الحل الكامل

جميع نماذج الرياضيات الصادرة من وزارة التربية

الثالث الثانوي العلمي

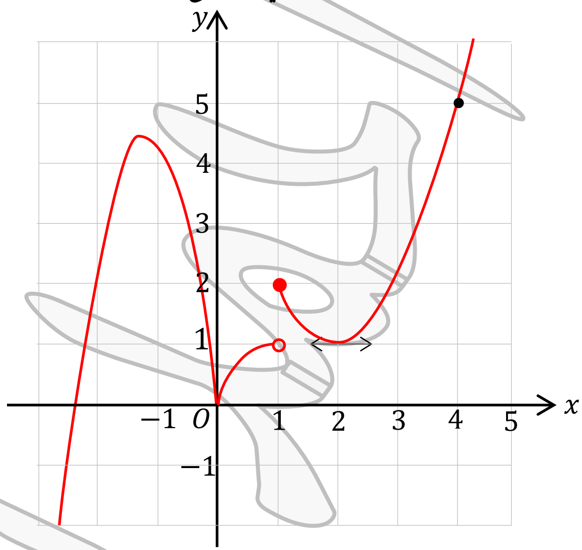
المدرس أحمد راتب عثمان

النموذج الوزاري ١ للرياضيات دورة 2017

932 740 055

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانباً الخط البياني C لتابع f معرف على $\mathcal{R}$ والمطلوب:



① ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ ؟

② ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$ ؟

③ هل $f(1)$ قيمة حدّية محلياً، علل ذلك؟

④ ما عدد القيم الحدية للتابع f .

⑤ ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$؟

⑥ أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$ ؟

الحل

عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ في $\mathcal{R}$ هو حل وحيد	①
مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$ هي: $[4\,,+\infty[$	②
باختيار المجال المفتوح $J =]0\,,2[$ نجد $J \cap \mathcal{R} = J$ وأياً كانت $x \in J$ كان $f(x) \leq 2$ أو $f(x) \leq f(1)$ ومنه $f(1) = 2$ قيمة كبرى محلياً	③
عدد القيم الحدية للتابع f هو 4	④
$f'(2) = 0$	⑤
التابع f غير مستمر عند 1 فهو غير اشتقاق عند $x = 1$	⑥

السؤال الثاني: ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية. الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحول X

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$					$\frac{16}{81}$

① ما عدد الاختبارات في التجربة؟

② أكمل الجدول المجاور.

③ احسب التوقع الرياضي وتباين المتحول العشوائي X.

الحل

① عدد الاختبارات $n = 4$

② $P(X = 4) = \frac{16}{81} \Rightarrow \binom{4}{4}p^4q^0 = \frac{16}{81}$

$\Rightarrow p^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow p = \frac{2}{3} \Rightarrow q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

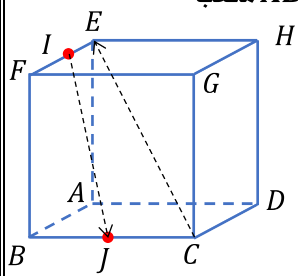
$$P(X = 0) = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

③ التوقع الرياضي: $E(X) = np = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

التباين: $V(X) = npq = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$

السؤال الثالث: في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[BC]$



① أثبت أنَّ: $2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$

② أثبت أنَّ الأشعة: $\overrightarrow{IJ}\ ,\ \overrightarrow{CE}\ ,\ \overrightarrow{CG}$ مرتبطة خطياً.

الحل

$$2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = 2\overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE}$$

وحسب قاعدة شال نجد

$$2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$$

② حسب قاعدة شال نجد

$$2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} \Rightarrow$$

$$2(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IE}) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$$

$$2\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} \Rightarrow \boxed{2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}}$$

والأشعة: $\overrightarrow{CG}\ ,\ \overrightarrow{CE}\ ,\ \overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً.

السؤال الرابع: حل المعادلة: $4^x = 5^{x+1}$

الحل

طرفا المعادلة موجبان تماماً لذلك $\ln 4^x = \ln 5^{x+1}$

$$x \ln 4 = (x + 1) \ln 5 \Rightarrow x(\ln 4 - \ln 5) = \ln 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 4 - \ln 5}$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن g التابع المعرف على $]-1\,,+\infty[$ وفق: $g(x)=\ln\left(\sqrt{x+1}\right)$

① أوجد $g(1), g'(x), g'(1)$

واستنتج $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)}{x-1}$

② احسب نهاية التابع f المعرف على $\mathcal{R}\backslash\{2\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-2}$ عند $+\infty$

الحل

① $g(1)=\ln\left(\sqrt{2}\right)$

g اشتقاق على $]-1\,,+\infty[$ و $g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2(x+1)}$

$g'(1)=\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{4}$

② أيّاً كان $x>2$ فإنَّ $x-2>0$

و $-1\le\sin x\le1$

ومنه $2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$

نقسم على $x-2$ نجد: $\frac{2x-1}{x-2}\le f(x)\le\frac{2x+1}{x-2}$

وبما أنَّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-2}=2$

فإنّه حسب مبرهنة الإحاطة يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(x_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} x_0=4 \\ x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+2 \end{cases}\quad \text{في حالة } n\ge0$$

① نعرّف المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ بالعلاقة: $y_n=x_n-8$ أثبت أنَّ المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ هندسية واكتب y_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

② اكتب x_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

الحل

① $y_{n+1}=x_{n+1}-8=\frac{3}{4}x_n+2-8$

$y_{n+1}=\frac{3}{4}x_n-6=\frac{3}{4}(x_n-8)=\frac{3}{4}y_n$

ومنه $(y_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$

حيث $y_n=y_0q^n$ ، $y_0=x_0-8=4-8=-4$

ومنه: $y_n=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n$

بما أنَّ $\left|\frac{3}{4}\right|<1$ فإنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$

② $x_n=y_n+8\Rightarrow x_n=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n+8$

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=8$

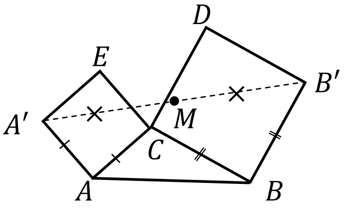
التمرين الثالث:

ليكن المثلث ABC في المستوي

ننشئ على ضلعيه $[BC]$ و $[AC]$

وخارجه المربعين $ACEA'$ و $CBB'D$

كما في الشكل المجاور.



تمثّل الأعداد العقدية $a\,,b\,,c\,,a'\,,b'$ النقاط $A\,,B\,,C\,,A'\,,B'$.

① B' هي صورة C وفق دوران مركزه B عيّنه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة $b\,,c$.

② أثبت أنَّ: $a'=i(c-a)+a$.

③ عيّن العدد العقدي m الممثّل للنقطة M منتصف $[A'B']$.

④ كيف تتغير النقطة M عندما تتحوّل C في المستوي؟

الحل

① B' هي صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه

$b'-b=-i(c-b)\Rightarrow\boxed{b'=-i(c-b)+b}$

② A' هي صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه

$a'-a=i(c-a)\Rightarrow\boxed{a'=i(c-a)+a}$

③ $m=\frac{a'+b'}{2}=\frac{i(c-a)+a-i(c-b)+b}{2}=\frac{i(b-a)+a+b}{2}$

$\Rightarrow m=\frac{a+b}{2}+i\frac{b-a}{2}$

④ لنبحث في طبيعة المثلث MAB

$m-a=\frac{a+b}{2}-a+i\frac{b-a}{2}=\frac{b-a}{2}+i\frac{b-a}{2}$

$m-b=\frac{a+b}{2}-b+i\frac{b-a}{2}=-\frac{b-a}{2}+i\frac{b-a}{2}$

$\Rightarrow m-b=i(m-a)\Rightarrow b-m=i(a-m)$

ومنه B هي صورة A وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$

فالمثلث MAB قائم في M ومتساوي الساقين

إذاً عندما تتحوّل C في المستوي يبقى المثلث MAB قائم في M ومتساوي الساقين

التمرين الرابع: أثبت صحة المساواة:

$\cos^2x\,.\sin^2x=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos4x$

ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2x\,.\sin^2x)dx$

الحل

$\cos^2x\,.\sin^2x=\frac{1+\cos2x}{2}\,.\,\frac{1-\cos2x}{2}$

$\cos^2x\,.\sin^2x=\frac{1-\cos^22x}{4}=\frac{\sin^22x}{4}=\frac{\frac{1-\cos4x}{2}}{4}$

932 740 055

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

طريقة ثانية حسب دستورا اويلر

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 .\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2i}\right)^2$$

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = -\frac{1}{16}\left((e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})\right)^2$$

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = -\frac{1}{16}(e^{2x}-e^{-2x})^2$$

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = -\frac{1}{16}(e^{4x}+e^{-4x}-2e^{2x}e^{-2x})$$

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = -\frac{1}{16}(2\cos 4x - 2)$$

$$\cos^2 x \,.\, \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x \,.\, \sin^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi - 0\right] = \frac{\pi}{16}$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:(100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x) = x.e^{-x}$

① احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$،

احسب $f'(x)$، ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعين قيمه الحدية، ثم ارسم C.

② احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 0$ و $x = 1$.

③ بيّن أنّه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0\,,e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلّين مختلفين.

④ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = u_n.e^{-u_n} \text{ و } u_0 = 1$$

a) أثبت أنَّ $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان الدليل n.

b) أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. ثُمّ بيّن تقاربها واحسب نهايتها.

الحل

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $x = 0$ مقارب شاقولي.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

اشتقاق f على $\mathcal{R}$: $f'(x) = e^{-x} - x.e^{-x} = (1-x)e^{-x}$

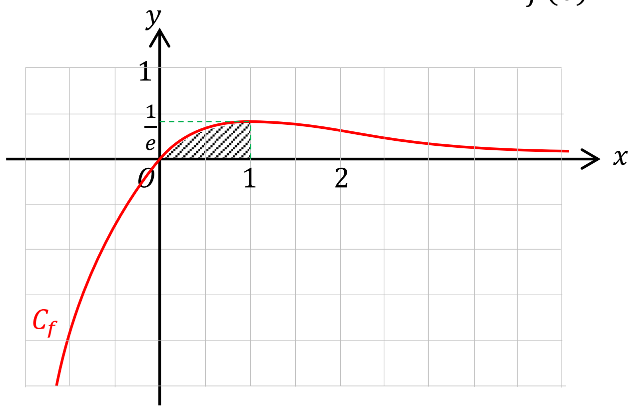
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة كبرى محلياً

$$f(0) = 0$$



② $S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x.e^{-x}dx$

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x}$	$v(x) = -e^{-x}$

$$S = [-x.e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx$$
$$= [-x.e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$$
$$= -e^{-1} - 0 - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

③ وجدنا $f(0) = 0$ و $f(1) = e^{-1}$

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0\,,1[$

و $f(\,]0\,,1[\,) =]0\,,e^{-1}[$ فأياً كانت m من $]0\,,e^{-1}[$ فإنَّ للمعادلة $f(x) = m$ حلّ وحيد في المجال $]0\,,1[$

كذلك التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]1\,,+\infty[$

و $f(\,]1\,,+\infty[\,) =]0\,,e^{-1}[$ فأياً كانت m من $]0\,,e^{-1}[$

فإنَّ للمعادلة $f(x) = m$ حلّ وحيد في المجال $]1\,,+\infty[$

ومنه أياً كانت m من $]0\,,e^{-1}[$ فإنَّ للمعادلة $f(x) = m$ حلّين مختلفين.

④ a) التابع f متزايد تماماً على المجال $]0\,,1[$

لنبرهن صحة الخاصة: $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

من أجل $n = 0$ نجد $0 < u_0 = 1 \leq 1$ محققة ومنه $E(0)$ محققة

بفرض أنَّ القضية $E(n)$ صحيحة ولنبرهن أنّ: $E(n+1)$ صحيحة

$0 < u_n \leq 1 \Longrightarrow f(0) < f(u_n) \leq f(1)$ حيث f متزايد

$$\Longrightarrow 0 < u_n.e^{-u_n} \leq 1.e^{-1} \Longrightarrow 0 < u_{n+1} \leq 1$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$ صحيحة أيّاً كان العدد الطبيعي n. والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة

b) حدود المتتالية موجبة تماماً فإنَّ: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} = \frac{1}{e^{u_n}} < 1$

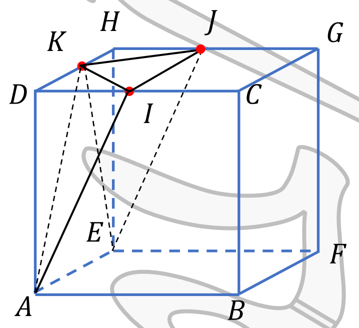
والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى ومتناقصة فهي متقاربة من عدد حقيقي ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Rightarrow x.e^{-x} = x \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

لمّا كان f مستمر عند 0 كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

المسألة الثانية: نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$. لتكن I منتصف $[DC]$ و J منتصف $[HG]$ و K منتصف $[DH]$



ليكن المعلم المتجانس للفراغ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

① أوجد إحداثيات النقاط E , I , A.

② اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.

③ احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $(KAIJE)$

④ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K.

⑤ احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$

⑥ أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (I,β) , (E,γ) حيث α,β,γ هي أثقال يطلب تعيينها.

الحل

①

$A(0,0,0)$	$I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$	$E(0,1,0)$

② معادلة $(AIJE)$ من الشكل: $ax+by+cz+d=0$

نعوض إحداثيات النقاط E و I و A

$$A\in(AIJE)\ \Rightarrow\ \boxed{d=0}$$
$$E\in(AIJE)\ \Rightarrow\ b+d=0\Rightarrow\boxed{b=0}$$
$$I\in(AIJE)\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}a+c=0$$

نختار $\boxed{a=2}$ نجد $\boxed{c=-1}$

معادلة $P=(AIJE)$ هي: $\boxed{2x-z=0}$

③ $K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

$$dist(k,P)=\frac{|ax_k+by_k+cz_k+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$dist(k,P)=\frac{|-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

قاعدة الهرم هو مستطيل $AIJE$ بعداه $AE=1$

و $AI=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

مساحة القاعدة $AIJE$: $S=AE\times AI=\frac{\sqrt{5}}{2}$

حجم الهرم $KAIJE$ هو: $V=\frac{1}{3}S.h$

حيث $h=dist(k,P)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$V=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{6}$$

④ شعاع توجيه d هو $\overrightarrow{n_P}(2,0,-1)$

$$d:\begin{cases}x=2t\\ y=\frac{1}{2}\\ z=1-t\end{cases}\quad : t\in\mathcal{R}$$ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d

⑤ بالحل المشترك لمعادلات d و P نجد: $4t-1+t=0$

ومنه $t=\frac{1}{5}$ نعوّض في معادلات d نجد $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$

⑥ النقاط N و A و I و E تقع في مستوي واحد فإنَّ N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (I,β) , (E,γ)

إذا يوجد عددين حقيقين a و b يحققان $\overrightarrow{AN}=a\overrightarrow{AI}+b\overrightarrow{AE}$

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=a\left(\frac{1}{2},0,1\right)+b(0,1,0)$$

$$\begin{cases}\frac{2}{5}=\frac{1}{2}a & (1)\\ \frac{1}{2}=b & (2)\\ \frac{4}{5}=a & (3)\end{cases}$$

ومنه $a=\frac{4}{5}$ و $b=\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

ومنه N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$\left(A,1-\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)\ ,\left(I,\frac{4}{5}\right)\ ,\ \left(E,\frac{1}{2}\right)$$

أو $\left(A,-\frac{3}{10}\right)\ ,\left(I,\frac{4}{5}\right)\ ,\ \left(E,\frac{1}{2}\right)$

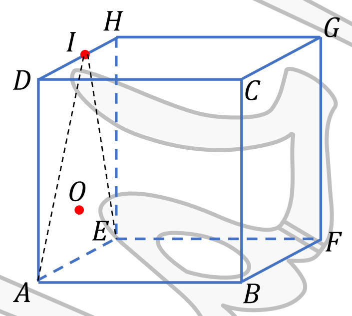
= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المدرس أحمد راتب عثمان

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1. مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ ، حيث I هي منتصف $[DH]$.



① أعطِ إحداثيات النقاط: A, E, I.

② جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI.

③ أين تقع النقطة M التي تحقق: $3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EO}$؟

④ احسب $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}$.

الحل

①

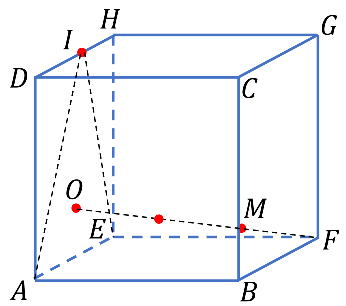
$A(0\,,0,0)$	$E(0\,,1,0)$	$I\left(0\,,\frac{1}{2},1\right)$

② $O\left(\frac{x_A+x_E+x_I}{3},\frac{y_A+y_E+y_I}{3},\frac{z_A+z_E+z_I}{3}\right) \Rightarrow O\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

③ $3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EO} \Rightarrow 3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EO}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FO} \Rightarrow \overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FO}$

النقاط F و M و O تقع على استقامة واحدة و M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(F\,,2)$ و $(O\,,1)$



④ $\overrightarrow{IE}\left(0\,,\frac{1}{2},-1\right)$ و $\overrightarrow{IA}\left(0\,,-\frac{1}{2},-1\right)$

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE} = 0 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على $D = \mathcal{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x+1}$

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ ، أياً كان $x \in D$

② احسب $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.

الحل

① نقسم البسط على المقام نجد: $f(x) = x - 6 + \frac{7}{x+1}$

$a = 1$ و $b = -6$ و $c = 7$

② $I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x - 6 + \frac{7}{x+1}\right)dx$

$I = \left[\frac{x^2}{2} - 6x + 7\ln(x+1)\right]_0^2 = (2 - 12 + 7\ln 3) - 0$

$I = -10 + 7\ln 3$

السؤال الثالث: ليكن z عدداً عقدياً ما وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد أثبت أنَّ: $\frac{z-u\bar{z}}{i-iu}$ عدد تخيلي بحت.

الحل

$|u| = 1 \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{u}$

بفرض $W = \frac{z-u\bar{z}}{i-iu}$

$\overline{W} = \frac{\bar{z}-\bar{u}z}{-i+i\bar{u}} = \frac{\bar{z}-\frac{1}{u}z}{-i+i\frac{1}{u}} = \frac{\bar{z}-\frac{1}{u}z}{-i+i\frac{1}{u}} \times \frac{-u}{-u} = \frac{z-u\bar{z}}{-i+iu}$

ومنه $\overline{W} = -\frac{z-u\bar{z}}{i-iu} = -W$ عدد تخيلي بحت $W = \frac{z-u\bar{z}}{i-iu}$.

