الاسم : [illegible] عمر رمضان

السنة : الأولى

القسم : رياضيات

جامعة حلب

كلية العلوم

التحليل (٢)

د. محمد غسان سنوبر

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

تعتبر مادة التحليل الرياضي اساسا لكافة فروع الرياضيات الكلاسيكية والحديثة • وتتضمن موضوعين اساسيين هما حساب التفاضل وحساب التكامل •

وقد خصص هذا الكتاب لمقرر التحليل (٢) " حساب التكامل " لطلاب السنة الاولى ، فرع العلوم الرياضية والفيزيائية من كلية العلوم •

ويتألف هذا الكتاب من قسمين :

القسم الاول يحوى التكامل غير المحدد وطرق المكاملة وتطبيقاته لحل المعادلات التفاضلية •

والقسم الثاني يحوى التكامل المحدد والتكاملات الثنائية والثلاثية والمنحنية والسطحية وتطبيقاتها في بعض المسائل الرياضية •

وقد راعينا في تأليف هذا الكتاب التسلسل المنطقي للابحاث الواردة في المنهاج ، وحاولنا جهدنا عرض مضمونه بلغة عربية سليمة واسلوب علمي مبسط وأعقبنا كل فقرة من فقرات الكتاب بأمثلة نموذجية محلولة توضيحا للفكرة المعروضة ثم اعقبنا كل فصل بتمارين غير محلولة متدرجة في الصعوبة تشمل كافة فقرات الفصل •

نرجو ان نكون قد وفقنا في عرض مضمون هذا الكتاب ليكون عونا نافعا لابنائنا الطلاب •

ونرجو من الزملاء تزويدنا بملاحظاتهم القيمة حول هذا الكتاب اسهاما

سهم في تطويره وتحسينه .

والله ولي التوفيق

حلب ١٩٨٢/١١/١٥

المؤلفان

الفصل الأول

التكامل غير المحدد

١-١. التابع الاصلي والتكامل غير المحدد :

تعريف (١) : نقول عن التابع $F(x)$ انه تابع اصلي للتابع $f(x)$ على المجال المغلق $[a,b]$ اذا تحققت المساواة الآتية في كل نقطة من هذا المجال ، اي :

$$F'(x) = f(x)$$

مثال : اوجد التابع الاصلي للتابع $f(x)=x^2$

استناداً للتعريف السابق نجد بسهولة ان التابع الاصلي المطلوب هو :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{وذلك لان} \quad \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

ويمكن ان نلاحظ بسهولة ان التابع $f(x)$ يقبل تابعا اصليا غير وحيد . ففي المثال السابق يمكن اعتبار التوابع الاتية توابعا اصلية للتابع المذكور اي $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ ، $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ اوبشكل عام :

$F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ حيث c ثابت كيفي ، لان :

$$\left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2$$

ومن جهة ثانية يمكن ان نبرهن ان اي تابع اصلي للتابع $f(x) = x^2$ هو حتما من الشكل $\frac{x^3}{3} + c$ وذلك حسب النظرية الاتية :

نظرية : اذا كان $F_1(x)$ ، $F_2(x)$ تابعين اصليين للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ فان فرقهما مقدار ثابت ·

البرهان : حسب تعريف التابع الاصلي لدينا :

$$F'_1(x) = f(x)$$
$$F'_2(x) = f(x) \qquad (1)$$

من اجل كل x في المجال $[a,b]$ ·

لنفرض :

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \qquad (2)$$

فحسب العلاقة (1) نكتب :

$$F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0$$

او :

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0$$

من اجل جميع قيم x من المجال $[a,b]$

وبما ان $\varphi'(x) \equiv 0$ من اجل جميع قيم x نستنتج ان $\varphi(x) =$ ثابت ·

في الحقيقة يمكن تطبيق نظرية التزايدات المحدودة (نظرية لاغرانج) على التابع $\varphi(x)$ المستمر والقابل للاشتقاق على المجال $[a,b]$ من اجل $x \in [a,b]$ لدينا :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x-a).\varphi'(c)$$

