ ، ٢ ، ٣ ، ... .

مثال (٣ – ٣)

اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات التي الحد العام لكل منها :

أ) $\left\langle \frac{(-1)^{ن}}{٢ن - ١} \right\rangle$ ، ب) $\left\langle ١ + \frac{١}{\sqrt{ن}} \right\rangle$

جـ) $\left\langle \text{جا} \frac{ن\pi}{٢} \right\rangle$.

الحل :

أ) $ح_{ن} = \frac{(-1)^{ن}}{٢ن - ١}$

نجد أن: $ح_{١} = \frac{(-١)}{٢ - ١} = -١$ ، $ح_{٢} = \frac{(-١)^{٢}}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$.

$ح_{٣} = \frac{(-١)^{٣}}{٦ - ١} = \frac{-١}{٥}$ ، $ح_{٤} = \frac{(-١)^{٤}}{٨ - ١} = \frac{١}{٧}$

$ح_{٥} = \frac{(-١)^{٥}}{١٠ - ١} = \frac{-١}{٩}$.

إذن المتتالية هي : $\left\langle -١ ، \frac{١}{٣} ، -\frac{١}{٥} ، \frac{١}{٧} ، -\frac{١}{٩} ، ... \right\rangle$

ب) $ح_{١} = ١ + \frac{١}{١} = ٢$ ، $ح_{٢} = ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}} \simeq ١{,}٧١$

$ح_{٣} = ١ + \frac{١}{\sqrt{٣}} \simeq ١{,}٥٨$ ، $ح_{٤} = ١ + \frac{١}{\sqrt{٤}} \simeq ١{,}٥٠$

$ح_{٥} = ١ + \frac{١}{\sqrt{٥}} \simeq ١{,}٤٥$.

إذن المتتالية هي $\langle$ ٢ ، ١,٧١ ، ١,٥٨ ، ١,٥٠ ، ١,٤٥ ، ... $\rangle$.

جـ) $ح_{١} = \text{جا} \frac{\pi}{٢} = ١$ ، $ح_{٢} = \text{جا} \pi = ٠$

$ح_{٣} = \text{جا} \frac{٣\pi}{٢} = -١$ ، $ح_{٤} = \text{جا} ٢\pi = ٠$

$ح_٥ = جا \frac{\pi}{٢} = ١$ ، ...

إذن المتتالية هي 〈 ١ ، ٠ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ... 〉 .

ملاحظة : بعض المتتاليات ليس لديها حد عام، فمثلاً متتالية الأعداد الأولية لا يُعرف لها حد عام حتى الآن .

لتكن $ح_د$ متتالية حدها الأول = $ح_١ = ١$ ، $ح_د = ح_{د-١} - ٢$ ، $د \geq ٢$

إذن :

$ح_٢ = ح_١ - ٢ = ١ - ٢ = -١$

$ح_٣ = ح_٢ - ٢ = -١ - ٢ = -٣$

$ح_٤ = ح_٣ - ٢ = -٣ - ٢ = -٥$

نلاحظ أن بعض المتتاليات نحصل عليها بتوليد كل حد من الحد الذي يسبقه .

تدريب (٣ − ١)

اكتب الحدود الستة الأولى والحد النوني للمتتالية المعرفة كالآتي :

$ح_١ = ٣$ ، $ح_{م+١} = ٢ ح_م$ ، $م \geq ١$.

بعض أنواع المتتاليات :

المتتالية التزايدية، والمتتالية التناقصية :

تأمل المتتالية : 〈 −٥ ، −١ ، ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... 〉

نجد أن : $-٥ < -١$ أي أن $ح_١ < ح_٢$

و $-١ < ٣$ أي أن $ح_٢ < ح_٣$

و $٣ < ٧$ أي أن $ح_٣ < ح_٤$

... وهكذا .

نلاحظ أن كل حد من حدود المتتالية أصغر من الحد الذي يليه مباشرة، وتسمى مثل هذه المتتالية متتالية تزايدية .

تعريف (٣−٢)

تسمى المتتالية 〈 $ح_د$ 〉 تزايدية إذا كان $ح_د < ح_{د+١}$ $\forall$ $د \in ط^*$.

أما في المتتالية :

〈 $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ... 〉

نجد أن :

$\frac{١}{٢} > \frac{١}{٣}$ أي أن $ح_١ > ح_٢$

و $\frac{١}{٣} > \frac{١}{٤}$ أي أن $ح_٢ > ح_٣$ ... وهكذا .

أي أن كل حد من حدود المتتالية أكبر من الحد الذي يليه مباشرة، وتسمى مثل هذه المتتالية متتالية تناقصية .

تعريف (٣-٣)

تسمى المتتالية $\langle ح_د \rangle$ تناقصية إذا كان $ح_د > ح_{د+١}$ $\forall$ د $\in$ ط* .

مثال (٣ - ٤)

بين أياً من المتتاليات التالية تزايدية و أيا منها تناقصية وأياً منها غير ذلك:

أ) $\langle د + ١ \rangle$ ، ب) $\langle \frac{١}{٢ د + ١} \rangle$ ،

جـ) $\langle (-١)^د (٣ د) \rangle$.

الحـــل :

أ) $ح_د = د + ١$ ، باستبدال د بـ د + ١ نجد أن: $ح_{د+١} = (د + ١) + ١ = د + ٢$

وحيث أن :

$د + ١ < د + ٢$ لكل د $\in$ ط* .

المتتالية $\langle د + ١ \rangle$ تزايدية .

ب) $ح_د = \frac{١}{٢ د + ١}$ ، $ح_{د+١} = \frac{١}{٢(د + ١) + ١} = \frac{١}{٢ د + ٣}$.

وحيث إن :

$\frac{١}{٢ د + ١} > \frac{١}{٢ د + ٣}$ لكل د $\in$ ط*

$\therefore$ المتتالية $\langle \frac{١}{٢ د + ١} \rangle$ تناقصية .

جـ) $ح_د = (-١)^د (٣ د)$ ،

نجد أن :

$ح_١ = -٣$ ، $ح_٢ = ٦$ ، $ح_٣ = -٩$ ، $ح_٤ = ١٢$ ، ...

نلاحظ من حدود المتتالية أن المتتالية لا تزايدية ولا تناقصية

المتتالية الثابتة :

هي متتاليـة جميع حـدودها متسـاويـة ، فمثلاً : إذا كان $ح_{ـد} = أ$ ؛ حيث أ عدد حقيقي فإن المتتالية ⟨ $ح_{ـد}$ ⟩ هي : ⟨ أ ، أ ، أ ، أ ، ... ⟩ ، وقد تكون المتتالية الثابتة منتهية وقد تكون غير منتهية.

التمثيل البياني للمتتالية :

تعرف أن المتتالية دالة مجالها مجموعة الأعـداد الطبيعيـة ($ط^*$) ، أو مجموعـة جزئيـة منهـا على الصـورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، م } ، وبذلك فإنّه بالإمكان تمثيل المتتالية بيانياً على المستوى الديكارتي .

(وذلك من خلال تمثيل الدالة $ح_{ـد} = ح\,(ـد)$ ، ـد $\in$ $ط^*$) ، يتم تمثيل المتتالية من خلال تمثيل الأزواج المرتبة بنقاط منفصلة في المستوى الديكارتي على النحو التالي :

(١ ، $ح_١$) ، (٢ ، $ح_٢$) ، (٣ ، $ح_٣$) ، ... ، (ـد ، $ح_{ـد}$) ، ...

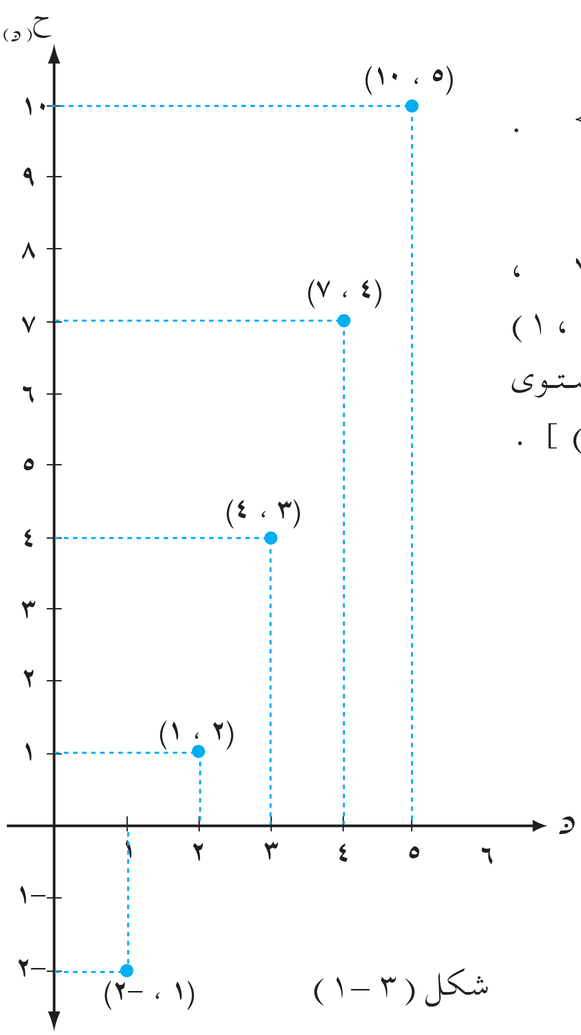
مثال (٣ – ٥)

ارسم بيان المتتالية ⟨ $ح_{ـد}$ ⟩ ؛ حيث :

$ح_{ـد} = ٣\,ـد - ٥$ ، ـد $\in$ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } .

الحـــل :

$ح_١ = -٢$ ، $ح_٢ = ١$ ، $ح_٣ = ٤$ ، $ح_٤ = ٧$ ، $ح_٥ = ١٠$ ، وبتمثيل الأزواج المرتبة : (١ ، –٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٧) ، (٥ ، ١٠) بنقاط في المستوى الديكارتي نحصل على بيان المتتالية [انظر الشكل (٣ – ١)] .



شكل (٣ – ١)

ملاحظة : عندما تكون المتتالية غير منتهية؛ فإننا لا يمكن أن نرسم بيانها كاملاً ؛ لذلك نكتفي برسم بيانها عند حدودها الأولى .

المتسلسلة :

علمت أن المتتالية هي أعداد مرتبة بترتيب معين ، وهذا الترتيب قد يكون معطى لنا حسب قانون معين ، أو قاعدة ما ، أو حسب قاعدة علينا اكتشافها . وقد أسمينا هذه الأعداد المرتبة حدود المتتالية، ويفصل بين كل حدين متتاليين الفاصلة « ، » وإذا وضعنا إشارة الجمع مكان الفواصل بين حدود المتتالية؛ فإننا نحصل على مفهوم المتسلسلة .

وتكون المتسلسلة غير منتهية إذا نتجت من متتالية غير منتهية فالمتتالية $\langle ح_{١} ، ح_{٢} ، ح_{٣} ، \ldots ، ح_{د} ، \ldots \rangle$ هي متتالية غير منتهية والمتسلسلة الناتجة منها بوضع إشارة الجمع مكان الفواصل هي :

$$ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \ldots + ح_{د} + \ldots$$

أما إذا كانت $\langle ح_{١} ، ح_{٢} ، ح_{٣} ، \ldots ، ح_{د} \rangle$ متتالية منتهية فإن :

$ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \ldots + ح_{د}$ متسلسلة منتهية .

فالمتسلسلة : $١ + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠^{٢}} + \ldots$ متسلسلة لا نهائية حدها العام $\frac{١}{(١٠)^{د-١}}$ . .

أما المتسلسلة :

$\frac{١}{٢} ١ + \frac{١}{٣} ٢ + \frac{١}{٤} ٣ + \ldots + (\frac{١}{(د+١)} د)$ متسلسلة منتهية حيث حـدها العام $\frac{١}{د+١} د$

ويمكن التعبير عن المتسلسلة غير المنتهية التي حدها العام $ح_{د}$ باستخدام رمز المجموع مجـ على النحو :

$$\sum_{د=١}^{\infty} ح_{د} \ .$$

والمتسلسلة المنتهية (عدد حدودها م) تكتب على الصورة : $\sum_{د=١}^{م} ح_{د}$

تمارين ومسائل (٣ – ١)

[١] بين أيًّا من الدوال التالية تمثل متتالية ، مع ذكر السبب :

أ) $ح(ن) = ٢^{ن}$ ، $ن \in ص$.

ب) $ح(ن) = ن^{٢} - ٣ن$ ، $ن \in \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$.

جـ) $ح(ن) = \frac{٣}{٢ن}$ ، $ن \in ط$.

د) $ح(ن) = \sqrt{ن + ٣}$ ، $ن \in ط^{*}$.

هـ) $ح(ن) = \frac{١}{(ن + ١)^{٢}}$ ، $ن \in ح$.

[٢] اكتب كلاً من المتتاليات التالية مكتفياً بحدودها الخمسة الأولى :

أ) $\langle هـ(ن) \rangle$ حيث $هـ(ن) = ٢^{ن} - ٢ن$.

ب) $\langle د(ن) \rangle$ حيث $د(ن) = (-١)^{ن+١} ن^{٢}$.

جـ) $\langle ل(ن) \rangle$ حيث $ل(ن) = (-١)^{ن} (٢ن + ١)$.

د) $\left\langle \frac{٣ن - ١}{٤ن + ٥} \right\rangle$

هـ) $\left\langle \frac{ن}{٢^{ن}} \right\rangle$

[٣] اكتب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات التي حدها العام معطى كالتالي، ثم أوجد الحد العاشر فيها :

أ) $د(ن) = \frac{٢ن}{ن^{٢} + ١}$ ، ب) $د(ن) = ١ - \frac{٢}{ن}$ ،

جـ) $د(ن) = جتا \frac{\pi}{٢} ن$ ، د) $د(ن) = \frac{٣}{ن(ن + ١)}$ ،

هـ) $د(ن) = \frac{٢}{٥}$.

[٤] أوجد الحدين العاشر والرابع والخمسين لكل من المتتاليات إن وجد :

أ) $\left\langle \frac{ن}{ن + ١} \right\rangle$ ، ب) $\langle ١٢ \rangle$ ، جـ) $(-١)^{ن} (٣ن + ٢)$.

[٥] اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية مما يأتي ثم مثلها بيانياً .

أ) $\langle ٢ن + ١ \rangle$ ، ب) $\langle ن^{٢} - ١ \rangle$ ،

جـ) $\langle (-١)^{ن} ن \rangle$ ، د) $\left\langle \frac{١}{ن(ن + ١)} \right\rangle$ ،

هـ) $\langle ٢^{ن} - ٢ن \rangle$.

[٦] اكتب الستة الحدود الأولى لكل متتالية معطاة بالصيغ التالية، حيث $د \geq ٢$:

أ) $ح_١ = ١$ ، $ح_د = ٣ ح_{د-١} - ١$

ب) $ح_١ = ١$ ، $ح_د = ١ + \frac{١}{ح_{د-١}}$

جـ) $ح_١ = -٢,٢٤$ ، $ح_د = ١,٢ ح_{د-١} + ٢,٢$

د) $ح_١ = \frac{١}{٣}$ ، $ح_د = \frac{١}{٢} ح_{د-١} + ٢$

هـ) $ح_١ = ٣,٣٤$ ، $ح_د = ٢,٢ ح_{د-١} - ١$.

[٧] اكتب الحد العام لكل متتالية من المتتاليات الآتية :

أ) ⟨ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ⟩

ب) ⟨ (١ × ٢) ، (٣ × ٤) ، (٥ × ٦) ، ... ⟩

جـ) ⟨ ١ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٤}$ ، ... ⟩

د) ⟨ أ ، أر ، $أر^٢$ ، $أر^٣$ ، ... ⟩

هـ) ⟨ $\frac{١}{٢}$ ، صفر ، $-\frac{١}{٢}$ ، -١ ، ... ⟩

و) ⟨ أ ، أ + د ، أ + ٢ د ، أ + ٣ د ، ... ⟩

[٨] حدّد أيًّا من المتتاليات الآتية تزايدية، وأيًّا منها تناقصية أو غير ذلك :

أ) ⟨ $١ + \frac{١}{د}$ ⟩ ، ب) ⟨ $(٣)^د$ ⟩ ،

جـ) ⟨ $(\frac{١}{٢})^د$ ⟩ ، د) ⟨ جتا د π ⟩ ،

٩) اكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية المعطاة بالصيغة :

$ح_{د+٢} = ح_د + ح_{د+١}$ ، حيث $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$

[١٠] اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية ⟨ $ص_د$ ⟩ الآتية، ثم مَثِّلها بيانياً ، حيث :

$$ص_د = \begin{cases} (-١)^د & \text{إذا كان } د \text{ عدداً فردياً} \\ ٢د - ١ & \text{إذا كان } د \text{ عدداً زوجياً} \end{cases}$$

[١١] اكتب حدود المتسلسلة . ثم احسب المجموع لكل من :

أ) $\sum_{م=١}^{٤} ٥م$ ، ب) $\sum_{د=١}^{٥} (د + ١)$ ،

جـ) $\sum_{د=١}^{٦} \frac{١}{٢د + ١}$ د) $\sum_{د=١}^{٦} \frac{د(د + ١)}{٢}$

هـ) $\sum_{ك=1}^{٩} \frac{أ}{٢ك}$ ،   و) $\sum_{د=1}^{٧} \frac{د}{د+١}$

[١٢] أ) احسب $\sum_{م=1}^{٤} (٢م + م^٢)$ و $\sum_{م=1}^{٤} ٢م + \sum_{م=1}^{٤} م^٢$. هل هما متساويان ؟

ب) هل $\sum_{ر=1}^{٥} ٢ر$ يساوي ٢ $\sum_{ر=1}^{٥} ر$ ؟

جـ) احسب $\sum_{م=1}^{٥} ٢$ ، $\sum_{م=1}^{٥} ٤$ ، $\sum_{م=1}^{د} ك$

(إرشاد : $\sum_{د=1}^{٥} ١ = ١ + ١ + ١ + ١ + ١ = ٥ \times ١ = ٥$).

٣ : ٢ المتتالية الحسابية

كثيراً ما نصادف متتاليات من الأعداد مرتبة بنمط معين ، وهذا النمط معطى حسب قاعدة ما .

فمثلاً :

بدأ موظف عمله براتب شهري قدره (٧٥٠٠) ريال، وكانت زيادته السنوية ١٠٠٠ ريال، فكم يكون راتبه الشهري في بداية كل سنة من السنوات العشر الأولى ؟

هل حصلت على النتيجة التالية :

٧٥٠٠ ، ٨٥٠٠ ، ٩٥٠٠ ، ١٠٥٠٠ ، ١١٥٠٠ ، ١٢٥٠٠ ، ١٣٥٠٠ ، ١٤٥٠٠ ، ١٥٥٠٠ ، ١٦٥٠٠

هذه متتالية من نوع خاص ، حيث نلاحظ أن الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوي مقداراً ثابتاً، وهو (١٠٠٠). والمتتالية الممثلة بالقاعدة : $ح_{د+١} - ح_د$ = مقداراً ثابتاً .

تسمَّى متتالية حسابية ، ويسمَّى الفرق بين كل حدين متتاليين أساس المتتالية، ويرمز له عادة بالرمز د .

تعريف (٣ - ٤)

تسمى المتتالية $\langle ح_د \rangle$ متتالية حسابية إذا كان : $ح_{د+١} - ح_د = د$ ، $\forall$ د في مجال المتتالية ؛ حيث د مقدار ثابت ، ويسمى د أساس المتتالية.

مثال (٣ – ٦)

أ) المتتالية : 〈 ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ... ، ٢ ن ، ... 〉

متتالية حسابية أساسها ٢ وذلك لأن : ٤ – ٢ = ٦ – ٤ = ٨ – ٦ = ... = ٢

لاحظ أن : $ح_ن$ = ٢ ن ، $ح_{ن+١}$ = ٢(ن + ١)

∴ $ح_{ن+١}$ – $ح_ن$ = (٢ ن + ٢) – (٢ ن) = ٢ = الأساس ∀ ن ∈ $ط^*$.

ب) المتتالية : 〈 ٧ ، ٤ ، ١ ، –٢ ، –٥ ، –٨ ، ... ، ١٠ – ٣ ن ، ... 〉

متتالية حسابية؛ لأن أساسها – ٣ وذلك لأن ٤ – ٧ = ١ – ٤ = –٢ – (+١) = –٥ – (–٢) = –٣

كما أن : $ح_ن$ = ١٠ – ٣ ن ، $ح_{ن+١}$ = ١٠ – ٣ (ن + ١) = ١٠ – ٣ن – ٣

وأن : $ح_{ن+١}$ – $ح_ن$ = ١٠ – ٣ ن – ٣ – ١٠ + ٣ ن = –٣ = الأساس ∀ ن ∈ $ط^*$

جـ) المتتالية : 〈 $(-١)^{ن+١}$ 〉 ليست متتالية حسابية لأن :

〈 $(-١)^{ن+١}$ 〉 = 〈 ١ ، –١ ، ١ ، –١ ، ١ ، ... 〉

$ح_٢ - ح_١$ = –٢ بينما $ح_٣ - ح_٢$ = ٢

الحد العام للمتتالية الحسابية :

إذا كانت 〈 $ح_ن$ 〉 متتالية حسابية أساسها د فإن :

$ح_{ن+١}$ – $ح_ن$ = د

∴ $ح_{ن+١}$ = $ح_ن$ + د

ومنه :

$ح_٢$ = $ح_١$ + د

$ح_٣$ = $ح_٢$ + د = $ح_١$ + د + د = $ح_١$ + ٢ د

$ح_٤$ = $ح_٣$ + د = $ح_١$ + ٢د + د = $ح_١$ + ٣ د

... وهكذا إلى أن نجد $ح_ن$ = $ح_١$ + (ن – ١) د

تعريف (٣ – ٥)

إذا كانت 〈 $ح_ن$ 〉 متتالية حسابية حدها الأول ($ح_١$) ، أساسها د ؛ فإن حدها العام يعطى بالعلاقة :

$\boxed{ح_ن = ح_١ + (ن - ١) د}$ ، ن رتبة الحد.

وهذه العلاقة تتضمن أربعة متغيرات يمكن معرفة أحدها إذا علمت قيم المتغيرات الثلاثة الأخرى .

ومن العلاقة السابقة يمكن أن نستنتج الصورة العامة للمتتالية الحسابية وهي :

〈 $ح_١$ ، $ح_١$ + د ، $ح_١$ + ٢ د ، $ح_١$ + ٣ د ، ... ، $ح_١$ + (ن – ١) د ، ... 〉

مثال (٣ – ٧)

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات الحسابية الآتية :

أ) حدّها الأول ٤,٥ وأساسها ٢,٥ .

ب) حدّها الأول $\frac{٧}{٢}$ وأساسها – ٢ .

الحـــل :

أ) $ح_١ = ٤,٥$ ، $د = ٢,٥$

$ح_٢ = ٤,٥ + ٢,٥ = ٧$

$ح_٣ = ٤,٥ + ٢ \times ٢,٥ = ٩,٥$

$ح_٤ = ٤,٥ + ٣ \times ٢,٥ = ١٢$

∴ الحدود الأربعة الأولى للمتتالية الحسابية هي : ٤,٥ ، ٧ ، ٩,٥ ، ١٢

ب) $ح_١ = \frac{٧}{٢}$ ، $د = -٢$

$ح_٢ = \frac{٧}{٢} + (-٢) = \frac{٧}{٢} - ٢ = \frac{٣}{٢}$

$ح_٣ = \frac{٧}{٢} + ٢(-٢) = \frac{٧}{٢} - ٤ = -\frac{١}{٢}$

$ح_٤ = \frac{٧}{٢} + ٣(-٢) = \frac{٧}{٢} - ٦ = -\frac{٥}{٢}$

∴ الحدود الأربعة الأولى للمتتالية الحسابية هي : $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٥}{٢}$.

مثال (٣ – ٨)

متتالية حسابية حدّها الأول ٧ ، وأساسها ٥ ، أوجد كلا من : $ح_{١٠}$ ، $ح_{٨٣}$.

الحـــل :

∵ $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$ ، $ح_١ = ٧$ ، $د = ٥$

∴ $ح_{١٠} = ٧ + (١٠ - ١) \times ٥ = ٧ + ٩ \times ٥ = ٥٢$

$ح_{٨٣} = ٧ + (٨٣ - ١) \times ٥ = ٧ + ٨٢ \times ٥ = ٤١٧$

مثال (٣ - ٩)

أوجد $ح_{١٢}$ من المتتالية الحسابية التي فيها $ح_{٣} = -٥$ ، $ح_{٦} = ١٦$.

الحـــل :

$ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١) د$

نجد أن :

$ح_{٣} = ح_{١} + ٢د = -٥ \quad \ldots\ldots (١)$

و $ح_{٦} = ح_{١} + ٥د = ١٦ \quad \ldots\ldots (٢)$

بطرح (١) من (٢) نحصل على :

$٣د = ٢١ \qquad \therefore د = \frac{٢١}{٣} = ٧$

ولإيجاد $ح_{١}$ نعوض عن $د = ٧$ في (١) نحصل على :

$ح_{١} + ٢ \times ٧ = -٥$

أي أن : $ح_{١} = -٥ - ١٤ = -١٩$

$\therefore ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١) د$ ، $ن = ١٢$

فإن $ح_{١٢} = -١٩ + ١١ \times ٧ = -١٩ + ٧٧ = ٥٨$.

مثال (٣ - ١٠)

في المتتالية الحسابية ⟨ ٤٢ ، ٣٩ ، ٣٦ ، ... ⟩ أوجد رتبة الحد الذي قيمته -٦ .

الحـــل :

المعلوم هنا $ح_{ن} = -٦$ ، والمطلوب إيجاد $ن$ وفي المتتالية نجد أن :

$ح_{١} = ٤٢$ ، $د = ٣٩ - ٤٢ = -٣$

$\because ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١) د$

$\therefore -٦ = ٤٢ + (ن - ١)(-٣)$

$\therefore -٦ = ٤٢ - ٣ن + ٣$

$\therefore ٣ن = ٥١$

$\therefore ن = ١٧$

أي أن الحد الذي قيمته (-٦) هو الحد السابع عشر .

مثال (٣ - ١١)

أوجد رتبة أول حد سالب في المتتالية ⟨ ٢١ ، ١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، ... ⟩

الحـــل :

نلاحظ أن المتتالية الحسابية تناقصية لأن أساسها سالب . أي أن : د = −٣

تكون قيمة الحد السالب أصغر من صفر ولإيجاد أول حد سالب نوجد أولاً الحد الذي قيمته صفر .

نضع $ح_ن$ = صفراً في قانون الحد العام ومنه نوجد ن .

∵ $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)\,د$ ، $ح_١ = ٢١$ ، د = −٣

∴ صفر = ٢١ + (ن − ١) (−٣)

صفر = ٢١ − ٣ ن + ٣

∴ ن = ٨

إذن يوجد حد قيمته صفر هو $ح_٨$

وآخر حد موجب هو $ح_٧$

إذن أول حد سالب هو $ح_٩$

ملاحظة : إذا نتج أن ن $\notin$ ط* ، مثلاً ن = $\frac{١}{٢}$ ١٠ ؛ فإنه لا يوجـد حد قيمته صفر في هذه الحالة ويكون آخر حد موجب هو $ح_{١٠}$ ، وأول حد سالب هو $ح_{١١}$

حـل آخر :

$ح_ن$ > ٠

٢١ + (ن −١) (−٣) > ٠

(ن −١) > ٧

ن > ٨

أول حد سالب هو $ح_٩$

تدريب (٣ - ٢)

أوجد رتبة أول حد موجب في المتتالية ⟨ −٨ ، −٦ ، −٤ ، ... ⟩

مثال (٣ - ١٢)

أوجد المتتالية الحسابية التي مجموع حديها الخامس والثامن ينقص عن أربعة أمثال الحد الثالث فيها بمقدار ١ ، ومجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي ٢٤ .

الحـــل :

∵ $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)\,د$.

، $٤ح_٣ - (ح_٥ + ح_٨) = ١$

∴ $٤(ح_١ + ٢د) - (ح_١ + ٤د + ح_١ + ٧د) = ١$

$٢ح_١ - ٣د = ١$ ....(١)

كذلك:

$ح_١ + ح_٢ + ح_٣ = ٢٤$

∴ $ح_١ + (ح_١ + د) + (ح_١ + ٢د) = ٢٤$

∴ $٣ح_١ + ٣د = ٢٤$ ....(٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على:

$٥ح_١ = ٢٥$

∴ $ح_١ = ٥$ ....(٣)

وبالتعويض عن $ح_١ = ٥$ في (٢)

نحصل على $٣ \times ٥ + ٣د = ٢٤$

$٣د = ٢٤ - ١٥ = ٩$

$\Leftarrow د = ٣$

∴ المتتالية الحسابية هي : ‹ ٥ ، ٨ ، ١١ ، ... ›

مثال (٣ - ١٣)

اشترت فاطمة ماكنة خياطة بمبلغ ٣٨٩٩٥ ريالاً ، مع مرور الوقت وبالاستهلاك يقل سعر ماكنة الخياطة بمقدار ١٩٥٠ ريالا سنوياً ، فما قيمة ماكنة الخياطة في بداية السنة الحادية عشرة .

الحـــل :

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$ ، $ح_١ = ٣٨٩٩٥$ ريالاً ، $د = -١٩٥٠$

∴ $ح_{١١} = ٣٨٩٩٥ + (١١ - ١) \times (-١٩٥٠)$

$= ٣٨٩٩٥ + ١٠ \times (-١٩٥٠)$

$= ٣٨٩٩٥ - ١٩٥٠٠ = ١٩٤٩٥$ ريالاً .

مثال (٣ - ١٤)

قاعة محاضرات فيها ٢٥ صفاً من المقاعد . فإذا كان الصف الأول يتسع لـ ٢٠ مقعداً، وكل صف يليه يتسع لمقعدين أكثر من الصف الذي يسبقه مباشرة، فكم عدد المقاعد التي يتسع لها الصف الأخير ؟

الحـــــل :

نفرض أن $ح_ر$ = عدد المقاعد في الصف الذي ترتيبه ر .

∴ ⟨ $ح_ر$ ⟩ متتالية حسابية منتهية حدودها : $ح_١ = ٢٠$ ، $د = ٢$

∵ $ح_ر = ح_١ + (ر - ١) \times د$ ، ر ∈ ط* ، ر ≤ ٢٥

∴ $ح_{٢٥} = ٢٠ + (٢٥ - ١) \times ٢$

$= ٢٠ + ٢٤ \times ٢$

$= ٢٠ + ٤٨ = ٦٨$ مقعداً

بعض خواص المتتالية الحسابية :

■١ لتكن ⟨ $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، ... ⟩ متتالية حسابية أساسها د ، ك قيمة ثابتة؛ فإن :

أ) ⟨ $ح_١ \pm$ ك ، $ح_٢ \pm$ ك ، $ح_٣ \pm$ ك ، $ح_٤ \pm$ ك ، ... ⟩

هي متتالية حسابية لها نفس الأساس د .

ب) ⟨ ك $ح_١$ ، ك $ح_٢$ ، ك $ح_٣$ ، ... ⟩ و ⟨ $\frac{ح_١}{ك}$ ، $\frac{ح_٢}{ك}$ ، $\frac{ح_٣}{ك}$ ، ... ⟩ هما أيضاً متتاليتان

حسابيتان أساسهما ك د ، $\frac{د}{ك}$ على الترتيب

حيث ك قيمة ثابتة لا تساوي الصفر .

■٢ إذا كان ⟨ $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_م$ ، ... ، ... ، $ح_ل$ ، ... ، $ح_{ر-١}$ ، $ح_ر$ ⟩

متتالية حسابية أساسها د ، وفرضنا أن عدد الحدود التي قبل $ح_م$ هي ك ، وأن عدد الحدود التي تلي $ح_ل$ هي ك أيضاً فيكون :

$ح_م = ح_١ +$ ك د .... (١)

$ح_ر = ح_ل +$ ك د .... (٢)

ومن العلاقتين (١) ، (٢) نجد أن :

$ح_م - ح_ر = ح_١ - ح_ل$

أو $ح_م + ح_ل = ح_١ + ح_ر$ = الحد الأول + الحد الأخير

أي أن :

مجموع كل حدين متساويي البعد عن الحد الأول و الحد الأخير من متتالية حسابية منتهية هو ثابت ويساوي مجموع الحدين الأول والأخير .