السؤال الرابع: احسب مشتق التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x) = e^{1-\sin x}$.

بما أنَّ $x \to 1 - \sin x$ اشتقاقي على $\mathcal{R}$ فإنَّ f اشتقاقي على $\mathcal{R}$

$f'(x) = (1-\sin x)'e^{1-\sin x} = -\cos x\, e^{1-\sin x}$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

① ما نهاية التابع f عند $-\infty$؟

② ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثم اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخط البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

الحل

① في جوار $-\infty$ يكون: $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

② عندما $x > 0$ يكون: $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1} = \frac{x(x+1)}{x^2+1}$ و $f(0) = 0$

$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x(x+1)}{x^2+1}}{x} = \frac{x+1}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 1 \in \mathcal{R}$

ومنه f اشتقاقي عند الصفر من اليمين و $f'(0^+) = 1$

والخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليمين في النقطة $A(0,0)$ معادلته

$y = f'(0^+)x \Rightarrow y = x$

932 740 055

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{في حالة } n \geq 0$$

① احسب x_1 , x_2 , x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية.

② نعرّف المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة: $y_n = x_n + 4$

أثبت أنّ المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

③ اكتب y_n بدلالة n ، واحسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\frac{6}{5}$.

الحل

①

$x_1 = \frac{6}{5} \times 5 + \frac{4}{5}$ $x_1 = \frac{34}{5}$	$x_2 = \frac{6}{5} \times \frac{34}{5} + \frac{4}{5}$ $x_2 = \frac{224}{25}$	$x_3 = \frac{6}{5} \times \frac{224}{25} + \frac{4}{5}$ $x_3 = \frac{1444}{125}$

بالمقارنة نجد $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$

لذلك نبرهن أنَّ المتتالية متزايدة تماماً أي نبرهن بالتدريج الخاصة:

$E(n) : x_{n+1} > x_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

من أجل $n = 0$ يكون $x_1 = \frac{34}{5} > 5 = x_0$ ومنه $E(0)$ محققة

بفرض أنَّ الخاصة $E(n)$ صحيحة أي أنَّ: $x_{n+1} > x_n$

ولنبرهن أنَّ الخاصّة $E(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أنَّ: $x_{n+2} > x_{n+1}$

$$x_{n+1} > x_n \Rightarrow \frac{6}{5}u_{n+1} + \frac{4}{5} > \frac{6}{5}u_n + \frac{4}{5} \Rightarrow x_{n+2} > x_{n+1}$$

ومنه الخاصّة $E(n+1)$ صحيحة فالخاصة $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n. فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

②

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 \Rightarrow y_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{6}{5}(x_n + 4) = \frac{6}{5}y_n$$

والمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{6}{5}$

$$y_n = y_0 . q^n \Rightarrow y_n = (x_0 + 4). q^n \Rightarrow y_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = y_2 \frac{1-q^{10-2+1}}{1-q}$$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = 9\left(\frac{6}{5}\right)^2 \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}} = 9\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{-\frac{1}{5}}$$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = -54 \times \frac{6}{5}\left[1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9\right]$$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = \frac{324}{5}\left[\left(\frac{6}{5}\right)^9 - 1\right]$$

التمرين الثالث: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان:

$A(2, -1, 0)$ و $B(-1, 3, 5)$ والمستوي P معادلته:

$2x - 3y + z - 5 = 0$ والمطلوب:

① أثبت أنَّ المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C جد إحداثياتها.

② اكتب معادلةً للمستوي Q العمودي على المستوي P ويمر بالنقطتين A و B.

الحل

① $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ و $\overrightarrow{n_P}(2,-3,1)$

$$\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 - 12 + 5 = -13 \neq 0$$

المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C

نوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB)

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 4t : t \in \mathcal{R} \\ z = 5t \end{cases}$$ ونعوض في معادلة المستوي P نجد:

$$4 - 6t + 3 - 12t + 5t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{13}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3 \times \frac{2}{13} = \frac{20}{13} \\ y = -1 + 4 \times \frac{2}{13} = \frac{-5}{13} \\ z = 5 \times \frac{2}{13} = \frac{10}{13} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{20}{13}, \frac{-5}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

② الشعاعان $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ و $\overrightarrow{n_P}(2,-3,1)$ غير صفريين وغير مرتبطين خطياً ويوازيان المستوي Q فهما شعاعي توجيه للمستوي Q

لنفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي Q

$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P} = 0$ ومنه $2a - 3b + c = 0$ ①

وكذلك $\overrightarrow{n_Q}$ يعامد الشعاع $\overrightarrow{AB}$ أي: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_Q} = 0$

ومنه $-3a + 4b + 5c = 0$ ②

نعوض $c = 1$ في ① و ② نجد:

$-3a + 4b + 5 = 0$ و $2a - 3b + 1 = 0$ تكافئ

$-6a + 8b + 10 = 0$ و $6a - 9b + 3 = 0$

بجمع المعادلتين نجد $b = 13$ وبالتعويض بإحداهما نجد $a = 19$

أي $\overrightarrow{n_Q}(19,13,1)$

معادلة المستوي Q من الشكل: $ax + by + cz + d = 0$

نعوض إحداثيات النقطة A والناظم $\vec{n}$ نجد:

$$19(2) + 13(-1) + 1(0) + d = 0 \Rightarrow d = -25$$

ومنه معادلة المستوي Q هي: $19x + 13y + z - 25 = 0$

التمرين الرابع يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء نسحب عشوائياً وفي آنٍ معاً ثلاث كرات من الصندوق ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

① ماهي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

② احسب كلاً من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ واستنتج $P(X=2)$.

③ احسب توقّع X وانحرافه المعياري.

الحل

① $X(\Omega) = \{1,2,3\}$

② $P(X = 1) = \frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$ (الكرات الثلاث من نفس اللون)

$P(X = 3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$ (الكرات الثلاث ألوانها مختلفة)

932 740 055

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$
$$\frac{5}{56}+P(X=2)+\frac{12}{56}=1$$
$$P(X=2)=1-\frac{5}{56}-\frac{12}{56}=\frac{39}{56}$$

③ قانون احتمال X

x	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

التوقع الرياضي: $E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i . P_i$

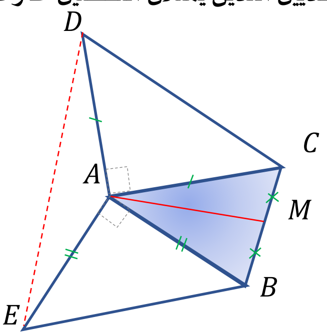
$$E(X)=1\times\frac{5}{56}+2\times\frac{39}{56}+3\times\frac{12}{56}=\frac{119}{56}=\frac{17}{8}$$

التباين: $V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2 . P_i-(E(X))^2$

$$V(X)=1\times\frac{5}{56}+4\times\frac{39}{56}+9\times\frac{12}{56}-\left(\frac{17}{8}\right)^2$$
$$V(X)=\frac{269}{56}-\frac{289}{64}=\frac{129}{448}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{129}{448}}$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:(100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمل في المستوي **ABC** مثلثاً مباشر التوجيه كيفياً لتكن **M** منتصف **$[BC]$**، وليكن **AEB** و **ACD** مثلثين قائمين في **A** ومتساويي الساقين مباشرين. نختار معلم متجانس مباشر **$(A,\vec{u},\vec{v})$** ونرمز بالرمزين **b** و **c** إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين **B** و **C**



① احسب بدلالة **b** و **c** الأعداد العقدية **e** و **d** و **m** المُمثّلة للنقاط: **E** و **D** و **M** بالترتيب.

② احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أنَّ **(AM)** هو ارتفاع في المثلث **AED** وأنّ **$ED=2AM$**.

③ نفترض أنَّ **A** هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة **$(D,2)$**و**$(E,3)$**و**$(C,1)$**و **$(B,1)$** احسب $\frac{c}{b}$ واستنتج قياس الزاوية **$\widehat{BAC}$**.

الحل

① E صورة B وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

D صورة C وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ومنه: $d=ic \quad , \quad e=-ib$

العدد العقدي الذي يمثل M هو: $m=\frac{c+b}{2}$

② $$\left.\begin{array}{l} d-e=i(c+b) \\ m-a=\frac{c+b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d-e}{m-a}=2i \Rightarrow$$

$$\arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right)=\frac{\pi}{2} \text{ و } \left|\frac{d-e}{m-a}\right|=|2i|=2$$

ومنه: $2AM=ED$ و $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{ED})=\frac{\pi}{2}$

ومنه (AM) هو ارتفاع في المثلث AED.

③ A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,2)$و$(E,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$ يكافئ

$$b+c+2d+3e=a=0$$
$$\Rightarrow b+c+2(ic)+3(-ib)=0$$
$$\Rightarrow b(1-3i)+c(1+2i)=0$$
$$\Rightarrow \frac{c}{b}=-\frac{1-3i}{1+2i}=-\frac{(1-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{-5-5i}{5}=1+i$$
$$\Rightarrow \frac{c}{b}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\Rightarrow \widehat{BAC}=\arg\left(\frac{c}{b}\right)=\frac{\pi}{4}$$

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على

$D_f =]-\infty, -2[\, \cup\,]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$.

① احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

② أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظّم جدولاً بتغيرات التابع f.

③ ارسم في معلم متجانس الخط البياني C.

④ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة على $\mathcal{N}^*$

وفق: $u_n = f(n)$ نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

أثبت أنَّ: $S_n = \ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

الحل

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ ومنه $y = 0$ مقارب بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$ ومنه $x = -2$ مقارب شاقولي

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ ومنه $x = 0$ مقارب شاقولي

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ ومنه $y = 0$ مقارب بجوار $+\infty$

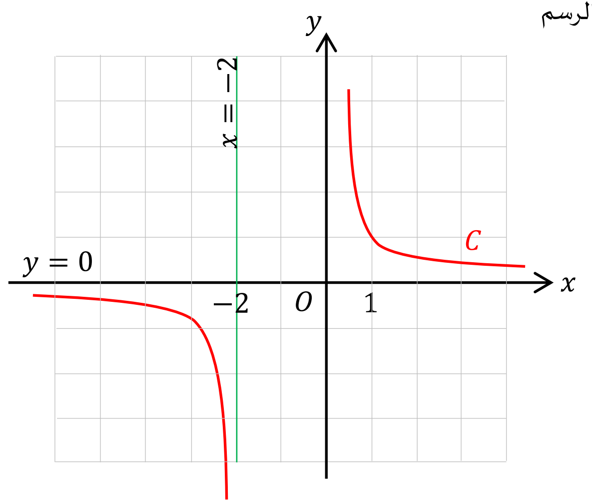
② f اشتقاق على D_f

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}} = \frac{x-(x+2)}{x^2}\cdot\frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$$

ومنه f متناقص تماماً على D_f

x	$-\infty$		-2	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

③ الرسم



④

$u_1 = \ln(3)$
$u_2 = \boxed{\ln(2)}$
$u_3 = \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \cancel{\ln(5)} - \cancel{\ln(3)}$
$u_4 = \ln\left(\frac{6}{4}\right) = \cancel{\ln(6)} - \cancel{\ln(4)}$
$u_5 = \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \cancel{\ln(7)} - \cancel{\ln(5)}$
$u_6 = \ln\left(\frac{8}{6}\right) = \cancel{\ln(8)} - \cancel{\ln(6)}$
$\vdots$
$u_{n-2} = \ln\left(\frac{n}{n-2}\right) = \cancel{\ln(n)} - \cancel{\ln(n-2)}$
$u_{n-1} = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \boxed{\ln(n+1)} - \cancel{\ln(n-1)}$
$u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \boxed{\ln(n+2)} - \cancel{\ln(n)}$
$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ $S_n = \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(2)$ $S_n = \ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

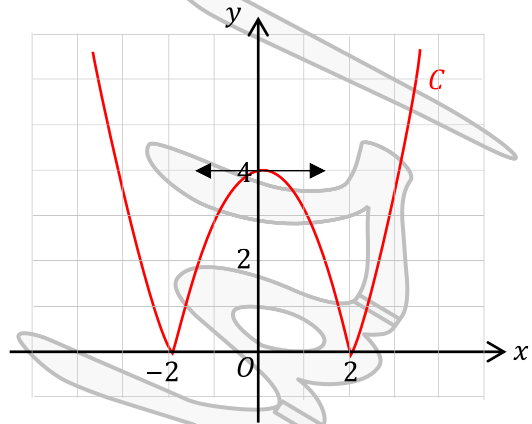
المدرس أحمد راتب عثمان

حل النموذج الوزاري 3 للرياضيات دورة 2017

932 740 055

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: تجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ والمطلوب:



① كم حلاً للمعادلة $f(x) = 2$ ؟

② احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر.

③ عين صورة المجال $I = [-2, 2]$ وفق f.

④ كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f ؟

الحل

عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ في $\mathcal{R}$ هو أربع حلول	①
$f'(0) = 0$	②
$f(I) = [0,4]$	③
عدد القيم الحدية للتابع f هو 3	④

السؤال الثاني: حل في $\mathcal{R}$ المعادلة الآتية:

$$-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$$

الحل

شرط الحل: $x > -1$ و $x > 0$ و $x > 1$ يكافئ $x > 1$

المعادلة $-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$ تكافئ

$$\ln(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

$$\ln(x) = \ln(x-1)(x+1)$$

$$\ln(x) = \ln(x^2-1)$$

$x^2 - 1 = x$ ومنه $x^2 - x - 1 = 0$

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ مرفوض و $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ مقبول

السؤال الثالث: اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$.

الحل

المستوي المحوري يمرُّ بالنقطة $I(3,1,1)$ منتصف $[AB]$ ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}(2,4,-4)$ ناظماً عليه.

معادلة المستوي المحوري من الشكل: $ax + by + cz + d = 0$

نعوض إحداثيات النقطة I والناظم $\vec{n}$ نجد:

$$2(3) + 4(1) - 4(1) + d = 0 \Rightarrow d = -6$$

ومنه معادلة المستوي المحوري هي: $2x + 4y - 4z - 6 = 0$

السؤال الرابع: ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$ ؟

الحل

$$T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$T_r = \binom{8}{r} y^{16-2r-r} x^{-8+r+r} = \binom{8}{r} x^{-8+2r} y^{16-3r}$$

الحدّ الذي يحوي x^2y يحقق $-8 + 2r = 2$ و $16 - 3r = 1$

منه $r = 5$

أمثال الحد x^2y هي: $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: إذا كان $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$ أياً كان x من $\mathcal{R}^*$.

أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

الحل

عند 0 يوجد حالة عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$:

$$f(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2} = -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{\cos x + 1} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = -(1)^2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n} \text{ و } u_0 = \frac{1}{2}$$

① أثبت أنَّ $0 < u_n < 1$ أياً كانت n من $\mathcal{N}$.

② نعرّف $(v_n)_{n\geq0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$. أثبت أنَّ $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n.

③ اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الحل

① التابع f: $f(x) = \frac{x}{2-x}$ اشتقاقي على $\mathcal{R}\backslash\{2\}$

$f'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$ ومنه f متزايد تماماً

لنبرهن القضية: $E(n): 0 < u_n < 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

من أجل $n = 0$ نجد $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$ و $E(0)$ محققة

بفرض أنَّ القضية $E(n): 0 < u_n < 1$ صحيحة

ولنبرهن أنَّ: $E(n+1): 0 < u_{n+1} < 1$ صحيحة

بما أنَّ f متزايد نكتب

$$f(0) < f(u_n) < f(1) \Longrightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② $$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1 = \frac{2-2u_n}{u_n}$$

$$v_{n+1} = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) = 2v_n$$

ومنه $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$

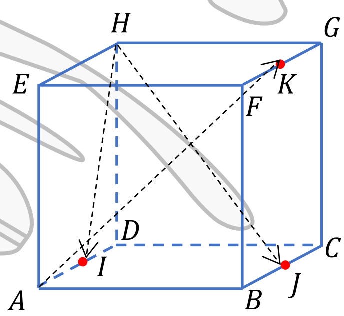
$$v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = 2^n$$

③ $$v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n + 1}$$

بما أنَّ $q = 2 > 1$ فإنَّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

التمرين الثالث: $ABCDEFGH$ مكعب. I , J , K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$, $[BC]$, $[FG]$



① باختيار معلم متجانس $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{HJ}$.

② أوجد عددين حقيقيين a و b يحقق المساواة $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$ ثم استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً.

الحل

①

$A(1,0,0)$	$H(0,0,1)$	$I(\frac{1}{2},0,0)$	$J(\frac{1}{2},1,0)$	$K(\frac{1}{2},1,1)$

$\overrightarrow{AK}(-\frac{1}{2},1,1)$ و $\overrightarrow{HI}(\frac{1}{2},0,-1)$ و $\overrightarrow{HJ}(\frac{1}{2},1,-1)$

$$\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2},1,1\right) = a\left(\frac{1}{2},0,-1\right) + b\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2},1,1\right) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, b, -a-b\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ -a - b = 1 \end{cases}$$ للجملة الحل الوحيد $a = -2$ و $b = 1$

ومنه $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HJ}$ فالأشعة $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً.

التمرين الرابع عين العددين z_1 , z_2 حيث:

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 & ❶ \\ 2\overline{z_1} + \overline{z_2} = -3 + i2\sqrt{3} & ❷ \end{cases}$$

الحل

نأخذ مرافق طرفي المعادلة ❷ نجد: $2z_1 + z_2 = -3 - i2\sqrt{3}$ ❸

بجمع المعادلتين ❶ و ❸ نجد $4z_1 = -6 - i2\sqrt{3}$

ومنه $z_1 = -\frac{3}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

وبالتعويض في ❶ نجد $z_2 = -3 - i\sqrt{3} + 3 = -i\sqrt{3}$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:(90 درجة للأولى و 110 للثانية)

المسألة الأولى: صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل، والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل. احسب الاحتمالات التالية

① A , B , $A|B$.

② إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه.

الحل

$$n(\Omega) = \binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$$

① $$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{n(A')}{n(\Omega)} = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}}{35} = \frac{6\times3+4}{35} = \frac{22}{35}$$

$$A \cap B: \{R, B, B\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}} = \frac{3\times6}{22} = \frac{18}{22}$$

② $$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{35} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{35} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}}{35} = \frac{1}{35}$$

قانون الاحتمال:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

التوقع الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . P_i$

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$$

التباين: $V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P_i - (E(X))^2$

$$V(X) = 0 + 1^2 \times \frac{18}{35} + 2^2 \times \frac{12}{35} + 3^2 \times \frac{1}{35} - \left(\frac{9}{7}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{85}{35} - \frac{81}{49} = \frac{17}{7} - \frac{81}{49} = \frac{38}{49}$$

932 740 055

المسألة الثانية: ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق:

$$f(x)=2e^{-x}+x-2$$ خطه البياني C

① أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه.

