ملخص التحليل التوافقي ...

* نهتم لكيفية تعداد عناصر مجموعة بالطريقة المباشرة لكن هناك أساليب أخرى متطورات.
نحدد فيها عدد عناصر مجموعة أو عدد نواتج تجربة معينة، وهذا ما نسميه بالتحليل التوافقي (طرائق العد) ...

- تعداد القوائم يتم بـ أ) الأشجار.
ب) الجداءات.

أولاً: * إنشاء قوائم متعددة عناصر مجموعة ...

لتكن E مجموعة تتألف من n عنصراً.

أ) التباديل على مجموعة ...

نسمي تبديلاً على المجموعة E، كل تأليفة مكونة من n عنصراً تضم جميع عناصر E ...

قاعدة: عدد تباديل مجموعة مكونة من n عنصراً (n≥1) يساوي

$$n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1 = n!$$

n!: هو عدد الطرائق المختلفة لترتيب عناصر مجموعة مكونة من n عنصراً ...

مثال: لتكن $E=\{a,b,c,d\}$ احسب عدد تباديل عناصر المجموعة ...

(a,c,b,d)، (a,b,c,d) تبديلان على E.

والمطلوب إنشاء تبديل على E إلى على أربع خانات رقمية، بحيث تحوي كل خانة عنصراً واحداً من E وتكون الحروف الواردة في الخانات مختلفة مثنى مثنى.

1	2	3	4

لدينا أربعة خيارات ممكنة على الخانة (1)
وثلاثة خيارات ممكنة على الخانة (2) وهكذا ...
إذن عدد تباديل المجموعة $E = 4\times3\times2\times1$

أمثلة ..

1) لجمع تجاري لديه ستة أبواب بكم طريقة يمكنك الدخول من باب والخروج من باب آخر، فبكم طريقة يمكنك عمل ذلك.

لنفرض أن الأبواب تحمل الحروف A, B, C, D, E, F
فإذا دخلت من الباب A فلديك خمسة اختيارات وهكذا بقية الأبواب ومن مبدأ الضرب حيث أن لدينا 6 أبواب مختلفة فالحل يكون
$6\times5=30$ طريقة.

2) في مكتبة يوجد أربع أنواع من الرفاف في كل نوع من الرفاف يوجد 7 الواح وفي كل منها يوجد نوعين الأول مجلد والآخر سلك فكم نوع من الرفاف تحوي المكتبة ..

حسب مبدأ الضرب (مبدأ العد) يوجد
$4\times7\times2=56$ نوع من الرفاف.

3) كم عدد مكون من ثلاث خانات بالضبط حيث
1) الخانات زوجية فقط
2) الخانات زوجية فقط بدون تكرار
3) الخانات زوجية فقط ومن خانتين فقط متكررة
4) الخانة زوجية واحدة فقط.

1) الخانات تكون زوجية إذا كانت تحوي أحد الأرقام 8, 6, 4, 2, 0 وهذا العدد يحوي ثلاث خانات فالمطلوب أن تكون خانة الآحاد (0)

رسولنا:

Scanned by CamScanner

وبالتالي لها أربع خيارات أحاد عشرات ومئات
خانة عشرات اختيارات، وكذلك للمئات ومنه
عدد الأعداد الممكنة

وجب البدأ بالعد بالعد بكذا
- المئات = 4
- العشرات = 5
- الآحاد = 5

عدد. $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$

٢) التكرار ممنوع

وجب البدأ بالعد بالعد بكذا
- المئات = 4
- العشرات (ع الصفر) = 4
- الآحاد = 3

$4 \times 4 \times 3 = 48$

٣) حالة أولى: آحاد وعشرات متشابهة

$4 \times 4 \times 1 = 16$ عدد

- المئات = 4
- عشرات = 4
- آحاد = 1

حالة ثانية: آحاد ومئات متشابهة.

$4 \times 1 \times 4 = 16$

- المئات = 4
- آحاد = 1
- عشرات = 4

حالة ثالثة: المئات والعشرات متشابهة.

$4 \times 1 \times 4 = 16$

- المئات = 4
- العشرات = 1
- الآحاد = 4

وجب جمع البدائل

$16 + 16 + 16 = 48$

٤) عكسية العدد الزوجي موجودة في أحد الخانات

رسولات:

وبالتالي لدينا ثلاث حالات.