■٣ لتكن ⟨ $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، ... ، $ح_ر$ ⟩ متتالية حسابية فإن :

$ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢$ ومنها نجد أن

$٢ ح_٢ = ح_١ + ح_٣$

$\therefore ح_٢ = \frac{ح_١ + ح_٣}{٢}$ وكذلك

$ح_٣ = \frac{ح_٢ + ح_٤}{٢}$ ، .... وهكذا .

أي أن كل حد في متتالية حسابية منتهية وسط حسابي بين حدين مجاورين له ما عدا الحدين الأول والأخير . والحدود الواقعة بين الحد الأول والحد الأخير تسمى الأوساط الحسابية .

مثال (٣ - ١٥)

أوجد سبعة أوساط حسابية بين ١٠ ، ٣٤

الحـــل :

إذا أدخلنا سبعة أوساط حسابية بين ١٠ ، ٣٤ فنحصل على متتالية حسابية .

حدها الأول $ح_١ = ١٠$

عدد حدودها $ن = ٢ + ٧ = ٩$

حدها التاسع $ح_٩ = ٣٤$

وحيث إن :

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١) د \Leftarrow ح_٩ = ح_١ + (٩ - ١) د$

$\Leftarrow ح_٩ = ١٠ + ٨ د$

$\therefore ٣٤ = ١٠ + ٨ د \Leftarrow د = ٣$

وتكون الأوساط الحسابية هي : ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣١ .

مجموع ن من الحدود الأولى في المتتالية الحسابية :

لتكن $\langle ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، \ldots ، ح_ن \rangle$ متتالية حسابية أساسها د، ولنرمز لمجموع ن من الحدود الأولى بالرمز

$\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$.

أي أن :

$\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \ldots + ح_{ن-١} + ح_ن$ ...... (١)

يسمى المجموع في (١) متسلسلة حسابية منتهية حدها الأول $ح_١$ وحدها النوني $ح_ن$

وإذا رتبنا الحدود بشكل معاكس فإن المجموع لا يتغير. أي أن :

$مجـ_ن = ح_ن + ح_{ن-١} + \dots + ح_٣ + ح_٢ + ح_١$ .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) نحصل على :

$٢\,مجـ_ن = (ح_١ + ح_ن) + (ح_٢ + ح_{ن-١}) + \dots + (ح_{ن-١} + ح_٢) + (ح_ن + ح_١)$ [من الخاصية ٢]

وكل مقدار موضوع بين قوسين يساوي $(ح_١ + ح_ن)$ وعددها $ن$.

$\therefore ٢\,مجـ_ن = ن\,(ح_١ + ح_ن)$

$$\therefore \boxed{مجـ_ن = \frac{ن}{٢}\,(ح_١ + ح_ن)}$$ ،

$\because ح_ن = ح_١ + (ن - ١)\,د$

$$\therefore \boxed{مجـ_ن = \frac{ن}{٢}\,[٢ح_١ + (ن - ١)\,د]}$$

مثال (٣ – ١٦)

أوجد المتتالية الحسابية التي عدد حدودها ٦ ، وحدها الأخير ٢٧ ، ومجموعها ١٠٢ .

الحـــل :

$ن = ٦$ ، $ح_ن = ٢٧$ ، $مجـ_ن = ١٠٢$

$\because مجـ_ن = \frac{ن}{٢}\,(ح_١ + ح_ن)$

$\therefore ١٠٢ = \frac{٦}{٢}\,(ح_١ + ٢٧)$

$١٠٢ = ٣ح_١ + ٨١$

$\therefore ٣ح_١ = ١٠٢ - ٨١ = ٢١$

$\therefore ح_١ = ٧$

لإيجاد أساسها نستخدم القانون :

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)\,د$

$٢٧ = ٧ + (٦ - ١)\,د$

$٢٧ = ٧ + ٥\,د$

$٥\,د = ٢٧ - ٧ = ٢٠$

$\therefore د = ٤$

إذن المتتالية الحسابية المطلوبة هي : $\langle ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٧ \rangle$

مثال (٣ - ١٧)

أوجد مجموع المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣ وحدها الأخير ٤١ .

الحـــل :

$ح_١ = ٥$ ، $د = ٣$ ، $ح_ن = ٤١$

نحتاج أولاً لمعرفة عدد الحدود .

$\because ح_ن = ح_١ + (ن - ١) د$

$٤١ = ٥ + (ن - ١) \times ٣$

$٤١ = ٥ + ٣ن - ٣$

$٤١ = ٢ + ٣ن$

$٣ن = ٤١ - ٢$

$ن = \frac{٣٩}{٣} = ١٣$

$\therefore ن = ١٣$

$\because مجـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$ ، $\therefore مجـ_{١٣} = \frac{١٣}{٢}(٥ + ٤١) = ٢٩٩$.

مثال (٣ - ١٨)

إذا كان مجموع ن حداً من متتالية معطاة بالعلاقة :

$مجـ_ن = ٢ن^٢ - ن$. بيّن نوع المتتالية وأوجد حدها العام .

الحـــل :

$\because مجـ_ن = ٢ن^٢ - ن$

$\therefore مجـ_١ = ٢ \times ١ - ١ = ١ = ح_١$

$مجـ_٢ = ٢ \times ٤ - ٢ = ٦ = ح_١ + ح_٢ = ٦$

$\because ح_١ = ١$ $\therefore ح_٢ = ٥$

$مجـ_٣ = ٢ \times ٩ - ٣ = ١٥ = ح_١ + ح_٢ + ح_٣$

$\because ح_١ + ح_٢ = ٦$ $\therefore ح_٣ = ٩$ ، ...

إذن المتتالية هي : $\langle ١ ، ٥ ، ٩ ، ... \rangle$ وهي متتالية حسابية فيها $د = ٤$

$\because ح_ن = ح_١ + (ن - ١) د$

$\therefore ح_ن = ١ + (ن - ١) \times ٤ = ١ + ٤ن - ٤$

$\therefore$ الحد العام $= ح_ن = ٤ن - ٣$.

مثال (٣ - ١٩)

خزان ماء سعته ١٣٥٠ جالوناً ، فإذا تسرب منه في اليوم الأول ٢٠ جالوناً، وكان ما يتسرب منه في كل يوم تال يزيد عن ما يتسرب في اليوم السابق له مباشرة بمقدار (٥) جالونات، فبعدكم يوماً يصبح الخزان فارغاً ؟

الحـــل :

كمية الماء المتسربة في اليوم الأول = ٢٠ جالوناً

كمية الماء المتسربة في اليوم الثاني = ٢٥ جالوناً

كمية الماء المتسربة في اليوم الثالث = ٣٠ جالوناً

... وهكذا

أي أن تسرب الماء يتم وفق المتتالية الحسابية : $\langle$ ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ... ، ٢٠ + (ن - ١) × ٥ ، ... $\rangle$

ولكي يكون الخزان فارغاً يجب أن يكون مجموع ما تسرب منه ١٣٥٠ جالوناً .

بما أن كمية الماء المتسربة من الخزان في ن يوماً هي :

$$مج_{ن} = \frac{ن}{٢} [٢ح_{١} + (ن - ١) د]$$

$$\therefore ١٣٥٠ = \frac{ن}{٢} [٢ \times ٢٠ + (ن - ١) \times ٥]$$

$$١٣٥٠ = \frac{ن}{٢} [٤٠ + (ن - ١) \times ٥]$$

$$٢٧٠٠ = ن [٣٥ + ٥ ن]$$

$$٢٧٠٠ = ٣٥ ن + ٥ ن^{٢}$$

$$ن^{٢} + ٧ ن - ٥٤٠ = ٠$$

$$\therefore (ن + ٢٧) (ن - ٢٠) = ٠$$

$\therefore$ ن = -٢٧ ، وهذا مرفوض (لماذا ؟)

أو ن = ٢٠

$\therefore$ يصبح الخزان فارغاً بعد ٢٠ يوماً .

مثال (٣ - ٢٠)

بدأ رجل حياته العملية سنة ١٩٨٨م بمرتب سنوي قدره (١٨٠٠٠٠) ريال، واستمر يحصل على علاوة سنوية قدرها (٧٥٠٠) ريال حتى صار راتبه السنوي (٢٤٠٠٠٠) ريال ولم يتغير راتبه السنوي بعدها، إلى أن أمضى ١١ سنة في العمل . احسب مجموع المبالغ التي حصل عليها .

الحـــــل :

المرتب يزداد مكوناً متتالية حسابية فيها :

$ح_١ = ١٨٠٠٠٠٠$ ، $د = ٧٥٠٠$ ، $ح_ن = ٢٤٠٠٠٠٠$

$\because$ $ح_ن = ح_١ + (ن - ١) د$

$٢٤٠٠٠٠٠ = ١٨٠٠٠٠٠ + (ن - ١) \times ٧٥٠٠$

$٦٠٠٠٠٠ = ٧٥٠٠ ن - ٧٥٠٠ \Leftarrow ٧٥٠٠ ن = ٦٧٥٠٠٠$

$\therefore$ $ن = ٩$

بما أن $مجـ_ن = \frac{ن}{٢} [ح_١ + ح_ن]$

$\therefore$ بعد ٩ سنوات

$مجـ_٩ = \frac{٩}{٢} [١٨٠٠٠٠٠ + ٢٤٠٠٠٠٠] = ١٨٩٠٠٠٠٠$ ريال

$\because$ الراتب ٢٤٠٠٠٠٠ ريال لم يتغير إلى أن أمضى الرجل ١١ سنة

$\because$ الموظف يتقاضى نفس المرتب لمدة = ١١ − ٩ = ٢ سنة

$\therefore$ مجموع ما يتقاضاه خلال سنتين = ٢ × ٢٤٠٠٠٠٠ = ٤٨٠٠٠٠٠

$\therefore$ مجموع رواتبه التي حصل عليها = ١٨٩٠٠٠٠٠ + ٤٨٠٠٠٠٠ = ٢٣٧٠٠٠٠٠ ريال

مثال (٣ − ٢١)

برهن أن المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{١٥} (ن - ١٤)$ هي متسلسلة حسابية ، ثم أوجد مجموعها .

الحـــــل :

$ح_ن = ن - ١٤$

$ح_١ = -١٣$ ، $ح_٢ = -١٢$ ، $ح_٣ = -١١$ ، $ح_٤ = -١٠$ ، ... وهكذا

في المتتالية $\langle -١٣ ، -١٢ ، -١١ ، ... \rangle$

$د = -١٢ - (-١٣) = -١١ - (-١٢) = -١٠ - (-١١) = ١$

أي أن المتتالية التي حدها العام $ن - ١٤$ هي متتالية حسابية حدها الأول $ح_١ = -١٣$ ، وأساسها ١

$\therefore$ $\sum_{ن=١}^{١٥} = \frac{١٥}{٢} [٢ \times (-١٣) + (١٥ - ١) \times ١]$

$= \frac{١٥}{٢} [-٢٦ + ١٤] = -٩٠$.

تمارين ومسائل (٣-٢)

[١] أوجد الحدود الستة الأولى لكل من المتتاليات الحسابية التالية :

أ) $ح_٢ = ٢$ ، $د = -\frac{١}{٢}$ ، ب) $ح_٣ = -٩$ ، $ح_٤ = -٥$

جـ) $ح_١ = ٢٣,٢$ ، $د = ٠,٦$ ، د) $ح_١ = ١٥$ ، $د = -١\frac{١}{٢}$

[٢] أوجد ما يأتي :

أ) الحدين الثالث عشر والعشرين للمتتالية الحسابية التي حدها الأول ١ وأساسها −٨ .

ب) الحد الرابع من متتالية حسابية حدها العاشر ٢٥٠ وحدها السابع ٢١٧ .

جـ) الحد الخامس والحد الحادي والعشرين من المتتالية ⟨ ٧,٥ ، ٧ ، ٦,٥ ، ... ⟩

د) رتبة الحد الذي قيمته ٧ من المتتالية : ⟨ $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ... ⟩

هـ) الحد السابع من المتتالية ⟨ $(س + ص)^٢$ ، $س^٢ + ص^٢$ ، $(س - ص)^٢$ ، ... ⟩

[٣] أوجد ما يأتي :

أ) رتبة أول حد سالب من المتتالية ⟨ ٣٥ ، ٣٣ ، ٣١ ، ... ⟩

ب) الحد الذي ترتيبه الخامس عشر من نهاية المتتالية ⟨ ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ... ، ١٠٠ ⟩

جـ) قيمة ن إذا كان الحد العام للمتتالية ⟨ ٧ ، ١٣ ، ١٩ ، ... ⟩ يساوي الحد العام من المتتالية ⟨ ٧٧ ، ٧٣ ، ٦٩ ، ... ⟩

[٤] اكمل الحدود الناقصة في المتتاليات الحسابية التالية :

أ) ⟨ ... ، ... ، ٩ ، .... ، ١٥ ، ... ⟩

ب) ⟨ ٤,٥ ، ... ، .... ، ١٢ ، ... ، ... ، ١٩,٥ ⟩

[٥] في المتتالية الحسابية ⟨ ٣ ، أ ، ... ، ... ، ... ، ٨١ ، هـ ⟩ إذا كانت هـ = ١٤أ . فأوجد قيمة كل من أ ، هـ .

[٦] أوجد ما يلي :

أ) وسطين حسابيين بين ٥,٢٦ ، ٦,٣٤ ، ب) خمسة أوساط حسابية بين ٤٠ ، ١٠ ،

جـ) أربعة أوساط حسابية بين ٩ ، ١ ، د) ثلاثة أوساط حسابية بين ٨,٢٤ ، ٢,٨ ،

أ) مجموع حدود المتتالية الحسابية التي فيها $ح_١ = ٥$ ، $د = ٣$ وحدها الأخير $ح_ن = ٥٦$.

ب) المتتالية الحسابية التي فيها $ح_٢ = ٩$ ، وحدها الأخير $ح_ن = ٣٦$ ، ومجموع حدودها ٢٣١ .

[٨] لتكن $\langle ح_{ن١} \rangle = \langle ١ ، ٥ ، ٩ ، ... \rangle$ متتالية حسابية .

، $\langle ح_{ن٢} \rangle = \langle -١٨ ، -١٠ ، -٢ ، ... \rangle$ متتالية حسابية أخرى.

فإذا كان $ح_{ن١}$ ينقص عن $ح_{ن٢}$ بمقدار (٥) فأوجد قيمة ن وأوجد : $ح_{٤ن-٣}$ في كل منهما .

[٩] أوجد الحد الرابع والعشرين من المتتالية الحسابية $\langle ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... \rangle$ وما رتبة الحد الذي قيمته (-٣) من المتتالية الحسابية $\langle ٤٣ ، ٤١ ، ٣٩ ، ... \rangle$ ؟ إذا علم أنَّ مجموع (٢ ن) حداً من المتتالية الأولى يساوي مجموع (ن) حداً من المتتالية الثانية فما قيمة ن ؟

[١٠] كم حداً يلزم أخذه من المتتالية $\langle -١٦ ، -١٥ ، -١٤ ، ... \rangle$ ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها = -١٠٠ ؟

[١١] أوجد المتتالية الحسابية التي مجموع العشرة الحدود الأولى منها يساوي (٢٥٠) ومجموع العشرة الحدود التالية لها يساوي (٤٥٠) .

[١٢] برهن أنَّ كلاً من المتسلسلتين التاليتين هي متسلسلة حسابية، وأوجد مجموعها :

أ) $\underset{ك=١}{\overset{٢٠}{مجـ}} (٢ ك - ١)$ ، ب) $\underset{ن=١}{\overset{١٧}{مجـ}} (\frac{١}{٢} ن + ١)$.

[١٣] بدأ شخص في قيادة دراجة هوائية من أعلى منحدر فقطع في الثانية الأولى ٩٠ سم وفي كل ثانية، بعد ذلك قطع مسافة تزيد عن المسافة التي قطعها في الثانية السابقة لها مباشرة بمقدار (١٢٠) سم . فإذا وصل ذلك الشخص إلى أسفل المنحدر بعد (٢٠) ثانية . فما هو طول المنحدر بالمتر ؟

[١٤] سقط جسم من السكون رأسياً في الفضاء فقطع في الثانية الأولى (١٦) قدماً، ثم قطع (٣٢) قدماً زيادة في كل ثانية عن الثانية السابقة لها مباشرة . فما هي المسافة التي يقطعها الجسم في زمن قدره (١١) ثانية؟ وما هي المسافة المقطوعه في (س) ثانية؟

٣ : ٣ المتتالية الهندسية

المتتالية ⟨ ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ... ⟩ هي متتالية حسابية حيث أن الفرق بين أي حدين متتاليين ثابت .
بينما المتتالية : ⟨ ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ... ⟩ ليست متتالية حسابية، حيث أن الفرق بين أي حدين متتاليين فيها ليس ثابتاً ولكن إذا دققنا النظر في حدود المتتالية نجد أن نسبة أي حد إلى الحد السابق له مباشرة ثابتة، فنسبة الحد الثاني إلى الأول = ٢ : ١ ونسبة الحد الثالث إلى الحد الثاني = ٤ : ٢ = ٢ : ١ ، وهكذا . تسمَّى مثل هذه المتتالية متتالية هندسية .

تعريف (٣-٦)

المتتالية ⟨ $ح_{ن}$ ⟩ تسمَّى متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي ر ≠ ٠ بحيث يكون :

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$ = ر ، $ح_{ن}$ ≠ ٠ حيث ن ∈ ط* ، ويسمى ر أساس المتتالية الهندسية.

أمثلة توضيحية (٣ - ٢٢)

أ) ⟨١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ... ⟩ متتالية هندسية لا نهائية حدها الأول ١ ، وأساسها ٣ .

ب) ⟨ $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٣٢}$ ، ... ⟩ متتالية هندسية لا نهائية حدها الأول $\frac{١}{٤}$ وأساسها $\frac{١}{٢}$.

جـ) ⟨ ٤ ، $\frac{٤}{١٠}$ ، $\frac{٤}{(١٠)^{٢}}$ ⟩ متتالية هندسية نهائية حدها الأول ٤ وأساسها $\frac{١}{١٠}$.

د) ⟨ $\frac{١٠}{٣}$ ، ١ ، ٠,٣ ، ٠,٠٩ ، ٠,٠٢٧ ، ... ⟩ متتالية هندسية لا نهائية حدها الأول $\frac{١٠}{٣}$ وأساسها ٠,٣ .

ملاحظة : المتتالية الهندسية ليس فيها حد يساوي الصفر .

تأمل المتتاليات التالية :

أ) ⟨ $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٦}$ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ... ⟩

ب) ⟨ −٣ ، ٠ ، ٣ ، ٦ ، ... ⟩

جـ) ⟨ ١٢,٨ ، ٦,٤ ، ٣,٢ ، ... ⟩

د) ⟨ ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ... ⟩

هـ) ⟨ $(-١)^{ن+١}$ ⟩ ، ن ∈ ط* .

تجد أن : (أ) ، (جـ) ، (هـ) متتاليات هندسية، أما (ب) متتالية حسابية، وأما (د) فليست متتالية حسابية ولا هندسية .

الحد العام للمتتالية الهندسية :

إذا كانت ⟨ ح ن ⟩ متتالية هندسية أساسها ر فإن : $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = ر لكل ن في مجال المتتالية .

أي أن : $ح_{ن+١} = ح_ن \, ر$ ، وبالتالي فإن :

$ح_٢ = ح_١ \, ر$

$ح_٣ = ح_٢ \, ر = ح_١ \, ر^٢$

$ح_٤ = ح_٣ \, ر = ح_٢ \, ر^٢ = ح_١ \, ر^٣$ ....وهكذا .

$ح_ن = ح_١ \, ر^{ن-١}$ ، ن ∈ ط*

تعريف (٣ − ٧)

إذا كانت ⟨ ح ن ⟩ متتالية هندسية أساسها ر وحدها الأول ($ح_١$) ، فإن حدها العام هو :
$ح_ن = ح_١ \, ر^{ن-١}$ ، ن رتبة الحد .

مثال (٣ − ٢٣)

اكتب المتتالية الهندسية التي حدها الأول ١ ، وأساسها ٢ ، ثم أوجد كلاً من $ح_٥$ ، $ح_{١٠}$.

الحـــل :

$ح_١ = ١$ ، ر = ٢

$ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_٣ = ٤$ ، ....

المتتالية الهندسية هي : ⟨ ١ ، ٢ ، ٤ ، ... ⟩

∵ $ح_ن = ح_١ \, ر^{ن-١}$

∴ $ح_٥ = ح_١ \, ر^٤ = ١ \times (٢)^٤ = ١٦$

، $ح_{١٠} = ح_١ \, ر^٩ = ١ \times (٢)^٩ = ٥١٢$.

مثال (٣ − ٢٤)

أوجد الحدين السابع والثاني عشر للمتتالية الهندسية : ⟨ ١٢ ، ٦ ، ٣ ، ... ⟩

الحـــل :

$ر = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$ ، $ح_١ = ١٢$

$ح_د = ح_١ \, ر^{د-١}$

$ح_٧ = ١٢ \times (\frac{١}{٢})^٦ = ١٢ \times \frac{١}{٦٤} = \frac{٣}{١٦}$.

$ح_{١٢} = ١٢ \times (\frac{١}{٢})^{١١} = ٣ \times \frac{١}{٥١٢} = \frac{٣}{٥١٢}$.

مثال (٣ - ٢٥)

< ٢ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ... > متتالية هندسية ، أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٥٤ .

الحـــل :

المعلوم قيمة $ح_د = ٥٤$ و المطلوب إيجاد د

$ح_د = ح_١ \, ر^{د-١}$ ، $ح_١ = ٢$ ، $ر = \sqrt{٣}$

$\therefore ٥٤ = ٢ (\sqrt{٣})^{د-١}$

$٢٧ = (\sqrt{٣})^{د-١}$

$٣^٣ = ٣^{\frac{د-١}{٢}}$

$\because$ الأساسين متساويان

$\therefore ٣ = \frac{د-١}{٢} \Leftarrow ٦ = د - ١$

$\therefore د = ٧$

$\therefore ح_٧ = ٥٤$ رتبة الحد المطلوب هي السابعة .

مثال (٣ - ٢٦)

أوجد المتتالية الهندسية التي فيها $ح_٣ = -٣$ ، $ح_٦ = ٨١$ ، ثم أوجد الحد الثامن .

الحـــل :

$\because ح_٣ = -٣$ $\therefore ح_١ \, ر^٢ = -٣$ .... (١)

، $\because ح_٦ = ٨١$ $\therefore ح_١ \, ر^٥ = ٨١$ .... (٢)

بقسمة (٢) على (١) نحصل على

$ر^٣ = -٢٧ = (-٣)^٣ \Leftarrow ر = -٣$

$\therefore ح_١ = -\frac{١}{٣}$ (من (١) بالتعويض عن $ر$)

$\therefore ح_٢ = ١$ ، $ح_٣ = -٣$ ، ...

إذن المتتالية الهندسية هي : $\langle -\frac{١}{٣}$ ، ١ ، -٣ ، ... $\rangle$

$ح_٨ = ح_١ ر^٧ = -\frac{١}{٣} \times (-٣)^٧ = ٧٢٩$.

مثال (٣ - ٢٧)

سقطت كرة رأسياً من ارتفاع معين ، فإذا كانت الكرة ترتد كل مرة عند الاصطدام بالأرض إلى أعلى ارتفاع قدره $\frac{٢}{٣}$ الارتفاع السابق له مباشرة، وكان الارتفاع الذي ارتدت إليه بعد الاصطدام الأول هو ٥ أقدام . فما الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة بعد الصدمة السادسة ؟

الحـــل :

الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة بعد الصدمة الأولى = ٥ أقدام

الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة بعد الصدمة الثانية = $٥ \times \frac{٢}{٣}$ قدم

الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة بعد الصدمة الثالثة = $٥ \times (\frac{٢}{٣})^٢$ قدم

الارتفاعات التي ترتد إليها الكرة تكوّن متتالية هندسية :

$\langle ٥ ، ٥ \times (\frac{٢}{٣}) ، ٥ \times (\frac{٢}{٣})^٢ ، ... \rangle$

الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة عقب الاصطدام السادس هو $ح_٦$ في هذه المتتالية .

$\therefore ح_٦ = ح_١ (ر)^٥ = ٥ \times (\frac{٢}{٣})^٥ = \frac{١٦٠}{٢٤٣} \simeq ٠,٦٥٨$ قدم

بعض خواص المتتالية الهندسية :

١ ■ إذا كانت $\langle ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ح_٤ ، ....، ح_ن \rangle$ حدود متتالية هندسية فإنها تشكل تناسباً متسلسلاً ،

أي أن : $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = ... = \frac{ح_ن}{ح_{ن-١}}$ = الأساس ($ر$)

■ ٢ لتكن 〈 $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، ... 〉 متتالية هندسية فإن 〈 ك $ح_١$ ، ك $ح_٢$ ، ك $ح_٣$ ، ك $ح_٤$ ، .... 〉

و 〈 $\frac{ح_١}{ك}$ ، $\frac{ح_٢}{ك}$ ، $\frac{ح_٣}{ك}$ ، $\frac{ح_٤}{ك}$ ، ... 〉 حيث ك $\neq$ ٠ تكونان متتاليتين هندسيتين

لهما نفس أساس المتتالية الأصلية .

■ ٣ إذا كانت 〈 $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ......، $ح_م$ ، ......، $ح_ل$ ، ......، $ح_{د-١}$ ، $ح_د$ 〉 متتاليه هندسية أساسها $ر$. ولتكن رتبة $ح_م$ بالنسبة للحد $ح_١$ هي ك ورتبة الحد $ح_د$ بالنسبة للحد $ح_ل$ هي ك .

ففي المتتالية الهندسية التي حدها الأول $ح_١$ وحدها الأخير $ح_م$ نجد أن :

$ح_م = ح_١ ر^{ك-١}$ ....(١)

وكذلك في المتتالية الهندسية التي حدها الأول $ح_ل$ وحدها الأخير $ح_د$ نجد أن :

$ح_د = ح_ل ر^{ك-١}$ ....(٢)

وبقسمة العلاقتين (١) ، (٢) طرفاً على طرف نجد أن :

$$\frac{ح_م}{ح_د} = \frac{ح_١}{ح_ل}$$ أي أن :

$ح_م ح_ل = ح_١ ح_د$ = الحد الأول × الحد الأخير .

أي أن حاصل ضرب كل حدين متساويي البعد عن الحد الأول والأخير في متتالية هندسية ثابت ويساوي حاصل ضرب الحد الأول في الحد الأخير .

■ ٤ إذا كانت 〈 أ ، ب ، جـ ، ء ، ... ، هـ ، ك ، ل 〉 متتالية هندسية أساسها $ر$ ، وعدد حدودها $د$ فإن:

$\frac{ب}{أ} = ر$ ....(١) ، $\frac{جـ}{ب} = ر$ ......(٢)

وبمقارنة (١) ، (٢) نجد أن:

فإن : $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب} \Leftrightarrow ب^٢ = أ . جـ$ أو $ب = \sqrt{أ جـ}$

وبالطريقة نفسها نجد أن : $جـ = \sqrt{ب ء}$ ومنه نستنتج أن كل حد في متتالية هندسية وسط هندسي بين مجاوريه (ما عدا الأول والأخير)، والحدود الواقعة بين الحد الأول والأخير تسمى الأوساط الهندسية .

مثال (٣ - ٢٨)

متتالية هندسية حداها الخامس والسادس على التوالي هما ٨١ ، ٢٤٣ وحدها العاشر (الأخير) ١٩٦٨٣ أوجد أساس المتتالية وحدها الأول .

الحـــل :

الأساس = $ر = \frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{٢٤٣}{٨١} = ٣$

الحدان $ح_٥$ ، $ح_٦$ ، هما حدان متساويا البعد عن الحد الأول والعاشر:

$ح_٥ \times ح_٦ = ح_٢ \times ح_١.$

$٨١ \times ٢٤٣ = ح_١ \times ١٩٦٨٣$

$\therefore \ ح_١ = \frac{٨١ \times ٢٤٣}{١٩٦٨٣} = ١$

مثال (٣ – ٢٩)

أوجد وسطين هندسيين بين – ٧ ، $\frac{١٨٩}{٨}$.

الحـــل :

بإِدخال الوسطين الهندسيين نحصل على متتالية مكونة من أربعة حدود فيها $ح_١ = -٧$ ، $ح_٤ = \frac{١٨٩}{٨}$

$ح_ن = ح_١ ر^{ن-١}$ $\quad \therefore ح_٤ = ح_١ ر^٣$

$\Leftarrow \frac{١٨٩}{٨} = -٧ ر^٣$

$\Leftarrow (ر^٣) = \frac{-١٨٩}{٨ \times ٧} = \frac{-٢٧}{٨} = (\frac{-٣}{٢})^٣$

$\therefore ر = -\frac{٣}{٢}$

ويكون الوسطان الهندسيان هما :

$(-٧) (\frac{-٣}{٢}) ، (-٧) (\frac{-٣}{٢})^٢$

أي : $\frac{٢١}{٢}$ ، $\frac{-٦٣}{٤}$.

تدريب (٣ – ٣)

أكمل المتتالية الهندسية الآتية : ⟨ ٣ ، ... ، ... ، ... ، ...، ٧٢٩ ⟩.

مجموع ن من الحدود الأولى في المتتالية الهندسية :

لتكن ⟨ $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_ن$ ⟩ متتالية هندسية عدد حدودها « ن » وأساسها ر ، لنرمز إِلى مجموع هذه الحدود بالرمز $مجـ_ن$ فنجد أن :

$مجـ_ن = \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن$.

ويسمَّى هذا المجموع متسلسلة هندسية حدّها الأول $ح_١$ ، وحدّها النوني $ح_ن$ ، ويمكن أن نكتب هذا

المجموع كما يلي :

$$مجـ_{ن} = ح_{١} + ح_{١}ر + ح_{١}ر^{٢} + \dots + ح_{١}ر^{ن-١} \qquad \dots\dots\dots\dots (١)$$

بضرب طرفي العلاقة (١) في $ر$ نجد أن :

$$مجـ_{ن}\, ر = ح_{١}ر + ح_{١}ر^{٢} + ح_{١}ر^{٣} + \dots + ح_{١}ر^{ن} \qquad \dots\dots\dots\dots (٢)$$

إذا كانت $ر \ne ١$ نطرح (١) من (٢) فنحصل على :

$$مجـ_{ن}\, ر - مجـ_{ن} = ح_{١}ر^{ن} - ح_{١}$$

$$مجـ_{ن}\, (ر-١) = ح_{١}\, (ر^{ن} - ١)$$

$$مجـ_{ن} = \frac{ح_{١}\, (ر^{ن}-١)}{ر - ١} \qquad \text{حيث } ر \ne ١ \qquad \dots\dots\dots\dots (٣)$$

وإذا كانت $ر = ١$ فإن مجموع $ن$ حداً الأولى

$$مجـ_{ن} = ح_{١} + ح_{١} + ح_{١} + \dots + ح_{١} + ح_{١} \dots \quad (ن \text{ حداً}) \quad = ن\, ح_{١}$$

وكذلك يمكن إيجاد $مجـ_{ن}$ بدلالة $ح_{١}$ ، $ح_{ن}$ كما يلي :

$$\because\ ح_{ن} = ح_{١}ر^{ن-١}$$

$$\therefore\ ح_{ن}\, ر = ح_{١}ر^{ن}$$

وبالتعويض في (٣) نجد أن :

$$مجـ_{ن} = \frac{ح_{ن}\, ر - ح_{١}}{ر - ١} \qquad \text{حيث } ر \ne ١ \qquad \dots\dots\dots\dots (٤)$$

مما تقدم يتضح أن لقانون مجموع المتتالية الهندسية أربع صور مختلفة .

مثال (٣ – ٣٠)

أوجد مجموع العشرة الحدود الأولى لكل من المتتاليتين الهندسيتين :

أ) $\langle ٨ ، ٢٤ ، ٧٢ ، \dots \rangle$ ، ب) $\left\langle \frac{٢٤٣}{٣٢} ، \frac{-٨١}{١٦} ، \frac{٢٧}{٨} ، \dots \right\rangle$

الحـــل :

أ) $ر = \frac{٢٤}{٨} = \frac{٧٢}{٢٤} = \dots = ٣$

$\because$ مجـ$_ن = \frac{ح_1 (ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، حيث ر > ١

$\therefore$ مجـ$_{١٠} = \frac{٨ (٣^{١٠} - ١)}{٣ - ١} = \frac{٨ (٥٩٠٤٩ - ١)}{٢} = ٢٣٦١٩٢$.