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. وبين أنه يبلغ قيمة حدية محلية عينها وبين نوعها.

③ استنتج أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمزه بالرمز α أثبت أنَّ $1<\alpha<2$

④ ارسم المقارب المائل ثم ارسم C، واحسب مساحة السطح المحصورين C المستقيمات التي معادلاتها $y=x-2$ و $x=\ln 2$ و $x=\ln 3$

الحل

① بملاحظة: $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}2e^{-x}=0$ نستنتج أنَّ

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}2e^{-x}=0$$

فالمستقيم $y=x-2$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$

بما أنَّ $f(x)-(x-2)=2e^{-x}>0$ فإنَّ C يقع فوق مقاربه

② عند $-\infty$ لدينا حالة عدم تعين $\infty-\infty$

$$f(x)=e^{-x}(2+xe^{x})-2$$

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

فإنَّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

f اشتقاقي على $\mathcal{R}$ و $f'(x)=-2e^{-x}+1$

$$f'(x)=0\Rightarrow -2e^{-x}+1=0\Rightarrow e^{-x}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=\ln 2\Rightarrow f(\ln 2)=2\times\frac{1}{2}+\ln 2-2=\ln 2-1$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 2)=\ln 2-1$ قيمة صغرى محلية

③ التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty,\ln 2[$ ويحقق:

$$0\in f(\,]-\infty,\ln 2[\,)=]\ln 2-1,+\infty[$$

فللمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد α في $]-\infty,-\ln 2[$

كذلك التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]\ln 2,+\infty[$ ويحقق:

$$0\in f(\,]\ln 2,+\infty[\,)=]\ln 2-1,+\infty[$$

فللمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد β في $]\ln 2,+\infty[$

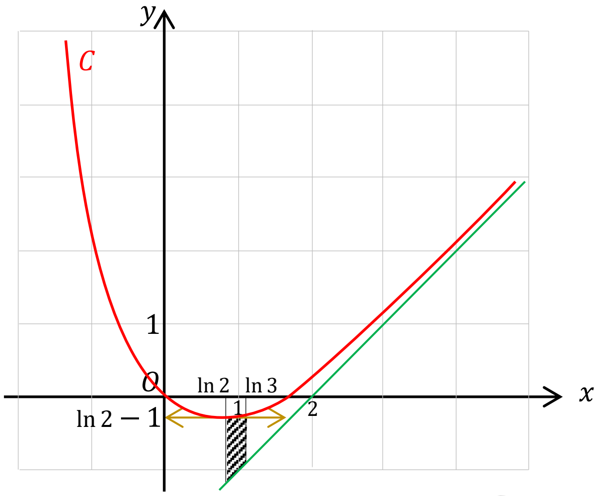
بما أنَّ $f(0)=2-0-2=0$ فإنَّ $\beta=0$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي 0

$$\begin{cases} f(1)=\frac{2}{e}+1-2=\frac{2}{e}-1<0 \\ f(2)=\frac{2}{e^2}+2-2=\frac{2}{e^2}>0 \end{cases}$$

$\Leftarrow f(1)f(2)<0$ ومنه $1<\alpha<2$

④ الرسم



$$S=\int_{\ln 2}^{\ln 3}[f(x)-(x-2)]\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}2e^{-x}\,dx$$

$$S=2[-e^{-x}]_{\ln 2}^{\ln 3}=-2\left[e^{-\ln 3}-e^{-\ln 2}\right]$$

$$S=-2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{3}$$

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المدرس أحمد راتب عثمان

حل النموذج الوزاري د للرياضيات دورة 2017

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$-$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$ 0

① ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

② ما عدد القيم الحدية محلياً.

③ اكتب معادلة مماس منحن للتابع عند نقطة فاصلتها $x=1$.

الحل

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]0,+\infty[$	①
للتابع f قيمة حدية واحدة	②
$y=1$	③

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة الآتية: $z^2=1+i2\sqrt{2}$

الحل

بفرض $z=x+iy$ حل للمعادلة $z^2=1+i2\sqrt{2}$ يكون:

نكتب جملة المعادلات
$$\begin{cases} x^2+y^2=3 & ① \\ x^2-y^2=1 & ② \\ xy=\sqrt{2} & ③ \end{cases}$$

بجمع ① و② نجد $2x^2=4$ ومنه $x^2=2 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$

بطرح ② من ① نجد $2y^2=2$ ومنه $y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases}$

بما أنَّ: $xy>0$ فإنَّ x و y من إشارة واحدة

ومنه: $z_1=\sqrt{2}+i$ و $z_2=-\sqrt{2}-i$

السؤال الثالث: ليكن التابع f المعرف على $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ وفق: $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ ، أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عين A من $x>A$ ليكون x من المجال $[1.95\,,2.05]$

الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

المجال $]1.95\,,2.05[$ مركزه $\frac{2.05+1.95}{2}=2$

ونصف قطره $\frac{2.05-1.95}{2}=0.05=\frac{1}{20}$

$f(x)\in[1.95\,,2.05]$ يكافئ $|f(x)-2|<\frac{1}{20}$

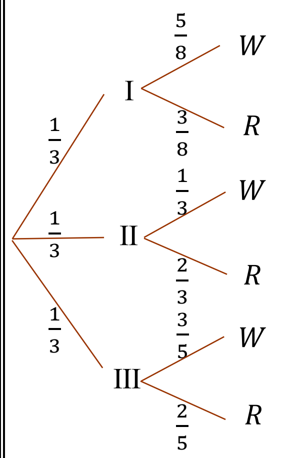
أي $\left|\frac{2x+1}{x-1}-2\right|<\frac{1}{20}$ أو $\left|\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right|<\frac{1}{20}$

أو $\left|\frac{3}{x-1}\right|<\frac{1}{20}$ وفي جوار $+\infty$ يكون $\frac{3}{x-1}>0$

ومنه $\frac{3}{x-1}<\frac{1}{20}$ أو $x-1>60$ ومنه $x>61$

ومنه $A=61$.

السؤال الرابع: المخطط الشجري المرسوم جانباً،



الرمز W يدل على الكرات البيضاء

والرمز R على الكرات الحمراء

حيث يتم عشوائيا اختياركرة واحدة

① ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

② إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء

فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول I.

الحل

① الحدث R الكرة المسحوبة حمراء

$$P(R)=P(\mathrm{I}\cap R)+P(\mathrm{II}\cap R)+P(\mathrm{III}\cap R)$$
$$P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{45+80+48}{360}=\frac{173}{360}$$

② $$P(\mathrm{I}|R)=\frac{P(\mathrm{I}\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}}=\frac{3}{\frac{173}{15}}=\frac{45}{173}$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}\setminus\{3\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$

① اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$ وعين كلا من a , b

ثم أثبت أنَّ المستقيم $d: y=ax+b$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

② احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

الحل

① نقسم البسط على المقام نجد: $f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$

$a=1$ و $b=-1$

$$f(x)-(x-1)=\frac{1}{x+3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+3}=0$$

فالمستقيم $y=x-1$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$

② $$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+3)\right]_0^2=2-2+\ln 5-\ln 3$$
$$\int_0^2 f(x)\,dx=\ln\frac{5}{3}$$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_0=e^3\,,u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل $v_n=\ln(u_n)-2$

والمطلوب:

① أثبت أنَّ $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية وعين u_0 , q .

② اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

③ أثبت أنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e^2$.

الحل

① $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$

$v_{n+1} = \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}[\ln(u_n) - 2] = \frac{1}{2}v_n$

ومنه $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

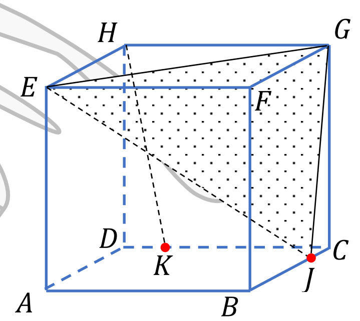
$v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(e^3) - 2 = 3 - 2 = 1$

② $v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$v_n = \ln(u_n) - 2 \Rightarrow u_n = e^{v_n + 2}$

③ بما أنَّ: $|q| < 1$ فإنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$

التمرين الثالث: $ABCDEFGH$ مكعب، K نقطة من $[CD]$ تحقق: $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J \in [BC]$ بحيث $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب:



① جد إحداثيات النقط G , K , J , E , H في المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.

② أثبت أنَّ الشعاعين $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطياً.

③ أثبت أنَّ الأشعة $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً.

④ أثبت أنَّ المستقيم (HK) يوازي (EGJ) .

الحل

①

$E(0,1,0)$	$H(0,1,1)$	$G(1,1,1)$	$J(1,0,\frac{3}{4})$	$K(\frac{1}{4},0,1)$

② $\overrightarrow{EJ}(1,-1,\frac{3}{4})$ و $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$ و $\overrightarrow{HK}(\frac{1}{4},-1,0)$

$\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}$ مركبات الشعاعين $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

③ $\overrightarrow{EJ} = a\overrightarrow{HK} + b\overrightarrow{EG}$

$\Rightarrow (1,-1,\frac{3}{4}) = a(\frac{1}{4},-1,0) + b(1,0,1)$

$\Rightarrow (1,-1,\frac{3}{4}) = (\frac{1}{4}a + b, -a, b)$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a + b = 1 \\ a = 1 \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$a = 1$ و $b = \frac{3}{4}$ تحقق المعادلة $\frac{1}{4}a + b = 1$

فللجملة الحل الوحيد $a = 1$ و $b = \frac{3}{4}$

ومنه $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{HK} + \frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$ فالأشعة $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً.

④ $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ هما شعاعي توجيه للمستوي (EGJ) و $\overrightarrow{HK}$ شعاع توجيه للمستقيم (HK) وبما أنَّ الأشعة $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً فإنَّ المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ).

التمرين الرابع أوجد الحد المستقل عن x في منشوري الحدين $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$

الحل

$T_r = \binom{8}{r} x^{8-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$

$T_r = \binom{8}{r} x^{8-r} x^{-r} = \binom{8}{r} x^{8-2r}$

الحدّ الثابت المستقل عن x يحقق $8 - 2r = 0$ ومنه $r = 4$

وهو $T_4 = \binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن التابع g المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $g(x) = e^x + 2 - x$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق:

$f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$

① أثبت أنَّ $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$.

② بين أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

③ أثبت أنَّ المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي.

④ ارسم Δ وارسم C ، واحسب مساحة السطح المحصورين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

الحل

أولاً: g اشتقاقي على $\mathcal{R}$ و $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 3$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$

أياً كانت $x \in \mathcal{R}$ فإنَّ $g(x) \geq 3$ ومنه $g(x) > 0$

ومجموعة حلول المتراجحة $]-\infty, +\infty[$

ثانياً: ① f اشتقاقي على $\mathcal{R}$: $f'(x) = 1 + \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}}$

$f'(x) = 1 + \frac{2-x}{e^x} = \frac{1}{e^x}(e^x + 2 - x) = \frac{1}{e^x} g(x) > 0$

② بما أنَّ $f'(x) > 0$ فإنَّ f متزايد تماماً على $\mathcal{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

عند $+\infty$ لدينا حالة عدم تعين $\frac{\infty}{\infty}$ نكتب $f(x) = x + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,+\infty[$ ويحقق:

$$0 \in f(\,]-\infty,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$$

فالمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد α في $]-\infty,+\infty[$

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}} > 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ومنه $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

③ $$f(x) - x = \frac{x-1}{e^x} = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = 0$$

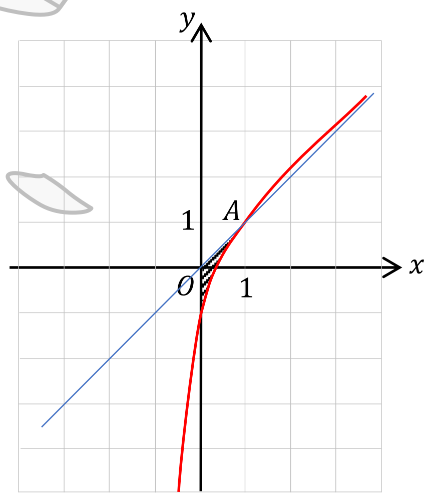
فالمستقيم $y = x$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$

$$f(x) - x = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

C يشترك مع Δ بالنقطة $A(1,1)$

④



$$S = \int_0^1 [x - f(x)]\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{e^x}\,dx$$

$u(x) = 1 - x$	$u'(x) = -1$
$v'(x) = e^{-x}$	$v(x) = -e^{-x}$

$$S = [-(1-x).e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$S = [-(1-x).e^{-x}]_0^1 + [e^{-x}]_0^1$$

$$S = 0 + 1 + e^{-1} - 1 = \frac{1}{e}$$

المسألة الثانية: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,0,-1), B(2,2,3), C(3,1,-2), D(-4,2,1)$

والمطلوب:

① أثبت أنَّ المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

② أثبت أنَّ الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC).

③ احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC).

الحل

① $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

المثلث ABC قائم في A

$AB = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$ و $AC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{21}\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

② $$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 4 - 3 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

ومنه $\vec{n}$ يعامد شعاعي توجيه المستوي (ABC) فهو شعاع ناظم على المستوي

ومعادلة (ABC) من الشكل: $ax + by + cz + d = 0$

نعوض إحداثيات النقطة A والناظم $\vec{n}$ نجد:

$$2 + 0 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$$

ومنه معادلة المستوي (ABC) هي: $2x - 3y + z - 1 = 0$

③ $$h = dis[D,(ABC)] = \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}h = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{14}}{2}\right).\sqrt{14} = 7$$

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المدرس أحمد راتب عثمان

932 740 055

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = 4n+1$ أثبت أنَّ المتتالية حسابية عين أساسها واحسب $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{10}$

الحل

$$u_{n+1} = 4(n+1)+1 = 4n+5$$
$$u_{n+1}-u_n = 4n+5-4n-1 = 4 = const$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r=4$

$u_0 = 1$ و $u_{10} = 41$ وعدد الحدود المُراد جمعها $n = 11$ حد

$$S = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{10} = \frac{n}{2}(a+l)$$
$$S = \frac{n}{2}(u_0+u_{10}) = \frac{11}{2}(1+41) = 231$$

السؤال الثاني: اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

الحل

البسط: $z_1 = 1-i\sqrt{3}$

$r_1 = \sqrt{1+3} = 2$ و $\begin{cases}\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\\ \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

المقام $z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\arg z = \theta_1-\theta_2 = -\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12}$$
$$r = |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$
$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

السؤال الثالث: رف يحوي 7 كتب لمؤلفين، ثلاثة كتب للمؤلف A وأربعة للمؤلف B

① بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاث الأولى للمؤلف B ؟

② بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية؟

الحل

① $P_4^3 \times P_4^4 = 4\times3\times2\times4\times3\times2\times1 = 576$

② $P_1^1 \times P_6^6 = 1\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

السؤال الرابع: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases}e^x-\frac{1}{e}e^y = 1 & ❶\\ 2e^x+e^y = 4+e & ❷\end{cases}$$

الحل

بتعويض $e^x = \frac{1}{e}e^y+1$ من ❶ في ❷ نجد:

$$\frac{2}{e}e^y+2+e^y = 4+e \Rightarrow \left(\frac{2+e}{e}\right)e^y = 2+e$$

بما أنَّ $2+e>0$ فإنَّ $\frac{1}{e}e^y = 1$

$$\Rightarrow e^y = e \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x=\ln 2}$$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب:

① احسب $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ، $g'(x)$ ، $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$.

② احسب مشتق التابع $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ على $\mathcal{R}\backslash\{0\}$.

الحل

① التابع $g: x\to\tan x$ اشتقاق عند $a = \frac{\pi}{4}$ و $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ و } g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to0}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

إذاً $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}} = 2$

② f اشتقاق على $\mathcal{R}\backslash\{0\}$ و $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}+x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

التمرين الثاني: لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq0}$ و $(x_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق: $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ و $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$ أثبت أن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq0}$ و $(x_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

الحل

التابع f: $f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$ اشتقاق على $[0,+\infty[$

و $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ ومنه f متناقص تماماً

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً.

التابع g: $g(x) = \frac{4x+1}{x+2}$ اشتقاق على $[0,+\infty[$

و $g'(x) = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$ ومنه g متزايد تماماً

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

$$x_n-y_n = \frac{4n+5}{n+1}-\frac{4n+1}{n+2}$$
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n) = 4-4 = 0$$

فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

التمرين الثالث: ليكن كثير الحدود:

$$P(z) = z^4+5z^3+10z^2+10z+4$$

① عيّن عددين a, b يحققان:

$$P(z) = (z^2+az+a)(z^2+bz+a).$$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

932 740 055

الحل

① $P(z) = (z^2+az+a)(z^2+bz+a)$

$= z^4+(a+b)z^3+(2a+ab)z^2+(a^2+ab)z+a^2$

بالمطابقة مع كثير الحدود نجد أنّ:

$$\begin{cases} a+b=5 & ❶ \\ 2a+ab=10 & ❷ \\ a^2+ab=10 & ❸ \\ a^2=4 & ❹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 & ❶ \\ 2a+ab=10 & ❷ \\ a^2+ab=10 & ❸ \\ \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases} & ❹ \end{cases}$$

عندما $a=-2$ من ❶ نجد $b=7$ ومن ❷ نجد $b=-7$

إذاً $a=-2$ حل مرفوض

عندما $a=2$ من ❶ نجد $b=3$ ومن ❷ نجد $b=3$

بتعويض $a=2$ و $b=3$ في ❸ $4+6=10$ محققة

اذاً $a=2$ و $b=3$

② المعادلة $P(z)=0$ تكافيء

$$(z^2+2z+2)(z^2+3z+2)=0$$

إما $z^2+2z+2=0$

$\Delta = 4-8=-4<0$ وللمعادلة حلين عقديين مترافقين:

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$

و$z_1=-1+i$ و $z_2=-1-i$

أو $z^2+3z+2=0$ ومنه $(z+2)(z+1)=0$

و $z_3=-1$ و $z_4=-2$

التمرين الرابع يشتري محل للأدوات الكهربائية **400** مصباح من المصنع A و **200** مصباح من المصنع B، إذا علمت أنَّ نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج المصنع A هي 4% وفي انتاج B هي 10% نسحب عشوائياً مصباحاً.

① ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

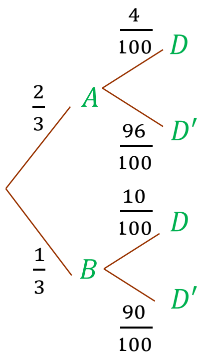
② إذا علمت أنَّ المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من B.