الأولى: في المئات عدد زوجي (2, 4, 6, 8)
للعشرات والآحاد عشر حالات (7, 9, 5, 3, 1) لم يشترط عدم التكرار

طريقة $4 \times 5 \times 5 = 100$ عدد

الثانية: العشرات عدد زوجي (0, 2, 4, 6, 8)
وعشر حالات للمئات والآحاد

طريقة $5 \times 5 \times 5 = 125$ عدد

الثالثة: الآحاد عدد زوجي (0, 2, 4, 6, 8)
وعشر حالات للمئات والعشرات

طريقة $5 \times 5 \times 5 = 125$ عدد

وجب جمع البدائل $100 + 125 + 125 = 350$ عدد.

مبدأ الضرب

إذا كان عدد طرق إنجاز المهمة الأولى هو n
وعدد طرق إنجاز المهمة الثانية m
فإن عدد طرق إنجاز المهمتين هو $n \times m$

مبدأ الجمع

إذا كان لا يمكن إنجاز مهمتين في الوقت نفسه
وكان عدد طرق إنجاز المهمة الأولى n
وعدد طرق إنجاز المهمة الثانية m فإن
عدد طرق إنجاز المهمتين معاً هو $n+m$

عدد المجموعات الجزئية من مجموعة تحوي n عنصراً $= 2^n$

المجموعة 1, 2, 3 لها $2^3 = 8$ مجموعة جزئية

هي $\phi, 1, 2, 3, 12, 13, 23$
123

Scanned by CamScanner

ثامناً: التراتيب

١) التوافيم دون تكرار

لنرتب طولية r من المجموعة E، كل عائلة دون تكرار طولها r من المجموعة E. أي كل عائلة مكونة من r عنصراً مأخوذة من E، وعناصرها مختلفة مثنى مثنى $(1 \le r \le n)$

قاعدة: لعدد التراتيب التي طول كل منها r من مجموعة مكونة من n عنصراً بالصيغة $(1 \le r \le n)$

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) = P_n^r$$

مثال: لنفرض أن $E = \{a, b, c, d, e\}$

عندئذٍ كلمة من (a, b, d) كلمة من (b, d, e) ترتيباً طوله 3 من المجموعة E

لإيجاد عدد التراتيب طوله 3 من المجموعة E نحتاج إلى ثلاث خانات مرقمة، حيث نحتاج كل خانة عنصراً واحداً من E، وتكون الحروف الواردة في الخانات مختلفة مثنى مثنى.

فعدد التوافيم دون تكرار التي طولها 3 مأخوذة من E يساوي $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3$.

مثال: لو أردنا اختيار 3 كتب من ثمانية لترتيبها على رف فيمكننا عمل ذلك بـ $8 \times 7 \times 6 = 336$ طريقة

شرح: اختيار الكتاب الأول من اليمين بـ 8 طرق، والثاني بـ 7، ويتبقى 6 كتب لم يتم اختيارهم للموقع الثالث، والكتب هي A B C D E F G H

رسولياً:

مثال: لتكن مجموعة الأرقام $B = \{8, 6, 7\}$

أ) كم عدداً مؤلفاً من رقمين مختلفين عليه نحصل من هذه الأرقام؟

ب) كم عدد تباديل هذه المجموعة؟

أ) $P_3^2 = 3 \times 2 = 6$ عدداً.

ب) $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ تبديلة.

مثال: بكم طريقة توزع ثلاث ميداليات مختلفة على ثلاث طلاب فائزين في المباراة الرياضيات من بين ٩ طلاب.

$P_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ طريقة.

٢) التوافيم في تكرار ...

n^r هو عدد التوافيم في تكرار التي طولها r وعليه إنشاؤها من مجموعة عدد عناصرها يساوي n

مثال: كم كلمة من ثلاثة حروف يمكننا تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA

نتخيل ثلاث خانات علينا ملؤها بحروف كلمة SYRIA، لملء الخانة الأولى لدينا ستة خيارات ولما كانه لا يوجد ما يمنع من تكرار الحروف في الكلمة فهناك أيضاً ستة خيارات لملء الخانة الثانية وهكذا في الخانة الثالثة هناك $5 \times 5 \times 5 = 125$ كلمة أي $5^3 = 125$.

Scanned by CamScanner

ثالثاً: التوافيق

ليكن E مجموعة مكونة من n عنصراً، وليكن r عدداً صحيحاً بحيث $0 \le r \le n$، نسمي توفيقاً يضم r عنصراً من E كل مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً من E.