ب) $ر = \frac{\frac{-٨١}{١٦}}{\frac{٢٤٣}{٣٢}} = \frac{\frac{٢٧}{٨}}{\frac{-٨١}{١٦}} = \ldots = -\frac{٢}{٣}$

$\because$ مجـ$_ن = \frac{ح_1 (ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، حيث ر $\neq$ ١

$\therefore$ مجـ$_{١٠} = \frac{\frac{٢٤٣}{٣٢} [(-\frac{٢}{٣})^{١٠} - ١]}{(-\frac{٢}{٣} - ١)} = \frac{\frac{٢٤٣}{٣٢} [\frac{١٠٢٤}{٥٩٠٤٩} - ١]}{\frac{-٥}{٣}}$

$= \frac{\frac{٢٤٣}{٣٢} [\frac{١٠٢٤ - ٥٩٠٤٩}{٥٩٠٤٩}]}{\frac{-٥}{٣}} = \frac{\frac{٢٤٣}{٣٢} [\frac{-٥٨٠٢٥}{٥٩٠٤٩}]}{\frac{-٥}{٣}}$

$= \frac{٧٢٩ \times ١١٦٠٥}{٣٢ \times ٥٩٠٤٩} = \frac{١١٦٠٥}{٨١ \times ٣٢} = \frac{١١٦٠٥}{٢٥٩٢} \simeq ٤,٥$.

مثال (٣ - ٣١)

متتالية هندسية مكوَّنة من ٩حدود ،حدها الرابع $\frac{١}{٤}$ وحدها السابع $\frac{١}{٣٢}$. أوجد مجموع حدود المتتالية .

الحـــل :

$\because$ ح$_ن$ = ح$_1$ ر$^{ن-١}$

$\therefore$ ح$_4$ = ح$_1$ ر^٣ = $\frac{١}{٤}$ ......(١)

و ح$_7$ = ح$_1$ ر^٦ = $\frac{١}{٣٢}$ ....(٢)

من (١) نجد أن : ح$_1$ = $\frac{١}{٤ ر^٣}$ وبالتعويض في (٢) عن ح$_1$

$\therefore$ $\frac{١}{٤ ر^٣}$ • ر^٦ = $\frac{١}{٣٢}$

أي أن : $ر^{٣} = \frac{٤}{٣٢} = \frac{١}{٨} = (\frac{١}{٢})^{٣}$

$ر = \frac{١}{٢}$ ، وبالتعويض عن قيمة $ر$ في العلاقة (١) نجد أن :

$$ح_{١} = \frac{١}{٤ (\frac{١}{٢})^{٣}} = \frac{١}{٤ \times \frac{١}{٨}} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

$$مجـ_{د} = \frac{ح_{١} (ر^{د} - ١)}{ر - ١} \quad \text{حيث} \quad ر \neq ١$$

$$مجـ_{٩} = \frac{٢ [(\frac{١}{٢})^{٩} - ١]}{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{٢ [\frac{١ - ٥١٢}{٥١٢}]}{- \frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{٤ \times ٥١١}{٥١٢} = \frac{٥١١}{١٢٨} .$$

مثال (٣ - ٣٢)

إذا كان مجموع حدود متتالية هندسية ٢٠٥٩ ، وحدها الأول ٦٤ وحدها الأخير ٧٢٩ ؛ فأوجد عدد حدود هذه المتتالية .

الحـــل :

$\because$ $مجـ_{د} = \frac{ح_{د} ر - ح_{١}}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$

$\therefore$ $٢٠٥٩ = \frac{٧٢٩ ر - ٦٤}{ر - ١}$

$\therefore$ $٢٠٥٩ ر - ٢٠٥٩ = ٧٢٩ ر - ٦٤$

$\therefore$ $١٣٣٠ ر = ١٩٩٥$ $\qquad$ $\therefore$ $ر = \frac{١٩٩٥}{١٣٣٠} = \frac{٣}{٢}$

، $ح_{د} = ح_{١} ر^{د-١}$

$\therefore$ $٧٢٩ = ٦٤ (\frac{٣}{٢})^{د-١}$

$\therefore$ $(\frac{٣}{٢})^{د-١} = \frac{٧٢٩}{٦٤} = (\frac{٣}{٢})^{٦}$

∴ د − ١ = ٦

∴ د = ٧

مثال (٣ − ٣٣)

برهن أن المتسلسلة : $\sum_{د=١}^{٨}$ ٢^{د} هي متسلسلة هندسية، وأوجد مجموعها .

الحل :

ح$_{د}$ = ٢^{د} ، ح$_{د+١}$ = ٢$^{د+١}$

∴ ر = $\frac{ح_{د+١}}{ح_{د}}$ = $\frac{٢^{د+١}}{٢^{د}}$ = ٢ لكل د ∈ ط*

∴ ⟨ ح$_{د}$ ⟩ متتالية هندسية أساسها ٢ ، وحدها الأول ٢

∴ ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... متسلسلة هندسية .

أي أن : $\sum_{د=١}^{٨}$ ٢^{د} = ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ + ح$_{٤}$ + ... + ح$_{٨}$

= $\frac{ح_{١}(ر^{٨}-١)}{ر-١}$ = $\frac{٢(٢^{٨}-١)}{٢-١}$ = ٢(٢٥٥) = ٥١٠ .

مثال (٣ − ٣٤)

عددان موجبان وسطهما الهندسي ٦ ووسطهما الحسابي ٧,٥ ، فما هما العددان ؟

الحل :

نفرض أن العددين هما س ، ص .

∴ $\sqrt{س ص}$ = ٦

أي أن س ص = ٣٦ ....(١)

كذلك $\frac{س + ص}{٢}$ = ٧,٥

أي أن س + ص = ١٥ ....(٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن:

س^{٢} − ١٥س + ٣٦ = ٠ ⟸ (س − ٣)(س − ١٢) = ٠

∴ س = ٣ ومنها ص = ١٢ أو س = ١٢ ومنها ص = ٣

∴ العددان هما ٣ ، ١٢ .

تمارين ومسائل (٣ - ٣)

[١] اكتب الخمسة الحدود الأولى لكل من المتتاليات الهندسية التالية :

أ) حدها الأول ٣ وأساسها ٤ . ، ب) حدها الأول ٨ وأساسها $-\frac{١}{٢}$.

[٢] بين نوع المتتاليات الآتية ، ثم أوجد الحد الخامس لكل منها

أ) < (أ + ب) ، ($أ^{٢} - ب^{٢}$) ، (أ + ب) $(أ - ب)^{٢}$ ، . . . >

ب) < ٢ ، $-٢\sqrt{٢}$ ، ٤ ، . . . >

جـ) < ٢٣,٢ ، ٢٣,٨ ، ٢٤,٤ ، . . . >

د) < $٣\frac{١}{٤}$ ، $٥\frac{١}{٢}$ ، $٧\frac{٣}{٤}$ ، . . . >

[٣] أوجد ما يأتي :

أ) الحدين الثامن والثاني عشر لمتتالية هندسية حدها الأول ٦٤ ، أساسها $\frac{١}{٢}$.

ب) المتتالية الهندسية التي مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٧٢ ومجموع حديها الأول والرابع يساوي ٥٦ .

جـ) رتبة الحد الذي قيمته $\frac{١}{٢٧}$ من المتتالية الهندسية : < ٣ ، $\sqrt{٣}$ ، ١ ، . . . . >

د) المتتالية الهندسية التي مجموع الثلاثة الحدود الأولى منها هو ٢٦ ، ومجموع الثلاثة الحدود التالية لها ٧٠٢ .

هـ) المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وحدها السادس – ٢٨٨ .

و) عدد حدود المتتالية الهندسية : < ٣٢٠ ، ١٦٠ ، . . . ، ١٠ >

[٤] كوّن المتتاليات الهندسية إذا علم منها ما يأتي :

أ) $ح_{١} = \sqrt{٣}$ ، $ر = \sqrt{٢}$

ب) $ح_{٢} = ١٢,٨$ ، $ح_{١٠} = ٠,٠٢٥$

جـ) مجموع ثلاثة حدود متتالية منها يساوي ١٤ وحاصل ضربها يساوي ٦٤ .

د) مجموع حديها الثاني والخامس ٥٨٨ ، ومجموع حديها الثاني والثالث ٨٤ .

[٥] أي حد من حدود المتتالية :

أ) < ٢ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٦ ، . . . > يساوي ٥٤

ب) < ٨ ، ٤ ، ٢ ، . . . > يساوي $\frac{١}{٤}$

[٦] أوجد المتتالية الهندسية التي فيها :

أ) $ح_{١٠} = ٣٢٠$ ، $ح_{٦} = ٢٠$

ب) $ح_{٢} = ٢$ س ، $ح_{١١} = ١٠٢٤$ $س^{١٠}$

[٧] أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الثالث يزيد عن حدها الثاني بمقدار ١٢ ، وحدها السادس يزيد عن حدها الخامس بمقدار ٣٢٤ .

[٨] أوجد قيمة كل من س ، ص في المتتالية الهندسية : ⟨ ٥ ، س ، ص ، ١٣٥ ⟩

[٩] ثلاثة أعداد تكوّن متتالية هندسية مجموعها ١٩ وإذا أضيف إليها على الترتيب ٣ ، ٥ ، ٦ كونت النواتج متتالية حسابية . أوجد هذه الأعداد .

[١٠] أوجد ما يلي :

أ) وسطين هندسيين بين ٨ ، ٦٤ .

ب) ثلاثة أوساط هندسية بين $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ، $\frac{\text{٣٢}}{\text{٢٤٣}}$.

[١١] عددين وسطهما الحسابي ٧٥ ، ووسطهما الهندسي ٦٠ أوجد هذين العددين .

[١٢] أوجد ما يأتي :

أ) وسطين هندسيين بين (م − ب) ، ($\text{م}^{\text{٢}}$ − $\text{ب}^{\text{٢}}$) (م + ب) .

ب) عددين وسطهما الهندسي يزيد عن أحدهما بمقدار ٨ ويقل عن الآخر بمقدار ٢٤ .

[١٣] الوسط الهندسي بين س ، ص هو ٨ والوسط الحسابي بين $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$ هو $\frac{\text{٥}}{\text{٣٢}}$ أوجد كلاً من س ، ص .

[١٤] متتالية هندسية حدها الأول ٢ وحدها الأخير ١٢٨ ، فإذا كان مجموع حدود هذه المتتالية يساوي ٢٥٤ ، فأوجد عدد حدود ها .

[١٥] في المتتالية الهندسية ⟨ ٠,١ ، − ٠,٤ ، ١,٦ ، ... ⟩ كم عدد الحدود الأولى التي مجموعها (−٨١,٩) .

[١٦] بيِّن نوع المتتالية التي حدها العام هو $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{٣}(\text{٢})^{\text{ن}}$ ، ثم أوجد مجموع الخمسة الحدود الأولى منها .

[١٧] لتكن ⟨ (س − ٢) ، (س −١) ، (٣ س − ٥) ⟩ متتالية هندسية ، فما قيمة س ؟

[١٨] إذا تضاعفت زراعة البكتيريا كل يوم ، فاحسب كم يكون عدد البكتيريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها في اليوم الأول ٥٠٠ .

[١٩] خزان مياه فارغ صُبَّ فيه في اليوم الأول ٢٤٣ جالوناً من الماء ، ثم صُبَّ في كل يوم (تالي) قدر ما صُبَّ في اليوم السابق له مرّةً وثلث . أوجد سعة الخزان ، علماً بأنه امتلأ في مدة ٦ أيام تماماً .

[٢٠] أوجد ما يأتي :

أ) $\sum_{\text{ن}=\text{١}}^{\text{٦}} \left(-\frac{\text{١}}{\text{٣}}\right)^{\text{ن}}$ ، ب) $\sum_{\text{ن}=\text{١}}^{\text{٨}} \left(-\sqrt{\text{٣}}\right)^{\text{ن}}$.

٤ : ١ الدالة الأسِيَّة

تعرفت على الدالة العددية حيث يظهر متغيرها المستقل في أساساتها أما أسسها فتكون أعداداً (غير متغيرات)، وفي هذه الوحدة سنتعرف على دوال أساساتها أعداد (غير متغيرات) ولكن تظهر متغيراتها المستقلة في أسسها .

تعريف (٤ – ١)

نسمِّي الدالة : ص = $ا^{س}$ ؛ (حيث ا > ٠ ، ا ≠ ١ ، س ∈ ح) دالة أُسِيَّة .

فنجد أن :

ص = $٢^{س}$ دالة أُسيَّة أساسها (٢) ، وأُسَّها (س) ،

ص = $٣^{س - ١}$ دالة أُسيَّة أساسها (٣) وأُسَّها (س – ١) ،

ص = $(\frac{١}{٢})^{٥س}$ دالة أُسِيَّة أساسها ($\frac{١}{٢}$) وأُسَّها (٥ س) ،

ص = $٥^{س}$ – ٣ دالة أسّية حدّها الأول $٥^{س}$ أساسه (٥) وأسّه (س)، وحدّها الثاني سالب بأساس٣ وأُسَّه (١) .

تدريب (٤ – ١)

ميِّز الدوال الأسِيَّة فيما يأتي :

■١ ص = ٢ + ٣ س .

■٢ د(س) = ٢ + ٣ $س^{٢}$.

■٣ د(س) = ٤ س .

■٤ د(س) = $(\frac{١}{٢})^{٢س - ١}$.

■٥ ص = $\frac{٢}{س - ١}$.

■٦ ص = ٣ $س^{٣}$ – ٢$س^{٢}$ + س .

■٧ ص = $(\frac{٤}{٣})^{٢س}$.

■٨ د(س) = $س^{\frac{١}{٢}}$ – ٢ س .

رسم بيان الدالة الأسِيَّة :

لرسم الدالة الأُسِيَّة نتبع الخطوات التالية :

■١ نأخذ قيماً اختيارية للمتغير المستقل (س) .

■٢ نعوّض بقيم المتغير المستقل في الدالة لنحصل على المتغير التابع ص أو د(س) .

■٣ نضع المعلومات الناتجة في جدول ، ثم نحدّد النقاط الناتجة في المستوى الإحداثي .

■٤ نصل بين النقاط الناتجة لينتج التمثيل البياني للدالة المعطاة .

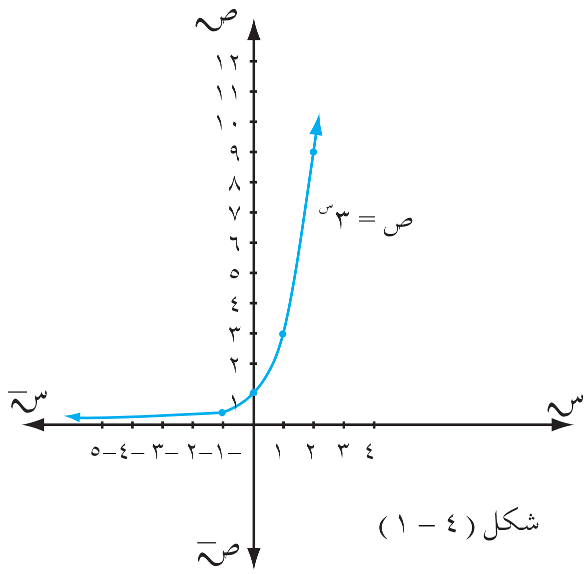
مثال (٤ – ١)

ارسم بيان الدالة : ص = ٣^س .

الحـــل :

ص = ٣^س .

س	٣	٢	١	٠	١–	٢–	٣–
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$



شكل (٤ – ١)

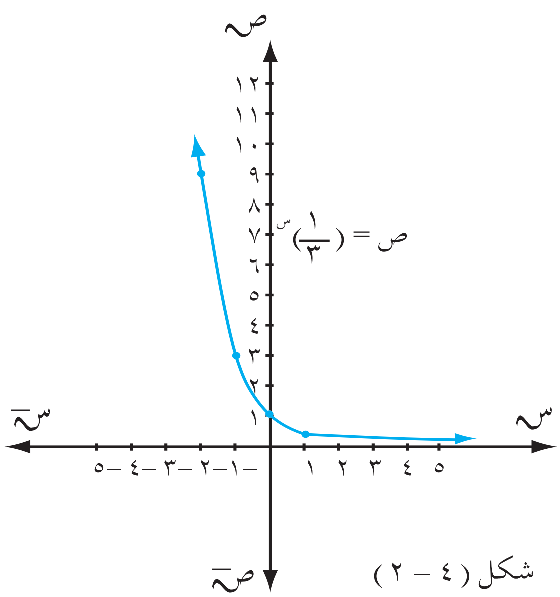
مثال (٤ – ٢)

ارسم بيان الدالة ص = $(\frac{١}{٣})^{س}$.

الحـــل :

ص = $(\frac{١}{٣})^{س}$ ⟺ ص = ٣^{–س}

س	٣	٢	١	٠	١–	٢–	٣–
د(س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩	٢٧



شكل (٤ – ٢)

ملاحظات : تأمَّل بيان الدالتين السابقتين ماذا تلاحظ ؟

من الشكلين (٤–١) ، (٤–٢) نلاحظ أن :

- ١ مجموعة تعريف الدالة الأسيَّة =] – ∞ ، ∞ [
- ٢ مدى الدالة الأُسيَّة =] ٠ ، ∞ [،
- ٣ بيان الدالة الأُسيَّة ص = أ^س يمر بالنقطة (٠ ، ١) ∀ أ ∈ ح^+ ، أ ≠ ١
- ٤ إذا كانت أ > ١ تكـــون الـــدالة الأسيـــة ص = أ^س تزايدية وإذا كان ٠ < أ < ١ تكـــون الدالة الأسيـــة ص = أ^س تناقصية .
- ٥ بيان الدالة الأُسيِّة : ص = أ^س هو انعكاس لبيان الدالة الأُسيَّة ص = $(\frac{١}{أ})^{س}$ على محور الصادات .

تمارين ومسائل (٤ - ١)

[١] لتكن د(س) = أ^س أثبت أن :

أ) د(س١ + س٢) = د(س١) × د(س٢) ، ب) د(س١ - س٢) = $\frac{د(س_١)}{د(س_٢)}$ ،

جـ) (د(س))^ن = د(ن س) .

[٢] ارسم بيان كل من الدوال التالية :

أ) ص = ٢^(س - ١) ، ب) ص = ٢^(س - ٣) ،

جـ) ص = $(\frac{٣}{٢})^{س}$ ، د) ص = $(\frac{٣}{٢})^{-س}$ ،

هـ) ص = ٣^س ، و) ص = ٩^س ،

ز) د(س) = $\begin{cases} ٤^{س} & -٢ \leq س \leq صفر \\ ٤^{-س} & صفر < س \leq ٢ \end{cases}$

٤ : ٢ اللوغاريتمات وخواصها

درسنا فيما سبق الدالة الأُسيَّة وسندرس في هذا البند الدالة اللوغاريتمية ، وقبل ذلك سوف نتعرّف على اللوغاريتم .

من دراستنا للأسس تعرفنا على الصورة الأُسيَّة : س = أ^جـ حيث إن : العدد س = أ مرفوع للأس جـ ومن هذه الصيغة نستطيع تعريف اللوغاريتم بالشكل التالي :

تعريف (٤ - ٢)

لوغاريتم أي عدد لأساس معلوم : هو « الأس » الذي يرفع له الأساس المعلوم كي يعطينا العدد .

فنجد أن :

٧^٢ = ٤٩ ⟺ لوغاريتم ٤٩ للأساس ٧ يساوي ٢ ، وتكتب لو$_٧$ ٤٩ = ٢

٨١ = ٣^٤ ⟺ لوغاريتم ٨١ للأساس ٣ يساوي ٤ ، وتكتب لو$_٣$ ٨١ = ٤

أو س = أ^جـ ⟺ لوغاريتم س للأساس أ يساوي جـ ، وتكتب لو$_أ$ س = جـ

هذه العبارات توضح أن لوغاريتم تعني (أس) أي أن اللوغاريتم هو اسم آخر للأس ، ونرمز للوغاريتم بالرمز (لو) ونعبِّر عن الأس بالصورة اللوغاريتمية كما يلي :

الأس = لو$_{الأساس}$ (العدد)

مثال (٤ – ٣)

اكتب ما يأتي بالصيغة اللوغاريتمية :

١) $٣^{٢} = ٩$ ٢) $١٠^{٣} = ١٠٠٠$

٣) $٠,٠١ = ١٠^{-٢}$ ٤) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-٤} = ٨١$

٥) $س^{\frac{٣}{٢}} = س\sqrt{س}$. $\because س \in ح^{+}$ ، $س \neq ١$

الحـــل :

١) $٣^{٢} = ٩ \Leftrightarrow \text{لو}_{٣}\, ٩ = ٢$ ٢) $١٠^{٣} = ١٠٠٠ \Leftrightarrow \text{لو}_{١٠}\, ١٠٠٠ = ٣$

٣) $٠,٠١ = ١٠^{-٢} \Leftrightarrow \text{لو}_{١٠}\, ٠,٠١ = -٢$ ٤) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-٤} = ٨١ \Leftrightarrow \text{لو}_{\frac{١}{٣}}\, ٨١ = -٤$

٥) $س^{\frac{٣}{٢}} = س\sqrt{س} \Leftrightarrow \text{لو}_{س}\, س\sqrt{س} = \frac{٣}{٢}$.

مثال (٤ – ٤)

أوجد قيمة كل مما يأتي :

■١ $\text{لو}_{٥}\, (\sqrt{٥})^{٧}$ ■٢ $\text{لو}_{\sqrt{٥}}\, (\sqrt{٥})^{٧}$ ■٣ $\text{لو}_{٣}\, \frac{١}{٨١}$

■٤ $\text{لو}_{٧}\, ٣٤٣$ ■٥ $\text{لو}_{\sqrt{٧}}\, ٧\sqrt[٥]{٧}$ ■٦ $\text{لو}_{١٠}\, \frac{١}{١٠٠٠}$

الحـــل :

١) $\text{لو}_{٥}\, (\sqrt{٥})^{٧} = \frac{٧}{٢}$ ٢) $\text{لو}_{\sqrt{٥}}\, (\sqrt{٥})^{٧} = ٧$

٣) $\text{لو}_{٣}\, \frac{١}{٨١} = -٤$ ٤) $\text{لو}_{٧}\, ٣٤٣ = ٣$

٥) $\text{لو}_{\sqrt{٧}}\, ٧\sqrt[٥]{٧} = \frac{١٢}{٥}$ ٦) $\text{لو}_{١٠}\, \frac{١}{١٠٠٠} = -٣$

مثال (٤ – ٥)

حل المعادلات التالية :

أ) $\text{لو}_{٢}\, س = -٤$ ب) $\text{لو}_{٢}\, (٢س - ٤) = ٣$ جـ) $\text{لو}_{س}\, \frac{١}{١٦} = -٢$

د) $\text{لو}_{٣}\, س^{٢} = ٤$ هـ) $\text{لو}_{٢}\, (س^{٢} - ٢س + ٥) = ٣$

الحـــل :

أ) $\text{لو}_{٢}$ س = –٤ ⟺ س = $٢^{-٤}$ ⟸ س = $\frac{١}{١٦}$ ∴ مجموعة الحل { $\frac{١}{١٦}$ }

ب) $\text{لو}_{٢}$ (٢س – ٤) =٣ ⟺ ٢ س – ٤ = $٢^{٣}$ ⟸ ٢ س = ٤ + ٨ ⟸ ٢ س = ١٢

⟸ س = ٦ ∴ مجموعة الحل { ٦ }

جـ) $\text{لو}_{س}$ $\frac{١}{١٦}$ = –٢ ⟺ $\frac{١}{١٦}$ = $س^{-٢}$ ⟸ $٤^{-٢}$ = $س^{-٢}$ ⟸ س = ٤ ∴ مجموعة الحل {٤}

د) $\text{لو}_{٣}$ $س^{٢}$ = ٤ ⟺ $س^{٢}$ = $٣^{٤}$ ⟸ $س^{٢}$ = $(٣^{٢})^{٢}$ ⟸ $س^{٢}$ = $٩^{٢}$ ⟸ س = ٩ ∴ مجموعة الحل {٩}

هـ) $\text{لو}_{٢}$ ($س^{٢}$ – ٢ س + ٥) = ٣ ⟺ $س^{٢}$ – ٢ س + ٥ = $٢^{٣}$

$س^{٢}$ – ٢ س + ٥ = ٨ ⟸ $س^{٢}$ – ٢ س – ٣ = ٠ ⟸ (س – ٣) (س + ١) = ٠

⟸ س – ٣ = ٠ ومنها س = ٣

أو س + ١ = ٠ ومنها س = – ١

∴ مجموعة الحل = { –١ ، ٣ }

خواص اللوغاريتمات :

فيما يلي قوانين اللوغاريتمات والتي ستساعدنا في حل التمارين والمسائل :

∀ ا ، ب ، جـ ∈ $ح^{+}$ ، جـ ≠ ١ فأن :

■١ $\text{لو}_{جـ}$ ١ = ٠ لأن $جـ^{٠}$ = ١
■٢ $\text{لو}_{جـ}$ جـ = ١ لأن $جـ^{١}$ = جـ
■٣ $\text{لو}_{جـ}$ $جـ^{م}$ = م
■٤ $\text{لو}_{جـ}$ $ا^{م}$ = م $\text{لو}_{جـ}$ ا
■٥ $\text{لو}_{جـ}$ (ا × ب) = $\text{لو}_{جـ}$ ا + $\text{لو}_{جـ}$ ب
■٦ $\text{لو}_{جـ}$ $\frac{ا}{ب}$ = $\text{لو}_{جـ}$ ا – $\text{لو}_{جـ}$ ب
■٧ $\text{لو}_{جـ}$ $\frac{١}{ب}$ = – $\text{لو}_{جـ}$ ب

لنبرهن القانونين الخامس والسادس ، ونترك البقية كتدريبات

القانون الخامس : $لو_{جـ} (ا \times ب) = لو_{جـ} ا + لو_{جـ} ب$

البرهان : نضع $لو_{جـ} ا = س \Leftarrow ا = جـ^{س}$ ....(١)

، $لو_{جـ} ب = ص \Leftarrow ب = جـ^{ص}$ ....(٢)

من (١) ، (٢) $\Leftarrow ا \times ب = جـ^{س} \times جـ^{ص}$

$\Leftarrow ا \times ب = جـ^{س+ص}$

$\Leftarrow لو_{جـ} (ا \times ب) = س + ص$. وبالتعويض عن س ، ص من (١) ، (٢)

$\Leftarrow لو_{جـ} (ا \times ب) = لو_{جـ} ا + لو_{جـ} ب$.

القانون السادس : $لو_{جـ} \frac{ا}{ب} = لو_{جـ} ا - لو_{جـ} ب$

البرهان : نضع $لو_{جـ} ا = س \Leftarrow ا = جـ^{س}$ ....(١)

، $لو_{جـ} ب = ص \Leftarrow ب = جـ^{ص}$ ....(٢)

من (١) ، (٢) $\Leftarrow \frac{ا}{ب} = \frac{جـ^{س}}{جـ^{ص}} \Leftarrow \frac{ا}{ب} = جـ^{س-ص}$

$\Leftarrow لو_{جـ} \frac{ا}{ب} = س - ص$ وبالتعويض عن س ، ص من (١) ، (٢)

$\Leftarrow لو_{جـ} \frac{ا}{ب} = لو_{جـ} ا - لو_{جـ} ب$

مثال (٤ - ٦)

أوجد قيمة $لو_{٥} ١٢٥$.

الحـــل :

$لو_{٥} ١٢٥ = لو_{٥} ٥^{٣} = ٣ لو_{٥} ٥ = ٣ \times ١ = ٣$.

مثال (٤ - ٧)

اثبت أن : $لو_{٢} ٨ + لو_{٢} ٤ = ٥$

أ) الطرف الأيمن $= لو_{٢} ٨ + لو_{٢} ٤$

$= لو_٢ ٢^٣ + لو_٢ ٢^٢ \Leftarrow$ الطرف الأيمن $= ٣ + ٢ \Leftarrow$ الطرف الأيمن $= ٥$.

مثال (٤ – ٨)

أوجد قيمة كلٍّ من: (أ) $لو_{جـ} \frac{س}{ص} + لو_{جـ} س^٢ + لو_{جـ} (\frac{ص}{س})^٣ - لو_{جـ} ص^٢$

ب) $لو_٥ \frac{٢٥}{١٢٥} + لو_٥ ٥^٢$ جـ) $لو_{أ} \frac{٤}{٥} + لو_{أ} \frac{١٠}{٢} + لو_{أ} \frac{٣}{٨}$ د) $لو_٣ ٩ - لو_٣ ٨١ + لو_٣ ٢٧$

الحـــــل :

أ) المقدار $= لو_{جـ} س - لو_{جـ} ص + ٢ لو_{جـ} س + ٣ لو_{جـ} \frac{ص}{س} - ٢ لو_{جـ} ص$

$= لو_{جـ} س - لو_{جـ} ص + ٢ لو_{جـ} س + ٣ (لو_{جـ} ص - لو_{جـ} س) - ٢ لو_{جـ} ص$

= صفراً .

ب) المقدار $= لو_٥ ٢٥ - لو_٥ ١٢٥ + ٢ لو_٥ ٥$

$= لو_٥ ٥^٢ - لو_٥ ٥^٣ + ٢$

$= ٢ لو_٥ ٥ - ٣ لو_٥ ٥ + ٢$

$= ٤ - ٣$

$= ١$

جـ) المقدار $= لو_{أ} ٤ - لو_{أ} ٥ + لو_{أ} ٥ + لو_{أ} ٣ - لو_{أ} ٨$

$= ٢ لو_{أ} ٢ + لو_{أ} ٣ - لو_{أ} ٢^٣$

$= لو_{أ} ٣ - لو_{أ} ٢$

$= لو_{أ} \frac{٣}{٢}$

د) المقدار $= لو_٣ ٣^٢ - لو_٣ ٣^٤ + لو_٣ ٣^٣$

$= ٢ - ٤ + ٣$

$= ١$.

مثال (٤ – ٩)

أثبت أن : $لو_{ب} (أ^٤ - ١) - لو_{ب} (أ + ١) - لو_{ب} (أ - ١) = لو_{ب} (أ^٢ + ١)$ ، $أ \neq \pm ١$

الحـــــل :

الطرف الأيمن $= لو_{ب} \frac{(أ^٤ - ١)}{(أ + ١) (أ - ١)} = لو_{ب} \frac{(أ + ١) (أ - ١) (أ^٢ + ١)}{(أ + ١) (أ - ١)} = لو_{ب} (أ^٢ + ١)$

= الطرف الأيسر.

مبرهنة هامة :

لأي أساس أ ، ب $\in$ ح$^{+}$ / $\{1\}$ ، $\forall$ س $>$ ٠ ، فإن : $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} = \dfrac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}}$

البرهان :

نضع $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} = \text{ل} \Leftarrow \text{س} = \text{ب}^{\text{ل}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}^{\text{ل}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{ل}\ \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$

$$\Leftarrow \text{ل} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}}$$

نتائج :

١) $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} = \dfrac{\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ}}{\text{لو}_{\text{س}}\,\text{أ}}$ ، $\text{س} \neq ١$

٢) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} \times \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}$

مثال (٤ – ١٠)

أثبت أن : $\text{لو}_{١٦}\,٢٥٦ \times \text{لو}_{٤}\,١٦ \times \text{لو}_{٢}\,٤ = \text{لو}_{٢}\,٢٥٦$

الحل :

$(\text{لو}_{١٦}\,٢٥٦ \times \text{لو}_{٤}\,١٦) \times \text{لو}_{٢}\,٤ = \text{لو}_{٤}\,٢٥٦ \times \text{لو}_{٢}\,٤ = \text{لو}_{٢}\,٢٥٦$.

تمارين ومسائل (٤ - ٢)

[١] اكتب ما يلي بالصيغة اللوغاريتمية :

أ) $٤٩ = ٧^{٢}$ ب) $١٠^{-٢} = ٠٫٠١$ جـ) $٦^{\frac{٣}{٢}} = ٦\sqrt{٦}$

د) $(١٢٥)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٢٥}$ هـ) $٨ = (\frac{١}{٢})^{-٣}$ و) $\text{س}^{\text{أ}} = \text{جـ}$.