حيث :

$$a < c < x$$

وبما ان $\varphi'(c)=0$ عندئذ يكون :

$$\varphi(x) = \varphi(a) \qquad (3)$$

اذن التابع $\varphi(x)$ يحافظ على القيمة الثابتة $\varphi(a)$ من اجل جميع

قيم x من المجال $[a,b]$ · فاذا سمينا $\varphi(a) = c$

عندئذ من العلاقتين (2) ، (3) نجد :

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

وينتج من هذه النظرية ما يلي : اذا علمنا تابعا اصليا $F(x)$ للتابع $f(x)$ فان جميع التوابع الاصلية له تكون من الشكل :

$$F(x) + c$$

حيث c ثابت كيفي ·

تعريف (٢) : نسمي تكاملا غير محدد للتابع $f(x)$ ونعبر عنه بالرمز $\int f(x)\,dx$ كل عبارة من الشكل $F(x) + c$ حيث $F(x)$ تابع اصلي للتابع $f(x)$ ، وحسب هذا التعريف نكتب :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

التابع $f(x)$ يدعى بالتابع المطلوب استكماله ، والمقدار $f(x)\,dx$ يدعى عبارة ما تحت رمز التكامل $\int$ (او رمز المجموع) ·

وهكذا فان التكامل غير المحدد هو مجموعة من التوابع $y = F(x) + C$ وهندسيا نقول : ان التكامل المحدد يمثل مجموعة من المنحنيات ، كل منها يمكن الحصول عليه بانسحاب احد المنحنيات موازيا نفسه نحو الاعلى او نحو الاسفل (اي باستقامة المحور oy)

والسؤال الذي نطرحه الآن ، هل يوجد تكامل غير محدد لكل تابع $f(x)$ ؟ بالطبع الجواب هو كلا · ولنقبل دون برهان النظرية الاتية :

نظرية : اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ عندئذ يمكن ايجاد التكامل غير المحدد لهذا التابع ·

وسوف نخصص هذا الفصل لحساب التكاملات غير المحددة لبعض التوابع

الابتدائية (البسيطة) .

ان عملية حساب التكامل غير المحدد للتابع $f(x)$ تدعى عملية استكمال لهذا التابع . وينتج من التعريف (٢) ما يلي :

١ ـ ان مشتق التكامل غير المحدد يساوي للمقدار المستكمل $f(x)$ اي :

$$F'(x) = f(x)$$

وبعبارة اخرى :

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' = \left(F(x) + c \right)' = f(x) \qquad (4)$$

٢ ـ ان تفاضل التكامل غير المحدد يساوي الى عبارة ما تحت التكامل ، اي :

$$d \left(\int f(x)\, dx \right) = f(x)\, dx \qquad (5)$$

٣ ـ التكامل غير المحدد لتفاضل تابع ما يساوي لهذا التابع مضافا اليه ثابتا كيفيا ، اي :

$$\int d\,F(x) = F(x) + c$$

ويمكن التحقق من ذلك بسهولة بمفاضلة الطرفين .

1-2. جدول التكاملات الشهيرة :

قبل البدء بطرق المكاملة ، نعرض فيما يلي بعض التكاملات الشهيرة لأبسط التوابع .

1- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = + c \quad (n \neq -1)$

2- $\int \frac{dx}{x} = \mathrm{Ln}\, |x| + c$

3- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

4- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

5- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + c$

6- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\,\mathrm{c\,tg}\, x + c$

7- $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\,\mathrm{Ln}\, |\cos x| + c$

8- $\int \mathrm{c\,tg}\, x\, dx = \mathrm{Ln}\, |\sin x| + c$

9- $\int e^x\, dx = e^x + c$

10- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\mathrm{Ln}\, a} + c$

11- $\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg}\, x + c$

12- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\, \mathrm{arctg}\, \frac{x}{a} + c$

13- $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\, \mathrm{Ln} \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$

14- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

15- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

16- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mathrm{Ln} \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$

17- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{arg\,sh}\, x + c = \mathrm{Ln} \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + c$

18- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arg\,ch}\, x + c = \mathrm{Ln} \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c$

19- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arg\,th}\, x + c = \frac{1}{2}\, \mathrm{Ln} \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$