ملاحظة: إن ترتيب العناصر غير مهم فمثلاً $\{0,1\} = \{1,0\}$ وتعتبر المجموعتان نفسهما.

مثال: ليكن $E = \{a,b,c\}$

$P_3^2 = \begin{matrix}(a,b) & (a,c)\\ (b,a) & (b,c)\\ (c,a) & (c,b)\end{matrix}$ } 6 حالات

مع حذف الحالات المتماثلة

$\binom{n}{r} = P_n^r$

$\binom{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (الحالات المتماثلة)

(a,b)
(a,c)
(b,c)

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$$

تعميم

1) تباديل n من الأشياء المختلفة مأخوذة r كل مرة هو P_n^r

عندما $r=n$ نجد $P_n^n = n!$

مثال: كم طريقة يمكن توزيع 4 أشخاص على 6 كراسي

$P_6^4 = 6\times5\times4\times3 = 360$

توزيع 6 أشخاص على 6 كراسي

$P_6^6 = 6! = 720$

2) تباديل بعض الأشياء المتشابهة مأخوذة كلها في نفس الوقت.

عدد التباديل P لعدد n من الأشياء مأخوذين كلهم في نفس الوقت وبينهم n_1 متشابهين و n_2 آخرين متشابهين، n_3 آخرين متشابهين ... وهكذا.

$$P = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \cdots} \qquad n = n_1 + n_2 + \cdots$$

مثال: عدد طرق التي توزع بها 3 أصناف لبرادات، 7 لبرادات على 10 أطفال بحيث يحصل كل طفل على قطعة واحدة (كأنه توزع 3 قطع من 500 ل.س و 7 قطع من 200 ل.س)

$$\frac{10!}{3!\times7!} = 120$$

عدد تباديل كرة حمراء وكرتين بيضاوين (ح ب ب)

$$\frac{3!}{2!\times1!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1\times1} = 3$$

عدد تباديل كرتين حمراوين وكرتين بيضاوين

$$\frac{4!}{2!\times2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 6$$

عدد تباديل كرة حمراء وكرة سوداء وكرة بيضاء

$$\frac{3!}{1!\times1!\times1!} = 3! = 6$$

3) التباديل الدائرية..

عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة حول دائرة هو $(n-1)!$ طريقة

مثال: عشرة أشخاص يجلسون الجلوس حول منضدة دائرية د

$(10-1)! = 9!$ طريقة.

رسولياتي:

Scanned by CamScanner

$\binom{n}{r}$ هو عدد الخيارات المختلفة لـ r عنصراً مختاراً من مجموعة ملونة من n عنصراً.

$E=\{a,b,c\} \leftarrow \binom{3}{2}=3$

(a,b) (a,c) (b,c)

$E=\{a,b,c\} \leftarrow P_3^2=6$

(a,b) (a,c) (b,a) (b,c) (c,a) (c,b)

أسئلة

1) في أحد الامتحانات يوجد 10 أسئلة يجيب الطالب على 8 أسئلة. بكم طريقة يمكن للطالب عمل ذلك؟

$\binom{10}{8}=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$ طريقة

2) يعمل 12 مهندساً في شركة ما. أراد تنفيذ أحد المشاريع تريد الشركة اختيار فريق عمل مكون من 5 مهندسين.

1) بكم طريقة يمكن للشركة اختيار فريق العمل

2) بكم طريقة يمكن اختيار فريق العمل، إذا أصر مهندسان على العمل معاً.

3) بكم طريقة يمكن للشركة اختيار فريق العمل إذا رفض مهندسان العمل معاً؟

الحل:

1) $\binom{12}{5}=792$

2) $\binom{7}{2}\binom{10}{3}+\binom{10}{5}=372$

(عملهما معاً) (عملهما في الفريق)

3) لدينا ثلاث حالات: a يعمل، b لا يعمل

b يعمل، a لا يعمل

كلاهما لا يعمل

$\binom{7}{1}\binom{10}{4}+\binom{10}{5}\binom{7}{0}=672$ طريقة

3) على رف في غرفة عماد يوجد تسعة كتب مختلفة. أربعة منها ذات غلاف أحمر وخمسة ذات غلاف أخضر بكم طريقة ممكنة يمكن ترتيب الكتب على الرف في الحالات

1) ليس هناك شرط.