الحل

نفرض: A الحدث: المصباح مصنوع في الورشة A

B الحدث: المصباح مصنوع في الورشة B

D الحدث: المصباح معطوب



① $P(D) = P(A\cap D)+P(B\cap D)$

$= P(A).P(D|A)+P(B).P(D|B)$

$= \frac{2}{3}\times\frac{4}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{10}{100} = \frac{18}{300} = \frac{3}{50}$

②

$$P(B|D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{10}{100}}{\frac{18}{300}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:(100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $\mathcal{R}\setminus\{-1\}$

① ادرس نهاية التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبيّن إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x=-1$.

② أوجد معادلة مقارب أفقي للخط البياني C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

③ احسب $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات f وعين ماله من قيم حدية محلية.

④ أوجد معادلة المماس في النقطة A من C التي فاصلتها $x=-2$.

⑤ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x=3$.

الحل

① $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

لمّا كان $\lim_{x\to-1}(x+2)=1$ وكان $\lim_{x\to-1}(x+1)^2=0$

ولايوجد نهاية حقيقية عند $x=-1$. $\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$

② $d: y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$ وجوار $+\infty$

$f(x)-0=\frac{x+2}{(x+1)^2}$ إشارته تماثل إشارة البسط لأنّ المقام موجب تماماً

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ $+\infty$	
$f(x)-0$	$-$ $\quad 0$	$+$
الوضع النسبي	C تحت d	C فوق d

C يشترك مع d بالنقطة $A(-2,0)$

③ f اشتقاقي على $\mathcal{R}\setminus\{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2-2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2x-4}{(x+1)^3} = \frac{-x-3}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow f(-3)=-\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

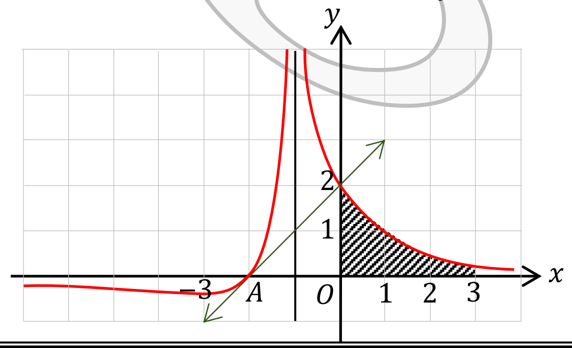
④ معادلة المماس $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

$y=1(x+2)+0 \Rightarrow y=x+2$

⑤ المستقيم $x=-1$ مقارب شاقولي للخط C

$f(-3)=-\frac{1}{4}$ قيمة صغرى محلياً

$x=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow y=2$



932 740 055

$$S=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^2}dx=\int_0^3 \frac{x+1+1}{(x+1)^2}dx$$

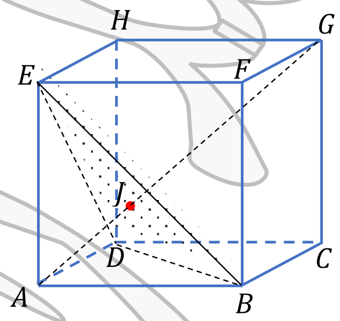
$$S=\int_0^3 \frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$S=\left[\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^3=\ln 4-\frac{1}{4}-\ln 1+1$$

$$S=\ln 4+\frac{3}{4}$$

المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ **مكعب طول ضلعه يساوي 3**

في المعلم $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$



① عيّن إحداثيات النقاط D, B, E, G.

② أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG).

③ أثبت أنَّ المستقيم (AG) ناظم للمستوي (EDB).

④ المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عيّن احداثياتها.

⑤ أثبت أنَّ J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله.

⑥ احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

الحل

①

$E(0,0,3)$	$G(3,3,3)$	$B(3,0,0)$	$D(0,3,0)$

② $\overrightarrow{AG}(3,3,3)$:

$d:\begin{cases}x=3t\\ y=3t\ :t\in\mathcal{R}\\ z=3t\end{cases}$ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG)

③ الشعاعان $\overrightarrow{EB}(3,0,-3)$، $\overrightarrow{ED}(0,3,-3)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما فهما شعاعي توجيه للمستوي (EDB).

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB}=9+0-9=0\Rightarrow \overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{EB}$$
$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}=0+9-9=0\Rightarrow \overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{ED}$$

ومنه المستقيم (AG) عمود على المستوي (EDB)

④ معادلة (EDB) من الشكل $ax+by+cz+d=0$ بتعويض إحداثيات $\overrightarrow{AG}$ و B نجد $d=-9$

ومعادلة (EDB): $3x+3y+3z-9=0$

أو $x+y+z-3=0$

نعوض من معادلة المستقيم (AG) في معادلة المستوي (EDB):

$3t+3t+3t-3=0$ نجد: $t=\frac{1}{3}$ ومنه $J(1,1,1)$

⑤
$$EB=\|\overrightarrow{EB}\|=\sqrt{9+0+9}=3\sqrt{2}$$
$$ED=\|\overrightarrow{ED}\|=\sqrt{0+9+9}=3\sqrt{2}$$
$$DB=\|\overrightarrow{DB}\|=\sqrt{9+9+0}=3\sqrt{2}$$

$EB=ED=DB$ المثلث EDB متساوي الأضلاع مركز ثقله

$\left(\frac{0+3+0}{3},\frac{0+0+3}{3},\frac{3+0+0}{3}\right)$ أو $J(1,1,1)$ وهي نقطة تلاقي ارتفاعاته.

⑥
$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}EB^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 18=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$
$$h=dis[A,(EDB)]=\frac{|-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$
$$V=\frac{1}{3}S_{EDB}h=\frac{1}{3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right).\sqrt{3}=\frac{9}{2}$$

طريقة ثانية

$$V=\frac{1}{3}S_{ADB}.AE=\frac{1}{3}\left(\frac{AB\times AD}{2}\right)AE=\frac{1}{3}\left(\frac{3\times 3}{2}\right)\times 3=\frac{9}{2}$$

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المدرس أحمد راتب عثمان

حل النموذج الوزاري 6 للرياضيات دورة 2017

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: الجدول الآتي يمثل تغيرات التابع f خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty \qquad -1$	$-1 \qquad 1$	$1 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 3$

① اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.

② هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C ؟

③ هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟

④ أثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

الحل

①	$x=-1$ مقارب شاقولي	$x=1$ مقارب شاقولي
	$y=3$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$	
②	لا يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C لوجود مقارب أفقي	
③	لا يوجد مماسات أفقية للخط البياني C لعدم انعدام $f'(x)$	
④	التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-1,1[$ ويحقق: $0\in f(]-1,1[)=]-\infty,+\infty[$ فللمعادلة $f(x)=0$ جذر وحيد α في $]-1,1[$	

السؤال الثاني: اكتب العدد العقدي $Z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالشكل الأسي.

الحل

$$Z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$Z=-(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$Z=(\sqrt{2}-1)e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC .

جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

الحل

G مركز ثقل المثلث DBC فإنّ:
$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ وبالتالي أياً كانت النقطة M في الفراغ تحقق: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

ومنه $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=3\|\overrightarrow{MG}\|=3MG$ ①

من جهة ثانية فإنّ:

$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=$$
$$=3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC})$$
$$=3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}=3(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})=3\overrightarrow{GA}$$

② $\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|=3\|\overrightarrow{GA}\|=3GA$

من ① و ② نجد $\boxed{MG=GA}$

إذا M هي مجموعة النقاط التي تبعد عن النقطة G بعداً ثابتاً هو الطول GA فهي كرة مركزها G ونصف قطرها GA .

السؤال الرابع: ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق $f(x)=e^x$.

احسب $f(\ln 2)$ و $f'(\ln 2)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to\ln 2}\left(\frac{e^x-2}{x-\ln 2}\right)$.

الحل

التابع f اشتقاقي على $\mathcal{R}$ و $f'(x)=e^x$

$$f'(\ln 2)=f(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$
$$\lim_{x\to\ln 2}\left(\frac{e^x-2}{x-\ln 2}\right)=\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-f(\ln 2)}{x-\ln 2}=f'(\ln 2)$$

إذاً $\lim\limits_{x\to\ln 2}\left(\frac{e^x-2}{x-\ln 2}\right)=2$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي:

$u_0=0$ ، $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$ والمطلوب:

① أثبت أنَّ $0\leq u_n\leq 1$.

② أثبت أنَّ $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

③ علّل تقارب المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

الحل

① التابع f : $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ اشتقاقي على $\mathcal{R}\backslash\{-2\}$

$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}>0$ ومنه f متزايد تماماً

لنبرهن القضية: $E(n): 0\leq u_n\leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

من أجل $n=0$ نجد $0\leq u_0=1\leq 1$ و $E(0)$ محققة

بفرض أنَّ القضية $E(n)\ :\ 0\leq u_n\leq 1$ صحيحة

ولنبرهن أنّ: $E(n+1)\ :\ 0\leq u_{n+1}\leq 1$ صحيحة

بما أنَّ f متزايد نكتب

$$0\leq u_n\leq 1\Longrightarrow f(0)\leq f(u_n)\leq f(1)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq 1\Longrightarrow 0\leq u_{n+1}\leq 1$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n .

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة

② لنبرهن القضية $E(n)\ :\ u_{n+1}\geq u_n$

من أجل $n=0$ نجد $u_1=\frac{1}{2}\geq u_0=0$ و $E(0)$ محققة.

بفرض أنَّ القضية $E(n)\ :\ u_{n+1}\geq u_n$ صحيحة ولنبرهن أنّ:

$E(n+1)\ :\ u_{n+2}\geq u_{n+1}$ صحيحة

بما أنَّ f متزايد: $u_{n+1}\geq u_n\Longrightarrow f(u_{n+1})\geq f(u_n)$

$$\Longrightarrow u_{n+2}<u_{n+1}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$

أياً كان العدد الطبيعي n والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

③ والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة من عدد حقيقي l هو حل المعادلة $f(x)=x$ و $0\leq x\leq 1$

$$f(x)=x \Rightarrow \frac{2x+1}{x+2}=x \Rightarrow x^2+2x=2x+1$$
$$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$$

بما أنّ f مستمر عند 1 فإنّ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

التمرين الثاني: صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً. نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك. عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه.

الحل

RRR	RRR	باقي الحالات
5	3	0

قيم المتحول العشوائي $X(\Omega)=\{0,3,5\}$

$$P(X=5)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{5\times4\times3}{10\times9\times8}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{5\times4}{2}\times5}{\frac{10\times9\times8}{6}}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=0)=1-\left(\frac{1}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{6}{12}$$

k	0	3	5
$P(X=k)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

التوقع الرياضي: $E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i.P_i$

$$E(X)=0\times\frac{6}{12}+3\times\frac{5}{12}+5\times\frac{1}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$$

التباين: $V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2.P_i-(E(X))^2$

$$V(X)=0^2\times\frac{6}{12}+3^2\times\frac{5}{12}+5^2\times\frac{1}{12}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$
$$V(X)=\frac{45+25}{12}-\frac{25}{9}=\frac{210-100}{36}=\frac{110}{36}=\frac{55}{18}$$

التمرين الثالث: أوجد الحد المستقل عن x في منشورذي الحدين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$.

الحل

$$T_r=\binom{6}{r}(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{6}{r}x^{12-2r}x^{-r}=\binom{6}{r}x^{12-3r}$$

والحدّ الثابت المستقل عن x يحقق $12-3r=0$

ومنه $r=4$ والحد هو $T_4=\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$

التمرين الرابع عيّن مجموعة تعريف التابع f: $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر.

الحل

f معرف ضمن الشرطين $1+x\geq 0$ و $\sqrt{1+x}-1\neq 0$

أو $x\geq -1$ و $x\neq 0$ ومنه $D=[-1,0[\cup]0,+\infty[$

عند الصفر يوجد حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{\sin x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}$$

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=1\times2=2$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

① أوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف.

② ادرس اطراد التابع ونظم جدولاً بها.

③ بيّن القيم الحدية المحلية للتابع f وارسم خطه البياني.

④ استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$.

⑤ احسب مساحة السطح المحصورين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$.

الحل

① $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

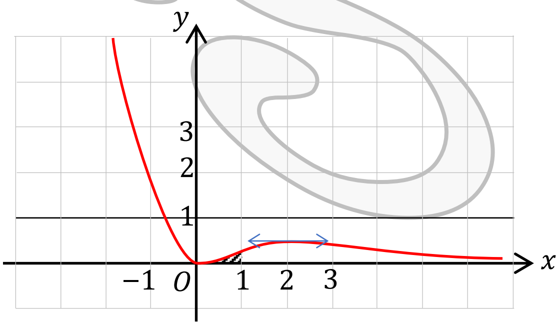
② f اشتقاقي على $\mathcal{R}$:

$$f'(x)=\frac{2xe^x-e^xx^2}{(e^x)^2}=\frac{x(2-x)}{e^x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x(2-x)\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\f(2)=\frac{4}{e^2}\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

③ $f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً و $f(2)=\frac{4}{e^2}$ قيمة كبرى محلياً.



④ المستقيم $y=1$ يشترك مع C بنقطة وحيدة يكون عدد حلول المعادلة $f(x)=x^2e^{-x}=1$ هو 1.

⑤ $S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

$u(x)=x^2$	$u'(x)=2x$
$v'(x)=e^{-x}$	$v(x)=-e^{-x}$

$S=[-x^2.e^{-x}]_0^1+\int_0^1 2xe^{-x}\,dx$

نكامل $\int_0^1 2xe^{-x}\,dx$ بالتجزئة

$u(x)=2x$	$u'(x)=2$
$v'(x)=e^{-x}$	$v(x)=-e^{-x}$

$\int_0^1 2xe^{-x}\,dx=[-2x.e^{-x}]_0^1+\int_0^1 2e^{-x}\,dx$

$\int_0^1 2xe^{-x}\,dx=[-2x.e^{-x}]_0^1-2[e^{-x}]_0^1$

$S=[-x^2.e^{-x}]_0^1+[-2x.e^{-x}]_0^1-2[e^{-x}]_0^1$

$S=-\frac{1}{e}-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}+2=2-\frac{5}{e}$

طريقة ثانية نفرض كثير الحدود $P(x)=ax^2+bx+c$ و $a\neq 0$

ليكن $F:x\to P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathcal{R}$ عندئذٍ

$F'(x)=f(x)$ لكل $x\in\mathcal{R}$ ومنه

$P'(x)e^{-x}-e^{-x}P(x)=x^2e^{-x}$

$P'(x)-P(x)=x^2\Rightarrow$

$2ax+b-ax^2-bx-c=x^2$

$-ax^2+(2a-b)x+b-c=x^2$

$\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\2a-b=0\\b-c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2\\c=-2\end{cases}$

$\Rightarrow P(x)=-x^2-2x-2$

ومنه $F(x)=(-x^2-2x-2)e^{-x}$

$S=\int_0^1 f(x)\,dx=[F(x)]_0^1=[(-x^2-2x-2)e^{-x}]_0^1$

$S=-5e^{-1}+2=2-\frac{5}{e}$

المسألة الثانية: نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً،

وليكن Q المستوي الذي معادلته: $x-y+2z+4=0$

وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB.

① أثبت أنَّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P.

② جد معادلة الكرة S.

③ أثبت أنَّ المستوي Q مستوي مماس للكرة S.

④ أثبت أنَّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

⑤ ليكن المستقيم: $d:\begin{cases}x=t\\y=12-5t\\z=4-3t\end{cases},\ t\in\mathcal{R}$

ⓐ أثبت أنَّ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين Q,P

ⓑ أثبت أنَّ d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

الحل

① $\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$

معادلة P من الشكل $ax+by+cz+d=0$ بتعويض إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ و B نجد $d=-8$

ومعادلة P: $2x+y-z-8=0$

② $r=AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$S:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$

$S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

③ $dis(A,Q)=\frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=r$

و Q مستوي مماس للكرة S

④ نعوض إحداثيات $C(0,2,-1)$ في معادلة Q نجد

$-2-2+4=0$ محققة ومنه C نقطة من المستوي Q

$\vec{n}_Q(1,-1,2)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,1,-2)\Rightarrow\vec{n}_Q=-\overrightarrow{AC}$

فالشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\vec{n}_Q$ مرتبطان خطياً والمستقيم (AC) يعامد المستوي Q

فالنقطة C هي مسقط النقطة A على المستوي Q.

⑤ ⓐ نعوض من معادلة المستقيم d في معادلة المستوي P:

$2t+12-5t-4+3t-8=0\Rightarrow 0=0$

ومنه المستقيم d محتوى في المستوي P

نعوض من معادلة المستقيم d في معادلة المستوي Q:

$t-12+5t+8-6t+4=0\Rightarrow 0=0$

ومنه المستقيم d محتوى في المستوي Q

ومنه المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين Q,P

ⓑ $\overrightarrow{BC}(-3,0,-1)$ ومنتصف $[BC]$ هي: $N\left(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$

ومعادلة المستوي المحوري R للقطعة المستقيمة $[BC]$

من الشكل $ax+by+cz+d=0$ بتعويض إحداثيات $\overrightarrow{BC}$ و N نجد

$-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+d=0\Rightarrow d=4$

ومعادلة المستوي R: $-3x-z+4=0$

نعوض من معادلة المستقيم d في معادلة المستوي R:

$-3t-4+3t+4=0\Rightarrow 0=0$

ومنه المستقيم d محتوى في المستوي R

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المدرس أحمد راتب عثمان

حل النموذج الوزاري للرياضيات دورة 2018

أولا: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد فيما يلي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	1 ‖ -2	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3

① اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.

② هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C ؟

③ هل يمكن رسم مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه؟

④ هل f اشتقاقي عند 3 ؟

⑤ عيّن القيم الحدية للتابع f.

الحل

①	$y=-3$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$	$y=3$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$
	$x=-2$ مقارب شاقولي	
②	لا يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C لوجود مقارب أفقي	
③	لا يوجد مماسات أفقية للخط البياني C لعدم انعدام $f'(x)$	
④	$f'(3^-)=1$ و $f'(3^+)=-2$ f غير اشتقاقي عند 3	
⑤	$f(3)=0$ قيمة كبرى محلياً	

السؤال الثاني: لتكن النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$a=3+5i \text{ و } b=3-5i \text{ و } c=7+3i$$

بيّن أنَّ $\frac{b-c}{a-c}=2i$ ثمّ استنتج أنَّ ABC قائم الزاوية وأنَّ $BC=2AC$

الحل

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{-4-8i}{-4+2i}=\frac{2+4i}{2-i}=\frac{2i(2-i)}{2-i}=2i$$
$$=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه $\arg\frac{b-c}{a-c}=\frac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم في C

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|2i|=2 \Rightarrow \frac{BC}{AC}=2 \Rightarrow BC=2AC$$

السؤال الثالث: عيّن في منشور $(x^2-\frac{1}{x})^{12}$ الحدّ الذي يحوي x^{12} والحدّ الثابت المستقل عن x.