لاحظ ان الدستورين (17) ، (18) هما حالة خاصة من الدستور (16) وان الدستور (19) هو حالة خاصة من الدستور (13) .

$$20-\quad \int \operatorname{ch}x \, dx = \operatorname{sh}x + c$$

$$21-\quad \int \operatorname{sh}x \, dx = \operatorname{ch}x + c$$

$$22-\quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}x + c$$

$$23-\quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c$$

ملاحظة : للتحقق من صحة التكاملات الواردة اعلاه يكفي اخذ مشتق الطرفين في اى من الدساتير السابقة • فمثلا من اجل الدستور (7) لدينا :

$$(-\operatorname{Ln}|\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

وبالتالي :

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\operatorname{Ln}|\cos x| + c$$

كذلك بالنسبة للدستور (8) لدينا :

$$(\operatorname{Ln}|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

وبالتالي :

$$\int \operatorname{ctg} x = \operatorname{Ln}|\sin x| + c$$

كذلك بالنسبة للدستور (13) لدينا :

$$\left(\frac{1}{2a} \operatorname{Ln}\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}\Big[\operatorname{Ln}|a+x| - \operatorname{Ln}|a-x|\Big]' = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2-x^2}$$

وبالنسبة للدستور (16) لدينا :

$$\left(\operatorname{Ln}\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

اذن :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \operatorname{Ln}\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

1-3 • بعض خواص التكامل غير المحدد :

نظرية (١) : التكامل غير المحدد للمجموع الجبرى لتابعين او اكثر يساوى الى مجموع تكاملاتها ، اى :

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx \qquad (1)$$

البرهان : باشتقاق طرفي المساواة (1) وحسب العلاقة (4) في الفقرة السابقة لدينا :

$$\left(\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\left(\int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx\right)' = \left(\int f_1(x)\, dx\right)' + \left(\int f_2(x)\, dx\right)' = f_1(x)+f_2(x)$$

اى ان مشتق الطرف الايسر ومشتق الطرف الايمن من المساواة (1) متساويان •

وحسب النظرية الواردة في الفقرة (1-1) فان اى تابع موجود في الطرف الايسر من المساواة (1) يختلف عن التابع الموجود في الطرف الايمن بمقدار ثابت •

نظرية (٢) : ان اى عامل ثابت يمكن وضعه خارج رمز التكامل •

اى : اذا كان ثابتا = a فان :

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx \qquad (2)$$

ولاثبات ذلك نشتق طرفي العلاقة (2) نجد :

$$\left(\int a\, f(x)\, dx\right)' = a\, f(x)$$

$$(a \int f(x)\,dx)' = a (\int f(x)\,dx)' = a\, f(x)$$

اى ان مشتق الطرف الايمن يساوى مشتق الطرف الايسر وعندئذ يكون الفرق بين اى تابعين في الطرف الايسر والايمن هو مقدار ثابت .

عند القيام بعملية تكامل غير محدد يجب اعتماد القواعد التالية :

١ ـ اذا كان :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

عندئذ يكون :

$$\int f(a\,x)\,dx = \frac{1}{a}\,F(a\,x) + c \qquad (3)$$

في الحقيقة ، اذا اشتققنا الطرفين الايسر والايمن من المساواة (3) نجد :

$$\left(\int f(ax)\,dx \right)' = f(ax)$$

$$\left(\frac{1}{a}\,F(ax) \right)' = \frac{1}{a}\,\left(F(ax) \right)'_x = \frac{1}{a}\cdot F'(ax)\,a$$

$$= F'(ax) = f(ax)$$

اى ان مشتق الطرف الايمن يساوى الى مشتق الطرف الايسر وهو المطلوب برهانه .

٢ ـ اذا كان :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

عندئذ يكون :

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + c \qquad (4)$$

٣ ـ اذا كان :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

عندئذ يكون :

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b) + c \qquad (5)$$

ويمكن التحقق من صحة العلاقتين (4) ، (5) باشتقاق الطرفين .