2) يجب أن تكون الكتب الحمراء بجانب بعض والخضراء مجتمعة

الحل: علماً أن الرفاق تسع كتب مختلفة والترتيب يدون شرط فإنه يستخدم قاعدة الضرب (المبدأ الأساسي بالعد) فإن الكتب ترتب بـ 9! طريقة..

2) الحمراء ترتب بـ 4! والخضراء 5!

إذن إما الحمراء مجموعة أولاً أو الخضراء أولاً

$4!\times 5!+5!\times 4!=5760$

تمارين هامة مع الحل في التحليل التوافقي

1) اشترك 9 طلاب في سباق 100 متر جري

أوجد: 1) عدد الطرق الممكنة لتعيين الفائزين الثلاثة الأوائل بالترتيب. 2) عدد الطرق الممكنة لاختيار 5 طلاب لتمثيل المدرسة..

1) $P_9^3=9\times 8\times 7=504$ طريقة

2) $\binom{9}{5}=\binom{9}{4}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=126$

2) احسب عدد الطرق التي يمكن أن تقوم بها لجنة متابعة أضرار الحرب بتوزيع الخيام السكنية على الدول الثلاثة والثالثة على 3 أسر متضررة من بين 15 أسرة.

القسمة على الدول يمكن أن تكون من نصيب 15 أسرة

" الثانية " " " 14 أسرة

" الثالثة " " " 13 أسرة

عدد الطرق = $15\times 14\times 13=2730$ طريقة

حسب المبدأ الأساسي بالعد.

رسوليات:

Scanned by CamScanner

٣) إذا كان $P_n^r = 210$ وكان $\binom{n}{r} = 35$ أوجد r

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} \Rightarrow 35 = \frac{210}{r!}$$

ومنه $r! = \frac{210}{35} = 6 \Rightarrow \boxed{r=3}$

٤) أ) اختار معلم 8 أسئلة من 12 سؤالاً، بكم طريقة يستطيع اختيار 6 منها إذا كان عليه أن يجيب على سؤالين على الأقل من السؤالين الأولين.

ب) أوجد r إذا كان $\binom{7}{2r-5} = \binom{7}{r+3}$

الحل:

$$\binom{3}{2}\binom{5}{4} + \binom{3}{3}\binom{5}{3} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 3 \\ \hline \end{array} \; 8$$

$= 3 \times 5 + 1 \times 10$

$= 15 + 10 = 25$ طريقة.

$$\binom{7}{2r-5} = \binom{7}{r+3}$$

$\overset{n}{=}$ $2r - 5 = r + 3 \Rightarrow r = 8$

$\overset{1}{=}$ $2r - 5 + r + 3 = 7 \Rightarrow r = 3$

٥) أ) إذا كان $\frac{P_n^r}{P_n^{r-1}} = 8$ ، $\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{n-r}} = \frac{8}{3}$

أوجد قيمة r

ب) مجموعة تكونت من 5 مدرسين أحياء و 4 كيمياء و 3 فيزياء. بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من 6 أعضاء من المجموعة في الحالات التالية.

١) اللجنة تكونت من 4 مدرسين

٢) " " " 3 مدرسين أحياء ومدرس كيمياء ومدرس فيزياء

٣) اللجنة تكونت من مدرسين أحياء ومدرس كيمياء ومدرسين فيزياء بحيث يكون أحدهم الفيزيائي رئيساً للمجموعة.

الحل:

رسولياك:

لدينا $\frac{P_n^r}{P_n^{r-1}} = 8 \Rightarrow \frac{\binom{n}{r} r!}{\binom{n}{r-1}(r-1)!} = 8$

$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} \times \frac{r!}{(r-1)!} = 8 \Rightarrow \frac{8}{3} \times r = 8$

ومنه $\boxed{r=3}$

٦) أ) ١) $\binom{12}{4} = 495$ طريقة.

٢) $\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 10 \times 4 \times 3 = 120$

٣) $\binom{5}{1}\binom{4}{1}P_3^3 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ طريقة.

٧) كم طرقة ترتيب حروف كلمة سلسبيل

حروف كلمة سلسبيل هي = {س، ل، س، ب، ي، ل}

عدد الطرق $= \frac{6!}{2! \times 2! \times 1! \times 1!}$

ل ← حرفين
ي ← ب ← حرف
س ← حرفين

من القاعدة ٦ الصفحة ٤

١٤) بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع ٥ نماذج امتحانية مختلفة على ثلاث طلاب بحيث يأخذ الأول ٤ نماذج ويأخذ الثاني نموذجين والثالث نموذج؟

عدد الطرق $= \frac{9!}{4! \times 2! \times 3!}$

١٨) من بين 12 شخصاً، بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من 3 أشخاص بحيث لا يكون شخص واحد عضواً في اللجنتين.