[٢] اكتب ما يلي بالصيغة الآسية :

أ) $\text{لو}_{٦}\,٣٦ = ٢$ ب) $\text{لو}_{\sqrt{٦}}\,٣٦ = ٤$ جـ) $\text{لو}_{٥}\,٥\sqrt{٥} = \frac{٣}{٢}$

د) $\text{لو}_{٣}\,\frac{١}{٩} = -٢$ هـ) $\text{لو}_{\text{د}}\,\text{م} = \text{هـ}$ و) $\text{لو}_{٢}\,(\text{س} - ٣) = ٠$

[٣] أوجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\text{لو}_{٥}\,٦٢٥$ ب) $\text{لو}_{١١}\,\frac{١}{١٢١}$ جـ) $\text{لو}_{١٠}\,٠٫٠٠١$ د) $\text{لو}_{\text{س}}\,\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}}$

[٤] أوجد قيمة س في كل مما يأتي :

أ) $\text{لو}_{٥}\,\text{س} = ٢$ ب) $\text{لو}^{٢}_{٢}\,\sqrt{٢} = \text{س}$

جـ) $\text{لو}_{\frac{١}{\text{س}}}\,٢٧ = ٣$ د) $\text{لو}_{٢\sqrt{٢}}\,٣٢\sqrt[٥]{٤} = \text{س}$

[٥] حل المعادلات التالية : حيث $\text{س} \in \text{ح}^{+}$

أ) $\text{لو}_{٦}\,(٨\text{س} - ٥) = ٠$

ب) $\text{لو}\,(٧\text{س} - ٩)^{٢} + \text{لو}\,(٣\text{س} - ٤)^{٢} = \text{لو}٤$

جـ) $\text{لو}\,\frac{\text{س}}{٢} + ٣\,\text{لو}\,\frac{\text{س}}{٣} = ٥\,\text{لو}\,\text{س} - \text{لو}٢٧$

د) $\text{لو}_{(\text{س}^{٢}+١)}\,\frac{١}{٢٥} = -٢$

هـ) $\text{لو}_{٣}\,(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س} - ٥}) = ٠$

و) $\text{لو}_{١٠}\,(٣\text{س} - ٧) + \text{لو}_{١٠}\,(٣\text{س} + ١) = ١ + \text{لو}_{١٠}\,٢$

[٦] ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

أ) $\text{لو}_{٣}\,١٢٥$ ب) $\text{لو}_{٣}\,\frac{١}{٥}$ جـ) $\text{لو}_{٣}\,٥\sqrt{٥}$

د) $\text{لو}_{٣}\,٢٥\sqrt[٣]{٥}$ هـ) $٣\,\text{لو}_{٣}\,٩ - \text{لو}_{٣}\,٢٧ + \text{لو}_{٩}\,\sqrt{١٨}$

و) $-\text{لو}_{٥}\,\text{ص} - \text{لو}_{٥}\,\text{ص} - \frac{١}{٣}\text{لو}_{٥}\,\text{ص}^{-١}$ ز) $٣\,\text{لو}_{٧}\,٩\text{م}^{٢} - \text{لو}_{٧}\,١٥\,\text{م} + \text{لو}_{٧}\,١٢\,\text{م}^{٢}$

ح) $\text{لو}\,\frac{٦}{٥} + \text{لو}\,\frac{٥}{٦٦} - \text{لو}\,\frac{١٣٢}{١٢١} + \text{لو}\,١٢$ ط) $٣\,\text{لو}\,٥ + ٢\,\text{لو}\,٣$

ع) $\text{لو}\sqrt[٤]{٧٢٩\sqrt[٣]{\frac{١}{\left(\sqrt[٣]{٩}\,\left(\frac{١}{٢٧}\right)\right)^{٤}}}}$ ل) $\dfrac{\text{لو}_{٧}\,٣٤٣ - \text{لو}_{٥}\,١٢٥ - \text{لو}_{٥}\,٦٢٥ - ١}{\text{لو}_{٧}\,١٦٨٠٧ - (\text{لو}_{٥}\,١٢٥)^{٣} + \text{لو}_{٣}\,٨١ + ١}$

[٧] إذا علمت أن $\text{لو}_{١٠}\,٢ = ٠{,}٣٠١$ ، $\text{لو}_{١٠}\,٣ = ٠{,}٤٧٧$. احسب كلا من :

أ) $\text{لو}_{١٠}\,٣٢$ ، ب) $\text{لو}_{١٠}\,٢٤$ ، جـ) $\text{لو}_{١٠}\,\frac{١٠}{٢٧}$ ، د) $\text{لو}_{١٠}\sqrt{٢}$

[٨] أوجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\text{لو}_{٠{,}٠١}\,١٠٠٠$ ، ب) $\text{لو}_{٤}\,٨$ جـ) $\text{لو}_{\frac{١}{٢٥}}\sqrt{١٢٥}$

٤ : ٣ الدالة اللوغاريتمية

تعريف (٤ – ٣)

تسمّى الدالة ص = $\text{لو}_{أ}$ س دالة لوغاريتمية إذا وفقط إذا كان س = أ$^{\text{ص}}$ حيث س ، أ $\in$ ح$^{+}$ ، أ $\neq$ ١

نلاحظ مما سبق أن ص = $\text{لو}_{أ}$ س هـي الدالة العكسيـة للدالة الأسّية ص = أ$^{\text{س}}$ ، أي أنه إذا كانـت د(س) = أ$^{\text{س}}$ ، فإن : د$^{-١}$ (س) = $\text{لو}_{أ}$ س ، ويأخذ شكل الدالة اللوغاريتمية المقدار الجبري ، وليس بالضرورة أن يكون مكوناً من حدّ جبري واحد فقد يكون مكوناً من حدين أو أكثر . فنجد أن : $\text{لو}_{٢}$ (٣ س + ١) = ص ، د(س) = $\text{لو}_{٥}$ (س^{٢} – ٢س – ٨) ، $\text{لو}_{أ}$ (س^{٢} + ٩) = ص جميعها دوال لوغاريتمية .

مثال (٤ – ١١)

أوجد مجموعة تعريف الدالة : ص = $\text{لو}_{٦}$ (٣ س + ١)

الحـــل :

ص معرفة عندما ٣ س + ١ > ٠ $\Leftarrow$ ٣ س > – ١ $\Leftarrow$ س > $\frac{-١}{٣}$

مجموعة التعريف =] $-\frac{١}{٣}$ ، ∞ [

مثال (٤ – ١٢)

أوجد مجموعة تعريف الدالة : ص = لو$_{أ}$ (س^{٢} – ٩)

الحـــل :

ص معرفة عندما س^{٢} – ٩ > ٠ ⟸ س^{٢} > ٩ ⟸ |س| > ٣ ⟸ س > ٣ أو س < – ٣

⟸ مجموعة التعريف =] – ∞ ، –٣ [∪] ٣ ، ∞ [

يمكن إيجاد مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية بوضع ما هو أمام لو (اللوغاريتم) أكبر من الصفر .

رسم بيان الدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{أ}$س :

لرسم بيان الدالة اللوغاريتمية، نتبع خطوات رسم الدالة الأسية:

١) نكون جدولاً لقيم اختيارية للمتغير س .

٢) نحسب قيم ص الناتجة عن العلاقة : ص = لو$_{أ}$س .

٣) نحدد النقاط (س ، ص) الناتجة من الجدول في مستوى الإحداثيات .

٤) نصل بين النقاط بمنحنى لنحصل على بيان الدالة المعطاة .

مثال (٤ – ١٣)

ارسم بيان كل من الدالتين : ص = لو$_{٢}$ س ، ص = ٢^{س} ، ثم قارن بين بياني الدالتين . ماذا تلاحظ ؟

الحـــل :

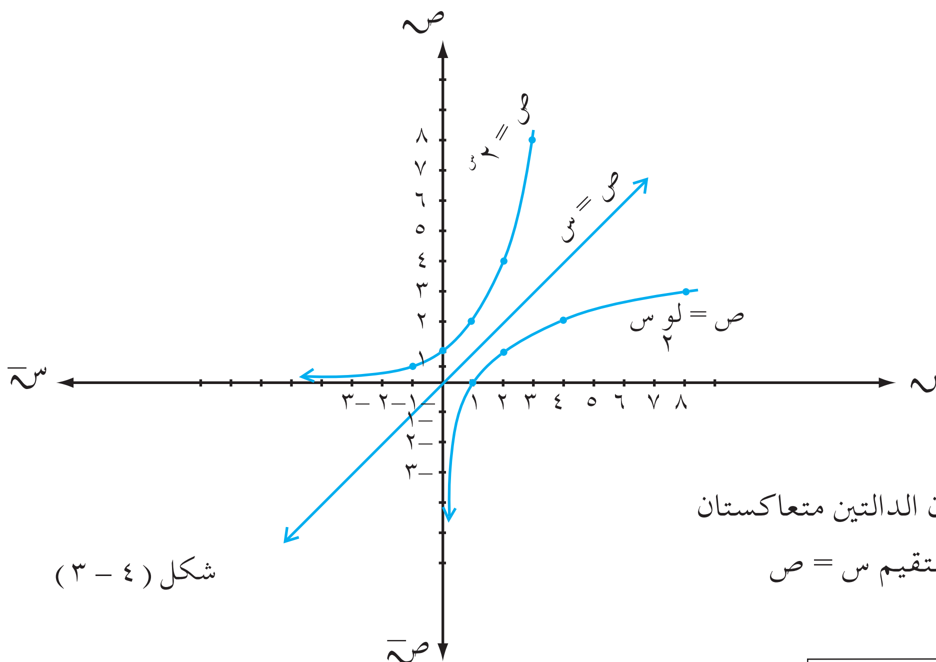
ص = لو$_{٢}$ س ⟸ س = ٢^{ص} .

ص	٣	٢	١	٠	–١	–٢	–٣
س	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

النقاط هي : (١ ، ٠) ، (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٨ ، ٣) ، ($\frac{١}{٢}$ ، –١) ، ($\frac{١}{٤}$ ، –٢) ، ($\frac{١}{٨}$ ، –٣) ، والدالة ص = ٢^{س} .

س	٣	٢	١	٠	–١	–٢	–٣
ص	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

النقاط هي : (٠ ، ١) ، (١ ، ٢)، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٨) ، (–١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (–٢ ، $\frac{١}{٤}$) ، (–٣ ، $\frac{١}{٨}$)



نلاحظ أن الدالتين متعاكستان

حول المستقيم س = ص

شكل (٤ – ٣)

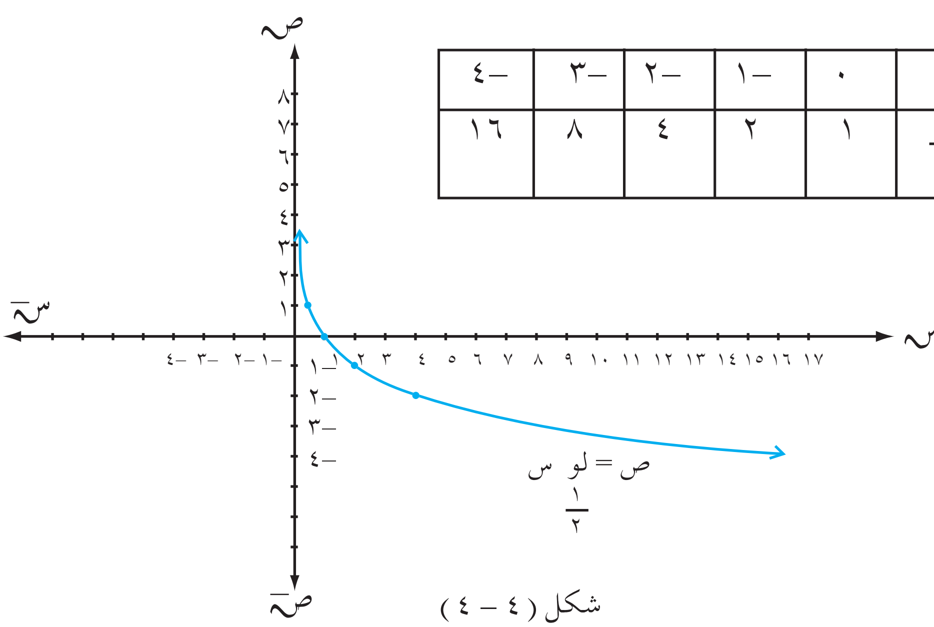
مثال (٤ – ١٤)

ارسم بيان الدالة : ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س .

الحـــل :

ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س $\Longleftarrow$ س = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ص}$.

ص	٣	٢	١	٠	–١	–٢	–٣	–٤
س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨	١٦



شكل (٤ – ٤)

تدريب (٤ – ٢)

قارن بين بياني الدالتين ص = لو$_{٢}$ س ، ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س من الشكلين (٤–٣) ، (٤–٤) ماذا تلاحظ ؟

مما سبق يمكن الحصول على جدول المقارنة التالي :

الدالة / بيانات	ص = لو$_{ا}$ س	ص = ا^{س}
مجموعة التعريف	س ∈] ٠ ، ∞ [	س ∈] – ∞ ، ∞ [
المـــدى	ص ∈] – ∞ ، ∞ [	ص ∈] ٠ ، ∞ [

كما نلاحظ أن :

* الشكل العام لمنحنى الدالة ص = لو$_{ا}$ س يعتمد على قيمة ا فيكون ممثلا لدالة تزايدية إذا كانت ا > ١ ويكون ممثلا لدالة تناقصية إذا كانت ٠ < ا < ١ .
* بيان الدالة ص = لو$_{ا}$ س يشكل انعكاساً لبيان الدالة ص = لو$_{\frac{١}{ا}}$ س في محور السينات الموجب .
* يمر بيان الدالة ص = لو$_{ا}$ س بالنقطة (١ ، ٠) .
* الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأُسِيَّة .
* إذا كانت ص = لو$_{ا}$ س ، فإن :

س ≥ ١ ⟸ لو$_{ا}$ س ≥ ٠

، ٠ < س < ١ ⟸ لو$_{ا}$ س < ٠

تمارين ومسائل (٤ – ٣)

[١] إذا كانت $د(س) = ب^{س}$ ، $ب \in ح^{+}$ ، $س ، ؤ \in ح$ ، $ب \neq ١$

عبِّر عن $د(س - ؤ)$ بدلالة كل من $د(س)$ ، $د(ؤ)$.

[٢] أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

أ) $د(س) = لو_{٥}\, ٧س$

ب) $لو_{١٠}(٢س + ١) = ص$

جـ) $لو_{٢}(٣س - ١) = ص$

[٣] أثبت أن $لو_{\sqrt{ب}}\, ب = لو_{ب}\, ب^{٢} = \ldots = لو_{بؤ}\, ب^{٢ؤ} = ٢$

[٤] ما هو أساس الدالة اللوغاريتمية التي يمر بيانها بالنقطة (١٢٥ ، ٣)

[٥] ارسم كلاًّ من الدوال التالية :

أ) $لو_{٢}\, س = ص$

ب) $لو_{\frac{١}{٣}}\, س = ص$

جـ) $ص = لو_{٦}\, ٣س$

د) $ص = لو_{٥}(س - ١)$

هـ) $ص = لو_{٣}\, |س|$.

٤ : ٤ اللوغاريتم المعتاد

تعرف أنه من السهل إيجاد لوغاريتم عدد ما ، إذا كان هذا العدد من قوى الأساس . فمثلاً :

$$لو_{٥}\, ٦٢٥ = ٤ \quad ، \quad لو_{٢}\, \frac{١}{١٦} = -٤ \quad ، \quad لو_{\frac{١}{٢}}\, ٨ = -٣$$

أما إذا أردنا إيجاد قيمة $لو_{٢}\, ٥$ فسنجد صعوبة في ذلك ، لأن ٥ ليس من قوى ٢ ، ولتجاوز هذه الصعوبة وجد العدد (١٠) كأساس معتاد (عشري) للوغاريتم، ومن خلال ذلك سنتمكن من إيجاد لوغاريتم أي عدد موجب للأساس عشرة (لأن نظام العد العشري قائم على قوى العدد عشرة والأجزاء العشرية للوحدة الصحيحة) .

تعريف (٤ – ٤)

اللوغاريتم المعتاد (العشري) هو لوغاريتم أي عدد موجب للأساس ١٠ .

ويكتب $لو_{١٠}\, س$ ، $س > ٠$ ؛ ويقرأ لوغاريتم س للأساس ١٠ ، وقد تعارف على كتابته بالصورة لو س دون الإشارة إلى الأساس .

نتيجة :

$$لو_{ص}\, س = \frac{لو\, س}{لو\, ص}$$

تدريب (٤ – ٣)

حول كلا مما يأتي إلى الصيغة اللوغاريتمية :

■١ $١٠^{٠} = ١$

■٢ $١٠^{١} = ١٠$

■٣ $١٠^{٢} = ١٠٠$

■٤ $١٠^{٣} = ١٠٠٠$

■٥ $١٠^{٤} = ١٠٠٠٠$

■٦ $١٠^{٥} = ١٠٠٠٠٠$

■٧ $١٠^{٦} = ١٠٠٠٠٠٠$

■٨ $٠,١ = ١٠^{-١}$

■٩ $٠,٠١ = ١٠^{-٢}$

■١٠ $٠,٠٠١ = ١٠^{-٣}$

■١١ $٠,٠٠٠١ = ١٠^{-٤}$

■١٢ $٠,٠٠٠٠١ = ١٠^{-٥}$

■١٣ $٠,٠٠٠٠٠١ = ١٠^{-٦}$

■١٤ $٠,٠٠٠٠٠٠١ = ١٠^{-٧}$

وبإمكاننا أن نعبِّر عن الأعداد الأخرى باستخدام القوى للعدد ١٠ كما يلي :

$٢٠٣٥ = ٢,٠٣٥ \times ١٠^{٣}$

$٠,٠٣٢٨ = ٣,٢٨ \times ١٠^{-٢}$

$١٣,٢٧ = ١,٣٢٧ \times ١٠$

إيجاد اللوغاريتم المعتاد باستخدام الآلة الحاسبة :

ونظراً للتقنيات المتطورة فقد أصبح من الممكن أن نوجد اللوغاريتم المعتاد لأي عدد موجب باستخدام الآلة الحاسبة، وذلك باستخدام المفتاح $\boxed{\text{Log}}$ في لوحة المفاتيح .

مثال (٤ – ١٥)

احسب لو ٨٣,٧

الحـــل :

نضغط على Log ثم ندخل العدد ٨٣,٧ ونضغط على = فنحصل على لو ٨٣,٧ = ١,٩٢٢٧

[مع العلم أنه توجد آلات ندخل فيها العدد أولاً ، ثم نضغط على مفتاح Log] .

مثال (٤ – ١٦)

احسب لو ٠,٠٥٣٨ .

الحـــل :

من الآلة الحاسبة نجد أن : لو ٠,٠٥٣٨ = – ١,٢٦٩٢

مثال (٤ – ١٧)

احسب ما يلي :

أ) $\frac{\text{لو } ١,٥٣٨}{\text{لو } ١,٢١٩}$ ب) لو $_{١,٢١٩}$ ١,٥٣٨

الحـــل :

أ) من الحاسبة ∴ المقدار = $\frac{,١٨٧}{٠,٠٨٦}$ = ٢,١٧٤

ب) لو $_{١,٢١٩}$ ١,٥٣٨ = $\frac{\text{لو } ١,٥٣٨}{\text{لو } ١,٢١٩}$ (نتيجة)

= ٢,١٧٤

العدد المقابل للوغاريتم المعتاد :

العدد المقابل للوغاريتم هو العدد الذي لوغاريتمه معلوم، وعندما نقول أوجد العدد المقابل للوغاريتم المعتاد ٠,٧٣٨ فإننا نعني إيجاد س حيث تكون لو س = ٠,٧٣٨ ، فيكون س = $(١٠)^{٠,٧٣٨}$ نوجد ذلك باستخدام الآلة الحاسبة باتباع الخطوات التالية :

١) نضغط على المفتاح Shift . ٢) نضغط على 10^x .

٣) ندخل العدد المعطى . ٤) نضغط على = فنحصل على الناتج .

- مع ملاحظة أن بعض الآلات لاتوجد بها كلمة Shift ، وتوجد مصطلحات آخرى بديلة لها .
- بعض الآلات تتطلب إدخال الأس أولاً ، ثم الضغط على Shift أو مصطلح آخر ، ثم نضغط 10^x .

مثال (٤ – ١٨)

أوجد س إذا كان لو س = ٢,١٥٦٧ .

الحـــل :

لو س = ٢,١٥٦٧ ⟺ س = $(١٠)^{٢,١٥٦٧}$.

ومن الآلة الحاسبة نجد أ ن س = ١٤٣,٤٥

أما إيجاد العدد المقابل باستخدام الجدول :

هناك جداول خاصة بالأعداد المقابلة للوغاريتمات لإيجاد العدد المقابل باستخدام الجداول نتبع الخطوات التالية :

١) نفصل اللوغاريتم المعطى إلى كسر عشري موجب وعدد صحيح.

٢) نوجد العدد المقابل للكسر باستخدام الجداول.

٣) نستخدم العدد الصحيح كأسّ للعدد عشرة ، ونضرب قوى العشرة الناتجة في العدد المقابل للكسر العشري فينتج العدد المطلوب .

٤ ■ إذا كان العدد المعطى سالبا نضيف إليه عدداً صحيحاً يكبر عدده الصحيح بواحد، وبهذا نتمكَّن من تحويل العدد المعطى إلى كسر عشري موجب وعدد صحيح .

مثال (٤ – ١٩)

أوجد العدد المقابل للوغاريتم المعتاد (– ٢,٥٤٢١) باستخدام الجدول ثم قارن ذلك باستخدام الآلة الحاسبة :

الحـــل :

– ٢,٥٤٢١ = –٢,٥٤٢١ + ٣ –٣ = $\overline{٣}$,٤٥٧٩ .... (١)

نبحث في جدول العدد المقابل عن سطر ٠,٤٥ وعمود ٧ = ٢٨٦٤

وفرق ٩ = ٦

العدد المقابل للعدد ٠,٤٥٧٩ = ٢,٨٧٠ .... (٢)

ملاحظة : (نضع الإشارة بعد عدد صحيح واحد لأننا نعلم أن قيم اللوغاريتمات التي في الجدول هي لوغاريتمات معتادة لعدد موجب مُكَوَّن من كسر عشري + عدد صحيح مكوَّن من رقم واحد)

من (١) ، (٢) نجد أن :

العدد المقابل للعدد $\overline{٣}$,٤٥٧٩ = ٢,٨٧٠ × ١٠$^{-٣}$ = ٠,٠٠٢٨٧٠ .

قاعدة هامة :

س = ص ⟺ لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص .

تمارين ومسائل (٤ – ٤)

[١] أوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتي :

أ) لو (٣,١٠٠٨) ، ب) لو $\sqrt[٦]{٧٨ \quad \sqrt[٣]{٦٤٩}}$ ،

جـ) $\frac{\text{لو } ١٢,٣ + \text{لو } ٥}{\text{لو } ٠,٠٤٣٢}$ ، د) لو (٣,٢٨ × ١٠$^{-٢}$) .

[٢] أوجد باستخدام الآلة الحاسبة الأعداد المقابلة لكل مما يأتي :

أ) ٠,٧٣٠٨ –٢ ، ب) ٢,٧٩٨٥ ،

د) ٦,٨٧٢٤ ، هـ) – ٦,٧٢٥٤ ،

[٣] أوجد قيمة س في كل مما يأتي :

أ) لو س = ٧,٨٨٤ ، ب) لو س = – ١,٠٢٢ .

[٤] أحسب كلاًّ مما يأتي :

أ) $لو_{٢٥}$ ١٢٧ ، ب) $لو_{١٣}$ ٣٩ ،

جـ) $لو_{١٣٢,}$ ٣٢٧ .

٤ : ٥ اللوغاريتم الطبيعي

كما تعرّفت على اللوغاريتم المعتاد فإِن هناك لوغاريتم آخر يسمَّى اللوغاريتم الطبيعي دعنا نتعرَّف أولاً على الدالة الآسية الطبيعية .

تعريف (٤ – ٥)

نسمي الدالة الآسية التي أساسها العدد هـ دالة أسّية طبيعية حيث نسمَّي هـ الأساس الطبيعي ، (هـ ≈ ٢,٧٢) .

فنجد أن :

ص = $هـ^{س}$ دالة أُسِيَّة أساسها هـ ، $هـ^{١}$ = هـ ، $هـ^{٠}$ = ١

تدريب (٤ – ٤)

ارسم الدالة : ص = $هـ^{س}$ وبين أن بيانها يمر بالنقطة (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)

وهكذا نجد أن اللوغاريتم الطبيعي هو لوغاريتم أي عدد موجب للأساس هـ ويرمز له بالرمز $لو_{هـ}$ س .

د	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠
$\left(١ + \frac{١}{د}\right)^{د}$	٢,٥٩٣٧٤	٢,٧٠٤٨١	٢,٧١٦٩٢	٢,٧١٨١٥	٢,٧١٨٢٧	٢,٧١٨٢٨

من الجدول نلاحظ أن :

$\left(١ + \frac{١}{د}\right)^{د}$ ⟵ هـ عندما د ⟵ ∞

ملاحظــــة :

■١ $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ} = ١$

■٢ $\text{لو}_{\text{هـ}}\ ١ = ٠$

■٣ $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}$

■٤ $\text{هـ}^{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})} = \text{س}$

■٥ $\text{س}^{\text{أ}} = \text{هـ}^{(\text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}$

تدريب (٤ – ٥)

أوجد كلاًّ من : $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{٢}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{\frac{١}{٢}}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{-٤}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{-٢,٧}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{٣}$ ، $\frac{١}{٥}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{٢}$

إيجاد اللوغاريتم الطبيعي باستخدام الآلة الحاسبة :

هناك جداول أيضاً للوغاريتمات الطبيعية والأعداد المقابلة لها إلا أننا نستخدم الآلات الحاسبة لإيجاد اللوغاريتم الطبيعي وذلك باستخدام المفتاح $\boxed{\text{Ln}}$ في لوحة المفاتيح .

مثال (٤ – ٢٠)

أ) $\text{لو}_{\text{هـ}}\ ٨٣,٧$ ، ب) $\text{لو}_{\text{هـ}}\ ٠,٠٠٧٦$

الحــــل :

أ) نضغط على Ln ثم ندخل العدد ٨٣,٧ ثم نضغط على (=) فنحصل على $\text{لو}\ ٨٣,٧ = ٤,٤٢٧٢٤$.

ب) بالطريقة نفسها في الفرع (أ) نجد أن :

$\text{لو}_{\text{هـ}}\ ٠,٠٠٧٦ = -\ ٤,٨٧٩٦$

العدد المقابل للوغاريتم الطبيعي :

بنفس طريقة إيجاد العدد المقابل للوغاريتم المعتاد ، نجد أن :

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = ٠,٧٣٨ \iff \text{س} = \text{هـ}^{٠,٧٣٨}$.

ولإيجاد العــــدد المقابل للعدد ٠,٧٣٨ من الآلة الحاسبة نضغط على مفتاح Shift ثم نضغط على e^x (حيث e هي هـ) ثم ندخل العدد المعطى (٠,٧٣٨) ثم نضغط على = فنحصل على العدد المقابل للوغاريتم الطبيعي (٠,٧٣٨)

مثال (٤ – ٢١)

إذا كانت $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = ٧,١١٩$. أوجد قيمة س .

الحـــل :

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = ٧,١١٩ \quad \Leftrightarrow \quad \text{س} = \text{هـ}^{٧,١١٩}$

ومن الآلة الحاسبة $\text{هـ}^{٧,١١٩} = ١٢٣٥,٢$.

تمارين ومسائل (٤-٥)

[١] ارسم بيان كل من الدوال : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ص} = \text{هـ}^{-\text{س}}$ ، ثم استخدم ذلك في رسم بيان الدوال التالية :

أ) $\text{ص} = \text{هـ}^{|\text{س}|}$ ، ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{|\text{س}| + \text{س}}$ ، جـ) $\text{ص} = ١ - \text{هـ}^{\text{س}}$.

[٢] أوجد قيمة كل من :

أ) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{-٣}$ ، ب) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٠,٠٠٥}$ ، جـ) $\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{هـ}}$

د) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٩} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٣}$ ، هـ) $\dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,١٢٥}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢٥}$ ، و) $\dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٩}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣}$

[٣] استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,٨$ ب) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,١,٦٤$ جـ) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣٢٠٠$ د) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,٠,٠٠٢٨$

[٤] أوجد قيمة س في كل مما يأتي :

أ) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = ١,٤٣٢$ ، ب) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = ٠,٠٠٢٧$ ،

جـ) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = \dfrac{١}{١٢٥}$ ، د) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = ٢,٠٠٣$.

[٥] حل المعادلات التالية :

أ) $\text{لو}_{٧}\,\text{س} = ٩$ ، ب) $\text{لو}_{٢}\,(١ - ٢\,\text{س}) = ٨$ ، جـ) $\text{لو}_{٨}\,٩ = \text{س}$ ،

د) $٢(\text{هـ}^{\text{س}} + ١) = ١٠$ ، هـ) $\text{لو}_{\text{س}}\,١٠ = ١٠$

و) $(٤٩)^{\text{س}} - ٥ \times ٧^{\text{س}} = -٦$ ، ز) $\text{هـ}^{\text{س}-١} = ٤$ ، ح) $(٥,٣)^{\text{س}^{٢}} = (٢٢,١)^{\text{س}}$

ط) $٣^{\text{س}} \times ٥^{٢\text{س}} \times ٢٧ = (٢٧١)^{\text{س}+١}$ ، ي) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢} = -٢$

٤ : ٦ التبسيط باستخدام اللوغاريتمات

تعتبر اللوغاريتمات أداة هامة لحساب وتبسيط التمارين الحسابية الصعبة والطويلة والتي تحتوي على أرقام كبيرة خاصة التي تحتوي على عمليات ضرب أو قسمة أو جذور أو أسس .

مثال (٤ – ٢٢)

أوجد قيمة $\sqrt{(٢,٤٣)^{٣}}$.

الحـــل :

نضع س = $\sqrt{(٢,٤٣)^{٣}}$ $\Leftarrow$ لو$_{هـ}$ س = لو$_{هـ}$ $\sqrt{(٢,٤٣)^{٣}}$ = لو$_{هـ}$ $(٢,٤٣)^{\frac{٣}{٢}}$

لو$_{هـ}$ س = $\frac{٣}{٢}$ لو$_{هـ}$ (٢,٤٣) = $\frac{٣}{٢}$ (٠,٨٨٨) (من الآلة الحاسبة)

لو$_{هـ}$ س = ١,٣٣٢ $\Leftarrow$ س = هـ^{١,٣٣٢} .

س = ٣,٧٨٩ (من الآلة الحاسبة)

$\Leftarrow$ $\sqrt{(٢,٤٣)^{٣}}$ = ٣,٧٨٩ .

مثال (٤ – ٢٣)

احسب : $\frac{(٧,٣٢٦)(٠,٠٧٣١)}{(٠,٢٨)(٣,١٤)}$

الحـــل :

لو $\frac{(٧,٣٢٦)(٠,٠٧٣١)}{(٠,٢٨)(٣,١٤)}$ = لو (٠,٠٧٣١) + لو (٧,٣٢٦) – لو (٣,١٤) – لو (٠,٢٨)

= –١,١٣٦١ + ٠,٨٦٤٩ – ٠,٤٩٦٩ – (– ٠,٥٥٣) ≃ – ٠,٢١٥ ،

وقيمة المقدار هو العدد المقابل للعدد – ٢,١٥

$\Leftarrow$ قيمة المقدار ≃ ٠,٦٠٩ .

مثال (٤ – ٢٤)

إذا كان الثمن الأصلي لآلة صناعية = ٢٥٠٠٠ ريال، وكان هذا الثمن يتناقص نتيجة استعمال الآلة بمعدل ١٠٪ سنوياً حسب العلاقة : ب = أ (١ + م) ^{ن} حيث أ الثمن الأصلي ، م المعدل السنوي للنقص في الثمن، ب الثمن بعد ن سنة ، أوجد بعد كم سنة يصبح ثمن الآلة ٥٠٠٠ ريال .

الحـــل :

$ب = أ (١ + ر)^ن \Leftarrow ٥٠٠٠ = ٢٥٠٠٠ (١ + (-٠,١))^ن \Leftarrow \frac{١}{٥} = (٠,٩)^ن$

$\Leftarrow لو \frac{١}{٥} = لو (٠,٩)^ن \Leftarrow لو ٠,٢ = ن لو ٠,٩$.

$\Leftarrow ن = \frac{لو ٠,٢}{لو ٠,٩}$ ومن الجداول

$\Leftarrow ن = \frac{-٠,٦٩٩٠}{-٠,٠٤٥٨} = ١٥,٢٧$.

$\therefore$ ن = ١٥ سنة .