مثال (١) :

$$\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\,dx = \int 2x^3\,dx - \int 3\sin x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2\int x^3\,dx - 3\int \sin x\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2\,\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}\,x\sqrt{x} + c$$

مثال (٢) :

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx =$$

$$= 3\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{\frac{5}{4}}\,dx =$$

$$= 3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + c$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}\,x^2\cdot\sqrt[4]{x} + c$$

مثال (٣) :

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + c$$

مثال (٤) :

$$\int \cos 7x\,dx = \frac{1}{7}\sin 7x + c$$

مثال (٥) :

$$\int \sin(2x-6)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-6) + c$$

4-1. التكامل بواسطة تغيير المتحول (طريقة التعويض) :

عند حساب التكامل $\int f(x)\,dx$

في الغالب لا نستطيع ايجاد التابع الاصلي للتابع $f(x)$ مباشرة ، لذلك نلجأ الى تغيير المتحول في عبارة ما تحت رمز التكامل فنفرض :

$$x = \varphi(t) \qquad (1)$$

حيث $\varphi(t)$ تابع مستمر، ومشتقه مستمر ايضا وله تابع عكسي .

عندئذ $dx = \varphi'(t)\,dt$. وسنبرهن في هذه الحالة ان :

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (2)$$

ولاثبات ذلك يكفي ان نبرهن ان مشتق الطرف الايسر يساوي مشتق الطرف الايمن .

لنحسب مشتق الطرف الايسر :

$$\left(\int f(x)\cdot dx\right)'_x = f(x)$$

ولنحسب مشتق الطرف الايمن بالنسبة الى x ايضا باعتبار الطرف الايمن تابع مركب وحيث t يرتبط مع x بالعلاقة (1) .

$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ ، وحسب قاعدة اشتقاق التوابع العكسية يكون :

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$. وبالتالي فان :

$$\left(\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx}$$

$$= f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

اي ان مشتق المقدار في الطرف الايسر بالنسبة الى x يساوي مشتق المقدار في الطرف الايمن بالنسبة الى x وبذلك تم المطلوب .

ان اختيار التابع $x = \varphi(t)$ هو شيء اساسي في عملية تغيير المتحول لذلك يجب ان نحسن اختياره بحيث نستطيع حساب التكامل الموجود في الطرف الايمن من العلاقة (2) .

ملاحظة : في كثير من الحالات قد يكون من الاسهل اجراء تغيير المتحول بالشكل $t = \psi(x)$ بدلا من $x = \varphi(t)$ وعلى سبيل المثال لنفرض اننا نريد حساب تكامل من الشكل :

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)}$$

من الانسب في هذه الحالة ان نفرض $\psi(x)=t$ ومنه $\psi'(x)dx=dt$

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\psi(x)| + c$$

والامثلة الاتية توضح لنا كيفية اجراء تغيير المتحول بالشكل المناسب .

مثال (١) :

$$\int \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$$

نفرض $t = \sin x$ ومنه $dt = \cos x\,dx$

$$\int \sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + c$$

مثال (٢) :

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

نفرض $t = 1+x^2$ فيكون $dt = 2x\,dx$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + c = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

مثال (٣) :

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

نفرض $t = \frac{x}{a}$ ومنه $dx = a\,dt$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{a} \text{ arc tg } t + c = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{x}{a} + c$$

مثال (٤) :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$$

نفرض $t = \frac{x}{a}$ ومنه $dx = a\,dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int\frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc sin } t + c$$

$$= \text{arc sin } \frac{x}{a} + c$$

مثال (٥) : أماني

$$\int (\text{Ln } x)^3 \frac{dx}{x}$$

نفرض $t = \text{Ln } x$ ومنه $dt = \frac{dx}{x}$

$$\int (\text{Ln } x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{1}{4}(\text{Ln } x)^4 + c$$

مثال (٦) :

$$I = \int \frac{x\,dx}{1+x^4}$$

نفرض $t=x^2$ ومنه $dt = 2x\,dx$

$$I = \frac12 \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac12 \text{ arc tg } t + c = \frac12 \text{ arc tg } x^2 + c$$

مثال (٧) :

$$I=\int \frac{x^2\, dx}{1+x^6}$$

نفرض $t=x^3$ ومنه $dt = 3x^2\, dx$

$$I = \frac13\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac13 \text{ arc tg } t + c = \frac13 \text{ arc tg } x^3 + c$$

مثال (٨) :