$\binom{12}{3} \times \binom{9}{3} = 220 \times 84 = 18480$ طريقة.

١٩) بكم طريقة يمكن توزيع جوائز الأول والثاني والثالث على الطلاب الذين عددهم 10 طلاب علماً بأنه لا يحق لطالب نيل جائزتين؟

عدد الطرق $= P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ طريقة

Scanned by CamScanner

١١) كم عدداً مؤلفاً من ٥ منازل يمكن تكوينه من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

آحاد				
6	6	6	6	3

عدد الأعداد = $3 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 3888$

١٢) صف يضم 25 طالب بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ٢ من الطلاب

أ) بدون شروط ب) إذا كان أحد الطلاب متخاصمين

أ) عدد الطرق = طريقة $= \binom{25}{2} = 300$

ب) عدد الطرق = $\binom{25}{2} - \binom{6}{2} = 300 - 6$
= 294 طريقة.

١٣) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٥ أشخاص من بين ١٢ شخص

أ) بدون شروط

ب) يوجد بينهم أخوين لا يجتمعان في لجنة واحدة

أ) عدد الطرق = $\binom{12}{5} = 792$ طريقة

ب) $P_{12}^{3} \times \binom{9}{2} = 1320 \times 36 = 47520$ طريقة.

الاختبارات الأربع

اختبار (١) اثبت صحة ما يلي إذا علمت أن

$$\frac{1}{\binom{6}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

الحل

$$\frac{1}{\frac{4!}{r!(4-r)!}} = \frac{1}{\frac{5!}{r!(5-r)!}} + \frac{1}{\frac{6!}{r!(6-r)!}}$$

$$\frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)!}{5!} + \frac{(6-r)!}{6!}$$

$$\frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!}{5 \times 4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6 \times 5 \times 4!}$$

$$1 = \frac{5-r}{5} + \frac{(6-r)(5-r)}{30}$$

$$30 = 6(5-r) + (6-r)(5-r)$$

$$30 = 30 - 6r + 30 - 11r + r^2$$

$$r^2 - 17r + 30 \quad \begin{cases} r = 2 & \text{مقبول} \\ r = 15 & \text{مرفوض} \end{cases}$$

اختبار (٢) لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

أ) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S ؟

ب) ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل منها مضروب بالعدد 5 وأصغر من 500.

آحاد	عشرات	مئات
6	5	4

عدد الأعداد $= 6 \times 5 \times 4$
$= 120$ عدد.

آحاد	عشرات	مئات
1	4	2

عدد الأعداد $= 1 \times 4 \times 2$
$= 8$ عدد

الحل منقوص رقم تتوحد ورقم للمئات

أسئلة وزارية ...

نموذج ٣ : ما هي أطوال الحد الذي يحوي x^2 في مفكوك $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$ ؟

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \qquad a = \frac{y^2}{x}$$

$$b = \frac{x}{y} \qquad n = 8$$

رسولنا :

Scanned by CamScanner

$T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r$

$= \binom{8}{r} y^{16-2r} \cdot x^{-8+r} \cdot x^r \cdot y^{-r}$

$= \binom{8}{r} y^{16-3r} x^{-8+2r}$

$x^2 y = x^{-8+2r} \cdot y^{16-3r}$

$2 = -8+2r \Rightarrow r = 5$

$1 = 16-3r \Rightarrow r = 5$

نموذج 5 : رف يحوي 7 كتب مؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A و أربعة للمؤلف B

أ) بكم طريقة يمكننا ترتيب الكتب على الرف اذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B .

ب) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب اذا اشترطنا ان يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية .

أ)

B_1	B_2	B_3	4	5	6	7

عدد طرق ترتيب الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B = عدد طرق ترتيب B_1 = 4 ، B_2 = 3 ، B_3 = 2 = $4 \times 3 \times 2 = 24$ طريقة

يتبقى اربعة كتب لتوزيعها على 4 خانات لذلك عدد الطرق = $4! = 24$

وحسب مبدأ الضرب بالعد يكون عدد الطرق الكلية مساوياً $24 \times 24 = 576$

ب) ترتيب كتاب معين للمؤلف B في البداية يتم بطريقة واحدة .