تمارين ومسائل (٤ -٦)

[١] احسب قيمة كل مما يأتي باستخدام اللوغاريتمات :

أ) $\dfrac{(٥٤٣)^٣ \times (١٢,٣)^٢}{\sqrt[٣]{\left(\frac{٣,٢٥}{١,٤}\right)^٥}}$ ، ب) $\sqrt[٣]{٣٢٥ \sqrt[٥]{٤٣٢}}$ ،

جـ) $\dfrac{(٢,٣٠٤)(٢,٦١٥)\sqrt{٣٧}}{(١,٩٨٦)(٠,٠٠٣٢)^٣}$ ، د) $\sqrt[٣]{(٠,٣٥٧)^٥}$.

[٢] مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه = $\sqrt[٣]{٨٨}$ سم . أوجد باستخدام اللوغاريتمات (مساحته ×محيطه) .

[٣] يعطى طول نصف قطر قبة مسجد (على شكل كرة) بالقاعدة : نق = $\sqrt[٣]{\frac{٢١}{٨٨} ح}$ حيث ح هو حجم قبة المسجد :

أ) أوجد حجم قبة المسجد بدلالة نق .

ب) أوجد حجم القبة إذا علمت أن طول نصف قطرها ٣,٥ متر .

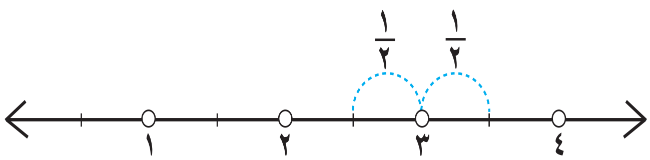
[٤] إذا كان ثمن آلة يتناقص سنوياً بمعدل ٨٪ نتيجة الاستهلاك ، فأوجد بعد كم سنة (لأقرب منزلتين عشريتين) يصبح ثمنها نصف ثمنها الأصلي . إذ أن تناقص الثمن معطى حسب العلاقة $ب = أ (١ + ر)^ن$ حيث أ = الثمن الأصلي ، ب = الثمن بعد ن سنة ، ر = المعدل السنوي للنقص في الثمن .

الوحدة الخامسة
النهايات والاتصال والاشتقاق

٥ : ١ نهاية الدالة الحقيقية

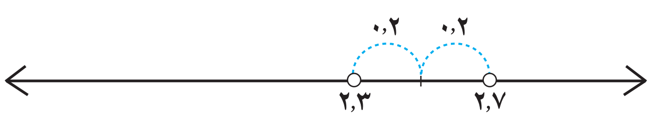
تعرفت أنه لا يمكن دراسة أية دالة حقيقية، أو تمثيلها بيانياً عند عدد حقيقي معين – وليكن ا ∈ ح مالم تكن الدالة معرفة عند هذا العدد(ا) في حين يتطلب دراسة نهاية الدالة بحسب نوع متغيراتها –متقطعة، أو مستمرة – أن تكون معرّفة عند قيم قريبة من العدد (ا)، عندئذٍ تسمى الفترة المفتوحة التي ينتمي إليها العدد (ا) قيم جوار للعدد (ا). فمثلاً :

نسمى الفترة المفتوحة] ٢ $\frac{١}{٢}$ ، ٣ $\frac{١}{٢}$ [جواراً للعدد ٣ ، ونصف قطر الفترة $\frac{١}{٢}$ [انظر الشكل (٥–١)].



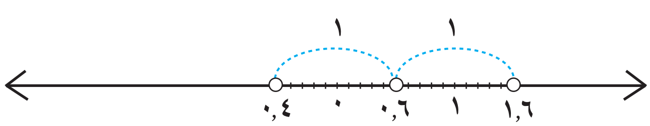
الشكل (٥ – ١)

ونسمى الفترة المفتوحة] ٢,٣ ، ٢,٧ [جواراً للعدد (٣) ، ونصف قطر الفترة ٠,٢ [انظر الشكل (٥–٢)].



الشكل (٥ – ٢)

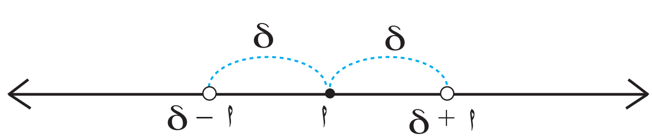
ونسمى الفترة المفتوحة] –٠,٤ ، ١,٦ [جواراً للعدد (٠,٦) ، ونصف قطر الفترة ١ ، [انظر الشكل (٥–٣)].



الشكل (٥ – ٣)

مما سبق وبصورة عامة إذا كان لدينا الفترة المفتوحة ف مركزها ا ، ∀ ا ∈ ح ، والعدد δ (يُقرأ دلتا)، حيث δ > ٠ ، أي عدد موجب اختياري من الأعداد الحقيقية، ويمثل نصف قطر الفترة ف .

فإن : ف (ا ، δ) =] ا – δ ، ا + δ [[انظر الشكل (٥–٤)]



الشكل (٥ – ٤)

عندئذٍ تسمى الفترة المفتوحة ف (ا ، δ)جواراً للنقطة ا ، بنصف قطر δ؛ ويمكن أن نُعَبِّر عنها رياضياً بالصورة التالية :

ف (ا ، δ) =] ا − δ ، ا + δ [

= { س : ∀ س ∈ ح يكون ا − δ < س < ا + δ }

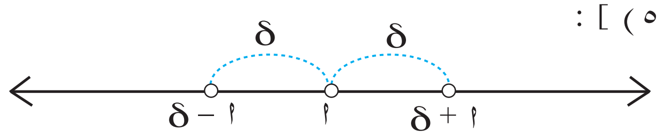
= { س : − δ < س − ا < δ }

= { س : | س − ا | < δ } .

وباستبعاد مركز الفترة ا من الجوار ف نحصل على فترة مفتوحة ، بالجوار المحذوف للنقطة ا مركز الفترة، ونعبر عنها بالصورة : ف (ا ، δ) − { ا } = { س : |س − ا| < δ ، س ≠ ا }

=] ا − δ ، ا [∪] ا ، ا + δ [.

[كما في الشكل (٥−٥)] :



الشكل (٥ − ٥)

ملاحظة :

- تسمى الفترة] ا − δ ، ا + δ [جواراً للعدد ا ، بينما تسمى الفترة] ا − δ ، ا + δ [− { ا } جواراً محــــذوفاً للعدد ا .
- تسمى الفترة] ا − δ ، ا] جواراً أيسر للعدد ا ، بينما تسمى الفترة] ا − δ ، ا [جواراً أيسر محذوف للعدد ا .
- تسمى الفترة [ا ، ا + δ [جواراً أيمن للعدد ا ، بينما تسمى الفترة] ا ، ا + δ [جواراً أيمن محذوف للعدد ا .

مثال (٥ − ١)

إذا كانت الفترة المفتوحة] ٢,٩ ، ٣,١ [جواراً للعدد ٣ ، فاكتب بعض القيم القريبة جداً من العدد ٣ في هذا الجوار.

الحــــل :

بعض القيم القريبة جداً من العدد ٣ وفقاً للفترة ف (٣ ، ٠,١) =] ٢,٩ ، ٣,١ [هي :

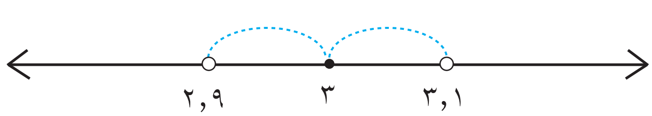
٢,٩٥ ، ٢,٩٩ ، ٢,٩٩٩ ،

٢,٩٩٩٩ ، ... ، وكذلك :

٣,٠١ ، ٣,٠٠١ ، ٣,٠٠٠١ ،

٣,٠٠٠٠١ ، ...

[انظر الشكل (٥−٦)] :



الشكل (٥ − ٦)

ملاحظة : من المثال السابق نلاحظ أن :

- [٣ ، ٣,١ [جواراً أيمن للعدد ٣ ،] ٣ ، ٣,١ [جواراً أيمن محذوف للعدد ٣ .
-] ٢,٩ ، ٣] جواراً أيسر للعدد ٣ ،] ٢,٩ ، ٣ [جواراً أيسر محذوف للعدد ٣ .

تعريف (٥ – ١)

لتكن س كمية متغيرة ، أ ∈ ح ، نقول أن س تقترب من أ باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية | س – أ | أصغر من أي عدد حقيقي موجب δ (δ > ٠) ، فيكون : | س – أ | < δ

١ – نهاية الدالة عند نقطة :

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية التي قدمت إلى الرياضيات الشيء الكثير، بل ونهضت بتطبيقاتها الأساسية في مجالاتها المختلفة وفي جميع مجالات العلوم الطبيعية الأخرى. وفي هذا البند ستدرس سلوك الدالة د(س) عندما تقترب قيم المتغير س باطراد نحو قيمة معينة (أ) دون أن تساويها على فترة مفتوحة بالجوار المحذوف للنقطة أ مركز الفترة (س ⟵ أ). سنشرح هنا هذا المفهوم بتقديم التعريف التالي، ومن خلال بعض الأمثلة التوضيحية التالية :

تعريف (٥ – ٢)

لتكن الدالة د(س) معرَّفة على فترة محذوف (أو غير محذوف) مركزها أ ؛ فإنه يقال أن الدالة تقترب من النهاية ل ∈ ح عندما س ⟵ أ . إذا وفقط إذا : $\forall$ δ > ٠ $\exists$ ε > ٠

بحيث أن : ٠ < |س – أ| < δ ⟸ |د(س) – ل| < ε .

وتكتب : $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) = ل

مثال (٥ – ٢)

لتكن الدالة د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ؛ حيث س ∈ ح / { ٢ } ،

ادرس سلوك الدالة د في جوار العدد ٢ (أي عندما س ⟵ ٢) .

الحـــل :

نلاحظ أن الدالة د غير معرفة عند س = ٢

أي أن : د(٢) غير معرفة.

فتكون د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ = $\frac{(س - ٢) (س + ٢)}{(س - ٢)}$ = س + ٢ ، حيث س ≠ ٢

والآن؛ ولكي نوجد قيم للدالة د عندما س تقترب من العدد ٢ ؛ فإننا نأخذ قيماً قريبة جداً من العدد ٢ من جهة اليمين (عندما س > ٢) ، وقيماً أخرى قريبة من العدد ٢ من جهة اليسار (عندما س < ٢)، كما هو موضح في الجدول (٥–١)التالي :

س	...	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	٢	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩	...
د(س)	...	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	٤,٠٠٠١	غير معرفة	٣,٩٩٩٩	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩	...

جدول (٥ – ١)

واضح من الجدول (٥–١) أنه كلما س تقترب إلى العدد ٢ من جهة اليمين بالصورة (س ⟵ ٢^{+}) بقيمة أكبر منه، فإن قيم الدالة د(س) المناظرة تقترب باطراد من العدد ٤ من جهة اليمين بالصورة د(٢^{+}) ⟵ ٤ بقيمة أكبر منه .

ويعبر عن ذلك رمزياً بالصورة : $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ٤

وبالمثل كلما س تقترب إلى العدد ٢ من جهة اليسار بالصورة (س ⟵ ٢^{-}) بقيمة أصغر منه، فإن قيم الدالة د(س) المناظرة تقترب باطراد من العدد ٤ من جهة اليسار بالصورة د(٢^{-}) ⟵ ٤ بقيمة أصغر منه .

ويعبر عن ذلك رمزياً بالصورة : $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ٤

ومن التعريف (٥–٢) نحدد العلاقة بين δ ، ε فيما إذا وجد من أجل ε > ٠ عدد δ > ٠

بحيث يكون :

| د(س) – ٤ | < ε ⟸ | س + ٢ – ٤ | < ε ، س ≠ ٢ ⟸ | س – ٢ | < ε عندما

٠ < | س – ٢ | < δ يكفي أن نختار δ = ε

والجدول (٥–٢) يبين ذلك :

|س – ٢|	...	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١		٠,٠٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١	...
|د(س)–٢|	...	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١		٠,٠٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١	...

جدول (٥ – ٢)

وللتأكد مما سبق :

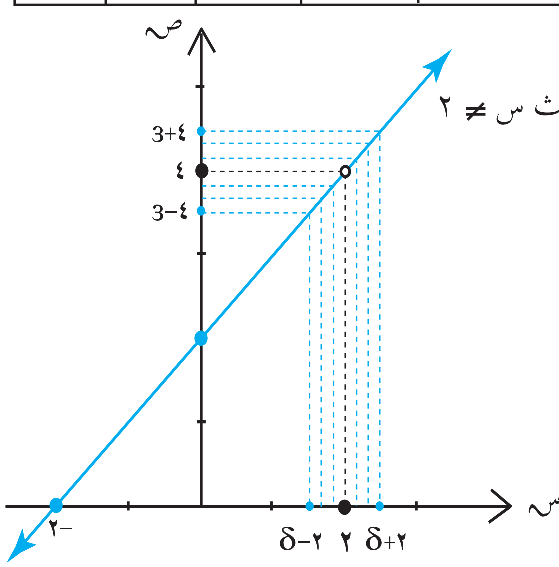
نضع د(س) = $\frac{(س – ٢) (س + ٢)}{(س – ٢)}$ = س + ٢ حيث س ≠ ٢

[انظر الشكل (٥–٧)] .

تلاحظ أن النقطة (٢ ، ٤) ∌ لبيان الدالة د ، وبالتالي واضح أنه عندما تكون س قريبة جداً من العدد ٢ فإن د(س) تقترب باطراد من العدد ٤ .

أي أن : عندما س ⟵ ٢ فإن د(س) ⟵ ٤ ، وسنعبر عن ذلك رياضياً بقولنا أن : نهاية الدالة د عندما تؤول س إلى ٢ تساوي ٤ ، ونعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ٤



الشكل (٥ –٧)

تعريف (٥ – ٣)

$\underset{س \to ؁}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل يعني أنه عندما تقترب س من ؁ باطراد ، س $\neq$ ؁
فإن : د(س) تقترب باطراد من ل .

أي أنه عندما تأخذ س قيماً في جوار ؁ ، س $\neq$ ؁ ، فإن د(س) تأخذ قيماً في جوار ل .
نلاحظ من المثال السابق أن :

١) نهاية الدالة د عندما تؤول س إلى ٢ من جهة اليمين تساوي ٤ .
ونعبر عن ذلك رمزياً كالتالي :
$\underset{س \to ٢^+}{\text{نهــا}}$ د(س) = ٤ ، وتسمى النهاية من اليمين.
(يقرأ الرمز س ← ٢$^+$ كالتالي : س تؤول إلى ٢ من اليمين).

٢) نهاية الدالة د عندما تؤول س إلى ٢ من جهة اليسار تساوي ٤ .
ونعبر عن ذلك رمزياً كالتالي :
$\underset{س \to ٢^-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ٤ ، وتسمى النهاية من اليسار.
(يقرأ الرمز س ← ٢$^-$ كالتالي : س تؤول إلى ٢ من اليسار).

٣) $\because$ $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهــا}}$ د(س) = $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ٤
$\therefore$ $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) = ٤

٤) نلاحظ في هذا المثال أن الدالة د(س) = $\dfrac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ، حيث س $\in$ ح / $\{٢\}$ غير معرفة عند س = ٢ .
لكن $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) = موجودة.

وهذا يعني أنه ليس بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند النقطة س = ؁ ، ولكن من الضروري أن تكون معرفة في جوار النقطة س = ؁ .

٥) نهاية الدالة موجودة ووحيدة إذا كانت :

$\underset{س \to ؁^{(+)}}{\text{نهــا}}$ د(س) = $\underset{س \to ؁^{(-)}}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل ، $\forall$ ل $\in$ ح.
فإن : $\underset{س \to ؁}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل .

مبرهنة :

$\underset{س \to ؁}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل إذا وفقط إذا $\underset{س \to ؁^{(+)}}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل = $\underset{س \to ؁^{(-)}}{\text{نهــا}}$ د(س)

مثال (٥ – ٣)

لتكن الدالة هـ (س) = ٢س + ٢ ، $\forall$ س $\in$ ح

ادرس نهاية الدالة عندما س ⟵ ١

الحـــل :

سندرس قيم الدلة هـ عندما س تأخذ قيماً قريبة جداً من العدد الحقيقي ١ ، من الواضح أن س تقترب من العدد ١ بإِحدى الحالتين:

أ) عندما تقترب س من العدد ١ من جهة اليمين (س ⟵ ١^{+}) ، كما هو موضح بالجدول (٥–٣) التالي :

س	...	١,٧٥	١,٥	١,٢٥	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	١,٠٠٠٠١	...	⟵ ١
د(س)	...	٥,٥	٥	٤,٥	٤,٢	٤,٠٢	٤,٠٠٢	٤,٠٠٠٢	٤,٠٠٠٠٢	...	س ⟵ ٤
|س – ١|	...	٠,٧٥	٠,٥	٠,٢٥	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٠١	...	δ ⟵
|د(س)–٤|	...	١,٥	١	٠,٥	٠,٢	٠,٠٢	٠,٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٠٢	...	ε ⟵

جدول (٥ –٣)

واضح أن قيم هـ (س) تقترب من العدد الحقيقي ٤ باطراد، كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليمين باطراد، أي أنه يمكن جعل الفروق بين هـ (س) ، ٤ صغيراً صُغراً كافياً بالقدر الذي نريد، وذلك يجعل القيمة س –١ صغيرة وموجبة.

أي أن : $\underset{س \to ١^{+}}{نهـــا}$ هـ(س) = ٤ وهي النهاية من اليمين.

ب) عندما تقترب س من العدد الحقيقي ١ من جهة اليسار (س ⟵ ١^{-}) ، كما هو موضح بالجدول (٥–٤).
فيه تأخذ س القيم: ٠,٢٥ ، ٠,٥ ، ٠,٧٥ ، ٠,٩ ، ٠,٩٩ ، ٠,٩٩٩ ، ٠,٩٩٩٩ ، ... وتحسب القيم المناظرة لـ هـ(س) باستخدام قاعدة الدالة هـ(س) = ٢ س + ٢

س	...	٠,٢٥	٠,٥	٠,٧٥	٠,٩٠	٠,٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩٩٩	...	⟵ ١
د(س)	...	٢,٥	٣	٣,٥	٣,٨	٣,٩٨	٣,٩٩٨	٣,٩٩٩٨	...	س ⟵ ٤
|س – ١|	...	٠,٧٥	٠,٥	٠,٢٥	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	...	δ ⟵
|د(س)–٤|	...	١,٥	١	٠,٥	٠,٢	٠,٠٢	٠,٠٠٢	٠,٠٠٠٢	...	ε ⟵

جدول (٥ –٤)

ومن الجدول (٥–٤) واضح أن قيم هـ(س) تقترب من العدد الحقيقي ٤ باطراد، كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليسار باطراد، أي أنه يمكن جعل الفروق بين هـ(س) ، ٤ صغيراً صُغراً كافياً بالقدر الذي نريد، وذلك يجعل القيمة س –١ صغيرة وموجبة .

أي أن : $\underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهـــا}}$ هـ(س) = ٤ وهي النهاية من اليسار .

مما سبق يتضح أن :

(i) $\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نهـــا}}$ (٢ س + ٢) = ٤

(ii) $\underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهـــا}}$ (٢ س + ٢) = ٤

(iii) $\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نهـــا}}$ (٢ س + ٢) = $\underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهـــا}}$ (٢ س + ٢) = ٤

نتيجة لذلك نقول إن نهاية الدالة هـ(س) = ٢س + ٢ عندما س تؤول إلى ١ موجودة، وتساوي ٤ ،

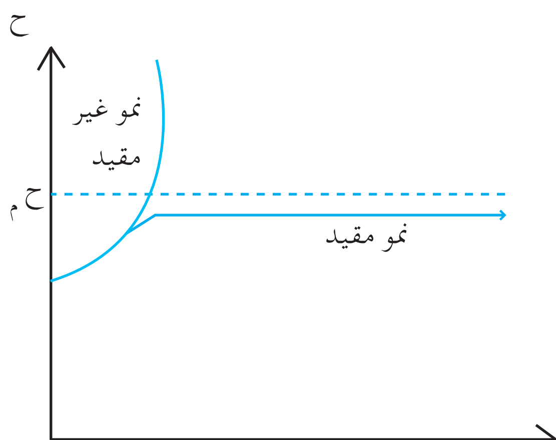
أي أن : $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ (٢ س + ٢) = ٤

ثانياً : نهاية دالة عند اللانهاية :

عند دراسة أنظمة متطورة فغالباً ما يكون الاهتمام بدراسة سلوك النظام لقيم كبيرة ، خاصة إذا كان معقَّداً بدرجة كبيرة ، ويتوقَّع أن يستقر بعد فترة زمنية ليأخذ سمة أكثر بساطة .

فمثلاً :

في مزرعة بكتريا مهيأة لها الظروف لتنمو معملياً يكون حجم المزرعة (ح) في الزمن(ﮃ) ؛ وبالتالي فإن سلوك الدالة ح عند قيم ﮃ الكبيرة يتوقف على طريقة إمـــداد المزرعـــة بالغذاء ، مع العلم أنه في حالة من الحالات يكون نمو المزرعـة غير مقيد (أي يستمـر في الزيادة لانهائيـاً مع الزمـن)، وفي حالة أخرى يأخذ معدل نمو المزرعة في البطء لقيم ﮃ الكبيرة بحيث تقترب ح من قيمة معينة $ح_{م}$ ، التي تمثل الحـد الأقصى لحجم المزرعة على النحو الموضح في الشكل (٥ – ٨) ،



الشكل (٥ – ٨)

عندئذٍ يقال أن سلوك الدالة التقريبي هو : أن ح تقترب من القيمة الثابتة $ح_{م}$ عندما س ← ∞ ،

أي أن : $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}$ ح = $ح_{م}$.

وفيما يلي نتناول نهاية الدالة عندما يسعى متغيرها نحو اللانهاية في حالة أن تستمر س في التزايد بحيث تكون أكبر من أي عدد سبق تعيينه ، أو بالتناقص بحيث تكون أصغر من أي عدد سبق تعيينه ، عندئذٍ يقال في الحالة الأولى أن س تؤول إلى مالانهاية ، وتكتب : س $\longleftarrow$ ∞ وفي الحالة الأخرى يقال أن س تؤول إلى سالب مالانهاية ، وتكتب : س $\longleftarrow$ $-\infty$.

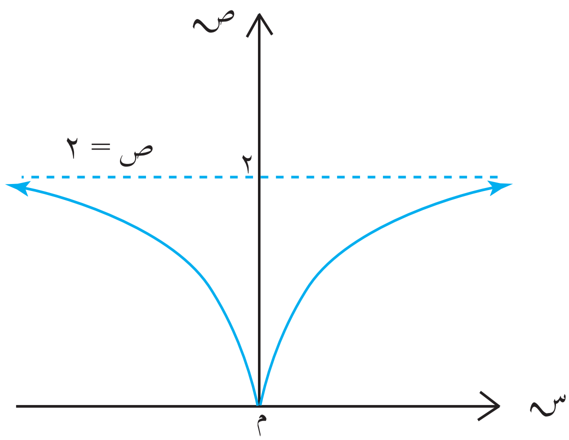
مثال (٥ – ٤)

لتكن د(س) دالة معرفة بالقاعدة د(س) = $\frac{\text{٢ س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ١}$ ؛ ابحث نهاية الدالة عندما س $\longleftarrow$ ∞ ، س $\longleftarrow$ $-\infty$.

الحـــل :

مجال الدالة د = ح

عندما تأخذ س قيماً كبيرة موجبة ، فإن د(س) تقترب باطراد نحو العدد ٢ على النحو الموضَّح في الشكل (٥ –٩) لبيان الدالة والجدول رقم (٥ – ٥) لقيم س المختارة .



الشكل (٥ –٩)

جدول (٥ – ٥)

س	٠	١	٢	٣	...	١٠	١٠٠	١٠٠٠	$\infty \leftarrow$
د(س)	٠	١	$\frac{٨}{٥}$	$\frac{١٨}{١٠}$	...	$\frac{٢٠٠}{١٠١}$	$\frac{٢٠٠٠٠}{١٠٠٠١}$	$\frac{٢٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠١}$	٢ $\leftarrow$
|د(س) – ٢|	٢	١	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{١٠}$	...	$\frac{٢}{١٠١}$	$\frac{٢}{١٠٠٠١}$	$\frac{٢}{١٠٠٠٠٠١}$	3 $\leftarrow$

يلاحظ من الجدول (٥ – ٥) أنه بالإمكان جعل الفرق المطلق |د(س) –٢| صغيراً جداً بقدر ما نريد ، باختيار س كبيرة كبراً كافياً . أي : $\underset{\text{س} \leftarrow +\infty}{\text{نهـــا}}$ د(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow +\infty}{\text{نهـــا}}$ $\frac{\text{٢ س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ١}$ = ٢

وفي حالة أن تأخذ س قيماً صغيرة متناقصة [انظر الجدول (٥ – ٦)] فإن قيمة د(س) تقترب من العدد ٢ .

جدول (٥ – ٦)

س	٠	١–	٢–	٣–	...	١٠–	١٠٠–	١٠٠٠–	$\leftarrow -\infty$
د(س)	٠	١	$\frac{٨}{٥}$	$\frac{١٨}{١٠}$	...	$\frac{٢٠٠}{١٠١}$	$\frac{٢٠٠٠٠}{١٠٠٠١}$	$\frac{٢٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠١}$	$\leftarrow$ ٢
$\lvert$ د(س) – ٢ $\rvert$	٢	١	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{١٠}$	...	$\frac{٢}{١٠١}$	$\frac{٢}{١٠٠٠١}$	$\frac{٢}{١٠٠٠٠٠١}$	$\leftarrow$ 3

أي أنه بالإمكان جعل الفرق المطلق $\lvert$ د(س) – ٢ $\rvert$ صغيراً بقدر ما نريد باختيار س صغيره صغراً كافياً ،

أي أن $\underset{س \leftarrow -\infty}{نهـــا}$ د(س) = $\underset{س \leftarrow -\infty}{نهـــا}$ $\frac{٢ س^٢}{س^٢ + ١}$ = ٢

تعريف (٥ – ٤)

١ ■ إذا كانت الدالة د معرفة في الفترة] ٲ ، ∞ [فإن للدالة د النهاية ل$_١$ ∈ ح عندما س $\leftarrow \infty$ إذا كان من الممكن جعل $\lvert$ د(س) – ل$_١$ $\rvert$ صغيراً صغراً كافياً بالقدر الذي نريده ، باختيار س كبيرة كبراً كافياً ، أي أن : $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا}$ د(س) = ل$_١$.

٢ ■ إذا كانت الدالة د معرفة في الفترة] – ∞ ، ٲ [، فإن للدالة د النهاية ل$_٢$ عندما س $\leftarrow -\infty$ ، إذا كان من الممكن جعل $\lvert$ د(س) – ل$_٢$ $\rvert$ صغيراً صغراً كافياً بالقدر الذي نريده ، باختيار س صغيرة صغراً كافياً ، أي أن :

$\underset{س \leftarrow -\infty}{نهـــا}$ د(س) = ل$_٢$.

تلاحظ :

١ ■ وجود نهاية دالة عند نقطة ، أو عند اللانهاية لايعتمد على تعريف الدالة .

٢ ■ القيمة المطلقة $\lvert$ د(س) – ل $\rvert$ < 3 تعني أن : د(س) ∈ ف (ل ، 3) / { ل } ، والقيمة المطلقة ٠ < $\lvert$ س – ٲ $\rvert$ < δ تعني أن : س ∈ ف (ٲ ، δ) / { ٲ } .

خواص النهايات :

١ ■ إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفراً فإن :

$\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا}$ د(س) = صفراً ، $\underset{س \leftarrow -\infty}{نهـــا}$ د(س) = صفراً

علماً بأن : $\frac{١}{\infty}$ ≠ ٠ وانما $\underset{س \leftarrow -\infty}{نهـــا}$ $\frac{١}{س}$ = صفراً

مثال (٥ – ٥)

احسب النهايات التالية :

أ) $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س - ٢}$ ، س $\neq$ ٢ .   ب) $\lim_{س \to \pm\infty} (٥ س^٢)$.

جـ) $\lim_{س \to \infty} \frac{س - ٣}{س^٢ - ٩}$ ، س $\neq \pm$ ٣ .

الحــــل :

أ) $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س - ٢} = \lim_{س \to \infty} \left(\frac{\frac{١}{س}}{١ - \frac{٢}{س}} \right)$ بقسمة بسط الكسر ومقامه على المتغير ذو الأس الأكبر.

أي كلما زدات قيمة س فإن $\frac{١}{س}$ تقترب من الصفر ومقام الكسر يقترب من الواحد .

$$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{\frac{١}{س}}{١ - \frac{٢}{س}} \right) = \frac{٠}{١ - ٠} = \frac{٠}{١} = ٠ .$$

ب) $\lim_{س \to \pm\infty} (٥ س^٢) = ٥ (\pm\infty)^٢ = \infty$.

جـ) $\lim_{س \to \infty} \frac{س - ٣}{س^٢ - ٩} = \lim_{س \to \infty} \frac{س - ٣}{(س - ٣) (س + ٣)} = \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س + ٣}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{١}{س}}{١ + \frac{٣}{س}} = \frac{٠}{١ + ٠} = \text{صفراً} .$$

■ ٢ إذا كانت د(س) = جـ ؛ حيث جـ ثابت لكل قيم س في المجال ، أ $\in$ ح (مجال الدالة) فإن :
$\lim_{س \to أ}$ د(س) = جـ .

مثال (٥ – ٦)

احسب النهايات التالية :

أ) $\lim_{س \to ٣}$ ٨ ،   ب) $\lim_{س \to \sqrt{٥}}$ ١٩ ،   جـ) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣}{٥}$.

الحـــل :

الدوال في (أ) ، (ب) ، (جـ) ثابتة عندئذٍ بحسب الخاصية (٢) نجد أن :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} ٨ = ٨$ ، ب) $\lim\limits_{\text{س} \to \sqrt{٥}} ١٩ = ١٩$ ، جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

■٣ إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د(س)} = \text{ل}$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{ر(س)} = \text{ك}$ ، $\forall$ ل ، ك $\in$ ح فإن :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} [\text{د(س)} \pm \text{ر(س)}] = \lim \text{د(س)} \pm \lim \text{ر(س)} = \text{ل} \pm \text{ك}$.

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} [\text{د(س)} \bullet \text{ر(س)}] = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د(س)} \times \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{ر(س)} = \text{ل} \bullet \text{ك}$

جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left[\frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}\right] = \frac{\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د(س)}}{\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{ر(س)}} = \frac{\text{ل}}{\text{ك}}$ ؛ $\text{ر(س)} \neq ٠$ ، $\forall$ س $\in$ ح ، ك $\neq ٠$.

د) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \sqrt{\text{د(س)}} = \sqrt{\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د(س)}} = \sqrt{\text{ل}}$ ، ل ≥ ٠ ، د(س) ≥ ٠

الخاصية (٣) صحيحة في حالة : س $\to$ أ^{+} ، س $\to$ أ^{-} ، س $\to \infty$ ، س $\to -\infty$.

مثال (٥ - ٧)

أوجد ما يلي :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} (\text{س}^٢ + ٢)$ ، ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}^٢ + ٢}$ ، جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \sqrt{\text{س} - ١}$

الحـــل :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} (\text{س}^٢ + ٢) = \lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{س}^٢ + \lim\limits_{\text{س} \to ١} ٢ = (١^٢) + ٢ = ٣$.

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}^٢ + ٢} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{س}}}{\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{س}^٢ + ٢)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{س}}}{\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{س}^٢ + \lim\limits_{\text{س} \to ٢} ٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٤ + ٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٦}$

جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \sqrt{\text{س} - ١}$ غير موجودة لأن $\sqrt{\text{س} - ١}$ غير معرفة في حالة س < ١ وبالتالي لاتوجد نهاية من اليسار عند الواحد .

■٤ إذا كانت د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ ، ن $\in \text{ص}^{+}$ ، فإن :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{س}^{\text{ن}} = \infty$.

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \text{س}^{\text{ن}} = \begin{cases} \infty & : \text{إذا كانت ن عدداً زوجياً} \\ -\infty & : \text{إذا كانت ن عدداً فردياً} \end{cases}$

جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}$.

مثال (٥ - ٨)

أوجد : أ) $\lim_{س \to ٢}$ س^{٥} ، ب) $\lim_{س \to \infty}$ س^{٤} ، جـ) $\lim_{س \to ١^{+}} \sqrt{س - ١}$.

الحـــل :

أ) $\lim_{س \to ٢}$ س^{٥} = ٢^{٥} = ٣٢ ، ب) $\lim_{س \to \infty}$ س^{٤} = ∞

جـ) $\lim_{س \to ١^{+}} \sqrt{س - ١} = \sqrt{\lim_{س \to ١^{+}} س - \lim_{س \to ١^{+}} ١} = \sqrt{١ - ١}$ = صفراً .