الحل

$$T_r=\binom{12}{r}(x^2)^{12-r}\left(\frac{-1}{x}\right)^r$$
$$T_r=\binom{12}{r}x^{24-2r}\times(-1)^r x^{-r}=(-1)^r\binom{12}{r}x^{24-3r}$$

الحدّ الذي يحوي x^{12} يحقق $24-3r=12$ ومنه $r=4$

الحدّ الذي يحوي x^{12} هو:

$$T_4=(-1)^4\binom{12}{4}x^{12}=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}x^{12}=495x^{12}$$

والحدّ الثابت المستقل عن x يحقق $24-3r=0$ ومنه $r=8$

وهو $T_8=(-1)^8\binom{12}{8}=\binom{12}{4}=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$

السؤال الرابع: احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق:

$$u_n=\frac{2n!+(-1)^n}{n!}$$

الحل

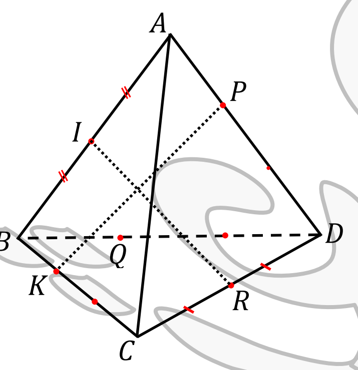
$$u_n=\frac{2n!+(-1)^n}{n!}=\frac{2n!}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}=2+\frac{(-1)^n}{n!}$$
$$1\leq(-1)^n\leq1 \Rightarrow 2+\frac{-1}{n!}\leq 2+\frac{(-1)^n}{n!}\leq 2+\frac{1}{n!}$$
$$\Rightarrow 2+\frac{-1}{n}\leq 2+\frac{(-1)^n}{n!}\leq 2+\frac{1}{n}$$

لما كان $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n}=2$ و $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{-1}{n}=2$

كان $\lim_{n\to+\infty} u_n=2$ حسب مبرهنة الإحاطة

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: $\mathbf{ABCD}$ رباعي وجوه، النقاط $\mathbf{I}$ و $\mathbf{K}$ و $\mathbf{R}$ و $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{P}$ تُحقق: $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و $\mathbf{I}$ هي منتصف $[AB]$ و $\mathbf{R}$ هي منتصف $[CD]$ و $\mathbf{G}$ مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,2)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$



① أثبت أنَّ المستقيمين (IR) و (PK) متقاطعان.

② عيّن موضع النقطة $\mathbf{J}$ مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(C,1)$.

③ عيّن المجموعة المكوّنة من نقاط الفراغ $\mathbf{M}$ التي تحقق:

$$\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\|=\|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\|$$

الحل

① I هي منتصف $[AB]$ فهي مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(B,2)$ ويكون $(I,4)$

R هي منتصف $[CD]$ فهي مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,1)$ و $(D,1)$ ويكون $(R,2)$

بما أنَّ G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فإنَّ G مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,4)$ و $(R,2)$ حسب الخاصة التجميعية ومنه $\boxed{G\in(IR)}$ ❶

932 740 055

من العلاقة $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ نجد أنّ P مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(D,1)$ ويكون $(P,3)$

من العلاقة $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ نجد أنّ K مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,2)$ و $(C,1)$ ويكون $(K,3)$

بما أنّ G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فإنّ G مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(P,3)$ و $(K,3)$ حسب الخاصة التجميعية ومنه $\boxed{G \in (PK)}$ ❷

من ❶ و ❷ ينتج أنّ المستقيمين (IR) و (PK) متقاطعان في النقطة G.

② J مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(C,1)$ يكافئ

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

③ بما أنّ J مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(C,1)$

يكافئ $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ وبالتالي أياً كانت النقطة M في الفراغ

تحقق: $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MJ}$ أو $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{JM}$

ومنه $\|2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}\| = 3\|\overrightarrow{JM}\| = 3JM$ ❸

من العلاقة $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ نجد أنّ Q مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,2)$ و $(D,1)$

يكافئ $2\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD} = \vec{0}$ وبالتالي أياً كانت النقطة M في الفراغ

تحقق: $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MQ}$ أو $2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{QM}$

ومنه $\|2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}\| = 3\|\overrightarrow{QM}\| = 3QM$ ❹

من ❸ و ❹ نجد $\boxed{JM = QM}$

إذا M هي مجموعة النقاط التي تبعد عن النقطتين J و Q بعداً متساوياً فهي تمثل المستوي المحوري للقطعة $[JQ]$.

التمرين الثاني: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6} : n \geq 0 \end{cases}$$

① **أثبت أنّ التابع $x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أيّاً كان العدد الطبيعي n.**

② **أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.**

الحل

① التابع $f: f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ اشتقاق على $\mathcal{R}\backslash\{-3\}$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6)-2(3x+2)}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

ومنه f متزايد تماماً

لنبرهن القضية: $E(n): \frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أيّاً كان العدد الطبيعي n

من أجل $n = 0$ نجد $\frac{1}{2} \leq u_0 = 1 \leq 1$ و $E(0)$ محققة

بفرض أنّ القضية $E(n)\ :\ \frac{1}{2} < u_n \leq 1$ صحيحة

ولنبرهن أنّ: $E(n+1)\ :\ \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$ صحيحة

بما أنّ f متزايد نكتب

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1) \Rightarrow \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$ أيّاً كان العدد الطبيعي n.

② لنبرهن القضية $E(n)\ :\ u_{n+1} < u_n$

من أجل $n = 0$ نجد $u_1 = \frac{5}{8} \leq u_0 = 1$ و $E(0)$ محققة.

بفرض أنّ القضية $E(n)\ :\ u_{n+1} < u_n$ صحيحة ولنبرهن أنّ:

$E(n+1)\ :\ u_{n+2} < u_{n+1}$ صحيحة

بما أنّ f متزايد: $u_{n+1} < u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$$\Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$

أيّاً كان العدد الطبيعي n والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

التمرين الثالث: f **هو التابع المعرف على المجال** $]0, +\infty[$ **وفق:**

$f(x) = \frac{x^2+4x+\sin x}{x}$ **خطه البياني C.**

① **أوجد** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

② **برهن أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس وضع C بالنسبة لهذا المقارب**

الحل

① $f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{\sin x}{x} = x + 4 + \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 4 + 1 = 5$$

② $g(x) = f(x) - (x+4) = \frac{\sin x}{x}$

ولما كان $-1 \leq \sin x \leq 1$ كان في حال $x > 0$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

وبما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

ينتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ حسب مبرهنة الإحاطة

ومنه Δ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي

إشارة $g(x)$ تماثل إشارة البسط لأنّ $x > 0$

بملاحظة أنّ $\sin x > 0$ على كل مجال من النمط $]2\pi k, \pi + 2\pi k[$

حيث k عدد صحيح موجب (الربعين الأول و الثاني) كان:

$g(x) = \frac{\sin x}{x} > 0$ و C فوق Δ

وأنّ $\sin x < 0$ على كل مجال من النمط $]\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k[$

حيث k عدد صحيح موجب (الربعين الثالث و الرابع) كان:

$g(x) = \frac{\sin x}{x} < 0$ و C تحت Δ

ينعدم $g(x)$ عندما $x = \pi k$ (حيث k عدد صحيح موجب مغاير للصفر)

لذلك يشترك C مع $\Delta: y = x$ في كل نقطة من الشكل $(\pi k, \pi k)$.

التمرين الرابع: لتكن الأعداد العقدية:

$$z_3 = 1 \text{ و } z_2 = \sqrt{3} + i \text{ و } z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

① اكتب كلاً من العددين z_1 و z_2 بالشكل الأسي.

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3 = z_3$.

③ اكتب العدد $\left(\frac{z_1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{z_2}{2}\right)^{12}$ بالشكل الجبري.

④ اكتب العدد $z = \frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري والأسي

ثم استنتج قيمة كلٍ من $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$.

الحل

① $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$r = \sqrt{2+2} = 2$ و $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = \sqrt{3} + i$

$r = \sqrt{3+1} = 2$ و $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

② لنفرض أنَّ $z = re^{i\theta}$ يكون $z^3 = z_3 = 1$ تكافئ $r^3e^{i3\theta} = e^{i0}$

$$\begin{cases} r^3 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 3\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi k}{3} : k \in \{0,1,2\}\end{cases}$$

ومنه $\theta = 0$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3}$ أو $\theta = \frac{4\pi}{3}$

وحلول المعادلة $z^3 = 1$ هي: $z = 1$ أو $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ أو $z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

③ $\left(\frac{z_1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{z_2}{2}\right)^{12} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} + \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12}$

$$= e^{i\frac{12\pi}{4}} + e^{i\frac{12\pi}{6}} = e^{i3\pi} + e^{i2\pi} = -1 + 1 = 0$$

④ $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ الشكل الأسي

$$z = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

الشكل الجبري $z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

بالمقارنة نجد أنَّ: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط

$$A\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right) \text{ و } B(-1,0,2) \text{ و } C(2,1,1) \text{ و } D(-3,3,-1)$$

① ⓐ أثبت أنَّ النقاط D و C و B تمثل مستوٍ، أوجد معادلته.

ⓑ استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته.

② ⓐ أثبت أنَّ النقطة A تقع خارج المستوي (BCD).

ⓑ احسب بُعد النقطة A عن المستوي (BCD).

③ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

④ ⓐ أثبت أنَّ النقاط D و C و B تقع على كرة مركزها A.

ⓑ احسب نصف قطر هذه الكرة واكتب معادلتها.

الحل

① ⓐ إنّ $\overrightarrow{BC}(3,1,-1)$ و $\overrightarrow{BD}(-2,3,-3)$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط B و C و D ليست على استقامة واحدة وتعين المستوي (BCD)

بفرض الناظم على المستوي (BCD) هو $\vec{n}(a,b,c)$ يكون:

$\vec{n}.\overrightarrow{BC} = 0$ ومنه $3a + b - c = 0$ ①

$\overrightarrow{BD}.\vec{n} = 0$ ومنه $-2a + 3b - 3c = 0$ ②

نعوض $c = 1$ في ① و ② نجد:

$3a + b - 1 = 0$ ❶ و $-2a + 3b - 3 = 0$ ❷

نضرب المعادلة ❶ بالعدد -3 ونجمع للمعادلة ❷ نجد $-11a = 0$

ومنه $a = 0$ وبالتعويض بإحداهما نجد $b = 1$ أي $\vec{n}(0,1,1)$

معادلة المستوي (BCD) من الشكل: $ax + by + cz + d = 0$

نعوض إحداثيات النقطة B والناظم $\vec{n}$ نجد:

$$2 + d = 0 \Rightarrow d = -2$$

ومنه معادلة المستوي (BCD) هي: $\boxed{y + z - 2 = 0}$

ⓑ $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = -6 + 3 + 3 = 0$ ومنه $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{BC}$

والمثلث BCD قائم الزاوية في B ومساحته $S = \frac{BC \times BD}{2}$

$$S = \frac{\sqrt{9+1+1}\times\sqrt{4+9+9}}{2} = \frac{\sqrt{11\times 22}}{2} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$$

② ⓐ نعوّض إحداثيات النقطة A في معادلة المستوي (BCD) نجد $3 + 1 - 2 = 0$ غير محققة والنقطة A تقع خارج المستوي (BCD).

ⓑ $h = dist(A, (BCD)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$h = dist(A, (BCD)) = \frac{|3+1-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

③ $V = \frac{1}{3}S_{BCD}h = \frac{1}{3}\left(\frac{11\sqrt{2}}{2}\right).\sqrt{2} = \frac{11}{3}$

④ ⓐ $AB = \sqrt{\frac{1}{4} + 9 + 1} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

$$AC = \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 0} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$AD = \sqrt{\frac{25}{4} + 0 + 4} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

ومنه $AB = AC = AD = \frac{\sqrt{41}}{2}$ فالنقاط D و C و B تقع على كرة واحدة مركزها A ونصف قطرها $r = \frac{\sqrt{41}}{2}$

ⓑ معادلة الكرة $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{41}{2}$$

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x) = x^3 . e^x$

① جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathcal{R}$ بالصيغة $F(x) = P(x). e^x$ حيث P تابع كثير حدود.

② ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها.

③ ارسم الخط البياني C.

④ احسب مساحة السطح المحصورين بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$.

الحل

① نفرض أن كثير الحدود P موجود ويحقق

$F: x \to P(x)e^x$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathcal{R}$ عندئذٍ

$F'(x) = f(x)$ لكل $x \in \mathcal{R}$

ومنه $P'(x)e^x + e^x P(x) = x^3 . e^x$

ومنه $P'(x) + P(x) = x^3 \quad *$

وبما أنَّ $degP' < degP$ فإن $degP = 3$ لذلك يكون

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a \neq 0$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ نعوض في $*$

$$3ax^2 + 2bx + c + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3$$

$$ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c + d = x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 6 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 6 \\ d = -6 \end{cases} \Rightarrow P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$$

ومنه $F(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$

② $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

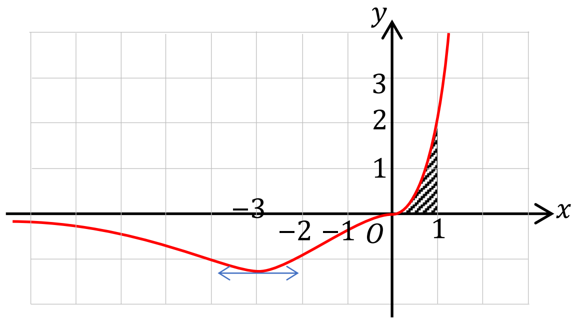
f اشتقاق على $\mathcal{R}$:

$$f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3+x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-3) = \frac{-27}{e^3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-27}{e^2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

③ $f(-3) = \frac{-27}{e^3}$ قيمة صغرى محليا.



④
$$S = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1$$

$$S = [(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x]_0^1 = -2e + 6$$

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

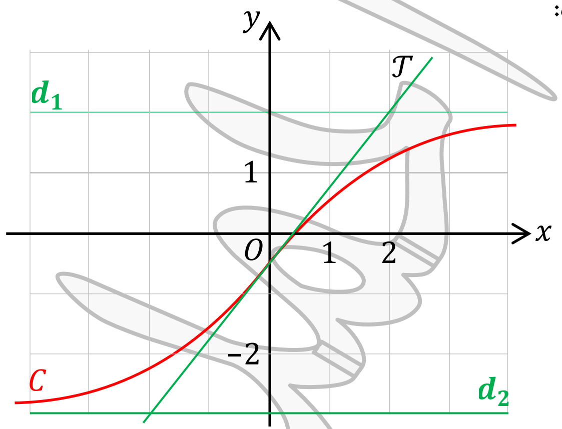
المدرس أحمد راتب عثمان

حل النموذج الوزاري للرياضيات دورة 2019

932 740 055

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: في الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمستقيم $\mathcal{T}$ مماس للخط C والمطلوب:



① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

② اكتب معادلة كل مقارب من المقاربين d_1 و d_2 .

③ إذا علمت أنَّ المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $(0,-\frac{1}{2})$ احسب $f'(0)$ ثم اكتب معادلته.

الحل

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$	①
$y=2$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ $y=-3$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$		②
$\mathcal{T}$ يمر بالنقطتين على $(0,-\frac{1}{2})$ و $(2,2)$ $\mathcal{T}: y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$ و $f'(0)=\frac{2+\frac{1}{2}}{2-0}=\frac{5}{4}$		③

السؤال الثاني: نتأمل النقاط:

$A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$

① احسب إحداثيات منتصف القطعة $[AC]$.

② احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

③ عيّن إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي الأضلاع

الحل

① $I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2},\frac{z_A+z_C}{2}\right)$ ومنه $I\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$.

② $\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,-7,0)$.

③ $ABCK$ متوازي الأضلاع يكافئ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CK}$

بفرض $K(x,y,z)$ يكون $(x,y+2,z-2)=(1,6,-1)$

ومنه $x=1$ و $y=4$ و $z=1$ و $K(1,4,1)$

السؤال الثالث:

① عيّن حل المعادلة التفاضلية $2y'+3y=1$ الذي يحقق الشرط $f(0)=1$

② احسب النهاية $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$.

الحل

① $2y'+3y=1 \Rightarrow y'=-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$

المعادلة من الشكل $y'=ay+b$ حلها $y=ke^{ax}-\frac{b}{a}$

حيث $k\in\mathcal{R}$ ومنه: $y=ke^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}$

$f(0)=1 \Rightarrow 1=k+\frac{1}{3} \Rightarrow k=\frac{2}{3}$

منه الحل المُراد هو $y=\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}$

② عند 0 يوجد حالة عدم تعين $\frac{0}{0}$ وعندما $x\neq0$ نكتب:

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$$

بما أنَّ $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$ فإنَّ: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=1\times1=1$

السؤال الرابع لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

① كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S

② كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من S.

الحل

① الأعداد الزوجية عددها: $3\times6\times6=108$

② المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من S

عددها $\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}\backslash\{3\}$ وفق: $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}$ والمطلوب:

① احسب $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ واحسب $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$

② استنتج معادلة المقارب المائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

الحل

① $\frac{f(x)}{x}=\frac{2x^2-7x-3}{x^2-3x}$ ومنه $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$

$f(x)-ax=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}-2x=\frac{2x^2-7x-3-2x^2+6x}{x-3}$

$f(x)-ax=\frac{-x-3}{x-3}$ ومنه $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=-1$

② المستقيم $\Delta: y=2x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$g(x)=f(x)-(2x-1)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}-2x+1$

$g(x)=\frac{2x^2-7x-3-2x^2+7x-3}{x-3}=\frac{-6}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g(x)$	$+$		$-$
الوضع النسبي	d فوق C		d تحت C

التمرين الثاني: نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتان B, A اللتان يمثلها العددان العقديان:

$$Z_B = -2i \quad , \quad Z_A = -\sqrt{3} + i$$

① اكتب Z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي Z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ O مركزثقل المثلث ABC.

② أثبت أنَّ $Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B - Z_A)$ واستنتج طبيعة المثلث ABC.

الحل

① $|Z_A| = r = \sqrt{3+1} = 2$

$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$ و $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$$Z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

② $\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3} = 0 \Rightarrow Z_C = -(Z_A+Z_B) = \sqrt{3} + i$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3i} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+3i)}{12} = \frac{6+6\sqrt{3}i}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B - Z_A)$$

C صورة B وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

والمثلث ABC متساوي الأضلاع.