يتبقى 6 كتب لتوزيعها على 6 خانات لذلك تكون عدد الطرق = $6!$

وحسب مبدأ الضرب بالعد $1 \times 6! = 720$ طريقة .

رسولات :

أسئلة وزارات ...

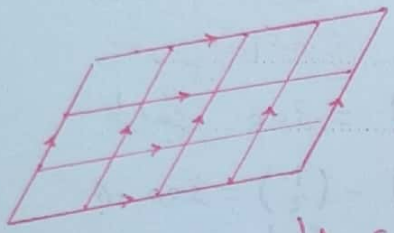
٢٠١٧ / ١ في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن عشرة أسئلة من ثمانية أسئلة .

أ) بكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة .

ب) بكم طريقة يمكنه الاختيار اذا كانت السؤال الأولى الزامية ؟

أ) $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ طريقة

ب) $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$



٢٠١٨ / ١ في الشكل المجاور تتقاطع ستة مستقيمات متوازية من مجموعتين متقاطعتين تشكل فيها متوازيات أضلاع والمطلوب :

احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشكل .

عدد طرق تشكيل مستقيمين متوازيين أولى $= \binom{5}{2} = 10$

" " " " " ثانية $= \binom{4}{2} = 6$

عدد متوازيات الأضلاع $= 10 \times 6 = 60$

٢٠١٨ / ٢ في إحدى مراكز الخدمة ثلاثة مهندسين وخمسة عمال ، كم لجنة تراقبها مهندس واحد وعاملان يمكنها تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة .

عدد اللجان $= \binom{3}{1}\binom{5}{2} = 3 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1}$

$= 3 \times 10 = 30$ لجنة .

٢٠١٩ / ١ عين الحد المستقل عن x في نشور $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$= \binom{6}{r} x^{6-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$

$= \binom{6}{r} x^{6-r} \cdot x^{-2r} = \binom{6}{r} x^{6-3r}$

الحد المستقل عن x هو $x^0 = x^{6-3r} \Rightarrow 6-3r = 0 \Rightarrow r = 2$

وهو الحد الثالث .

Scanned by CamScanner

الوضع الثاني : نريد تأليف لجنة مكونة من ٣ أعضاء من مجموعة تضم ٥ أشخاص .

بكم طريقة يمكننا اختيار هذه اللجنة علماً أنه يجب أن تحوي شخصين معينين لا يمكن استبعادهما في اللجنة دائماً ...

عدد طرق اللجنة = عدد طرق اللجنة التي تحوي الشخصين − عدد طرق اللجنة التي لا تحوي الشخصين

$= P_5^3 - P_2^2 P_3^1 \times 3 = 60 - 18 = 42$

(الشخصين: الشخص العادي، اللجنة: الكل)

تمارين متفرقة في التحليل التوافقي ..

١) يحوي صندوق على تسع كرات رقمها من ١ إلى ٩ نسحب على التتابع أربع كرات دون إعادة ونسجل بالترتيب أرقام الكرات المسحوبة ما عدد الأعداد المكونة من أربع خانات التي يمكننا تشكيلها بهذه الطريقة .

A	B	C	D

$P_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

٢) لدينا ٩ أرقام A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، I نريد تشكيل أعداد مؤلفة من ٤ أرقام مختلفة مثنى مثنى بدءاً بالعدد $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ وصولاً بالعدد ...

٣) كم كلمة مؤلفة من ٣ حروف مختلفة يمكننا تشكيلها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA ..

A	B	C

$5^3 = 125$. نلاحظ أنه يوجد جانب من الكلمة

مثلاً 5 خيارات لـ A

5 لـ B ، 5 لـ C وذلك

$5 \times 5 \times 5 = 125$ عدد البدايات بالعدد

٤) كم كلمة مؤلفة من ٣ حروف مختلفة يمكننا تشكيلها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA ..

$P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ لا يجوز التكرار

٥) كم كلمة مختلفة يمكننا تشكيلها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ كلمة

٦) نمتلك مجموعة من البطاقات عددها /32/ بينها ثماني بطاقات حمراء تحمل الرقم ١ ← 8

و ثماني " زرقاء " " ١ ← 8

و ثماني " خضراء " " ١ ← 8

و " " صفراء " " ١ ← 8

نسمي سحباً أن مجموعة جزئية مكونة من ثماني بطاقات

أ) كم سحباً يضم ثمانية بطاقات حمراء ؟

ب) كم سحباً يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل الرقم (١) .