■٥ $\forall$ د $\in$ صـ$^{+}$ فإن :

$$\lim_{س \to \infty} ا \, س^{د} = \begin{cases} \infty \text{ ، } ا \in]٠ \text{ ، } \infty[\\ -\infty \text{ ، } ا \in]-\infty \text{ ، } ٠[\end{cases}$$

■٦ إذا كانت $\lim_{س \to ا}$ د(س) = $\pm \infty$ وكان ب $\in$ ح ، فإن : $\lim_{س \to ا}$ [د(س) $\pm$ ب] = $\pm \infty$ ،

$\lim_{س \to ا}$ [ب . د(س)] = $\pm \infty$.

مثال (٥ - ٩)

احسب نهاية الدالة التالية : د(س) = $\frac{|س^{٢} - ١٦|}{س - ٤}$ عند النقاط التي يتغير حولها تعريف الدالة .

الحـــل :

س^{٢} - ١٦ = ٠ $\Leftrightarrow$ س = $\pm$ ٤ ، ونعلم أن :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = س + ٤ & \text{عندما } س > ٤ \\ \text{غير معرفة} & \text{عندما } س = ٤ \\ -س - ٤ & \text{عندما } -٤ < س < ٤ \quad \text{لماذا ؟} \\ \text{صفراً} & \text{عندما } س = -٤ \\ س + ٤ & \text{عندما } س < -٤ \end{cases}$$

أي أن النقاط التي يتغير حولها تعريف الدالة إذا كانت هي : س = ٤ ، س = -٤

■١ عندما س $\to$ ٤

د : معرفـة حـول س = ٤ بقاعـدتين .

ولحساب كلٍّ من النهايتين اليمنى واليسرى للدالة عند س = ٤ ، مع مراعاة شروط النهاية نجد أن .

$$\underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٤) = \underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نهـا}} \text{س} + \underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نهـا}} ٤ = ٤ + ٤ = ٨ \text{ ،}$$

$$\underset{\text{س} \to ٤^{-}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ٤^{-}}{\text{نهـا}} (-\text{س} - ٤) = -٤ - ٤ = -٨ \text{ .}$$

$\therefore$ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$ ليس لها وجود ، ذلك لأن : $\underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} \neq \underset{\text{س} \to ٤^{-}}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$

■٢ عندما س ← −٤

$$\underset{\text{س} \to -٤^{+}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to -٤^{+}}{\text{نهـا}} (-\text{س} - ٤) = \underset{\text{س} \to -٤^{+}}{\text{نهـا}} (-\text{س}) - \underset{\text{س} \to -٤^{+}}{\text{نهـا}} ٤ = -(-٤) - ٤ = \text{صفراً .}$$

$$\text{و } \underset{\text{س} \to -٤^{-}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to -٤^{-}}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٤) = \underset{\text{س} \to -٤^{-}}{\text{نهـا}} \text{س} + \underset{\text{س} \to -٤^{-}}{\text{نهـا}} ٤ = -٤ + ٤ = \text{صفراً}$$

$\therefore$ $\underset{\text{س} \to -٤}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{صفراً}$ (موجودة) ذلك لأن :

$$\underset{\text{س} \to -٤^{+}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to -٤^{-}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} \text{ .}$$

حالات عدم التعيين :

تنتج حالات عدم التعيين بالصورة : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ من التعويض المباشر في متغير الدالة المعطاة على النحو الموضَّح في الأمثلة التالية .

مثال (٥ − ١٠)

أوجد : $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}$

الحـــل :

في حالة التعويض المباشر عن متغير الدالة المعطاة نجد أن :

$$\text{د}(\infty) = \frac{٢(\infty)^٢ - ٣(\infty) + ١}{(\infty)^٢ + ٢(\infty) - ٣} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(حالة عدم التعيين)}$$

$$\text{ولكن } \text{د(س)} = \frac{(\text{س} - ١)(٢\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)} = \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س} + ٣} \text{ ، } \text{س} \neq -٣ \text{ ، } \text{س} \neq ١ \text{ .}$$

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (٢\text{س} - ١) = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} ٢\text{س} - \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} ١ = \infty - ١ = \infty$$

$$\text{و } \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٣) = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س} + \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} ٣ = \infty + ٣ = \infty$$

$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢ س} - ١}{\text{س} + ٣} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (حالة عدم التعيين) –أيضاً– عندئذٍ يتطلب الأمر تقسيم بسط الكسر ومقامه على أكبر أس ، لمتغير الدالة لتكون الدالة بالصورة :

$$\text{د(س)} = \dfrac{٢ - ٣ \left(\dfrac{١}{\text{س}}\right) + \dfrac{١}{\text{س}^{٢}}}{١ + ٢ \left(\dfrac{١}{\text{س}}\right) - \dfrac{٣}{\text{س}^{٢}}}$$

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{ د(س)} = \dfrac{٢ - ٣ \times ٠ + ٠}{١ + ٢ \times ٠ - ٠} = \dfrac{٢}{١} = ٢$$

مثال (٥ – ١١)

لتكن $\text{د(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{٢ س} + ٣} - ٣}{\text{س} - ٣}$ ، أوجد $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{ د(س)}$.

الحــــل :

عندما س = ٣ ؛ فإن الدالة الكسرية تصبح بالصورة $\text{د(٣)} = \dfrac{\sqrt{٢ \times ٣ + ٣} - ٣}{٣ - ٣}$

$= \dfrac{٣ - ٣}{٣ - ٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (حالة عدم التعيين)

د : معرفة على $\left\{ \text{س} : \text{س} \geq \dfrac{-٣}{٢} \text{ ، س} \neq ٣ \right\}$ لماذا ؟

الدالة معرفة في فترة حول س = ٣ ، ويتطلب ضربها في مرافق البسط للتخلص من الجذور بالصورة :

$$\text{د(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{٢ س} + ٣} - ٣}{(\text{س} - ٣)} \times \dfrac{\sqrt{\text{٢ س} + ٣} + ٣}{\sqrt{\text{٢ س} + ٣} + ٣} = \dfrac{\text{٢ س} + ٣ - ٩}{(\text{س} - ٣)\left(\sqrt{\text{٢ س} + ٣} + ٣\right)}$$

$$= \dfrac{٢\,\cancel{(\text{س} - ٣)}}{\cancel{(\text{س} - ٣)}\left(\sqrt{\text{٢ س} + ٣} + ٣\right)} = \dfrac{٢}{\sqrt{\text{٢ س} + ٣} + ٣} \text{ ، حيث س} \neq ٣ \text{ .}$$

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{ د(س)} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢}{\sqrt{\text{٢ س} + ٣} + ٣} = \dfrac{٢}{\sqrt{٦ + ٣} + ٣} = \dfrac{٢}{٦} = \dfrac{١}{٣}$$

تمارين ومسائل (ه - ١)

[١] أوجد نهاية ما يلي (إن وجدت) :

أ) $\lim\limits_{س \to ١} (س^٢ - ٢ س + ٣)$ ب) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{١}{(٢ س^٢ + س - ١)^٢}$.

جـ) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{٢ س^٢ + س + ١}$ د) $\lim\limits_{س \to ١} \sqrt{س - ١}$.

[٢] أوجد ما يلي :

أ) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ ب) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(٢ س - ٥)^٩ - ١}{س - ٣}$.

[٣] ابحث نهاية الدالة $\frac{|س|}{س}$ عندما س $\leftarrow$ ٠ موضحاً حالة وجودها بالرسم .

[٤] أثبت أن : $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢ س} = \frac{١}{٢}$

[٥] الدالة د(س) معرفة على النحو التالي :

$$د(س) = \begin{cases} ٢ س & : س < ٠ \\ ٢ س + ١ & : س \geq ٠ \end{cases}$$

أوجد نهاية الدالة د(س) عندما س تقترب من الصفر .

[٦] أوجد نهاية كل من الدوال التالية (إن وجدت) :

أ) $د(س) = \sqrt{س^٢ + س + ١} - \sqrt{س^٢ - س + ١}$ عندما س $\leftarrow \infty$.

ب) $د(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ عندما س $\leftarrow -\infty$.

جـ) $د(س) = \frac{٣ + ٢ س - س^٢}{٥ + ٣ س - ٢ س^٢}$ عندما س $\leftarrow \pm\infty$.

د) $د(س) = \frac{٧}{(٤ - س)^٢}$ عندما س $\leftarrow$ ٤ .

[٧] ادرس نهاية الدالة $د(س) = \frac{١}{|س - ١|}$ ، عندما س $\leftarrow$ ١ .

٥ : ٢ الاتصـــــال

يرتبط مفهوم اتصال الدوال ارتباطاً وثيقاً بمفهوم النهايات .

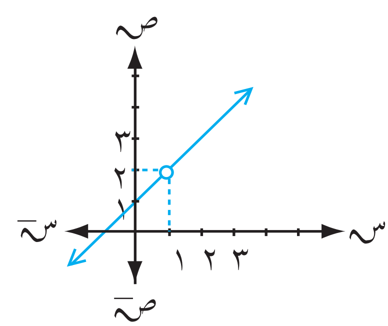
فإذا نظرت لمفهوم الاتصال من وجهة نظر هندسية تجد أن الدالة د تكون متصلة في الفترة ف ، إذا أمكنك رسم المنحنى الممثل لها في هذه الفترة دون أن ترفع رأس القلم عن الورقة التي ترسم عليها .

وبالتالي يتم التعامل مع مفهوم الاتصال وفق حالتين هما :

أولاً – اتصال دالة عند نقطة :

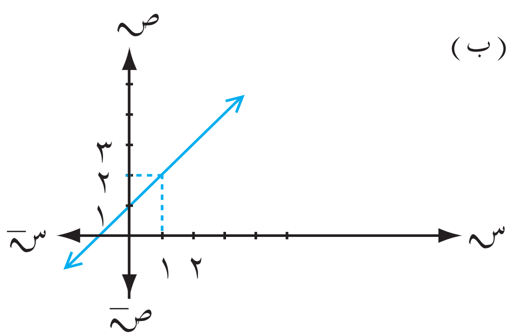
تأمل الحالات الأربع المرسومة أدناه في الشكل (٥ – ١٠) ، ماذا تلاحظ على سلوك الدوال الأربع عند النقط س = ١ ؟

(أ)



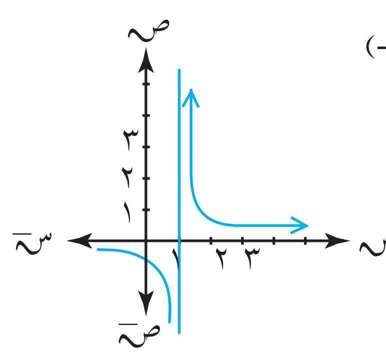
$\text{ر}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$ ، $\text{س} \neq ١$ ،

(ب)



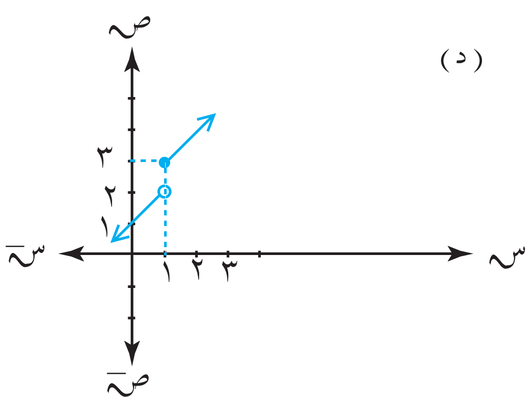
$\text{د}(\text{س}) = \text{س} + ١$

(جـ)



$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١}$ ، $\text{س} \neq ١$ ،

(د)



$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ١ & ، \text{س} < ١ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

الشكل (٥ – ١٠)

يلاحظ من الأشكال الأربعة الفرعيــة (أ)، (ب)، (جـ)، (ء) للشكل (٥–١٠) لبيان الدوال ر (س)، د(س) ، و(س) ، هـ(س) عندما س = ١ ؛ أن منحنى الدالة د(س) متصل عند س = ١ بينما بقية الدوال لاتتمتع بتلك الميزة ؛ عندئذٍ يمكن إنشاء الجدول (٥ –٧) لإيضاح شروط استكمال خاصية الاتصال وفقاً لتعريف الدالة عند نقطة معينة ، ونهايتها ، وقيمتها عند نفس النقطة لمقارنة الأشكال السابقة بحسب الترتيب .

جدول (٥ – ٧)

الدالة	ما قيمة الدالة عندما س = ١ ؟	ما نهاية الدالة عند س←١ ؟	هل قيمة الدالة تساوي نهايتها عند النقطة س = ١ ؟
ر (س)	غير معرفة	$\lim_{س \to ١}$ ر(س) = ٢	لا
د(س)	د (١) = ٢	$\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٢	نعم
و (س)	غير معرفة	ليس لها نهاية	لا
هـ (س)	هـ (١) = ٣	$\lim_{س \to ١^-}$ هـ (س) = ٢ $\lim_{س \to ١^+}$ هـ (س) = ٣	لا

بهذه المقارنات الموضحة في الجدول (٥ –٧) يلاحظ أن خاصية الاتصال عند نقطة معينة (أ) بشكل عام تتحقق إذا توافرت الشروط التالية :

١ ■ أن تكون الدالة معرفة عند النقطة س = أ .

٢ ■ أن تكون للدالة نهاية عندما س ← أ .

٣ ■ أن تكون : $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د (أ) .

تعريف (٥ –٥)

يقال أن الدالة متّصلة من اليمين عند النقطة أ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة ف = [ب ، جـ] ، أ ∈ ف بحيث ب ≤ أ < جـ .
وكانت : $\lim_{س \to أ^+}$ د(س) = د(أ) .

تعريف (٥ –٦)

يقال أن الدالة د متصلة من اليسار عند النقطة أ إذا كانت الدالة معرفة على الفترة المغلقة ف = [ب ، جـ] ، أ ∈ ف ، بحيث ب < أ ≤ جـ ، وكانت : $\lim_{س \to أ^-}$ د(س) = د (أ) .

وبصورة عامة يُعرَّف اتصال دالة عند نقطة كما يلي :

تعريف (٥ - ٧)

يقال أن الدالة د متصلة عند أ إذا كانت الدالة معرَّفة على الفترة المغلقة ف = [ب ، جـ] ، أ ∈] ب ، جـ[، وكانت : $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ د(س) = $\lim_{س \leftarrow أ^-}$ د(س) = د (أ) .

مثال (٥ - ١٢)

ادرس اتصال الدالة د(س) = |س| عندما س = الصفر

الحل :

نعلم أن : |س| = $\begin{cases} س & : س \geq ٠ \\ -س & : س < ٠ \end{cases}$

١ ■ الدالة د(س) معرَّفة عند الصفر حيث د(٠) = صفراً .

٢ ■ $\lim_{س \leftarrow ٠^+}$ د(س) = $\lim_{س \leftarrow ٠^+}$ س = صفراً .

$\lim_{س \leftarrow ٠^-}$ د(س) = $\lim_{س \leftarrow ٠^-}$ (- س) = صفراً .

∴ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د(س) = صفراً .

٣ ■ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د(س) = د(٠) .

∴ الدالة متصلة عند س = صفراً .

مثال (٥ - ١٣)

ناقش اتصال الدالة د(س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ عند س = ٢

الحل :

∵ مجموعة التعريف (م • ت) للدالة = ح / { ٢ } . أي أن الدالة غير معرَّفة عند س = ٢ .

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٢ لانتفاء أحد الشروط الأساسية لتحقيق خاصية الاتصال عند نقطة ،

ويمكن إعادة تعريف الدالة لتكون متصلة عند س = ٢ باستخدام التحليل بالصورة :

$$د(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} = \frac{\cancel{(س - ٢)}(س^٢ + ٢س + ٤)}{\cancel{(س - ٢)}} = س^٢ + ٢س + ٤$$

$$∴ د(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ س^٢ + ٢س + ٤ & ، س = ٢ \end{cases}$$

$\because$ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٢}$ (س^٢ + ٢ س + ٤ = ١٢) ، د(٢) = ١٢ .

$\lim\limits_{س \to ٢^-}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = د(٢) = ١٢

وهذا يعني أنه بالتعريف الجديد تكون الدالة متصلة عند النقطة س = ٢ .

ثانياً : اتصال دالة على فترة :

تعرف أن المعنى الهندسي لاتصال دالة يعني أن منحنى الدالة لاينقطع عند أية نقطة من بيان الدالة ؛ ولهذا يقال أن الدالة متصلة على فترة مفتوحة ف $\subset$ ح إذا كانت متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة .

تعريف (٥-٨)

يقال إن الدالة د متَّصلة على الفترة المفتوحة ف =]ب ، جـ[إذا كانت متَّصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة .

وبصورة رمزية يعبَّر عن شروط اتصال دالة د في فترة مغلقة ف = [ب ، جـ] على النحو التالي :

أ) $\forall$ ؍ $\in$]ب ، جـ[، فإن : $\lim\limits_{س \to ؍}$ د(س) = د(؍) ،

ب) $\lim\limits_{س \to ب^+}$ د(س) = د(ب) ،

جـ) $\lim\limits_{س \to جـ^-}$ د(س) = د(جـ) .

مثال (٥ – ١٤)

ابحث اتصال الدالة د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ على الفترة]٢ ، ٣[.

الحـــل :

م • ت = ح / {١} ، وبفرض أن س = ؍ نجد أن : د(؍) = $\frac{١}{؍ - ١}$ ، ؍ $\in$ ح / {١} .

$\therefore$ د(؍) = $\frac{١}{؍ - ١}$ ، ؍ $\in$]٢ ، ٣[$\subset$ ح / {١} . ——— (١)

$\lim\limits_{س \to ؍}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ؍}$ $\frac{١}{س - ١}$ ، ؍ $\in$ ح / {١} .

= $\frac{١}{؍ - ١}$ ، ؍ $\in$]٢ ، ٣[——— (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الدالة د(س) متَّصلة على الفترة]٢ ، ٣[، ومتَّصلة على جميع نقاط ح ، س $\neq$ ١ .

خواص الدوال المتصلة :

١ ■ لتكن د(س)، ر(س) دالتين متّصلتين على الفترة]ب ، جـ[عند النقطة ﺃ ∋ ف ؛ فإن كلاً من الدوال التالية تكون متّصلة عند ﺃ على الفترة نفسها :

أ) د(س) ± ر(س) ، ب) ك • د(س) ، ∀ ك ∋ ح ،

جـ) د(س) • ر(س) ، د) $\frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ ، ر(س) ≠ ٠ .

٢ ■ إذا كانت د(س) ≥ ٠ معرَّفة على الفترة ف ، فإن الدالة $\sqrt{\text{د(س)}}$ متَّصلة على نفس الفترة .

٣ ■ الدالة الثابتة والحدودية متَّصلة على أية فترة مغلقة في مجموعة تعريفها ذلك لأن الدالة الثابتة د(س) = ﺃ ، ﺃ ثابت لجميع قيم س (مجموعة التعريف) ودالة المطابقة ر(س) = س هما دالتان متصلتان ، ∀ س ∋ ح، وفقاً للفقرة (جـ) الخاصية (١) نستنتج أن الدالة ﺃ $\text{س}^{\text{م}}$ ، م ∋ ط متَّصلة ، ∀ س ∋ ح ، ومن الفقرة (أ) للخاصية (١) ينتج أن دالة كثيرة الحدود على الصورة :

د(س) = $ﺃ_{\text{ن}}$ $\text{س}^{\text{ن}}$ + $ﺃ_{\text{ن}-١}$ $\text{س}^{\text{ن}-١}$ + ... + $ﺃ_١$ س + $ﺃ_٠$ دالة متَّصلة ، ∀ س ∋ ح .

مثال (٥ - ١٥)

ابحث اتصال الدالة د(س) = $\sqrt{٩ - \text{س}^٢}$ على مجموعة تعريفها ؟

الحـــل :

د : معرَّفة بشرط أن ٩ − $\text{س}^٢$ ≥ ٠ ⟺ $\text{س}^٢$ ≤ ٩ ⟺ |س| ≤ ٣ ⟺ −٣ ≤ س ≤ ٣ .

ولكي نبحث اتصال الدالة في [−٣ ، ٣] .

١ ■ نبحث اتصال الدالة في]−٣ ، ٣[بفرض أن ﺃ ∋]−٣ ، ٣[.

$\lim_{\text{س}\to ﺃ}$ د(س) = $\lim_{\text{س}\to ﺃ} \sqrt{٩ - \text{س}^٢}$ = $\sqrt{\lim_{\text{س}\to ﺃ}(٩ - \text{س}^٢)}$ = $\sqrt{٩ - ﺃ^٢}$ = د(ﺃ) .

∴ $\lim_{\text{س}\to ﺃ}$ د(س) = د(ﺃ) ⟸ د متصلة في]−٣ ، ٣[.

٢ ■ نبحث اتصال د من اليمين عند س = −٣ .

$\lim_{\text{س}\to -٣^+}$ د(س) = $\lim_{\text{س}\to -٣^+} \sqrt{٩ - \text{س}^٢}$ = صفراً .

د(−٣) = $\sqrt{٩ - (-٣)^٢}$ = صفراً .

∴ $\lim_{\text{س}\to -٣^+}$ د(س) = د(−٣) أي أن الدالة متصلة على يمين س = −٣ .

٣■ نبحث اتصال د من اليسار عند س = ٣ .

$$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = \lim_{س \to ٣^-} \sqrt{٩ - س^٢} = \text{صفراً} \ .$$

$$د(٣) = \sqrt{٩ - ٩} = \text{صفراً} \ .$$

$$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = د(٣) \Leftarrow د \text{ متّصلة على يسار } س = ٣ \ ،$$

ومن (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن : د متّصلة في [−٣ ، ٣] .

تمارين ومسائل (٥−٢)

[١] ابحث اتصال الدالة $د(س) = |س - ١|$ عند س = ١ .

[٢] إذا كانت الدالة $ر(س) = \begin{cases} س^٢ & : س < ١ \\ س & : س \geq ١ \end{cases}$ هل الدالة متّصلة عند س = ١ ؟

[٣] لتكن الدالة $د(س) = \dfrac{س^٢ - س - ١٢}{س - ٤}$ ، س ≠ ٤ عرف الدالة عند س = ٤ بحيث تكون متّصلة عند هذه النقطة .

[٤] حدّد مجال الدالة $هـ(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ ، ثم ادرس اتصال الدالة على هذا المجال .

[٥] ناقش اتصال الدالة على مجالها موضحاً إجابتك بالرسم لكل من الدوال التالية :

أ) $ر(س) = \begin{cases} س + ١ & : س < ٢ \\ س + ٢ & : س \geq ٢ \end{cases}$

ب) $د(س) = \dfrac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ + ٤س - ٥}$.

[٦] لتكن $د(س) = \dfrac{|س^٢ - ٤س + ٣|}{س - ١}$ ناقش اتصال الدالة في ح كما يلي :

أولاً − ابحث الاتصال في الفترات الجزئية من المجال .

ثانياً − ابحث الاتصال عند النقاط التي يتغيَّر عندها تعريف الدالة .

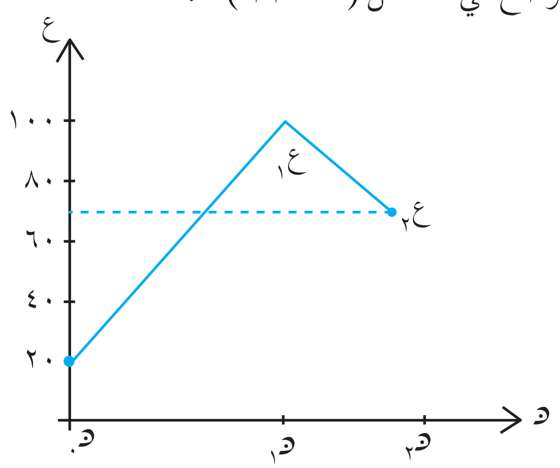
[٧] إذا كانت $د(س) = \dfrac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١ ، أعد تعريف الدالة عند س = ١ لتكون متصلة عند هذه النقطة .

[٨] إذا كانت $د(س) = \sqrt{س^٤ + ١}$ ابحث اتصال د عند س = −١ .

٥ : ٣ معدل تغير الدالة

ادرس المثال التالي :

نفرض أن سيارة كانت تتحرك بسرعة ٢٠كم/ساعة ، ثم أخذت تسير بسرعة متزايدة لتصل إلى ١٠٠كم/ساعة في الساعة الأولى ، ثم تناقصت سرعتها لتصل عند نهاية الساعة الثانية إلى ٧٠كم/ساعة . عندئذ تكون السرعة (ع) دالة في الزمن (ﺩ) . الأمر الذي يوضح ان سلوك الدالة من حيث تزايدها أو تناقصها عند قيم (ﺩ) يتوقف على المسافة التي تقطعها السيارة على النحو الموضح في الشكل (٥ – ١١) .



الشكل (٥ – ١١)

لاحظ أن :

$ع_.$ = ٢٠ ، عندما $ﺩ_.$ = صفر .

$ع_١$ = ١٠٠ ، عندما $ﺩ_١$ = ١ ساعة

$ع_٢$ = ٧٠ ، عندما $ﺩ_٢$ = ٢ ساعة .

وبالتالي فإن التغير في السرعة بالساعة الأولى هو :

Δ ع = $ع_١$ – $ع_.$

حيث يرمز لمقدار التغير بالرمز Δ (ويقرأ دلتا)

Δ ع = ١٠٠ – ٢٠ = ٨٠ كم / ساعة ——— (١)

أما في الساعة الثانية فإن مقدار التغير في السرعة هو :

Δ ع = $ع_٢$ – $ع_١$ = ٧٠ – ١٠٠ = –٣٠كم / ساعة ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن Δ ع قد أخذت قيمتين أحدهما موجبة والأخرى سالبة تبعاً لسلوك الدالة .

مثال (٥ – ١٦)

لتكن ص = $س^٢$ – ٣ أوجد مقدار التغير بالنسبة للمتغير س عند $س_١$ = ٢ ، $س_٢$ = ٣ ، ثم أوجد مقدار التغير في الدالة عند هاتين القيمتين .

الحـــل :

Δ س = $س_٢$ – $س_١$ = ٣ – ٢ = ١

Δ ص = د(س$_2$) − د(س$_1$) = (س$_2^2$ − ٣) − (س$_1^2$ − ٣) = (٩ − ٣) − (٤ − ٣) = ٦ − ١ = ٥

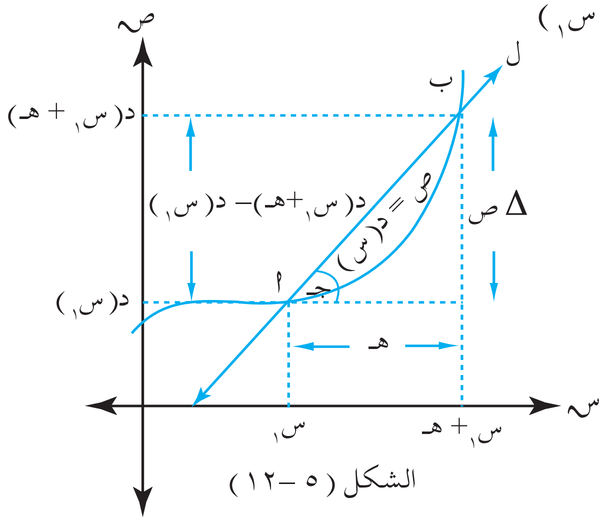
من تعريف الدالة ص = د(س) ، د(س) : [أ ، ب] ⟵ ح ،

وإذا كانت س$_1$ ، س$_2$ ∋ [أ ، ب] فإن د(س$_2$) − د(س$_1$) تمثل مقدار التغير في قيمة ص ، أي أن

Δ ص = ص$_2$ − ص$_1$ = د (س$_2$) − د (س$_1$) ،

ولأن ص دالة حقيقية متّصلة في المتغيِّر س فإنه عندما تتغير س ، من س$_1$ إلى س$_1$ + هـ فإن ص تتغير من د(س$_1$) إلى د(س$_1$ + هـ) ، أي أن التغير هـ في س يقابله التغير د (س$_1$ + هـ) − د(س$_1$) في ص .

[انظر الشكل (٥ − ١٢)] .



الشكل (٥ − ١٢)

لذلك فإن ميل المستقيم الواصل بين النقطتين بدلالة ظل الزاوية جـ هو :

$$\text{م} = \text{ظا جـ} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{س}_1} = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$$

وهذا ما نطلق عليه متوسط التغير .

فإذا رمزنا للتغيّر في قيمة س بالرمز Δ س ، أو (هـ) وللتغيّر في قيمة ص بالرمز Δ ص فإن :

Δ س = هـ = س$_2$ − س$_1$ ⟸ س$_2$ = س$_1$ + هـ ، وكذلك

Δ ص = د(س$_2$) − د(س$_1$) ⟸ Δ ص = د(س$_1$ + هـ) − د(س$_1$) ، تسمَّى أيضاً دالة التغير عند س = س$_1$.

مثال (٥ − ١٧)

لتكن ص = س^2 + ٥ س − ١ . أوجد متوسط التغيُّر في الدالة د في الفترة [٠ ، ٢] .

الحـــل :

$$\text{متوسط التغيُّر} = \frac{\text{د}(\text{س}_2) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{(\text{س}_2^2 + ٥\,\text{س}_2 - ١) - (\text{س}_1^2 + ٥\,\text{س}_1 - ١)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$= \frac{١٣ + ١}{٢ - ٠} = \frac{١٤}{٢} = ٧ .$$

مثال (٥ − ١٨)

احسب متوسط تغيّر الدالة د(س) = س^2 + ٣س عندما تتغير س من ١ إلى ٣ .

الحـــل :

متوسط التغير $= \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ ، وحيث إن هـ $=$ س$_٢$ $-$ س$_١$ $= ٣ - ١ = ٢$

فإن $\frac{\Delta ص}{هـ} = \frac{(س_١ + هـ)^٢ + ٣(س_١ + هـ) - (س_١^٢ + ٣ س_١)}{هـ}$

$= \frac{س_١^٢ + ٢ س_١ هـ + هـ^٢ + ٣ س_١ + ٣ هـ - س_١^٢ - ٣ س_١}{هـ} = \frac{هـ(٢ س_١ + هـ + ٣)}{هـ}$

$= ٢ س_١ + هـ + ٣ = ٢ \times ١ + ٢ + ٣ = ٧$.

مثال (٥ - ١٩)

أوجد متوسط التغيّر في الدالة ص $=$ س^٢ $-$ ١ ، عندما تتغير س من س$_١$ إلى س$_١$ + هـ .

الحـــل :

متوسط التغيُّر $= \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{س_١ + هـ - س_١}$

$= \frac{(س_١ + هـ)^٢ - ١ - (س_١^٢ - ١)}{هـ} = \frac{س_١^٢ + ٢ س_١ هـ + هـ^٢ - ١ - س_١^٢ + ١}{هـ}$

$= \frac{٢ س_١ هـ + هـ^٢}{هـ} = \frac{هـ(٢ س_١ + هـ)}{هـ} = ٢ س_١ + هـ$.

وبأخذ نهاية طرفي المعادلة السابقة نجد أن :

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{س_٢ \to س_١} \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ص}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

وهي تمثِّل معدل تغير الدالة (أو نهاية متوسط التغير) .

مثال (٥ - ٢٠)

أوجد معدل تغيُّر الدالة ص $=$ س^٢ عند س $=$ س$_١$

الحـــل :

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ص}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س_١ + هـ)^٢ - (س_١^٢)}{هـ}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}_١^٢ + ٢\,\text{س}_١\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - \text{س}_١^٢}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(٢\,\text{س}_١ + \text{هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (٢\,\text{س}_١ + \text{هـ}) = ٢\,\text{س}_١ \;.$$

مثال (٥ – ٢١)

أوجدمتوسط تغيُّر الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٣\,\text{س} + ١$ عند $\text{س} = \text{س}_١$ ؛ ثم احسب متوسط التغيُّر عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٢ ، ومعدل التغير عندما $\text{س} = ٣$.