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx$$

نفرض $x=t^6$ فيكون $dx = 6t^5\, dt$

$$I = \int \frac{t^3 . 6\, t^5\, dt}{t^2+1} = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}\,dt$$

نقسم الصورة على المخرج للكسر المستكمل فنجد :

$$I = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \text{arc tg } t\right) + c$$

$$I = 6\left(\frac17 \sqrt[6]{x^7} - \frac15\sqrt[6]{x^5} + \frac13\sqrt{x} - \sqrt[6]{x} + \text{arc tg } \sqrt[6]{x}\right) + c$$

مثال (٩) :

$$I = \int\sqrt{1-x^2}\;dx$$

بما ان المقدار المستكمل معرف من اجل $|x|\le 1$ لذلك نفرض :

$x = \sin t$ ومنه $dx = \cos t\, dt$

$$I = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\, .\, \cos t\, . dt = \int \cos^2 t\, dt$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac t2 + \frac14 \sin 2t + c$$

$$= \frac12 \text{ arc sin } x + \frac12 \sin t . \cos t + c$$

$$= \frac12 \text{ arc sin } x + \frac12 x\sqrt{1-x^2} + c$$

مثال (١٠) :

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

نفرض $\text{tg } \frac{x}{2} = t$ ومنه $x = 2 \text{ arc tg } t$

$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ ونعلم أن $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t}\, .\, \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int\frac{dt}{t} = \text{Log } t + c = \text{Log tg } \frac{x}{2} + c$$

مثال (١١) :

$$I = \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \text{Log tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c$$

مثال (١٢) :

$$I = \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}\, dx$$

نعلم ان $d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}dx$ والتكامل يكتب بالشكل :

$$I = -\int e^{\frac{1}{x}} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right)$$

اذا فرضنا $t=\frac{1}{x}$ عندئذ يكون :

$$I = -\int e^t \cdot dt = -e^t + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

مثال (١٣) :

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

نفرض : $t = 1-x^2$ ومنه $dt = -2x\,dx$

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t}+c = -\sqrt{1-x^2}+c$$

مثال (١٤) :

$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$$

نفرض : $t=x^2$ ومنه $dt = 2x\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{a^4-t^2}} = \frac{1}{2a^2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{t^2}{a^4}}}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\arcsin\frac{t}{a^2}+c = \frac{1}{2a^2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}+c$$

مثال (١٥) :

$$I = \int e^{4x^2}\cdot x\,dx$$

نفرض $t=4x^2$ ومنه $dt = 8x\,dx$

ومنه $x\,dx = \frac{dt}{8}$ نعوض في التكامل فنجد :

$$I = \frac{1}{8}\int e^t\cdot dt = \frac{1}{8}e^t + c = \frac{1}{8}e^{4x^2}+c$$

مثال (١٦) :

$$I=\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$$

نلاحظ ان $\cos x\,dx$ هو تفاضل $\sin x$ لذلك نفرض $t=\sin x$ ومنه $dt=\cos x\,dx$ فيكون :

$$I=\int\frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}\, t + c = \text{arctg}(\sin x)+c$$

مثال (١٧) :

$$I=\int\frac{dx}{\cos x\,(3\sin x - 7\cos x)}$$

نكتب التكامل بالشكل :

$$I=\int\frac{dx}{\cos^2 x\,(3\,\text{tg}\,x-7)}$$

نفرض : $t=\text{tg}\,x$ فيكون $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$

بالتعويض نجد :

$$I=\int\frac{dt}{3t-7} = \frac{1}{3}\ln(3t-7)+c$$

$$= \frac{1}{3}\ln(3\,\text{tg}\,x-7)+c$$

مثال (١٨) :

$$I=\int\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

نفرض : $x=\sin t$ ومنه $dx=\cos t\,dt$

$$I=\int\frac{\sin t+1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int(\sin t+1)\,dt$$

$$= -\cos t + t + c = -\sqrt{1-x^2}+\arcsin x + c$$

مثال (١٩) :

$$I=\int \text{tg}^2 x\,dx$$

نفرض $t = tg\, x$. ومنه $dt = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$