أ) $\binom{8}{2}\binom{24}{3} = 56672$

ب) $\binom{4}{1}\binom{28}{4} + \binom{4}{2}\binom{28}{3} + \binom{4}{3}\binom{28}{2} + \binom{4}{4}\binom{28}{1} = 103096$

٧) أنشر $(1+2x)^n$ واستنتج قيمة المجموع .

$S_n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$

استعداداً إلى منشور ثنائي الحد .

$(1+2x)^n = 1 + \binom{n}{1}(2x) + \cdots + \binom{n}{n}(2x)^n$

نلاحظ أن المجموع S_n يوافق الطرف الثاني بعد تعويض $x = 1$ و n

$S_n = 1 + 2\binom{n}{1} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = (1+2)^n = 3^n$

رسولياتك :

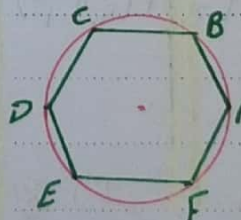
Scanned by CamScanner

مثال 7/ص 161 نأمل عندما نحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6 7 8 و 9 نسحب ثلاث كرات
1) كم عدد النتائج الممكنة طبعاً بترتيب ... 2) كم نتيجة ممكنة في حال سحب الكرات التسع ؟
a) الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6 ، الثانية تحمل الرقم 9 ، الثالثة تحمل الرقم 7 .
b) الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8 ، الثانية تحمل الرقم 7 ؟
c) الكرة المسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 9 ، المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 8 ؟
d) الكرة المسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 7

الحل: السحب على التتابع مع الإعادة | السحب على التتابع دون إعادة | السحب في آن معاً .

1) $4^3 = 4 \times 4 \times 4$ | 1) $P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ | 1) $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$
نتيجة ... $= 64$ | نتيجة ... $= 24$ | نتيجة 4
2) a) $1 \times 1 \times 1 = 1$ | 2) a) $1 \times 1 \times 1 = 1$ | 2) كم عدد التتابعات الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 ؟
b) $1 \times 1 \times 4 = 4$ | b) $1 \times 1 \times 2 = 2$ | $\binom{1}{1}\binom{3}{2} = 3$
c) $4 \times 1 \times 1 = 4$ | c) $2 \times 1 \times 1 = 2$ | 3) كم عدد التتابعات الممكنة والتي يظهر فيها العددان 8 و 9
d) $4 \times 1 \times 4 = 16$ | d) $3 \times 1 \times 2 = 6$ | $\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1} = 2$
a) (6,8,7) | a) (6,8,7) | لأنه عندما يظهر الرقمان 8 و 9 فيكون الرقم الثالث المسحوب إما 6 أو 7 فقط فتنجتان .
b) (8,7,9) (8,7,6) (8,7,8) (8,7,7) | b) (8,7,9) (8,7,6) | لأنه لا يجوز التكرار هنا .
c) (7,9,8) (6,9,8) (8,9,8) (9,9,8) | c) (6,9,8) (7,9,8) |

مثال 8/ص 162 في الشكل المرسوم جانباً
نجري التجربة التالية : نصل بين ثلاث نقاط منه لنحصل على مثلث .
1) ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها
2) ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها
3) ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها 4) ما عدد المثلثات الحادة .



الحل: 1) نحصل على مثلث بوصل ثلاث نقاط من رؤوس المسدس

عدد المثلثات $= \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

2) نحصل على مثلث قائم : بأن يكون أحد أضلاعه قطر الدائرة حتى المثلث القائم .
والمسدس له 3 أقطار : AD / BE / CF
وكل قطر يقابل 4 مثلثات قائمة .
عدد المثلثات القائمة $= 3 \times 4 = 12$

3) نحصل على مثلث منفرج زاوية من خلال ثلاث رؤوس متتالية للمسدس . $= 6$ مثلثات منفرجة

4) عدد المثلثات الحادة يساوي $20 - (12 + 6) = 2$.

رسولات :

Scanned by CamScanner

السؤال 9 ص 162

9) يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي وضاد للسرقة يفتح عند ادخال رمز (كود) مكون من عدد ذي أربع خانات تحليله لذي منها ان يأخذ أياً منها القيم 0 و ... و 9

(a) ما عدد الرموز التي تصلح للقفل ؟

سيطلق البرنامج السيارة إذا لم يتم ادخال أي خانة صحيحة في مكانها ، ما عدد الرموز التي تسبب انطلاق البرنامج .