الحـــل :

$$\text{متوسط التغيُّر} = \frac{\text{د}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_١)}{\text{هـ}} = \frac{(\text{س}_١ + \text{هـ})^٢ + ٣(\text{س}_١ + \text{هـ}) + ١ - (\text{س}_١^٢ + ٣\,\text{س}_١ + ١)}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{س}_١^٢ + ٢\,\text{س}_١\,\text{هـ} + \text{هـ}^٢ + ٣\,\text{س}_١ + ٣\,\text{هـ} + ١ - \text{س}_١^٢ - ٣\,\text{س}_١ - ١}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{هـ}(٢\,\text{س}_١ + \text{هـ} + ٣)}{\text{هـ}} = ٢\,\text{س}_١ + \text{هـ} + ٣ \;.$$

$\because \text{س}_١ = ٢ \quad ، \quad \text{س}_٢ = ٢,٢ \qquad \therefore \text{هـ} = ٢,٢ - ٢ = ٠,٢$

$\therefore$ متوسط التغيُّر عندما تتغيَّر س من ٢ إلى ٢,٢ $= ٢ \times ٢ + ٠,٢ + ٣ = ٧,٢$.

$$\text{معدل التغيّر} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta\,\text{ص}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (٢\,\text{س}_١ + \text{هـ} + ٣) = ٢\,\text{س}_١ + ٣$$

معدل التغيّر عند $(\text{س} = ٣) = (٢ \times ٣) + ٣ = ٩$.

مثال (٥ – ٢٢)

لتكن $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ١$ ، ونفتـــرض أن لدينا جسيماً يسير على خط مستقيم حسب قاعدة الدالة د ، وأنه قدتحرك من النقطـــة $\text{س}_١ = ١$ إلى النقطة $\text{س}_٢ = ٣$ ،

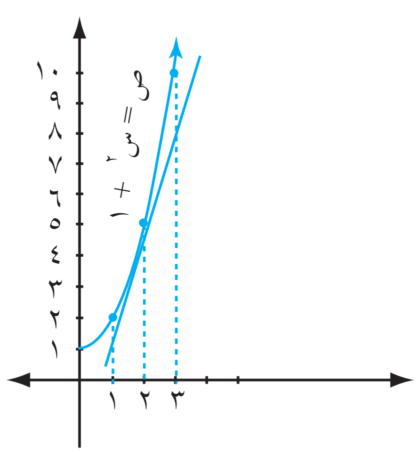
أوجد ما يلي :

أ) Δ س

ب) Δ ص

جـ) معدل التغير

د) ميل المماس عندما $\text{س} = ٢$.



الشكل (٥ – ١٣)

الحـــــل :

أ) Δ س = س$_2$ − س$_1$ = ٣ − ١ = ٢

ب) Δ ص = ص$_2$ − ص$_1$ = د(س$_2$) − د(س$_1$) = (س$_2^2$ + ١) − (س$_1^2$ + ١)

= (٩ + ١) − (١ + ١) = ١٠ − ٢ = ٨ ،

جـ) معدل التغير = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ ،

د) بما أن ميل المماس للدالة هو ميل الخط المستقيم في نقطة تماسه مع الدالة ،يتحقق عندما يقترب معـــدل التغير الأفقي من الصفر ، فإن :

$$\underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــــا}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \underset{\text{س}_2 \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـــــا}} \frac{\text{د}(\text{س}_2) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

وبالتعويض عن قيمة س$_2$ = Δ س + س$_1$ نجد أن :

$$\underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــــا}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\Delta \text{س}}$$

وبالتالي يكون ميل المماس عندما س = ٢ هو :

$$\underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــــا}} \frac{\text{د}(٢ + \Delta \text{س}) - \text{د}(٢)}{\Delta \text{س}} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــــا}} \frac{(٢ + \Delta \text{س})^2 + ١ - (٤ + ١)}{\Delta \text{س}}$$

$$\Leftarrow \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــــا}} \frac{٤ + ٤\Delta \text{س} + (\Delta \text{س})^2 + ١ - ٥}{\Delta \text{س}} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــــا}} \frac{\cancel{\Delta \text{س}} (٤ + \Delta \text{س})}{\cancel{\Delta \text{س}}}$$

$$\Leftarrow \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــــا}} (٤ + \Delta \text{س}) = ٤ \,.$$

مثال (٥ − ٢٣)

تحرك جسيم حسب الدالة د(ﻫ) = ﻫ^2 + ٤ ﻫ + ٥ ، حيث ﻫ هي الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة [٢ ، ١٠] .

الحـــــل :

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة عند النقطة النهائية} - \text{المسافة عند النقطة الابتدائية}}{\text{مقدار التغير}}$$

$$= \frac{\text{د}(\text{ﻫ}_2) - \text{د}(\text{ﻫ}_1)}{\text{ﻫ}_2 - \text{ﻫ}_1} = \frac{(\text{ﻫ}_2^2 + ٤\text{ﻫ}_2 + ٥) - (\text{ﻫ}_1^2 + ٤\text{ﻫ}_1 + ٥)}{\text{ﻫ}}$$

$\because$ ﻫ$_2$ = ١٠ ، ﻫ$_1$ = ٢

السرعة المتوسطة = $\frac{(١٠^٢ + ٤ \times ١٠ + ٥) - (٢^٢ + ٤ \times ٢ + ٥)}{١٠ - ٢} = \frac{١٤٥ - ١٧}{٨} = \frac{١٢٨}{٨} = ١٦$م / ث .

مثال (٥ – ٢٤)

تحرك جسم على خط مستقيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد د من الثواني يساوي ٩ د + ٢ د^٢ . احسب معدل تغير سرعة الجسيم عند د = ١٠ ثواني .

الحل :

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ف}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٩(د_١ + هـ) + ٢(د_١ + هـ)^٢ - (٩ د_١ + ٢ د_١^٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٩ د_١ + ٩ هـ + ٢ د_١^٢ + ٤ د_١ هـ + ٢ هـ^٢ - ٩ د_١ - ٢ د_١^٢}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٩ + ٤ د_١ + ٢ هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} (٤ د_١ + ٢ هـ + ٩)$$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ف}{هـ} = ٤ د_١ + ٩$$

∴ معدل التغير عند (د = ١٠) = ٤ × ١٠ + ٩ = ٤٠ + ٩ = ٤٩م / ث.

تمارين ومسائل (٥ – ٣)

[١] إذا كانت ص = س^٢ + ٥ س – ١ . أوجد متوسط التغير في الدالة ص في الفترة [٠ ، ٢] .

[٢] ذا كان د(س) = ٣ س + ٥ . أوجد متوسط التغير في الدالة عندما تتغير س كما يلي :

أ) من ٢ إلى ٤ ، ب) من ٣ إلى ٦ .

[٣] أوجد متوسط التغير فيما يلي :

أ) ص = س^٢ – س + ١ عندما س$_١$ = ٢ ، هـ = ٢ .

ب) ص = $\frac{١}{س}$ عندما س$_١$ = ١,٥ ، هـ = ١ ،

جـ) ص = $\sqrt{س + ٣}$ عندما تتغير س من ١ إلى –١ ،

د) هـ(د) = د^٢ + د عندما تتغير د من ٥ إلى ٣ .

[٤] أوجد معدل تغير الدالة عند النقاط المذكورة لكل منها :

■١ ص = ٢ س + ٤ عندما س = ١ ، ■٢ ص = ٢ س^٢ – ٣ س عندما س = $\frac{١}{٢}$ ،

■٣ ص = $\sqrt{س^٢ + ١}$ عندما س = ٢ ، ■٤ د(د) = د^٢ + د – ١ عندما د = ١,٤ ،

■٥ ص = (س + ١)^٢ عندما س = –١ .

[٥] إذا تحرك جسيم على خط الأعداد ، وكان موقعه في اللحظة س معرَّفاً بالدالة ص = ٨ س − س^{٢} ؛ حيث س بالثواني ، د(س) بالأمتار ؛ فأوجد السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [١ ، ٣] .

[٦] احسب متوسط تغير الدالة د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$ على الفترة [٣ ، ٤,٥] .

[٧] تتمدد صفيحة مربعة الشكل بحيث تظل محتفظة بشكلها ، احسب متوسط التغير في مساحتها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ إلى ١٠,١سم ، ثم احسب معدل التغير عندما يكون طول ضلعها ٢٠سم .

[٨] تتمدد صفيحة دائرية بالتسخين ، احسب متوسط التغير في مساحتها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٨سم إلى ٨,٢سم .

[٩] تتحرك دراجة نارية في خط مستقيم، بحيث تكون سرعتها عند اللحظة ن معطاة بالعلاقة ع = ن^{٢} + ٥ ن متر / ث . احسب معدل تغير السرعة عند ن = ٤ ثواني .

[١٠] وعاء اسطواني الشكل طول نصف قطر قاعدته ١٢ سم فيه ماء . فإذا تم تبريد الماء، بحيث تغير ارتفاعه في الوعاء من ١٦سم إلى ١٤سم . أوجد متوسط التغير في حجم الإناء، ومعدل التغير في حجم الإناء عند الارتفاع ١٥سم (حجم الأسطوانة π نق^{٢} ع ، $\pi \simeq ٣,١٤$) .

٥ : ٤ المشتقة

بعد أن تعرّفت على نهاية الدالة ومتوسط تغيرها ومعدله يمكننا أن نتطرق إلى مفهوم المشتقة ، وتعتبر النهايات هي الأساس في دراسة الاشتقاق ؛ فالمشتقة هي عبارة عن نهاية متوسط تغير (أي معدل تغير) الدالة د(س) عند نقطة معينة س$_{١}$ في مجموعة تعريفها .

تعريف (٥ − ٩)

إذا كانت الدالة د(س) معرفة في الفترة المفتوحة] ا ، ب [، فإن معدل التغير اللحظي للدالة د(س) عند النقطة س$_{١}$ ∈] ا ، ب [، تسمى مشتقة الدالة د(س) عند هذه النقطة ، ويرمز له بالرمز دَ(س) [ويقرأ دال شرطة س] ويكتب رمزياً :

$$\text{دَ}(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}} .$$

يرمز أيضاً للمشتقة دَ(س) بالرمز $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (ويقرأ دال ص على دال س) .

أي أنه إذا كانت النهاية موجودة ؛ فإنه يمكن القول أنّ الدالة د لها مشتقة عند النقطة $س_١$ ، والعكس صحيح. أي أنه إذا كانت قابلة للاشتقاق عند النقطة $س_١$ ، فإن $دَ(س_١)$ موجودة .
وتمثل المشتقة الأولى ميل المماس للمنحنى عند نقطة محددة ، كما تمثل السرعة لجسم يتحرك عند لحظة معينة.

مثال (٥ – ٢٥)

باستخدام تعريف المشتقة . أوجد مشتقة الدالة $د(س) = ٤س + ١$.

الحـــل :

المشتقة هي :

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٤(س_١ + هـ) + ١ - (٤س_١ + ١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٤هـ + ١ - ١}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٤هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠}(٤) = ٤ .$$

ملاحظة :

نلاحـظ أن $دَ(س) = ٤$ ، حيث إن $د(س) = ٤س + ١$ ، يمثل مستقيماً وبالتالي فإن ميله هو $م = \frac{ءص}{ءس}$ يساوي مقداراً ثابتاً . (لاحظ أن $\frac{ءص}{ءس}$ هي نفسها $دَ(س)$ أو $\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$) .

مثال (٥ – ٢٦)

سيارة تتحرك بخط مستقيم ، فإذا كانت المسافة التي قطعتها تُعطى بالقاعدة :
$ف = د(ن) = ١٢ن^٢ + ١٥ن$ ، وباعتبار أن ف هي المسافة بالكيلومترات ، ن تمثل قيمة الزمن بالساعة ، فأوجد :

١ ■ المسافة المقطوعة بعد ثلاث ساعات .

٢ ■ $\left.\frac{ءف}{ءن}\right|_{ن = ٣}$ (السرعة اللحظية عند الزمن ن = ٣ ساعات، باستخدام تعريف المشتقة) .

الحـــل :

١ ■ المسافة المقطوعة بعد ثلاث ساعات هي : $د(ن) = ١٢ن^٢ + ١٥ن$.
$د(٣) = ١٢(٣)^٢ + ١٥ \times ٣ = ١٠٨ + ٤٥ = ١٥٣$ كم .

٢ ■ $$فَ = \frac{ءف}{ءن} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(ن_١ + هـ) - د(ن_١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١٢(ن_١ + هـ)^٢ + ١٥(ن_١ + هـ) - (١٢ن_١^٢ + ١٥ن_١)}{هـ}$$

$$\bar{ف} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١٢ ن_١^٢ + ٢٤ ن_١ هـ + ١٢ هـ^٢ + ١٥ ن_١ + ١٥ هـ - ١٢ ن_١^٢ - ١٥ ن_١}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢٤ ن_١ هـ + ١٢ هـ^٢ + ١٥ هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ (٢٤ ن_١ + ١٢ هـ + ١٥)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} (٢٤ ن_١ + ١٢ هـ + ١٥) = ٢٤ ن + ١٥$$

$$\therefore \bar{د}(ن) = \frac{ءف}{ءن} = ٢٤ ن + ١٥$$

ثم نحسب قيمة المشتقة عندما $ن = ٣$ ، فيكون : $\left. \frac{ءف}{ءن} \right|_{ن \to ٣} = ٢٤ \times ٣ + ١٥ = ٨٧$.

وهي السرعة اللحظية عند الساعة الثالثة من بدء الحركة .

$\therefore$ السرعة اللحظية عندما ($ن = ٣$ ساعات) هي ٨٧ كم / ساعة .

تدريب (٥ - ١)

ادرس قابلية اشتقاق الدالة $د(س) = \begin{cases} ٢ س + ١ & ، \quad س \le ٢ \\ س^٢ + ٢ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

نجد المشتقة لكل جزء على حدة أي للفترة] ٢ ، + ∞ [، وللفترة] – ∞ ، ٢ [.

ثم نبحث في المشتقة $\bar{د}(س)$ عند نقطة التشعب $س = ٢$

نلاحظ : $\bar{د}(س^+) = ٢$ (قيمة المشتقة من اليمين) .

$\bar{د}(س^-) = ٢ س$ (قيمة المشتقة من اليسار) .

أي أن $\bar{د}(س^+) \ne \bar{د}(س^-)$ ، ومنها تستنتج أن $\bar{د}(٢)$ غير موجودة .

من ذلك نلاحظ أن :

١ ■ إذا وجدت مشتقة للدالة عند النقطة $س_١$ ، فإننا نقول أن د قابلة للاشتقاق عند النقطة $س_١$ ، وإذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة من نقاط الفترة المفتوحة] أ ، ب [، فإننا نقول أن الدالة قابلة للاشتقاق في هذه الفترة ، وكذلك إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة] – ∞ ، ∞ [، فإننا نقول أن الدالة قابلة للاشتقاق عند كل $س \in ح$.

٢ ■ إذا كانت النهاية غير موجودة عند النقطة $س_١$ ، فإننا نقول أن الدالة ليس لها مشتقة عند النقطة $س_١$.

٣ ■ غالباً ما نكتب مشتقة الدالة كدالة أخرى في المتغير المستقل س .

التفسير الهندسي للمشتقة :

إنّ فكرة المشتقة ظهرت من أجل حساب ميل المماس لمنحنى دالة عند نقطة معينة، ومن تعريف الدالة ص = د(س) فبإمكاننا تمثيل هذه الدالة هندسياً كما في الشكل (٥ –١٣)، وإذا أخذنا النقطتين م ، ل حيث م هي: ($س_١$ ، د($س_١$))، ل هي ($س_١ +$ هـ ، د($س_١ +$ هـ)) ؛ حيث هـ $\ne$ ٠ .

ولكن كلّما تقترب هـ تدريجياً من الصفر ،أي $\text{هـ} \longleftarrow ٠$ ، فإن ل تأخذ أوضاعاً جديدة هي ل$_١$ ، ل$_٢$ ، ... ، وتنطبق في النهاية على م ، وتأخذ القطعة المستقيمة أوضاعاً جديدة هي $\overline{\text{م ل}_١}$ ، $\overline{\text{م ل}_٢}$ ، ... ، وتأخذ في النهاية وضع المماس المرسوم للمنحنى عند النقطة م .

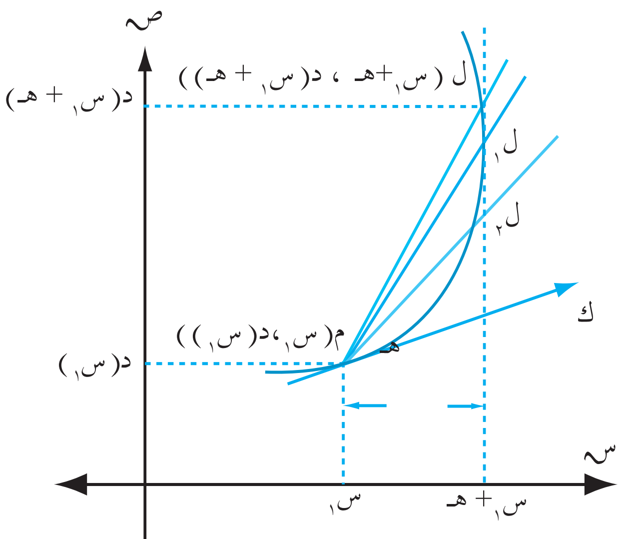
ومن الواضح أن : ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين = $\dfrac{\text{د}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$

فإذا اقتربت هـ من الصفر ، فإننا نحصل على ميل المماس للمنحنى عند النقطة م من خلال النهاية

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{د}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$$

ومما سبق فقد تعرفنا أنَّ هذه النهاية هي مشتقة الدالة عند س$_١$ ، أي أن دَ(س$_١$) هي قيمة مشتقة الدالة عند النقطة (س$_١$ ، د(س$_١$)) تساوي ميل المماس المرسوم للمنحنى عند تلك النقطة ، وتستنتج من ذلك أن معادلة المستقيم ك الذي يمر بالنقطة (س$_١$، د(س$_١$)) ، والذي ميله دَ(س$_١$) هي :

$$\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \text{دَ}(\text{س}_١)$$



الشكل (٥ – ١٤)

$\Longleftarrow$ $\boxed{\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{دَ}(\text{س}_١)\,(\text{س} - \text{س}_١)}$ وهي معادلة المماس ك في النقطة (س$_١$ ، ص$_١$)

مثال (٥ – ٢٧)

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = س^٢ + س^٣ ، عندما س = −٢

الحــــل :

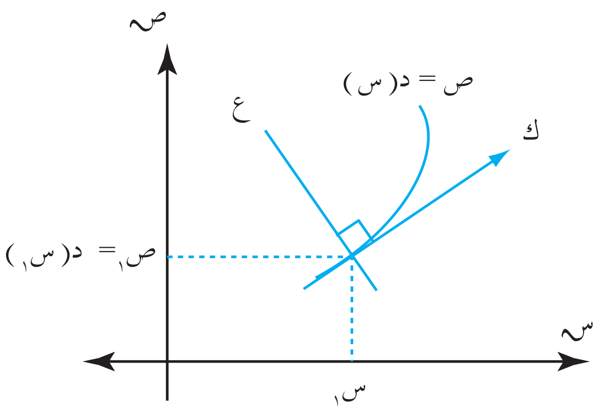
ميل المماس لمنحنى الدالة عندما س = −٢ هو :

$$\text{دَ}(-٢) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{د}(-٢ + \text{هـ}) - \text{د}(-٢)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{(-٢ + \text{هـ})^٢ + (-٢ + \text{هـ})^٣ - ((-٢)^٢ + (-٢)^٣)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{٤ - ٤\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - ٨ + ١٢\text{هـ} - ٦\text{هـ}^٢ + \text{هـ}^٣ + ٤}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{هـ}(٨ - ٥\text{هـ} + \text{هـ}^٢)}{\text{هـ}}$$

= نهــا (٨ – ٥ هـ + هـ٢) = ٨
  هـ ← ٠

أما إذا كان المستقيم ع عمــــودياً على المماس ك ، ويمر بنقطة التمـــاس (س١ ، د(س١)) [انظر الشكل (٥ –١٥)] ،



الشكل (٥ –١٥)

فإن ميل المستقيم ع هو : $\frac{-١}{\bar{د}(س_١)}$

بحيث أن $\bar{د}$(س١) ≠ صفر .

فتصبح معادلة العمودي هي :

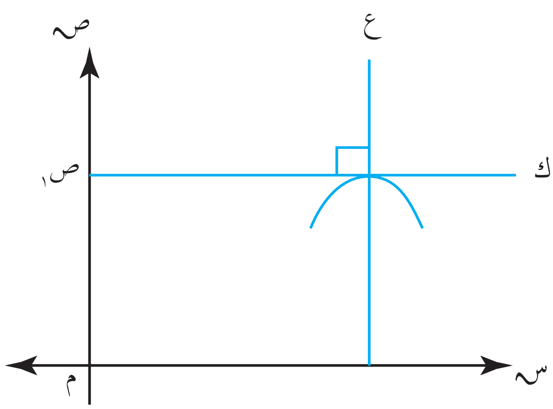
$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{-١}{\bar{د}(س_١)}$

$$\therefore \boxed{ص - ص_١ = \frac{-١}{\bar{د}(س_١)} (س - س_١)}$$

والســـؤال هنا ، ماذا لو كانت قيمة المشتقة :

$\bar{د}$(س١) = ٠ ؟

وللإجابة عنه : يكون المماس ك موازياً للمحــور السيني [انظر الشكل (٥ – ١٦)] ، وتصبح معادلته هي ص = ص١ ، أما العمودي ع فيكــون موازيـاً لمحور الصادات ، ومعادلته هي : س = س١ .



الشكل (٥ –١٦)

تدريب (٥ – ٢)

أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الدالة د(س) = س٢ – ٢ س + ٧ عند النقطة (١ ، ٦) .
وماذا تلاحظ ؟

مثال (٥ – ٢٨)

أوجد معادلة كل من المماس والعمودي لمنحنى الدالة ص = $\frac{١}{١ + س}$ عند س = ٢ .

الحـــل :

$د(س_١) = \frac{١}{١ + س_١}$ ، $د(س_١ + هـ) = \frac{١}{١ + (س_١ + هـ)}$

$∴ د(س_١ + هـ) - د(س_١) = \frac{١}{١ + (س_١ + هـ)} - \frac{١}{١ + س_١} = \frac{(١ + س_١) - ١ - (س_١ + هـ)}{[١ + (س_١ + هـ)](١ + س_١)}$

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{- هـ}{[١ + (س_١ + هـ)](١ + س_١)}}{هـ} = \frac{-١}{(١ + س_١)(١ + س_١)} = \frac{-١}{(١ + س_١)^٢}$$

وهو ميل المماس لمنحنى الدالة $د(س) = \frac{١}{١ + س}$ عند النقطة التي إحداثيها السيني $س_١$ ، وبالتالي ميل المماس عند النقطة $س = ٢$ هو :

$$دَ(٢) = \frac{-١}{(١ + ٢)^٢} = - \frac{١}{٩}$$

∵ معادلة المماس $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = دَ(س_١)$ ، وحيث إن $س_١ = ٢$ ، $ص_١ = \frac{١}{٣}$

$∴ ص - ص_١ = دَ(س_١) (س - س_١)$

$ص - \frac{١}{٣} = \frac{-١}{٩} (س - ٢)$

$ص = \frac{-١}{٩} س + \frac{٢}{٩} + \frac{١}{٣}$

$ص = \frac{-١}{٩} س + \frac{٥}{٩}$

$ص = \frac{-١}{٩} (س - ٥)$ ، وهي معادلة المماس.

ولإيجاد معادلة العمودي :

$ص - ص_١ = \frac{-١}{دَ(س_١)} (س_١ - س_٢)$

$ص - \frac{١}{٣} = \frac{-١}{(\frac{-١}{٩})} (س - ٢)$

$ص = ٩ س - \frac{٥٣}{٣}$ أو

$ص = \frac{١}{٣} (٢٧ س - ٥٣)$ ، وهي معادلة العمودي.

مثال (٥ – ٢٩)

أوجد النقطة الواقعة على المنحنى ص = س^{٢} ، والتي يوازي عندها المماس المستقيم الذي معادلته ص = ٦ س – ١ .

الحل :

∵ ص = س^{٢} .

∴ صَ = ٢ س (باستخدام تعريف المشتقة) ——— (١)

∴ ميل المماس عند أي نقطة هو ٢ س ، وحيث إن ميل المماس يساوي ميل المستقيم ص = ٦ س – ١

∴ صَ = ٦ ——— (٢)

وبتساوي المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن :

٢ س = ٦

∴ س = ٣

وبالتعويض في معادلة المنحنى عند س = ٣ ، نحصل على ص = ٩

∴ توجد نقطة واحدة تقع على المنحنى ، يكون المماس عندها يوازي المستقيم ص = ٦ س – ١ ، وهي النقطة (٣ ، ٩) .

تمارين ومسائل (٥ – ٤)

[١] إذا كانت ص = ٣ س – ١ ، س$_{١}$ = ١ ، س$_{٢}$ = ٣ ، فأوجد :

أ) Δ س ، ب) Δ ص ، جـ) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ (متوسط المتغير)

د) $\lim\limits_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ عندما س = ١ (معدل التغير)

[٢] لتكن د(س) = س^{٢} + ٣ ، فأوجد ما يلي :

١ ■ رسم هذه الدالة ،

٢ ■ متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٣ ،

٣ ■ ميل القطعة اَ ب حيث اَ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، ١٢) .

٤ ■ ميل المماس عند النقطة اَ (١ ، ٤) .

[٣] باستخدام تعريف المشتقة ، أوجد مشتقة الدوال التالية فيما يأتي :

أ) د(س) = $\frac{١}{س + ١}$ ، س ≠ –١ ، ب) د(س) = س^{٢} + ٢

جـ) د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ١}$ ، د) د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ ، س > ٠

هـ) د(س) = (س – ١)^{٢}

و) د(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، \quad س < ٢ \\ ٤ س - ٤ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$

ز) د(س) = | س | ، س = $\sqrt{٢}$

ح) د(س) = ٢ س^٢ - ٣ س + ٥

[٤] أثبت باستخدام تعريف المشتقة ، أن المشتقة لأي دالة خطية على الصورة د(س) = ﻋ س + ب ، تكون : دَ(س) = ﻋ .

[٥] أوجد باستخدام تعريف المشتقة ، دَ(٢) للدالة د(س) = ٦ س + | ٤ س - ٢ | .

[٦] تحـرك جسم على خــط مستقيم وفق القاعدة ف = ٢ ﻥ^٢ - ﻥ ، حيث ف المسافة المقطوعة بالمتر ، ﻥ الزمن بالدقائق ، فأوجد :

أ) المسافة التي يقطعها الجسم بعد دقيقتين ، ب) متوسط السرعة خلال دقيقتين ،

جـ) سرعة الجسم عندما ﻥ = ٢ دقيقة (استخدم تعريف المشتقة) .

[٧] أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ عند س = ١ .

[٨] أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة د(س) = س^٢ - س + ١ عندما س = ٠

[٩] أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنيات الدوال المعطاة عند النقطة المذكورة :

أ) د(س) = ٤ س - س^٢ + ١ ، عند (-١ ، -٤) ،

ب) د(س) = ٢ س - $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ ، عند (٤ ، ٦) ،

جـ) د(س) = ١ - (س + ١)^٢ ، عند س = -١ .

[١٠] أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = ٤ - س^٢ ، عند النقطة (٢ ، صفر) .

[١١] أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = س^٢ + ٤ س - ١ ، إذا كان المماس عمودياً على المستقيم : ٢ ص + س - ١ = ٠ .

[١٢] أوجد نقاط المنحنى ص = س^٣ - ٦ س^٢ + ٥ التي يكون المماس عندها موازياً للمحور السيني .

[١٣] ما هي نقاط المنحنى ص = س^٣ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم ص = س .

٥ - ٥ المشتقة عند نقطة والمشتقة على فترة

أولاً : المشتقة عند نقطة :

تكون الدالة ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = ﻋ . إذا كانت : $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{د(ﻋ + هـ) - د(ﻋ)}{هـ}$ لها وجود .

مبرهنة (٥ – ١)

إذا كانت الدالة ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = ﺃ ، فإنها تكون متَّصلة عند نفس النقطة .

البرهان :

إذا كانت س نقطة في مجموعة تعريف الدالة د ؛ حيث س ≠ ﺃ ، فإنه من الممكن كتابة د(س) على النحو الآتي :

$$د(س) = د(ﺃ) + \left[\frac{د(س) - د(ﺃ)}{س - ﺃ} \right] (س - ﺃ)$$

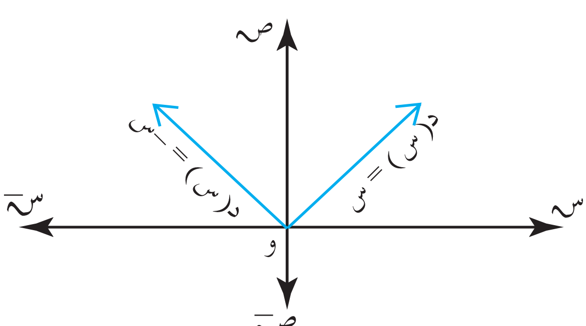
وباستخدام خواص النهايات ، نجد أن :

$$\lim_{س \leftarrow ﺃ} د(س) = \lim_{س \leftarrow ﺃ} د(ﺃ) + \lim_{س \leftarrow ﺃ} \frac{د(س) - د(ﺃ)}{س - ﺃ} \lim_{س \leftarrow ﺃ} (س - ﺃ)$$

$$= د(ﺃ) + دَ(ﺃ) \text{ صفر } = د(ﺃ) .$$

أي أن : $\lim_{س \leftarrow ﺃ} د(س) = د(ﺃ)$ ، وبناءً على تعريف اتصال الدالة ، فإن د تكون متصلة عند النقطة ﺃ.

مثـــال



الشكل (٥ – ١٧)

إذا كان د(س) = | س | ∀ س ∈ ح

ادرس قابليــة الدالة د(س) للاشتقاق عند س = ٠

تُلاحظ أن :

$$دَ(س) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

$$\Leftarrow دَ(٠) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ} \qquad = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{|هـ|}{هـ}$$

$$\lim_{هـ \leftarrow ٠^-} \frac{|هـ|}{هـ} = \frac{-هـ}{هـ} = -١ \quad ، \quad \because \quad \lim_{هـ \leftarrow ٠^+} \frac{|هـ|}{هـ} = \frac{هـ}{هـ} = ١ \quad .$$

ومن ذلك فإن $\lim_{س \leftarrow ٠^-} \frac{|هـ|}{هـ} \neq \lim_{س \leftarrow ٠^+} \frac{|هـ|}{هـ}$.

انظر شكل (٥ – ١٧) ، وتعرف أنَّ الدالة د(س) = | س | متّصلة عند النقطة س = ٠ ، ولكن ليس لها نهاية وبالتالي ليس لها مشتقة عند هذه النقطة .

ومن ذلك نستنتج أن الدالة قد تكون متَّصلة عند نقطة، ولكن غير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة .

مثال (٥ – ٣٠)

ابحث مشتقة الدالة $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}}$ عند $\text{س} = ٠$.

الحـــل :

للبحث عن مشتقة الدالة عند $\text{س} = ٠$ ، فإننا نستخدم تعريف المشتقة ، بحيث تكون :

$$\bar{\text{د}}(\text{س}_١) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}_١ + \text{هـ}} - \sqrt[٣]{\text{س}_١}}{\text{هـ}}$$

وعندما $\text{س} = ٠$ ، فإن المقدار في الطرف الايسر هو :

$$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٠ + \text{هـ}} - \sqrt[٣]{٠}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{هـ})^{\frac{١}{٣}}}{\text{هـ}} \quad , \quad \text{هـ} \neq ٠$$

$$\therefore \bar{\text{د}}(\text{س}_١) = \bar{\text{د}}(٠) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٠} \right) .$$

ونجد أنه عندما $\text{هـ} \longrightarrow ٠$ ، فإن المقدار يؤول إلى $\pm \infty$.

ومن ذلك نستنتج أن النهاية غير موجودة ، وأن الدالة ليس لها مشتقة عند النقطة $\text{س} = ٠$.

مما سبق يتضح أنه لإيجاد المشتقة عند نقطة ، يُشترط أن تكون النهاية موجودة .

مثال (٥ – ٣١)

لتكن
$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س} - ١ & , \quad \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}^٢ + ٣ & , \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة $\text{د}(\text{س})$ عند النقطة $\text{س} = ٢$.