التمرين الثالث: المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل $n \ge 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

① أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنَّ: $\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$.

② أثبت أنَّ $u_n < 2$ واستنتج أنَّ $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة.

الحل

① نبرهن الخاصة $E(n): \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$

من أجل $n = 1$: $\frac{1}{2!} \le \frac{1}{2^2}$ تكافئ $4 \le 2$ ومنه صحة $E(1)$.

نفرض أنَّ $E(n)$ صحيحة لأي $n \ge 1$ أي: $\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$ ❶

نبرهن أنَّ $E(n+1)$ صحيحة أي: $\frac{1}{(n+2)!} \le \frac{1}{2^{n+1}}$

لمّا كان $n \ge 1$ كان $n+2 \ge 2$ ومنه $0 < \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{2}$ ❷

بضرب طرفي ❶ بالمقدار $\frac{1}{n+2} > 0$ نجد: $\frac{1}{n+2}\,\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n+2}\,\frac{1}{2^n}$

وبالاستفادة من ❷ نجد $\frac{1}{(n+2)!} \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$ اذاً $\frac{1}{(n+2)!} \le \frac{1}{2^{n+1}}$

ومنه صحة $E(n+1)$. ومنه $E(n)$ صحيحة أياً يكن $n \ge 1$.

② $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

من الطلب السابق ينتج:

$$\frac{1}{1!} \le \frac{1}{2^{1-1}}$$
$$\frac{1}{2!} \le \frac{1}{2^{2-1}}$$
$$\frac{1}{3!} \le \frac{1}{2^{3-1}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

بجمع المتراجحات نجد

$$u_n \le \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + \frac{1}{2^{3-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$u_n \le \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$S = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ هو مجموع n حد متوالٍ من حدود متتالية هندسية أولها 1 وأساس المتتالية $q = \frac{1}{2}$ ومنه

$$S = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \text{ ومنه}$$

$$u_n \le 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ومنه $u_n < 2$ والعدد 2 راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$

المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ محدودة من الأعلى بالعدد 2.

$$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$ ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة تماماً وهي محدودة من الأعلى فهي متقاربة

التمرين الرابع: نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية بأحد العددين 0 أو 3 | | | | | والمطلوب:

① ليكن A الحدث: مجموع الأعداد التي كُتِبتْ في الخانات يساوي 6 وليكن B الحدث: عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين احسب $P(A)$ ثم $P(B|A)$.

② ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن كل نتيجة للتجربة بعدد الخانات التي كُتِبَ فيها العدد 3.

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل

① $n(\Omega) = 2^4 = 16$

المجموع 6 يجب أن نملأ أي خانتين بالعدد 3 والباقيتين بالعدد 0 ومنه

$$n(A) = \binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{4\times3}{2} \times 1 = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

طريقة ثانية: التجربة برنولية $n = 4$

$p = \frac{1}{2}$ احتمال اختيار العدد 3 و $q = \frac{1}{2}$ احتمال اختيار العدد 0

X متحول عشوائي يدل على عدد ظهور العدد 3

$$P(X = k) = \binom{n}{k}(p)^k(q)^{n-k}$$

$$P(A) = P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$P(A) = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$B:$ $\boxed{3}\boxed{0}\boxed{3}\boxed{0}$ أو $\boxed{0}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{3}$

$n(B) = 2$ و $A \cap B = B$

$P(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

② قيم المتحول العشوائي $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

$$P(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \times 1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{16}$$

$$P(X=2) = P(A) = \frac{6}{16}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{16}$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}$$

$$P(X=4) = 1 - P(X=2) - P(X=3)$$
$$= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

التوقع الرياضي $E(X) = n.p = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

التباين $V(X) = n.p.q = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

النقطتين $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$

والمستوي $P : x - y + 3z - 4 = 0$ والمطلوب:

① جد معادلة المستوي Q العمودي على P ويمر من A و B.

② جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة A ويعامد المستوي P.

③ عيّن النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P.

④ أعطِ معادلةً للمجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ وما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$.

الحل

① الشعاعان $\vec{n}_P(1,-1,3)$ و $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ غير مرتبطين خطياً وغير صفريين ويوازيان المستوي Q فهما شعاع توجيه له.

إذا كان $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ناظم المستوي Q فهو يعامد الشعاعين $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{AB}$

يكافئ $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P} = 0$ ① $a - b + 3c = 0$

يكافئ $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB} = 0$ ② $a + b + 2c = 0$

نختار $\boxed{b = 1}$ ثم نطرح ② من ① نجد $\boxed{c = 2}$

وبالتعويض في ① نجد أنّ $\boxed{a = -5}$

ومنه $\overrightarrow{n_Q}(-5,1,2)$

المستوي Q يقبل ناظماً $\overrightarrow{n_Q}(-5,1,2)$ يمر من النقطة $A(1,-1,2)$

فمعادلته: $Q: -5(x-1) + (y+1) + 2(z-2) = 0$

أو $5x - y - 2z - 2 = 0$

② d يعامد المستوي P يكون $\vec{u}_d = \vec{n}_P(1,-1,3)$ ومنه

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t : t \in \mathcal{R} \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$ تمثيلاً وسيطياً لـ d

③ d يعامد المستوي P ويمر من A فإنّ A' هي نقطة تقاطع d مع P

بالحل المشترك لمعادلات d و P نجد:

$$1 + t + 1 + t + 6 + 9t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4}{11}$$

نعوّض في معادلات d نجد:

$$x = 1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$$
$$y = -1 + \frac{4}{11} = \frac{-7}{11}$$
$$z = 2 - \frac{12}{11} = \frac{10}{11}$$

ومنه $A'\left(\frac{7}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{10}{11}\right)$

④ $\overrightarrow{AM}(x-1, y+1, z-2)$ و $\overrightarrow{BM}(x-2, y, z-4)$

يكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$(x-1)(x-2) + (y+1)(y) + (z-2)(z-4) = 0$$
$$x^2 - 3x + 2 + y^2 + y + z^2 - 6z + 8 = 0$$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-3)^2 = \frac{6}{4}$ وهي معادلة $\mathcal{E}$

المجموعة $\mathcal{E}$ تمثل كرة مركزها $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, 3\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{2}$

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق: $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$ ليكن C' الخط البياني للتابع g مقصور التابع f على المجال $]1,+\infty[$ والمطلوب:

① أثبت أنّ f تابع فردي واستنتج الصفة التناظرية للخط C.

② ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها و اكتب معادلة كل مقارب للخط C'

③ ارسم كل مقارب وجدته وارسم الخط C' ثم استنتج رسم الخط C.

④ احسب مساحة السطح المحصورين الخط C' ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 2$ و $x = 3$.

الحل

① أياً كان $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

كان $-x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{-1+x}{x+1}\right)$$
$$f(-x) = -\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = -f(x)$$

ومنه f تابع فردي وخطه البياني C متناظر بالنسبة للمبدأ.

② g معرّف على $]1,+\infty[$ وفق: $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln 1 = 0$ ومنه $y = 0$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty$ ومنه $x = 1$ مقارب شاقولي

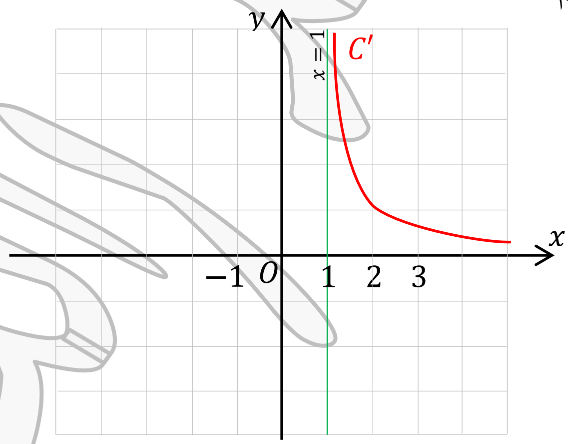
g اشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{x-1}\right)'}{\frac{1+x}{x-1}} = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} < 0$$

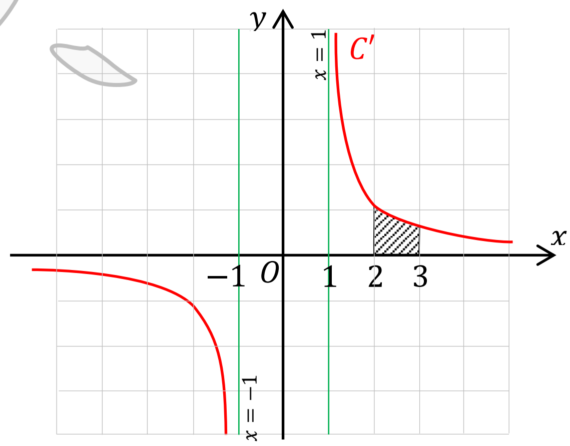
ومنه g متناقص تماماً على $]1, +\infty[$

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$
$g(x)$		$+\infty \searrow 0$

③ الرسم



رسم C بالاستفادة من التناظر بالنسبة للمبدأ



④ $S = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) dx$

$u(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$	$u'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$
$v'(x) = 1$	$v(x) = x$

$$S = [u.v]_2^3 - \int_2^3 u'v\,dx$$

$$S = \left[x.\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1} dx$$

$$S = \left[x.\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3 + [\ln(x^2-1)]_2^3$$

$$S = 3\ln 2 - 2\ln 3 + \ln 8 - \ln 3$$

$$S = \ln 8 + \ln 8 - 3\ln 3$$

$$S = 2\ln 8 - 3\ln 3 = \ln\frac{64}{27}$$

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المدرس أحمد راتب عثمان

حل النموذج الوزاري 1 للرياضيات دورة 2020

932 740 055

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathcal{R}$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

والمطلوب:

① جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

② اذكر قيمة حدية للتابع f.

③ هل $f(5)=4$ قيمة حدية للتابع f؟

④ اكتب معادلة كل مقارب للخط البياني للتابع f.

⑤ اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=\ln f(x)$.

الحل

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=6$	①
$f(2)=0$ قيمة صغرى محلياً		②
$f(5)=4$ ليست قيمة حدية (لم يغير $f'(x)$ إشارته)		③
$y=2$ مقارب أفقي عند $-\infty$ $y=6$ مقارب أفقي عند $+\infty$		④
$D_g=\mathcal{R}\setminus\{2\}$ حيث $f(x)>0$		⑤

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0,3]$ وفق: $f(x)=(x-3)\sqrt{x(3-x)}$ ، جد $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

واستنتج أنّه اشتقاقي عند $x=3$.

الحل

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{(x-3)\sqrt{x(3-x)}-0}{x-3}=\sqrt{x(3-x)}$$

ومنه $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0\in\mathcal{R}$ ومنه f اشتقاقي عند $x=3$.

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه، مركز ثقله G ، فيه K مركز ثقل الوجه BCD أثبت أنَّ النقاط G و A و K تقع على استقامة واحدة وعيّن موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$.

الحل

G مركز ثقل $ABCD$ يكافئ G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ أو G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(K,3)$ حسب الخاصة التجميعية حيث K مركز ثقل الوجه BCD ومنه النقاط G و A و K تقع على استقامة واحدة و $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 لكل سؤال)

السؤال الأول: صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات: $x^2+z^2=16$ و $2\le y\le5$.

الحل

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ هي الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{j})$ ونصف قطرها 4 ومحددة بالقاعدتين اللتين مركزيهما $I(0,2,0)$ و $I'(0,5,0)$

السؤال الثاني: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2-2(1+i)z-4+2i=0$$

الحل

$$\Delta=4(1+i)^2-4(-4+2i)$$
$$\Delta=8i+16-8i=16$$

ومنه: $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+2i-4}{2}=-1+i$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+2i+4}{2}=3+i$$

السؤال الثالث: لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,8,9\}$

① كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S؟

② كم عدداً من مضاعفات للعدد 5 ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S؟

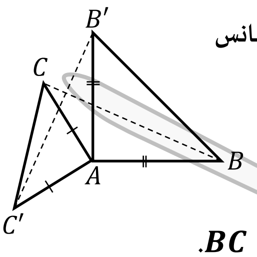
الحل

① $P_5^3=5\times4\times3=60$

② $5\times5\times1=25$

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 للأول و 70 للثاني 80 للثالث)

التمرين الأول: في الشكل المجاور المثلثان ABB' و ACC' قائمان في A ومتساويا الساقين، نتأمل المَعْلم المتجانس والمباشر $(A;\vec{u},\vec{v})$ والمطلوب



① اكتب $Z_{B'}$ بدلالة Z_B ، و $Z_{C'}$ بدلالة Z_C.

② احسب $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}$

③ استنتج أنَّ: $(BC)\perp(B'C')$ و $BC=B'C'$.

الحل

① B' صورة B وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أي:

$$\boxed{Z_{B'}=iZ_B}$$

C' صورة C وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أي:

$$\boxed{Z_{C'}=iZ_C}$$

② $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}=\frac{iZ_B-iZ_C}{Z_B-Z_C}=\frac{i(Z_B-Z_C)}{Z_B-Z_C}=i$

③ $arg\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ ومنه $(BC)\perp(B'C')$

$\left|\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}\right|=|i|=1$ ومنه $BC=B'C'$

<u>التمرين الثاني:</u> لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة تدريجياً وفق:

$u_0=2$, $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+4u_n}$ أياً كان العدد الطبيعي n.

① أثبت بالتدريج أنَّ: $u_n>0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n=\frac{1}{u_n}$ حسابية

ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

③ ليكن المجموع S_n المعرّف بالشكل: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

اكتب عبارة S_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} S_n$

الحل

① نبرهن الخاصة $E(n): u_n>0$

من أجل $n=0$: يكون $u_0=2>0$ ومنه صحة $E(0)$.

نفرض أنَّ $E(n)$ صحيحة لأيّ $n\ge1$ أي: $u_n>0$

نبرهن أنَّ $E(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1}>0$

لمّا كان $u_n>0$ كان $\frac{u_n}{1+4u_n}>0$ ومنه $u_{n+1}>0$

ومنه صحة $E(n+1)$. إذاً $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

② $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1+4u_n}{u_n}=\frac{1}{u_n}+4$

$v_{n+1}=v_n+4$ والمتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ حسابية أساسها $r=4$

$v_0=\frac{1}{u_0}=\frac{1}{2}$ ومنه $v_n=v_0+nr$ أي $\boxed{v_n=\frac{1}{2}+4n}$

$u_n=\frac{1}{v_n}=\frac{1}{\frac{1}{2}+4n}\Rightarrow\boxed{u_n=\frac{2}{1+8n}}$

③ $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+4+\frac{1}{2}+8\ldots+\frac{1}{2}+4n$

$S_n=\frac{1}{2}(n+1)+4+8\ldots+4n$

المقدار $A=4+8\ldots+4n$ يمثل مجموع n حد متوالٍ من حدود متتالية حسابية أساسها $r=4$ ومنه

$A=\frac{n}{2}(4+4n)=2n^2+2n$

$S_n=\frac{1}{2}(n+1)+A=\frac{1}{2}(n+1)+2n^2+2n$

$S_n=2n^2+\frac{5}{2}n+\frac{1}{2}$ و $\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$

<u>التمرين الثالث:</u> ليكن التابع f المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$ والمطلوب:

① احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f[f(x)]$.

② جد عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]1.99\,,2.01[$.

③ جد $f'(x)$ ثمّ استنتج $g'(x)$، حيث $g(x)=\frac{2\sin x+1}{\sin\ x+5}$

الحل

① $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

$\lim_{x\to+\infty} f[f(x)]=\lim_{x\to2} f(x)=\frac{5}{7}$

② المجال $]1.99\,,2.01[$ مركزه $\frac{2.01+1.99}{2}=2$

ونصف قطره $\frac{2.01-1.99}{2}=0.01=\frac{1}{100}$

$f(x)\in]1.99\,,2.01[$ يكافئ $|f(x)-2|<\frac{1}{100}$

أي $\left|\frac{2x+1}{x+5}-2\right|<\frac{1}{100}$ أو $\left|\frac{2x+1-2x-10}{x+5}\right|<\frac{1}{100}$

أو $\left|\frac{-9}{x+5}\right|<\frac{1}{100}$ وفي جوار $+\infty$ يكون $x+5>0$

ومنه $\frac{9}{x+5}<\frac{1}{10}$ أو $x+5>90$ ومنه $x>85$ ومنه $A=85$.

③ f اشتقاقي على $]-5,+\infty[$ و $f'(x)=\frac{9}{(x+5)^2}$

$g(x)=\frac{2\sin x+1}{\sin\ x+5}=f(\sin x)$

بما أنَّ التابع $h:x\to\sin x$ اشتقاقي على $\mathcal{R}$ وأنَّ

$h(\mathcal{R})=[-1,1]\subseteq]-5,+\infty[$

فإنَّ g اشتقاقي على $]-5,+\infty[$

و $g'(x)=f'(\sin x)(\sin x)'=\frac{9\cos x}{(\sin x+5)^2}$

<u>ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:</u> (100 درجة لكل مسألة)

<u>المسألة الأولى:</u> ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق: $f(x)=2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ والمطلوب:

① أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وجوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها و اكتب معادلة كل مقارب للخط C

③ أثبت أنَّ $f(x)+f(-x)=-2$.

④ استنتج أنَّ C متناظر بالنسبة للنقطة $A(0,-1)$.

⑤ ارسم كل مقارب وجدته وارسم الخط C.