10 × 10 × 10 × 10 = 10000 واحد منها فقط صحيح وليس انطلاق البرنامج أما البقية وعددها 9999 فأي منها يطلق البرنامج .

b. ما عدد الرموز التي تصلح للقفل والمكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى .

10 × 9 × 8 × 7 = 5040

(c) عند فصل التضذية الكهربائية عن المذياع يجب على مالك السيارة أن يعيد ادخال الرمز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذياع .

يتذكر المالك الرمز الصحيح مكون من الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 وكلها تختلف عن بعضها

كم رمزاً مختلفاً عليه للمالك ان يكون من هذه الأرقام

$$\frac{4!}{2!\times1!\times1!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times1\times1} = 12$$

رمزاً مختلفاً .

تمرين 21 ص 168

11) اكتب المقادير التالية بصيغة عبارات تحتوي جيوب الزاوية x ثم برهن المطابقة المضاعفات الزاوية x ثم

أجب عن السؤال المرافق ..

1) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$ بالصيغة تمهيدية $\cos^5 x$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$ بالصيغة تمهيدية $\sin^3 x$

رسولات :

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ بتطبيق دستور أويلر

ثم نشر ذي الحدين نجد

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})^3$$
$$= \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})$$
$$= \frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix}))$$
$$= \frac{1}{8}(2\cos 3x + 3\cdot 2\cos x)$$
$$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2} - 0\right]$$
$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

2) $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ بتطبيق دستور أويلر

ثم نشر ذي الحدين نجد

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$
$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$

ومنه $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x}$

$$= \lim_{x\to 0}(-4\cos^3 x) = -4(1)^3$$
$$= -4$$

انتهى بحمد الله الحل الصحيح

قال إياك عبد الله ضحى

المبارك

1318 .

Scanned by CamScanner

ملخص التحليل التوافقي ليلة الامتحان ...

أولاً : إنشاء قوائم من عناصر مجموعة .

أ) التباديل على مجموعة : نسمي تبديلاً على المجموعة E كل قائمة مكونة من n حداً تضم جميع عناصر E

يعطى عدد تباديل مجموعة مكونة من n عنصراً ($n \geq 1$) بـ $n!$

$n! = n(n-1)\cdots 2\times 1$ $\quad 0! = 1$ $\quad 1! = 1$

$n! = n(n-1)!$ $\quad (n+1)! = (n+1)n!$ $\quad (n+1)! = (n+1)n(n-1)!$

ب) الترتيب : P_n^r $(r \leq n)$ القوائم دون تكرار.

نسمي ترتيباً طوله r من المجموعة E، كل قائمة دون تكرار طولها r من المجموعة E، أي كل قائمة مكونة من r حداً مأخوذاً من عناصر E، وحدودها مختلفة مثنى مثنى $1 \leq r \leq n$

$P_n^r = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$ $\quad n=r \Leftrightarrow P_n^n = n!$

$P_n^1 = n$ $\quad P_n^0 = 1$

القوائم مع تكرار n^r .

n^r : هو عدد القوائم مع تكرار التي طولها r وعليه إنشاؤها من مجموعة عدد عناصرها يساوي n .

ثانياً : التوافيق $\binom{n}{r}$ $r \leq n$

نسمي توفيقاً يضم r عنصراً من E، كل مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً من E ترتيب العناصر في التوافيق غير مهم $\{0,1\} = \{1,0\}$ فتعد المجموعة نفسها.

خواص : 1) $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ $\quad$ 2) $\binom{n}{0} = 1$ $\quad$ 3) $\binom{n}{1} = n$

4) $\binom{n}{n} = 1$ $\quad$ 5) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ r أكبر من أو يساوي n

6) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ تستخدم في البراهين 7) $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2}$ $\begin{cases} \text{إما } r_1 = r_2 \\ \text{أو } r_1 + r_2 = n \end{cases}$

ثالثاً : منشور ثنائي الحد

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصراً $= 2^n$

صيغة الحد العام لإيجاد r في منشور ذي الحدين $(a+b)^n$

$T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ الحد العام $r=3$ الحد السادس $r=5$

ويستخدم في إيجاد احتمال x^n أي معرفة الحد الذي يحوي ....

رسولاتك :

Scanned by CamScanner