الحـــل :

$\because$ الدالة $\text{د}(\text{س})$ معرفة على ح .

$$\therefore \bar{\text{د}}_{-}(\text{س}_١) = \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{[٤(\text{س}_١ + \text{هـ}) - ١] - (٤\text{س}_١ - ١)}{\text{هـ}}$$

$$\therefore \bar{\text{د}}_{-}(٢) = \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{[٤(٢ + \text{هـ}) - ١] - (٤ \times ٢ - ١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٨ + ٤\text{هـ} - ١ - ٧}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٤ \quad \text{——} (١)$$

كذلك
$$\bar{\text{د}}_{+}(\text{س}_١) = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{(٢ + \text{هـ})^٢ + ٣ - (٤ + ٣)}{\text{هـ}} \quad \therefore \bar{\text{د}}_{+}(٢) = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٧ + ٤\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - ٧}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(٤ + \text{هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^+}{\text{نهـا}} (٤ + \text{هـ}) = ٤ \quad \text{——} (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\bar{د}(س^{+}) = \bar{د}(س^{-}) \quad \Leftarrow \quad \bar{د}(٢^{+}) = \bar{د}(٢^{-}) = ٤$$

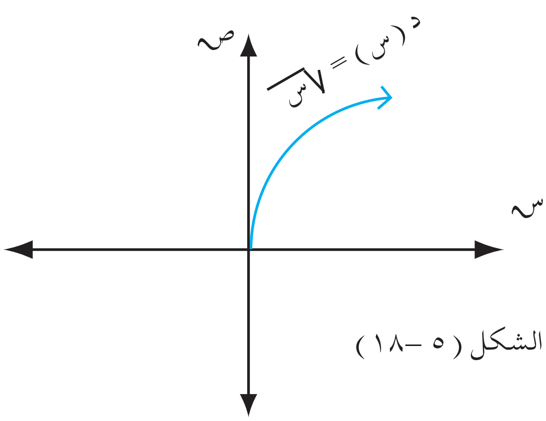
$\therefore$ الدالة لها مشتقة عند النقطة $س = ٢$ ، وهي : $\bar{د}(٢) = ٤$.

ثانياً- المشتقة على فترة :

لإيجاد مشتقة الدالة على فترة ، فإننا نوجد المشتقة عند أية نقطة س ، حيث إنّ س تنتمي إلى مجموعة التعريف ، وهي الفترة المعينة ، وبالتالي فإن الدالة د(س) قابلة للاشتقاق في الفترة (ت) إذا كانت لها مشتقة عند كل نقطة من نقاط الفترة (ت) .

أما إذا كانت الفترة (ت) مغلقة [ا ، ب] ، حيث إن ا < ب يمكن أن نقول بأن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (ت) فقط .

مثال (٥ – ٣٢)



الشكل (٥ –١٨)

لتكن الدالة د(س) = $\sqrt{س}$ بيِّن أن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ٠ ، ∞ [، ولكنها ليست كذلك على الفترة [٠ ، ∞ [، شكل (٥ –١٨) .

الحــــل :

$$\bar{د}(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س_١ + هـ} - \sqrt{س_١}}{هـ}$$

، وبالضرب في مرافق البسط نحصل على :

$$\bar{د}(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{س_١ + هـ - س_١}{هـ\,[\sqrt{س_١ + هـ} + \sqrt{س_١}]} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س_١ + هـ} + \sqrt{س_١}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س_١}} \quad ، \quad \forall\, س > ٠$$

وبالتالي فإن الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة] ٠ ، ∞ [.

وعندما $س = ٠$ تكون :

$$\bar{د}(٠) = \frac{١}{٢\sqrt{٠}} = \infty$$

وبالتالي ، فإن المشتقة عند $س = ٠$ غير موجودة .

ونستنتج من ذلك أن الدالة د ليس لها مشتقة في الفترة [٠ ، ∞ [.

مثال (٥ – ٣٣)

ابحث قابلية الدالة د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} & ،\ س \geq ١ \\ -\frac{١}{٢} س^٢ + \frac{٣}{٢} & ،\ س < ١ \end{cases}$.

للاشتقاق عند س = ١ في الفترة [١ ، ∞ [والفترة] –∞ ، ١] .

الحـــل :

$\bar{د}(س_١) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ ∴ $\bar{د}(١) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

وهنا تنشأ حالتان هما :

١■ هـ > ٠ ، وعندها يكون د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ومنها د(س$_١$ + هـ) = $\frac{١}{س_١ + هـ}$

$\bar{د}(\overset{+}{١}) = \underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نهـا} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نهـا} \frac{\frac{١}{١ + هـ} - \frac{١}{١}}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نهـا} \frac{١ - ١ - هـ}{هـ(١ + هـ)}$

∴ $\underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نهـا} \frac{-١}{١ + هـ} = -١$ ——— (١)

٢■ هـ < ٠ ، وعندها يكون د(س) = $-\frac{١}{٢}$ س^٢ + $\frac{٣}{٢}$ ، ومنها

د(١ + هـ) = $-\frac{١}{٢}$ (١ + هـ)^٢ + $\frac{٣}{٢}$ = $-\frac{١}{٢}$ (١ + ٢ هـ + هـ^٢) + $\frac{٣}{٢}$

= ١ – $\frac{١}{٢}$ (٢ هـ + هـ^٢) ، وعليه فإن :

$\bar{د}(\bar{١}) = \underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نهـا} \frac{[١ - \frac{١}{٢}(٢هـ + هـ^٢)] - (\frac{-١}{٢} + \frac{٣}{٢})}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نهـا} \frac{\frac{-هـ}{٢}(٢ + هـ)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نهـا} (-١ - \frac{هـ}{٢}) = -١$ ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن النهايتين متساويتان .

$\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$ موجودة ، أي أن دَ (١) موجودة .

وبالتالي ، فإن د قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط فتراتها .

تمارين ومسائل (٥ - ٥)

[١] ابحث قابلية اشتقاق الدالة فيما يأتي :

■١ $د(س) = \frac{س^٢ + ٢ س - ٣}{س^٢ + ٢ س + ٣}$ ،   ■٢ $د(س) = (س + ١)(س^٢ + ١)$ ،

■٣ $د(س) = \sqrt{س + ٥}$.

[٢] إِذا كان $د(س) = ٤ - س^٢$ ، فأوجد المشتقة عند النقطة $س = ١$.

[٣] ابحث قابلية اشتقاق الدالة $د(س) = \frac{٢}{س + ١}$ ، عند النقطة $س = ١$.

[٤] ابحث قابلية اشتقاق الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} ٢ س - ١ & ، \quad س \leq ١ \\ س^٢ & ، \quad س > ١ \end{cases}$$

عند $س = ١$

[٥] ابحث قابلية اشتقاق الدالة $د(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، \quad ٢ \geq س \geq ٠ \\ ٣ س - ١ & ، \quad ٥ \geq س > ٢ \end{cases}$

عند النقاط الآتية :

أولاً – عند $س = ٢$ ، ثانياً – عند $س = ٠$ ، ثالثاً – عند $س = ٥$.

[٦] ابحث قابلية الاشتقاق لكل من الدوال التالية على الفترة المقابلة لكل منها :

■١ $د(س) = س^٢ + س$ على الفترة $]- \infty ، \infty[$

■٢ $د(س) = ٢ س^٣ - \sqrt{س}$ على الفترة $]٥ ، \infty[$

■٣ $د(س) = \frac{١}{٤ - س}$ على الفترة $]٤ ، \infty[$

■٤ $د(س) = \frac{١}{٤ - س^٢}$ على الفترة $]- \infty ، -٢[$

■٥ $د(س) = |س - ١|$ على الفترة $[١ ، \infty[$

■٦ $د(س) = |٢ + ٣ س|$ على الفترة $]- \infty ، - \frac{٢}{٣}]$

٥ : ٦ قواعد الدوال القابلة للاشتقاق

انطلاقاً من تعريف المشتقة ، فإنه يمكن استنتاج مجموعة من قواعد اشتقاق الدوال ، وفي هذا البند سيتم عرض أهمها .

١ ■ الدالة الثابتة .

مبرهنة (٥ – ٢) : إذا كان د(س) = جـ ، جـ عدد ثابت ، فإن دَ(س) = صفر .

البرهان :

∵ د(س) = جـ

$$\text{فإن } دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٠}{هـ}$$

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} (٠) = \text{صفر}$$

مثال (٥ – ٣٤)

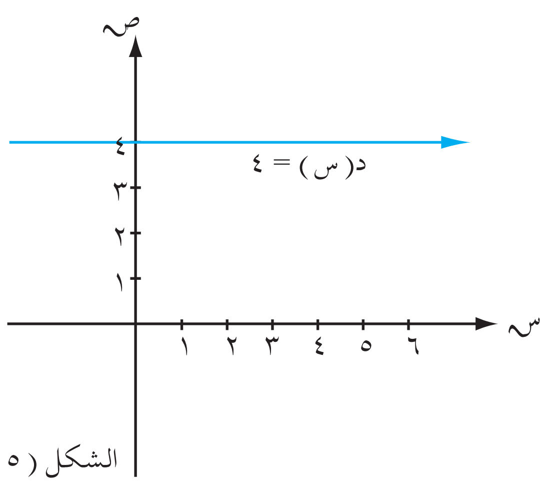
إذا كانت د(س) = ٤ ، فأوجد : دَ(٢) ، دَ(–٣) ؟

الحـــل :

∵ د(س) = ٤

∴ دَ(س) = صفر (من المبرهنة)

دَ(٢) = صفر ، كذلك دَ(–٣) = صفر



الشكل (٥ –١٩)

والشكل (٥ –١٩) يمثل الدالة الثابتة ، وهو خط مستقيم يوازي محور السينات وميله يساوي صفراً .

٢ ■ دالة الدرجة الأولى : (الدالة الخطية) .

مبرهنة (٥ –٣) :

لتكن د(س) = أ س + ب ، س ∈ ح ، أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ ٠ ، فإن مشتقتها هي دَ(س) = أ .

البرهان :

د(س) = أ س + ب

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{[\,أ(س_١ + هـ) + ب\,] - (أ س_١ + ب)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{أ س_١ + أ هـ + ب - أ س_١ - ب}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{أ هـ}{هـ}$$

$$∴ دَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} (أ) = أ .$$

مثال (٥ - ٣٥)

إذا كانت د(س) = ٦ س + ٧ ، فأوجد دَ(س)

الحـــل :

د(س) = ٦ س + ٧

دَ(س) = (٦ س)َ + (٧)َ = ٦ + صفر = ٦

٣ الدالة س^ن .

مبرهنة (٥ - ٤)

إذا كانت د(س) = س^ن ، حيث ن ∈ ن (ن مجموعة الأعداد النسبية) ، فإن
دَ(س) = ن س^(ن-١)

مثال (٥ - ٣٦)

أوجد مشتقة كل مما يأتي :

١ د(س) = س^٣ ٢ د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ٣ د(س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢}}$

الحـــل :

١ لإيجاد المشتقة للدالة د(س) = س^٣ نطبّق المبرهنة (٥ - ٤)

∴ دَ(س) = ٣ س^(٣-١) = ٣ س^٢

٢ لإيجاد المشتقة للدالة د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ⟸ د(س) = (س)^$\frac{١}{٢}$

∴ دَ(س) = $\frac{١}{٢}$(س)^($\frac{١}{٢}$-١) = $\frac{١}{٢}$ س^(-$\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

٣ لإيجاد المشتقة للدالة د(س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢}}$ = $\frac{١}{(\text{س}^٢)^{\frac{١}{٣}}}$ = $\frac{١}{(\text{س})^{\frac{٢}{٣}}}$ = س^(-$\frac{٢}{٣}$)

∴ دَ(س) = -$\frac{٢}{٣}$ س^(-$\frac{٢}{٣}$-١) = -$\frac{٢}{٣}$ س^(-$\frac{٥}{٣}$)

∴ دَ(س) = $\frac{-٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^٥}}$

نتائج (٥ – ١) :

١ ■ إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند (س) ، أ عدد ثابت ، فإن $(أ \bullet د)'(س) = أ \bullet د'(س)$.

٢ ■ إذا كان الدالة د قابلة للاشتقاق عند (س) ، فإن الدالة $د^٢$ ، أيضاً قابلة للاشتقاق عند س ؛

$([د(س)]^٢)' = ٢ د(س) \bullet د'(س)$ (برهن هذه النتيجة) .

٤ ■ مشتقة مجموع دالتين :

مبرهنة (٥ – ٥) :

إذا كانت كل من الدالتين د ، ر قابلة للاشتقاق عند س ، فإن دالة المجموع (د + ر) قابلة للاشتقاق عند س ؛ أي أن : $(د + ر)'(س) = د'(س) + ر'(س)$.

البرهان :

$$ق'(س) = (د + ر)'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(د + ر)(س + هـ) - (د + ر)(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[د(س + هـ) + ر(س + هـ)] - د(س) - ر(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{ر(س + هـ) - ر(س)}{هـ} = د'(س) + ر'(س) .$$

وبالتالي ، فإنَّ مشتقة مجموع دالتين يساوي مجموع مشتقتي هاتين الدالتين ، ويمكن تعميم ما سبق على النحو التالي :

مشتقة مجموع دوال يساوي مجموع مشتقات هذه الدوال ، أي أنه : إذا كانت كل من الدوال $د_١ + د_٢ + د_٣ + \ldots + د_{ن-١} + د_ن$ قابلة للاشتقاق عند س ، فإن :

$(د_١ + د_٢ + د_٣ + \ldots + د_{ن-١} + د_ن)' = د'_١ + د'_٢ + د'_٣ + \ldots + د'_{ن-١} + د'_ن$.

مثال (٥ – ٣٧)

إذا كانت ص = د(س) = ٣ $س^٢$ + $س^٣$ ، فأوجد د'(س)

الحـــل :

إذا كانت $د(س) = (٣ س^٢) + (س^٣)$ ، فإن : $د'(س) = \frac{ء}{ء س}(٣ س^٢) + \frac{ء}{ء س}(س^٣)$.

$د'(س) = ٢ \times ٣ س + ٣ س^٢ = ٦ س + ٣ س^٢$.

مثال (٥ – ٣٨)

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}} - ٤\,\text{س}$ ، فأوجد $\text{دَ}(\text{س})$

الحـــــل :

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\,(\text{س}^{-٢}) - ٤\,\text{س}$

$\therefore\ \text{دَ}(\text{س}) = ٣\,\text{س}^{٣-١} - ٢\,(٢\,\text{س}^{-٢-١}) - ٤\,\text{س}^{١-١} = ٣\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س}^{-٣} - ٤\,\text{س}^{٠} = ٣\,\text{س}^{٢} - \frac{٤}{\text{س}^{٣}} - ٤$

٥ ■ مشتقة حاصل ضرب دالتين .

مبرهنة (٥ – ٦)

إذا كانت كل من الدالتين د ، ر قابلة للاشتقاق عند س ، فإن دالة حاصل الضرب د • ر قابلة للاشتقاق عند س ، ويكون : $(\text{د} \bullet \text{ر})'(\text{س}) = \text{دَ}(\text{س}) \bullet \text{ر}(\text{س}) + \text{د}(\text{س}) \bullet \text{رَ}(\text{س})$.

البرهان :

من تعريف المشتقة : $(\text{د} \bullet \text{ر})'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{د} \bullet \text{ر})(\text{س} + \text{هـ}) - (\text{د} \bullet \text{ر})(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) \bullet \text{ر}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) \bullet \text{ر}(\text{س})}{\text{هـ}}$

وبإضافة وطرح المقدار $\text{د}(\text{س}) \bullet \text{ر}(\text{س} + \text{هـ})$ إلى البسط يكون :

$(\text{د} \bullet \text{ر})'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) \bullet \text{ر}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) \bullet \text{ر}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\,\text{ر}(\text{س}+\text{هـ}) + \text{د}(\text{س})\bullet\text{ر}(\text{س}+\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \left[\text{ر}(\text{س} + \text{هـ})\, \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} + \lim_{\text{هـ} \to ٠} \text{د}(\text{س})\, \frac{\text{ر}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ر}(\text{س})}{\text{هـ}} \right]$

$= \text{دَ}(\text{س})\ \text{ر}(\text{س}) + \text{د}(\text{س}) \bullet \text{رَ}(\text{س})$.

حيث إن $\lim_{\text{هـ} \to ٠} \text{ر}(\text{س} + \text{هـ}) = \text{ر}(\text{س})$ ، لأن ر قابلة للاشتقاق ، وبالتالي فهي متَّصلة .

مثال (٥ – ٣٩)

أوجد مشتقة الدالة $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س})(\text{س}^{٢} + ١)$

الحـــــل :

بتطبيق المبرهنة (٤ – ٦) نجد أن :

$\text{دَ}(\text{س}) = (٣\,\text{س}^{٢} - ٣)(\text{س}^{٢} + ١) + (\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}) \times ٢\,\text{س}$

$= ٣\,\text{س}^{٤} + ٣\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}^{٢} - ٣ + ٢\,\text{س}^{٤} - ٦\,\text{س}^{٢} = ٥\,\text{س}^{٤} - ٦\,\text{س}^{٢} - ٣$.

٦ مشتقة خارج قسمة دالتين :

مبرهنة (٥ – ٧) :

إذا كانت الدالة $\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ قابلة للاشتقاق عند س ، وكانت $\text{ر}(\text{س}) \neq$ صفر ،

$$\left(\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}\right)' = \frac{\text{ر}(\text{س})\,\bar{\text{د}}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\,\bar{\text{ر}}(\text{س})}{[\text{ر}(\text{س})]^{٢}}$$

البرهان :

نفرض أن $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ ، بالتالي فإن : $\bar{\text{ل}}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ل}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$$\therefore \bar{\text{ل}}(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ})}{\text{ر}(\text{س}+\text{هـ})} - \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ر}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\,\text{ر}(\text{س}+\text{هـ})}{\text{ر}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ر}(\text{س})}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ر}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\,\text{ر}(\text{س}+\text{هـ})}{\text{هـ} \bullet \text{ر}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ر}(\text{س})}$$

وبإضافة وطرح $\text{د}(\text{س}) \bullet \text{ر}(\text{س})$ إلى البسط نجد أن :

$$\therefore \bar{\text{ل}}(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) \bullet \text{ر}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\bullet\text{ر}(\text{س}+\text{هـ}) + [\text{د}(\text{س})\bullet\text{ر}(\text{س})] - [\text{د}(\text{س})\bullet\text{ر}(\text{س})]}{[\text{هـ} \bullet \text{ر}(\text{س}+\text{هـ}) \bullet \text{ر}(\text{س})]}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \left[\text{ر}(\text{س}) \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} - \lim_{\text{هـ} \to ٠} \text{د}(\text{س}) \frac{\text{ر}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ر}(\text{س})}{\text{هـ}} \right] \times$$

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{١}{\text{ر}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ر}(\text{س})}$$

$$= \frac{\text{ر}(\text{س})\,\bar{\text{د}}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\,\bar{\text{ر}}(\text{س})}{[\text{ر}(\text{س})]^{٢}}$$

مثال (٥ – ٤٠)

أوجد مشتقة الدالة $د(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ٢}$ عند النقطة $س = ٢$.

الحـــل :

$$دَ(س) = \frac{١(س^٢ - ٢) - ٢س(س + ١)}{(س^٢ - ٢)^٢}$$

$$= \frac{س^٢ - ٢ - ٢س^٢ - ٢س}{(س^٢ - ٢)^٢} = \frac{- س^٢ - ٢س - ٢}{(س^٢ - ٢)^٢}$$

$$\therefore دَ(٢) = \frac{- ٤ - ٤ - ٢}{(٤ - ٢)^٢} = \frac{-١٠}{٤} = \frac{-٥}{٢}$$

مثال (٥ – ٤١)

أوجد مشتقة الدالة $د(س) = \frac{٢}{س^٢ - ٤}$ عند $س = ٣$.

الحـــل :

نطبق المبرهنة (٥– ٧)، وحيث إن الدالة $د(س) = \frac{٢}{س^٢ - ٤}$ ، قابلة للاشتقاق عند أي نقطة ،

وكذلك: $س^٢ - ٤ = (س - ٢)(س + ٢) \neq$ صفر .

$$\therefore \bar{د}(س) = \frac{(س^٢ - ٤) \times (٠) - ٢(٢س)}{[س^٢ - ٤]^٢} = \frac{- ٤س}{[س^٢ - ٤]^٢}$$

وعندما تكون $س = ٣$

$$\therefore \bar{د}(٣) = \frac{- ٤(٣)}{[(٣)^٢ - ٤]^٢} = \frac{-١٢}{(٩ - ٤)^٢} = \frac{-١٢}{(٥)^٢} = \frac{-١٢}{٢٥}$$

٧ مشتقة الجذر التربيعي للدالة .

مبرهنة (٥ –٨)

إذا كانت الدالة $د(س)$ قابلة للاشتقاق عند $س$ ، $د(س) > ٠$ ، وإذا كان $ص = \sqrt{د(س)}$ ،

فإن $\frac{ء ص}{ء س} = \left(\sqrt{د(س)}\right)' = \frac{\bar{د}(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$.

البرهان :

يلاحظ أن س $\in$ للفترة المفتوحة] أ ، ب [، ولجميع قيم س التي تجعل د(س) > ٠ ، ومن تعريف المشتقة ، يكون :

$$\frac{ءص}{ءس} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{د(س+هـ)} - \sqrt{د(س)}}{هـ}$$

وبضرب البسط والمقام في المرافق لهذا المقدار الموجود في البسط وهو : $\sqrt{د(س+هـ)} + \sqrt{د(س)}$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \bar{د}(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ\left[\sqrt{د(س+هـ)} + \sqrt{د(س)}\right]}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}}{\sqrt{د(س+هـ)} + \sqrt{د(س)}}$$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}}{\lim_{هـ \to ٠}\left[\sqrt{د(س+هـ)} + \sqrt{د(س)}\right]}$$

وحيث إن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = \bar{د}(س)$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{\bar{د}(س)}{\left[\sqrt{د(س)} + \sqrt{د(س)}\right]} = \frac{\bar{د}(س)}{٢\sqrt{د(س)}} .$$

مثال (٥ – ٤٢)

أوجد المشتقة لكل من :

١ ■ $د(س) = \sqrt{س}$ ، ٢ ■ $د(س) = \sqrt{س^٢ - ١}$ ، ٣ ■ $د(س) = ٥\sqrt{س^٣ - س^٢}$

الحـــل :

بتطبيق المبرهنة (٥ – ٨) يكون :

١ ■ $د(س) = \sqrt{س}$

$$\therefore \acute{د}(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

■٢ $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ١}$

$\therefore\ دَ(س) = \dfrac{٢\ س}{٢\sqrt{س^{٢} - ١}}$

■٣ $د(س) = ٥\sqrt{س^{٣} - س^{٢}}$

$\therefore\ دَ(س) = \dfrac{٥\ (٣س^{٢} - ٢\ س)}{٢\sqrt{س^{٣} - س^{٢}}} = \dfrac{١٥س^{٢} - ١٠\ س}{٢\sqrt{س^{٣} - س^{٢}}}$

تمارين ومسائل (٥ - ٦)

[١] أوجد المشتقة لكل من الدوال الآتية :

■١ $د(س) = ٢$.

■٢ $ص = ٢\ س + ٤$.

■٣ $د(س) = ٢^{٥} + س$.

■٤ $د(ل) = ٤\ ل^{٣} + ٢\ ل - ٢$.

■٥ $ر(س) = س^{٢}(س + ١)$.

■٦ $د(م) = \dfrac{٢\ م^{٢} + ٤\ م}{م}$.

■٧ $د(س) = \sqrt{س^{٣}}$.

■٨ $ص = ٣\ \sqrt[٣]{س^{٢}}$.

■٩ $د(س) = \dfrac{٢\ س^{٤} - ٣\ س^{٣} + ٨\ س - ٦}{\sqrt{س}}$.

[٢] أوجد قيمة المشتقة للدوال عند النقطة س :

١■ $د(س) = س^{٢} - ٢$ عند $س = ٢$ ، ٢■ $د(س) = س^{٤} + ٢س$ عند $س = ١$

٣■ $د(س) = ٢س^{٣}$ عند $س = -٢$ ، ٤■ $د(س) = ٢س^{٧}$ عند $س = ٢$

٥■ $د(س) = ٣س^{٥} + ٧س^{٤} - ٢س^{٣} - س^{٢} + ٩س - ٥$ عند $س = -١$

٦■ $د(س) = \frac{س^{٢} - ٥}{٢س^{٢} + ١}$ عند $س = ٣$.

[٣] لتكن $د(س) = \frac{٢}{٢س + ١}$ ، $س \neq -\frac{١}{٢}$. أوجد قيمة $د'(٢)$.

[٤] أوجد المشتقة $د(س) = \frac{١}{س^{ن-١}}$ ، $س \neq ٠$.

[٥] أوجد مشتقة الدالة $د(س) = \sqrt{\frac{١ - س}{١ + س}}$ ، $س \in]-١ ، ١[$.

[٦] أوجد مشتقة الدالة $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ١}$.

[٧] أوجد مشتقة $ص = ٤س^{٦} - ٣س^{٥} + ٤س^{٢} + س + ١٠$ عندما $س = ١$.

[٨] أوجد مشتقة الدالة $د(س) = ل س^{ن} + ع س^{م}$ ، ل ، ع ثابتان ، م ، ن عددان طبيعيان .

[٩] أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

أ) $د(س) = \frac{س}{٢} + \frac{٤}{س^{٢}} + \frac{س^{٣}}{٢}$ ، $س \neq$ صفر ، ب) $د(س) = \frac{١}{س^{٤}}$ ، $س \neq$ صفر

جـ) $ع(ﻫ) = (٣ﻫ - ١)(ﻫ^{٢} + ٣)(ﻫ^{٣} - ٢)$.

[١٠] إذا كانت $ق(س) = \frac{١}{م(س)}$ ، $م(س) \neq ٠$ ، فبرهن أن: $ق'(س) = \frac{-م'(س)}{(م(س))^{٢}}$.

[١١] أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

أ) $د(س) = \frac{٢س - ٤}{٢س + ٤}$ ، $س \neq -٢$ ، ب) $د(س) = \frac{س^{٣} + ٢}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$ $س \notin [-١ ، ١]$

جـ) $ص = (س^{٢} - ٣س + ١)(س^{٤} - س^{٣} + ٥س^{٢} - ٢)$.

تم بحمد الله

استبانة تقويم الكتاب

بيانات المستجيب:

الاسم/........................	المؤهل وتاريخه/........................	التخصص/........................
العمل الحالي /........................	المحافظة/........................	

بيانات الكتاب:

المادة/........................	الصف /........................	اسم الكتاب /........................
الجزء/........................	الطبعة........................	السنة الدراسية /........................
تاريخ تعبئة الاستبانة........................		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبعات القادمة.
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإجابتك أمام كل بند.

البـنـد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
أولاً- الأهداف: – وضوح الصياغة .				
– تقيس فكرة محددة .				
– يمكن قياسها .				
– شاملة (معرفية – مهارية – وجدانية) .				
ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها: – ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم .				
– سلامة ووضوح لغة الكتاب .				
– ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية .				
– مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة .				
– ملامسة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته .				
– مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات .				
– مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية .				
– خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات .				
– يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي .				
– مراعاة مادة الكتاب للحداثة والدقة العلمية .				
– عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير .				
– تحقيق المحتوى لأهداف المادة .				

البـنـد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
ثالثاً - الوسائل التعليمية: – وضوحها ودقتها .				
– ارتباطها بموضوعات الدرس .				
– مدى ارتباطها بالأهداف .				
رابعاً -التقويم: – الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة .				
– بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع .				
– الأسئلة والتمرينات تقيس مدى تحقيق الأهداف .				
– مناسبة لمستوى المتعلم .				
– دقة ووضوح الصياغة .				
– تراعي الفروق الفردية .				
– متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية .				
– تساعد المتعلم في تطبيق ما تعمله في مواقف الحياة المختلفة .				
– كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب .				
خامساً - الشكل والإخراج الفني: – ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب .				
– متانة تجليد الكتاب .				
– وضوح الألوان ومناسبتها .				
– وضوح ودقة الطباعة .				
– نوعية ورق الكتاب .				

أسئلة عامة، أجب بـ (نعم) أو (لا):

البنـــد	نعم	لا	
- ينسجم محتوى الكتاب مع نظام الفصلين الدراسيين .			
- عدد الحصص المقررة تكفي لا ستيعاب مادة الكتاب .			
- هل الوسائل التعليمية متنوعة وكافية ؟			
- هل هناك ضرورة لوجود قائمة بالمراجع ومصادر المعلومات ؟			
- هل هناك موضوعات ترى ضرورة حذفها (اذكرها) ؟			
- هل هناك موضوعات ترى ضرورة إضافتها (اذكرها) ؟			

إذا كان لديك ملاحظات أخرى اكتبها ....

....

....

....

....

قائمة الأخطاء العلمية واللغوية والمطبعية:

الخطأ	الصفحة	السطر	الصواب

نرجو التكرم بإرسال الاستبانة إلى

الإدارة العامة للمناهج

تيلفكس : ٠١/٥٧٥٥٤٩

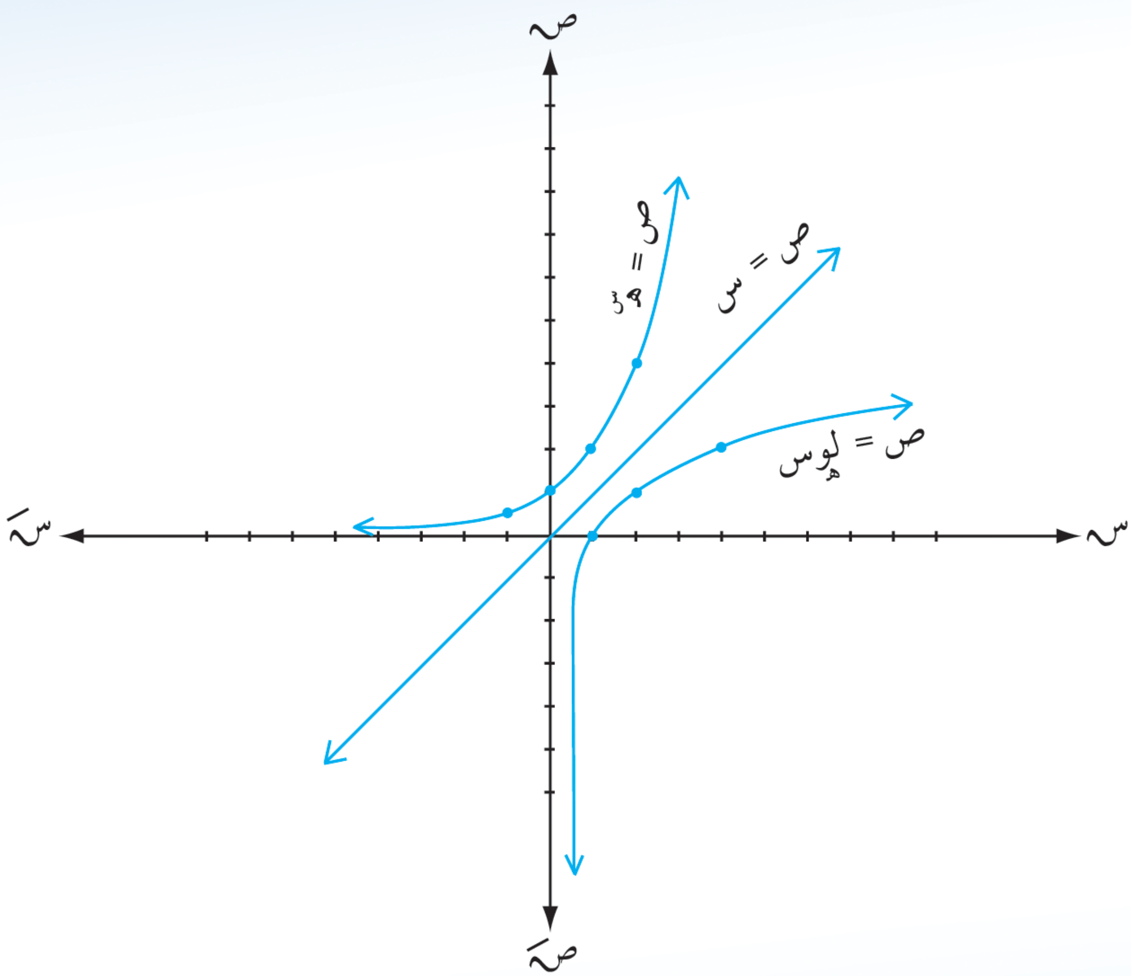
ص . ب : (٣٥٢٨) صنعاء - الجمهورية اليمنية

البريد الإلكتروني : manhg2013@hotmail.com

أو إدارة المناهج بمكتب التربية بالمحافظة

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

el-online.net


ص
سَ
س
صَ
ص = هـ^س
ص = س
ص = لوهـ س