⑥ استنتج رسم الخط C' للتابع g وفق:

$$g(x)=-2x+1-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

الحل

① $h(x)=f(x)-(2x-1)=\ln\frac{x+1}{x-1}$

لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$

كان $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$

ومنه d مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وجوار $-\infty$

ندرس إشارة $h(x)=-\ln\frac{x+1}{x-1}$

$h(x)=0\Rightarrow\ln\frac{x+1}{x-1}=0\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}=1$ مستحيلة

ومنه $h(x)$ من إشارة واحدة على مجموعة تعريفه

على المجال $]1,+\infty[$: نختار يكون $x=2$

نجد $h(2)=-\ln 3<0$ ومنه $h(x)<0$ إذاً C تحت المقارب d

على المجال $]1,+\infty[$

على المجال $]-\infty,-1[$: نختار يكون $x=-2$

نجد $h(-2) = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3 > 0$

ومنه $h(x) > 0$ إذاً C فوق المقارب d على المجال $]-\infty,-1[$

② لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ كان $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x+1}{x-1} = 0$ كان $\lim\limits_{x\to-1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\infty$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$ والمستقيم $x=-1$ مقارب شاقولي

لمّا كان $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ كان $\lim\limits_{x\to1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$ ومنه

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ والمستقيم $x=1$ مقارب شاقولي

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f اشتقاقي على I و $f'(x) = 2 - \left(\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

$$f'(x) = 2 - \left(\frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1}\right) = 2 + \frac{2}{(x-1)(x+1)} > 0$$

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

③

$$f(x) + f(-x) =$$
$$= 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2x - 1 - \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$$
$$f(x) + f(-x) = -2 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$f(x) + f(-x) = -2 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -2$$

④ نضع $A(0,-1)$ يكون $a=0$ و $b=-1$ و $2a - x = -x$

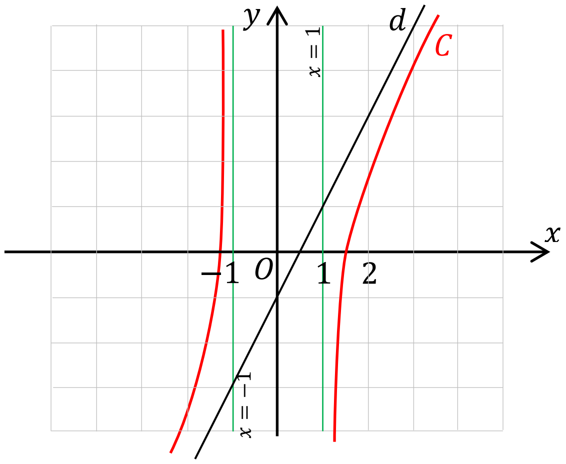
أياً كان $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ كان

شرطي التناظر $\begin{cases} 2a - x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[& ❶ \\ f(x)+f(-x) = -2 = 2b & ❷ \end{cases}$

من ❶ و ❷ نجد أنَّ C متناظر بالنسبة للنقطة $A(0,-1)$.

⑤ الرسم

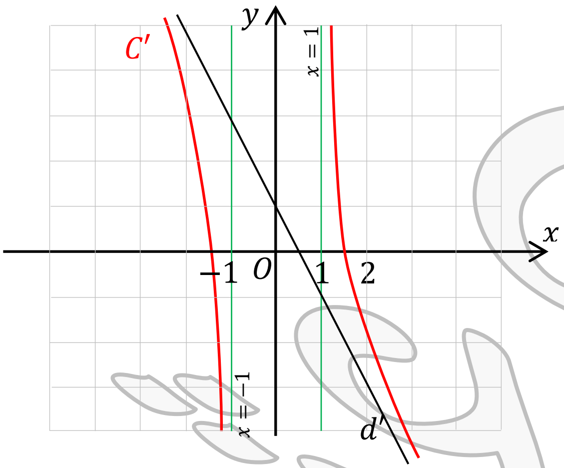
$d: y = 2x-1$		
x	0	1
y	-1	1



⑥ $g(x) = -2x + 1 - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

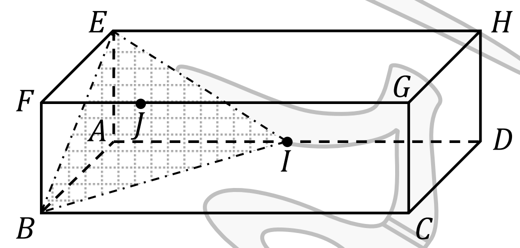
$$g(x) = -2x + 1 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -f(x)$$

ومنه C' هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل $x'x$



932 740 055

المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $AD = 4$ و $AE = 1$ لتكن النقطة I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$



نتأمل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

① جد احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات I و J.

② أثبت أنّ معادلة للمستوي (EIB) هي $x + y + 2z - 2 = 0$

③ عيّن نوع المثلث EIB ، ثمّ احسب مساحته.

④ احسب بُعد G عن المستوي (EIB) واستنتج حجم رباعي الوجوه $GEIB$.

⑤ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J ويعامد المستوي (EIB) .

⑥ استنتج أنّ المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

الحل

①

$A(0,0,0)$	$B(2,0,0)$	$C(2,4,0)$	$D(0,4,0)$
$E(0,0,1)$	$F(2,01)$	$G(2,4,1)$	$H(0,4,1)$
$I(0,2,0)$		$J(2,1,1)$	

② معادلة المستوي (EIB) من الشكل $ax + by + cz + d = 0$

نعوض إحداثيات B نجد: $2a + d = 0$ أو $a = -\frac{d}{2}$

نعوض إحداثيات I نجد: $2b + d = 0$ أو $b = -\frac{d}{2}$

نعوض إحداثيات E نجد: $c + d = 0$ نجد $c = -d$

نختار $d = -2$ نجد $a = 1$ و $b = 1$ و $c = 2$

ومعادلة المستوي (EIB) هي: $x + y + 2z - 2 = 0$

③

$$EI^2 = 0 + 4 + 1 = 5$$
$$BI^2 = 4 + 4 + 0 = 8$$
$$EB^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

ومنه $EI = EB = \sqrt{5}$ والمثلث EIB متساوي الساقين

قاعدته $[BI]$ وارتفاعه $[EN]$ حيث $N(1,1,0)$ منتصف $[BI]$

$$EN = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$
$$S = \frac{1}{2}BI.EN = \frac{1}{2}\sqrt{8}\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

④

$$h = dist[G,(EIB)] = \frac{|2+4+2-2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$
$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\sqrt{6}\sqrt{6} = 2$$

⑤ ناظم المستوي (EIB) هو $\vec{n}_P(1,1,2)$ يوجه المستقيم d

تمثيلاً وسيطياً لـ d : $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} : t \in \mathcal{R}$

⑥ نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EIB) هي J' المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) لإيجاد إحداثيات J' نقوم بالحل المشترك لمعادلات d و (EIB) ونجد:

$$2 + t + 1 + t + 2 + 4t - 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ و $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ و $z = 1 - 1 = 0$

ومنه $J'\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ فهي تقع في المستوي (AIB)

ومنه J' تقع على الفصل المشترك للمستويين (AIB) و (EIB) فهي تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

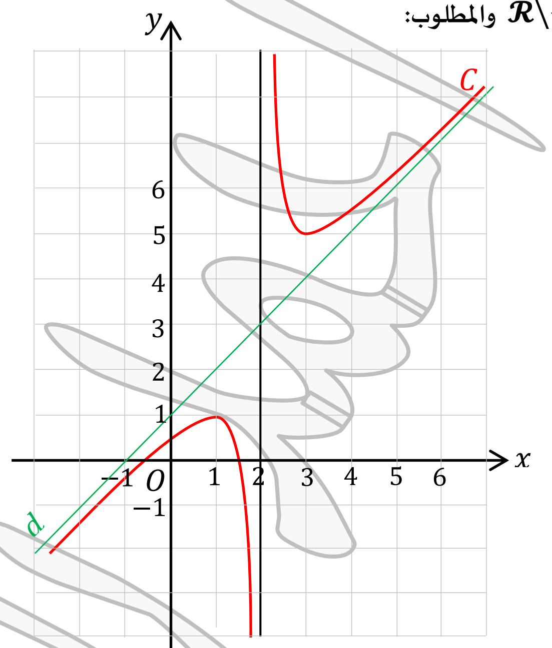
المدرس أحمد راتب عثمان

حل النموذج الوزاري 2 للرياضيات دورة 2020

932 740 055

<u>أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية:</u> (45 لكل سؤال)

<u>السؤال الأول:</u> في الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}\backslash\{2\}$ والمطلوب:



① جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

② دلّ على القيم الحدية للتابع f وبيّن نوعها.

③ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

④ اكتب معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع f.

⑤ اذكر احداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C.

الحل

①	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
②	$f(1) = 1$ قيمة كبرى محلياً $f(3) = 5$ قيمة صغرى محلياً	
③	حلين مختلفين	
④	المقارب المائل ميله 1 ويمر من $(0,1)$ معادلته $y = x + 1$	
⑤	$I(2,3)$	

<u>السؤال الثاني:</u> ليكن f التابع المعرّف على $\mathcal{R}$ وفق: $f(x) = \cos x$.

① جد $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

② استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$.

الحل

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

f اشتقاقي على $\mathcal{R}$ و $f'(x) = -\sin x$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}} = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>السؤال الثالث:</u> حل المعادلة $e^x - 1 = 6e^{-x}$.

الحل

نضرب طرفي المعادلة بالمقدار $0 < e^x$ نجد:

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0$$
$$\Rightarrow (e^x - 3)(e^x + 2) = 0$$

بما أنَّ $e^x + 2 > 0$ فإنَّ $e^x - 3 = 0$

$$\Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

<u>ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية:</u> (45 لكل سؤال)

<u>السؤال الأول:</u> بيّن فيما إذا كان المستقيمين d و d' متقاطعين وفي حالة الإيجاب جد إحداثيات نقطة تقاطعهما.

$$d:\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t - 2 \\ z = -\frac{1}{2}t + 3 \end{cases} : t \in \mathcal{R} \quad , \quad d':\begin{cases} x = s + 5 \\ y = 2 \\ z = 2s + 5 \end{cases} : s \in \mathcal{R}$$

الحل

$\vec{u}_d\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{u}_{d'}(1,0,2)$ المركبات ليست متناسبة فالشعاعان $\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{d'}$ غير مرتبطين خطياً والمستقيمان d و d' غير متوازيين

بالحل المشترك للمعادلات نجد:
$$\begin{cases} 2t - 5 = s + 5 \\ t - 2 = 2 \\ -\frac{1}{2}t + 3 = 2s + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - s = 10 \\ t = 4 \\ \frac{1}{2}t + 2s = -2 \end{cases}$$
و $t = 4$ و $s = -2$ حل وحيد لجملة المعادلات

فالمستقيمان d و d' متقاطعان في نقطة I

نعوّض $s = -2$ في معادلات d' نجد $I(3,2,1)$

<u>السؤال الثاني:</u> جد الجذران التربيعيان للعدد: $\omega = 8 - 6i$

بفرض $z = x + yi$ جذر تربيعي للعدد $\omega = 8 - 6i$ يكون

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & ① \\ x^2 - y^2 = 8 & ② \\ xy = -6 & ③ \end{cases}$$

بجمع ① و ② نجد $2x^2 = 18$ ومنه $x^2 = 9 \Leftarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

بطرح ② من ① نجد $2y^2 = 8$ ومنه $x^2 = 4 \Leftarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

بما أنَّ: $xy < 0$ فإنَّ x و y من إشارتين مختلفتين

والجذران التربيعيان للعدد ω هما: $\begin{cases} w_1 = 3 - 2i \\ w_2 = -3 + 2i \end{cases}$

<u>السؤال الثالث:</u> عيّن قيمة n في المعادلة الآتية: $P_{n+2}^5 = 45P_{n+1}^3$

الحل

شرط الحل $n + 2 \geq 5$ و $n + 1 \geq 3$ ومنه $n \geq 3$

المعادلة تكافئ

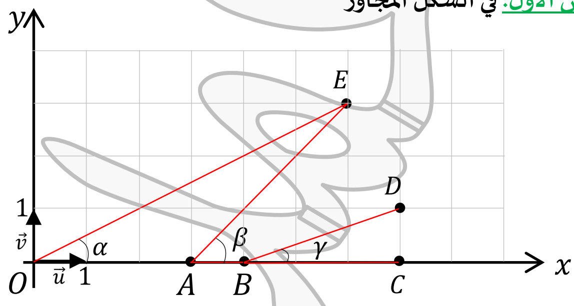
$$(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) = 45(n+1)n(n-1)$$

$$\Rightarrow (n+2)(n-2) = 45 \Rightarrow n^2-4 = 45 \Rightarrow n^2 = 49$$

ومنه إما $n = 7$ مقبول أو $n = -7$ مرفوض

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 للأول 70 للثاني 80 للثالث)

التمرين الأول: في الشكل المجاور



α و β و γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$
و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$، نتأمل المعلم المتجانس

① اكتب $Z_{\overrightarrow{OE}}$ و $Z_{\overrightarrow{AE}}$ و $Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري.

② اكتب العدد العقدي $Z_{\overrightarrow{BD}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{OE}}$ بالشكل الجبري

ثمّ بالشكل الأسي.

③ استنتج المجموع $\alpha+\beta+\gamma$.

الحل

① $Z_{\overrightarrow{OE}} = 6+3i$ و $Z_{\overrightarrow{AE}} = 3+3i$ و $Z_{\overrightarrow{BD}} = 3+i$.

② $Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}} = (6+3i)(3+3i)(3+i)$

$$Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}} = (9+27i)(3+i) = 90i = 90e^{i\frac{\pi}{2}}$$

③ $Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}} = 3\sqrt{5}e^{i\alpha}.3\sqrt{2}e^{i\beta}.\sqrt{10}e^{i\gamma}$

$$Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}} = 90e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

ومنه $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$

التمرين الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على

$I =]-2,2[$ وفق: $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$ والمطلوب:

① أثبت أنّ f تابع فردي، ثمّ ادرس تغيرات f على المجال $[0,2[$.

② اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

③ ادرس الوضع النسبي بين C و T.

الحل

① أياً كان $x \in]-2,2[$ كان $-x \in]-2,2[$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+2}{x+2}\right) = -\ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) = -f(x)$$

ومنه f تابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

$$f(0) = 0 \ , \ \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$$

المستقيم $x = 2$ مقارب شاقولي

f اشتقاق على $[0,2[$

$$f'(x) = \frac{-x+2+x+2}{(-x+2)^2} \times \frac{-x+2}{x+2} = \frac{4}{(-x+2)(x+2)} = \frac{4}{4-x^2} > 0$$

x	0	2
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

② $T: y = f'(0)x - f(0) \Rightarrow T: y = x$

③ ندرس جهة إطراد التابع g:

$$g(x) = f(x) - x = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) - x$$

g اشتقاق على $]-2,2[$ و $g'(x) = \frac{4}{4-x^2} - 1$

$$g'(x) = \frac{4-4+x^2}{4-x^2} = \frac{x^2}{4-x^2} \geq 0$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$$

x	-2	0	2
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
إشارة $g(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت T		C فوق T

ونقطة التماس $(0,0)$

التمرين الثالث: ليكن التابع f المعرّف على $\mathcal{R}$

وفق: $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5}$ والمطلوب:

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

② أثبت أنّ $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً يقع في المجال $]1,2[$،

ثم جد هذا الحل جبرياً.

③ استنتج مشتق التابع g المعرّف على $\mathcal{R}$ وفق:

$g(x) = 2\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 5}$.

الحل

① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

عند $+\infty$ يوجد حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5} = x\left(2 - \sqrt{\frac{x^2+5}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاق على $\mathcal{R}$ ومشتقه

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} > 0$$

حيث $0 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

② f مستمر ومتزايد تماماً على $\mathcal{R}$ و $0 \in f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$

ومنه $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في $\mathcal{R}$

بملاحظة: $\begin{cases} f(1) = 2 - \sqrt{6} \quad < 0 \\ f(2) = 4 - 3 = 1 > 0 \end{cases}$ أي $f(1)f(2) < 0$

ومنه $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً يقع في المجال $]1,2[$

③ التابع $x \to \sin x$ اشتقاقي على $\mathcal{R}$

التابع $x \to \sin^2 x + 5$ موجب تماماً واشتقاقي على $\mathcal{R}$ إذاً

التابع $x \to \sqrt{\sin^2 x + 5}$ اشتقاقي على $\mathcal{R}$ إذاً g اشتقاقي على $\mathcal{R}$

لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين على $\mathcal{R}$

$$g(x) = 2\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 5} = f(\sin x)$$

$$g'(x) = f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$g'(x) = 2\cos x - \frac{2\sin x \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + 5}} = \left[2 - \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + 5}}\right].\cos x$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$ والمطلوب:

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

② أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d.

③ حل المعادلة $f(x) = x$.

④ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً وفق: $u_0 = 4$, $u_{n+1} = f(u_n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

ⓐ احسب u_1 و u_2.

ⓑ استنتج من تزايد التابع f على المجال $[2, +\infty[$ صحة الخاصة $E(n): 2 < u_{n+1} < u_n$ وذلك من أجل كل $n \in \mathcal{N}$.

ⓒ استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة، واحسب نهايتها.

ⓓ ارسم كل مقارب وجدته وارسم المستقيم $\Delta: y = x$ ثم ارسم الخط C ومثل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ على الرسم نفسه.

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to0} \frac{4}{x} = 1$ كان $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$

والمستقيم $x = 0$ مقارب شاقولي

لمّا كان $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

f اشتقاقي على I و $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = \frac{x^2-4}{2x^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{4+4}{2}\right) = 2$$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$	

② $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{2}{x} > 0$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ و $d: y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C

في جوار $+\infty$ و C يقع فوق المقارب d

③ $f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right) = x \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{4}{2x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{4-x^2}{2x} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

④ ⓐ $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{4}\right) = \frac{5}{2}$

و $u_2 = f(u_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + \frac{8}{5}\right) = \frac{41}{20}$

ⓑ $E(n): 2 < u_{n+1} < u_n$

من أجل $n = 0$ نجد $u_1 = \frac{5}{2} < 4$

أي $2 \leq u_1 \leq u_0$ ومنه $E(0)$ محققة.

نفرض أنّ $E(n)$ صحيحة أي: $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

نبرهن أنّ $E(n+1)$ صحيحة أي: $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

بما أنّ f متزايد على المجال $[2, +\infty[$ وبتصوير الأطراف في الفرض نجد:

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{1}{2}\left(u_{n+1} + \frac{4}{u_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq u_{n+2} < u_{n+1}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة إذاً $E(n)$ صحيحة لكل عدد طبيعي n.

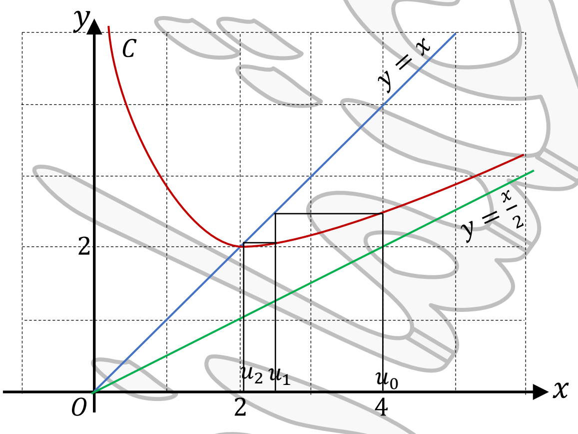
ⓒ المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى فهي متقاربة وبما أنّ $u_0 = 4$

فإنّ $2 \leq u_n \leq 4$

بما أنّ f مستمر عند 2 فإنّ نهاية المتتالية هو حل المعادلة

$f(x) = x$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} f(x) = 2$.

ⓓ



932 740 055

حل النموذج الوزاري 2 للرياضيات دورة 2020

المسألة الثانية: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 4، ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$، والنقطة J تحقق العلاقة $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$

نتأمل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

① جد احداثيات رؤوس المكعب وإحداثيات I و J.

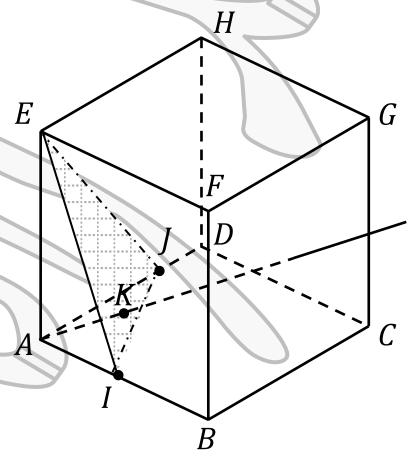
② أثبت أنَّ معادلة للمستوي (EIJ) هي:

$$6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

③ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة A ويعامد المستوي (EIJ)، ثمّ جد احداثيات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ).

④ احسب مساحة المثلث AEJ، واستنتج حجم رباعي الوجوه $IAEJ$.

⑤ احسب بُعد A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ.



الحل

①

$A(0,0,0)$	$B(4,0,0)$	$C(4,4,0)$	$D(0,4,0)$
$E(0,0,4)$	$F(4,0,4)$	$G(4,4,4)$	$H(0,4,4)$
$I(2,0,0)$		$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \Longrightarrow J(0,3,0)$	

② معادلة المستوي (EIJ) من الشكل $ax + by + cz + d = 0$

نعوض إحداثيات I نجد: $2a + d = 0$ أو $a = -\frac{d}{2}$

نعوض إحداثيات J نجد: $3b + d = 0$ أو $b = -\frac{d}{3}$

نعوض إحداثيات E نجد: $4c + d = 0$ نجد $c = -\frac{d}{4}$

نختار $d = -12$ نجد $a = 6$ و $b = 4$ و $c = 3$

ومعادلة المستوي (EIB) هي: $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

③ ناظم المستوي (EIJ) هو $\vec{n}_P(6,4,3)$ يوجه المستقيم d

تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d : $d : \begin{cases} x = 6t \\ y = 4t : t \in \mathcal{R} \\ z = 3t \end{cases}$

لإيجاد إحداثيات K نقوم بالحل المشترك لمعادلات d و (EIJ) نجد:

$$36t + 16t + 9t - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{61}$$

$x = \frac{72}{61}$ و $y = \frac{48}{61}$ و $z = \frac{36}{61}$ ومنه $K\left(\frac{72}{61}, \frac{48}{61}, \frac{36}{61}\right)$

و K هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EIJ).

④ المثلث AEJ قائم في A فيه $AE = 4$ و $AJ = 3$

$$S = \frac{1}{2} AE.AJ = 6$$

ارتفاع رباعي الوجوه $IAEJ$ هو $h = dist[I,(AEJ)] = AI = 2$

$$V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3}(6)(2) = 4$$

⑤ $h_1 = dist[A,(EIJ)] = AK = \frac{|0+0+0-12|}{\sqrt{36+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}$

$$V = \frac{1}{3} S_{EIJ}.h_1 \Rightarrow 4 = \frac{1}{3} S_{EIJ}.\frac{12}{\sqrt{61}} \Rightarrow S_{EIJ} = \sqrt{61}$$

= انتهت الأسئلة =

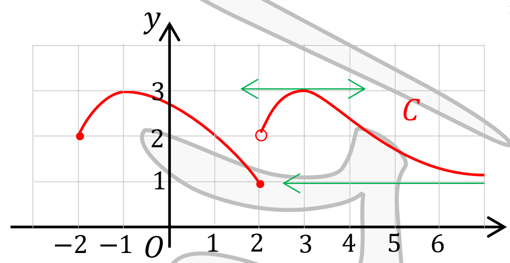
تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المدرس أحمد راتب عثمان

حل النموذج الوزاري 3 للرياضيات دورة 2020

أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 لكل سؤال)

السؤال الأول: في الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f والمطلوب:



① جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② دلّ على القيم الحدية للتابع f وبيّن نوعها.

③ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

④ اكتب معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع f.

⑤ اذكر احداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C .

الحل

①	$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=3$	$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=1$
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f[f(x)] = \lim\limits_{x\to1} f(x)=2$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
②	f غير اشتقاق عند 2 لأنه غير مستمر عند 2	
③	$f(3)=3$ و $f'(3)=0$ المماس أفقي معادلته $y=3$	
④	للتابع ثلاث قيم حدية $f(-2)=2$ قيمة صغرى محلياً $f(2)=1$ قيمة صغرى محلياً $f(3)=3$ قيمة كبرى محلياً	

السؤال الثاني: لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرّفتين وفق العلاقتين: $u_n=-\frac{1}{n}$ و $v_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

① ادرس اطراد كلٍ من المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$.

② أثبت أنَّ المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متجاورتان.

الحل

① التابع f: $f(x)=-\frac{1}{x}$ اشتقاق على $[1,+\infty[$

و $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ ومنه f متزايد تماماً

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة تماماً.

التابع g: $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ اشتقاق على $[1,+\infty[$

و $g'(x)=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}<0$ ومنه g متناقص تماماً

فالمتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً.

② $v_n-u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{n}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$

فالمتتاليتان $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متجاورتان.

السؤال الثالث: حل المعادلة $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=0$

ثمّ حل المتراجحة: $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\le0$.

الحل

$$(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^x-1=0 & \text{إما} \\ e^x-\frac{1}{2}=0 & \text{أو} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x=1\Rightarrow x=0 \\ e^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln2 \end{cases}$$

x	$-\infty$ $\quad -\ln2$ $\quad\quad 0$ $\quad +\infty$
$(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\le0$	غير محققة $\quad 0 \quad$ محققة $\quad 0 \quad$ غير محققة

حلول المتراجحة: $x\in[-\ln2,0]$

ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية: (45 لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 فيه I منتصف $[CD]$.

① وضّع النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$.

② احسب العدد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

الحل

① $$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{BI}$$

بما أنَّ I منتصف $[CD]$ فإنَّ:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AI})-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}$$

ومنه M تنطبق على B

② $$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(4)(4)\left(\frac{1}{2}\right)=8$$

السؤال الثاني:

① جد المجموع $S=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6$ بدلالة α.

② ليكن $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{7}}$ أثبت أنَّ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6=0$.

الحل

① نلاحظ أنَّ الطرف الايسر هو مجموع سبعة حدود متوالية من متتالية هندسية اساسها α حسب دستور مجموع متتالية هندسية نجد:

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6=1\times\frac{1-(\alpha)^7}{1-\alpha}=\frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$$

② $$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6=\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi i}{7}}\right)^7}{1-e^{\frac{2\pi i}{7}}}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi i}{7}}}$$

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6=\frac{1-e^0}{1-e^{\frac{2\pi i}{7}}}=\frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi i}{7}}}=0$$

932 740 055

السؤال الثالث: يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع.

① بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد لدراستها.

② بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات والأخيرة هي الفيزياء.

الحل

① عدد الطرق: $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

② عدد الطرق: $1 \times 5! \times 1 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 للأول و 70 للثاني و 80 للثالث)

التمرين الأول: ليكن التابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \sqrt{x}\,\ln(1+x)$ والمطلوب:

① أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند 0 ثم استنتج مجموعة تعريف التابع f'.

② جد $f'(x)$ على المجال $[0,+\infty[$.

③ استنتج مشتق التابع g المعرّف على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $g(x) = \sqrt{\cos x}\,\ln(1+\cos x)$.

الحل

① ليكن التابع h المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $h(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}\,\ln(1+x)}{x} = \sqrt{x}\,\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 \times 1 = 0$ ومنه التابع f اشتقاق عند 0

مجموعة تعريف التابع f' هي: $[0,+\infty[$.

②
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln(1+x)+2x}{2(1+x)\sqrt{x}} > 0$$

③ التابع $x \to \cos x$ اشتقاق وموجب تماماً على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ إذاً

التابع $x \to \sqrt{\cos x}$ اشتقاق على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

والتابع $x \to \ln(1+\cos x)$ اشتقاق على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

و g اشتقاق على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ لأنه جداء ضرب تابعين اشتقاقين على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$g(x) = \sqrt{\cos x}\,\ln(1+\cos x) = f(\cos x)$$
$$g'(x) = f'(\cos x)(\cos x)'$$
$$g'(x) = -\left[\frac{(1+\cos x)\ln(1+\cos x)+2\cos x}{2(1+\cos x)\sqrt{\cos x}}\right].\sin x$$

التمرين الثاني: لتكن النقاط:

$A(1,-1,2)$	$B(2,1,0)$	$C(2,3,-1)$	$D(0,0,2)$

① عيّن احداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(A,1)$ و$(B,2)$ و$(C,2)$ و$(D,1)$.

② حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق:
$$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 6$$

③ جد معادلةً للمجموعة S .

الحل

①
$$G\begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ \frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \end{pmatrix} \Rightarrow G\begin{pmatrix} \frac{1+4+4+0}{1+2+2+1} \\ \frac{-1+2+6+0}{1+2+2+1} \\ \frac{2+2-2+2}{1+2+2+1} \end{pmatrix} \Rightarrow G\begin{pmatrix} \frac{9}{6} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

② بما أنّ G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و$(B,2)$ و$(C,2)$ و $(D,1)$ فإنّ: $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

ولأجل كل نقطة M من الفراغ يكون:
$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (1+2+2+1)\overrightarrow{MG}$$
ومنه $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MG}$

وبالتالي: $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 6\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$
$$\Rightarrow 6\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6 \Rightarrow MG = 1$$
ومنه S هي الكرة التي مركزها G ونصف قطرها 1.

③ معادلة S: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{6}\right)^2 + \left(z-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

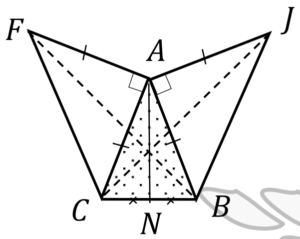
التمرين الثالث: ليكن المثلث ABC. ننشئ خارجه مثلثين قائمين في A ومتساويا الساقين ABJ و ACF ولتكن الأعداد العقدية a, b, c, j, f الممثّلة للنقاط A, B, C, J, F بالترتيب

① احسب بدلالة b و c العددين j و f.

② اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري.

③ أثبت أنّ $JC = BF$ وأنّ المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان.

④ نفرض أنّ A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(J,3)$ و$(F,3)$ و$(C,1)$ و$(B,1)$ احسب $\frac{c}{b}$.



الحل

① نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A

B هي صورة J وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ومنه $\boxed{b = -ij}$

C هي صورة F وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $\boxed{c = if}$

② $\frac{f-b}{c-j} = \frac{f+ij}{if-j} = \frac{f+ij}{i(f+ij)} = \frac{1}{i} = -i$

③ $\left|\frac{f-b}{c-j}\right| = |-i| \Rightarrow \frac{BF}{CJ} = 1 \Rightarrow BF = CJ$

$\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{BF}\right) = \arg\frac{f-b}{c-j} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{JC} \perp \overrightarrow{BF}$

والمستقيمان (BF) و (CJ) متعامدان.

④ A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(J,2)$ و$(F,3)$ و$(C,1)$ و$(B,1)$ يكافئ

$$\frac{b+c+3f+2j}{1+1+3+2} = a = 0 \Rightarrow \frac{b+c+3(-ic)+2(ib)}{7} = 0$$

محمد بن علي عوض
932 740 055

$$\Rightarrow b(1+2i)+c(1-3i)=0$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b}=-\frac{1+2i}{1-3i}\Rightarrow \frac{c}{b}=-\frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{5-5i}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:(100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1، ولتكن النقطة T من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$، و$N$ نقطة من $[AD]$ تحقق العلاقة $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$، نتأمل المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ والمطلوب:

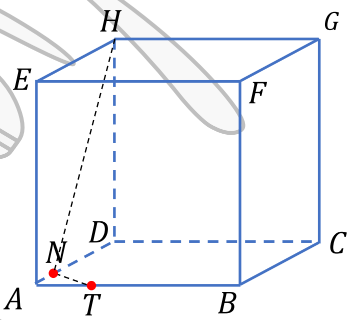
① جد احداثيات النقاط T و N و F و H.

② جد الشعاعين $\overrightarrow{NH}$ و $\overrightarrow{NT}$ ثمّ جد معادلةً للمستوي (HNT)

③ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF) ،

④ استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT).

⑤ اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) . ما طبيعته؟



الحل

①

$T\left(\frac{2}{5},0,0\right)$	$N\left(0,\frac{2}{5},0\right)$	$F(1,0,1)$	$H(0,1,1)$

② $\overrightarrow{NH}\left(0,\frac{3}{5},1\right)$ ، $\overrightarrow{NT}\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0\right)$

بفرض الناظم على المستوي (HNT) هو $\vec{n}(a,b,c)$

فإنَّ $\vec{n}.\overrightarrow{NH}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{NT}=0$

$\frac{3}{5}b+c=0$ ① و $\frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b=0$ ②

نختار $b=5$ ونعوّض في ① و ② نجد:

$a=5$ و $c=-3$ ومنه $\vec{n}(5,5,-3)$

معادلة المستوي (HNT) من الشكل: $ax+by+cz+d=0$

نعوض إحداثيات النقطة H والناظم $\vec{n}$ نجد :

$$5(0)+5(1)-3(1)+d=0\Rightarrow d=-2$$

ومنه معادلة المستوي (HNT) هي: $5x+5y-3z-2=0$

③ $F(1,0,1)$ و $E(0,0,1)$ و $\overrightarrow{EF}(1,0,0)$

تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EF) : $(EF):\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1\end{cases}: t\in\mathcal{R}$

④ لإيجاد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

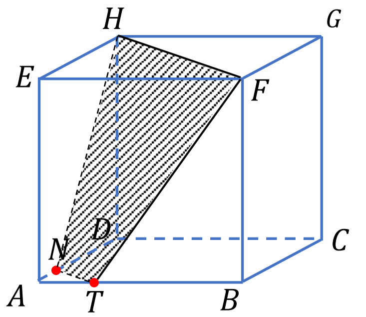
نقوم بالحل المشترك لمعادلات (EF) و (HNT) نجد:

$$5t+0-3-2=0\Rightarrow t=1$$

$x=1$ و $y=0$ و $z=1$ ومنه $F(1,0,1)$ هي نقطة التقاطع

⑤ مقطع المكعب بالمستوي (HNT) هو الرباعي $HNTF$

المستوي (HNT) يقطع الوجهين المتوازيين $(ABCD)$, $(EFGH)$ بفصلين مشتركين متوازيين ومنه $(NT)\backslash\backslash(HF)$ وبالحساب نجد $NH=TF$ فالرباعي $HNTF$ شبه منحرف متساوي الساقين



المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$. ولتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة على $\mathcal{N}^*$ وفق: $u_n=f(n)$

① ادرس تغيرات التابع f على $]0,+\infty[$ ثم نظّم جدولاً بها، واكتب معادلة كل مقارب.

② ارسم في معلم متجانس الخط البياني C على $]0,+\infty[$.

③ أثبت أنَّ النقطة $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ هي مركز تناظر للخط البياني C ثمّ استنتج رسم الخط البياني للتابع f.

④ نضع $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ أثبت أنَّ: $S_n=-\ln(n+1)$.

⑤ جد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$، ونهاية $(S_n)_{n\geq1}$

الحل

① $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ ومنه $x=0$ مقارب شاقولي

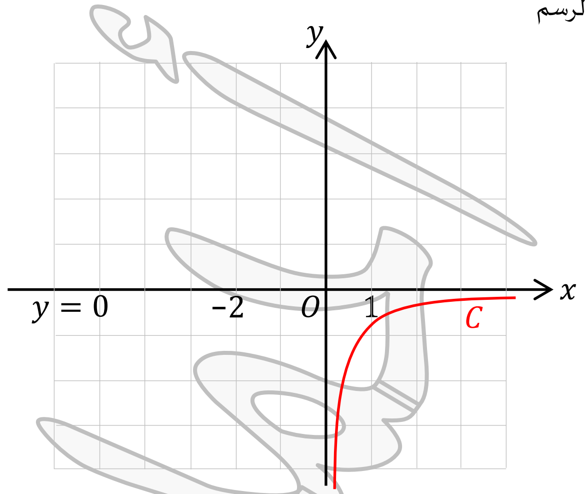
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ln 1=0$ ومنه $y=0$ مقارب بجوار $+\infty$

f اشتقاق على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{\frac{x}{1+x}}=\frac{1+x-x}{(1+x)^2}\cdot\frac{1+x}{x}=\frac{1}{x(1+x)}>0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0

② الرسم



③ نضع $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ و $a=-\frac{1}{2}$ يكون $2a-x=-1-x$

و $b=0$

أياً كان $x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

كان $-x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

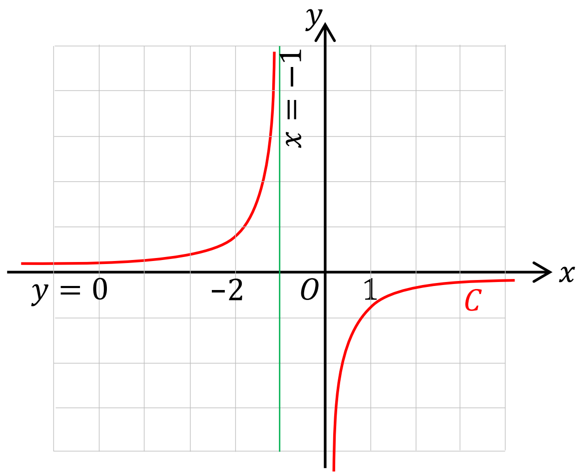
كان $-1-x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$$f(-1-x)+f(x)=\ln\left(\frac{-1-x}{1-1-x}\right)+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$f(-1-x)+f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)-\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=0$$

شرطي التناظر $\begin{cases} 2a-x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[& ❶ \\ f(2a-x)+f(x)=0=2b & ❷ \end{cases}$

من ❶ و ❷ نجد أنَّ C متناظر بالنسبة للنقطة $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$.



④ $u_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$u_1=-\ln(2)$
$u_2=\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\cancel{\ln(2)}-\cancel{\ln(3)}$
$u_3=\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\cancel{\ln(3)}-\cancel{\ln(4)}$
$u_4=\ln\left(\frac{4}{5}\right)=\cancel{\ln(4)}-\cancel{\ln(5)}$
$u_5=\ln\left(\frac{5}{6}\right)=\cancel{\ln(5)}-\cancel{\ln(6)}$
$\vdots$
$u_{n-1}=\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)=\cancel{\ln(n-1)}-\cancel{\ln(n)}$
$u_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\cancel{\ln(n)}-\boxed{\ln(n+1)}$
$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ $S_n=-\ln(n+1)$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$

= انتهت الأسئلة =

تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

المدرس أحمد راتب عثمان