او : $dt = (1+tg^2 x)\, dx$ ومنه

$$dx = \frac{dt}{1+tg^2 x} = \frac{dt}{1+t^2}$$

والتكامل يصبح بالشكل :

$$I = \int \frac{t^2 . dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - arctg\, t + c$$

$$= tg\, x - x + c$$

مثال (٢٠) :

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

نفرض $t = \frac{1}{x}$ فيكون $dt = \frac{-dx}{x^2}$

ومنه نجد : $1-x^2 = \frac{t^2-1}{t^2}$

$$I = \int \frac{-dt}{\sqrt{\frac{t2-1}{t2}}} = \int \frac{-t\, dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\sqrt{t^2-1} + c$$

$$I = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$$

مثال (٢١) :

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2-Ln^2 x}}$$

التكامل يكتب بالشكل :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\frac{1}{2}Ln^2 x}}$$

نفرض : $t = \frac{Ln\, x}{\sqrt{2}}$ ومنه $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}\, .\, x}$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c$$

$$= \arcsin \frac{Ln\, x}{\sqrt{2}} + c$$

مثال (٢٢) :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

نفرض $x = a \sin^2 t$ ومنه $dx = 2a \sin t \cos t\, dt$

و $t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}$

والتكامل يصبح بالشكل :

$$I = \int \frac{2a \sin t\, .\, \cos t\, dt}{\sqrt{a \sin^2(a-a \sin^2 t)}} = 2 \int dt = 2t + c$$

$$= 2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} + c$$

وبصورة مماثلة للتحويل السابق نحسب التكامل :

$$I = \int \sqrt{x(1-x)}\, dx$$

نفرض : $x = \sin^2 t$

وخلاصة القول : ان طريقة حساب التكامل غير المحدد بطريقة تغيير المتحول هي من الطرق الاساسية • فكثيرا ما نحسب التكامل بطرق اخرى الا اننا نضطر لاستخدام طريقة تغيير المتحول في مرحلة متأخرة من الحسابات • والنجاح في حساب التكامل يعتمد بصورة رئيسية على الاختيار المناسب لتغيير المتحول الذي يسهل علينا عملية التكامل برده الى احد الاشكال الواردة في جدول التكاملات الشهيرة •

حالة خاصة : تكامل كثير الحدود •

نعلم ان :

$$\int x^n\, .dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

فهذه القاعدة يمكن تطبيقها على القوى السالبة والكسرية لـ x •

فمثلا :

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$$
$$= \frac{-1}{3x^2} + c$$

$$\int x^{\frac52}\,dx = \frac{x^{\frac52+1}}{\frac52+1} + c = \frac{2x^{\frac72}}{7} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac23}\,dx = \frac{x^{-\frac23+1}}{-\frac23+1} + c$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} + c$$

فيمكن استكمال كثير الحدود حداً حداً بدون اى صعوبة مهما كان شكل كثير الحدود . فمثلا :

$$\int \left[(x-a)^3 + \frac{1}{(x-b)^4} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x-c)^5}}\right] dx$$

يرد الى حساب التكاملات الثلاثة الاتية :

$$(1)\ \int (x-a)^3 dx\ ,\quad (2)\ \int \frac{dx}{(x-b)^4}\ ,\quad (3)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-c)^5}}$$

وهذه التكاملات يمكن حسابها بطريقة تغيير المتحول فنفرض :

$$x-a = t\ ,\quad x-b = t\ ,\quad x-c = t$$

فنجد :

$$\int (x-a)^3 dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac14 (x-a)^4 + c \qquad (1)$$

$$\int \frac{dx}{(x-b)^4} = \int \frac{dt}{t^4} = \int t^{-4}\,dt = \frac{-1}{3t^3} + c$$
$$= \frac{1}{3(x-b)^3} + c \qquad (2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-c)^5}} = \frac{dt}{t^{\frac53}} = \int t^{-\frac53}\,dt$$

$$= \frac{t^{-\frac53+1}}{-\frac53+1} + C_1 = \frac{t^{-\frac23}}{-\frac23} + c_1 = -\frac32 t^{\frac{-2}{3}} + c_1$$

$$= -\frac32 \cdot \frac{1}{t^{\frac23}} + c = \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} + c_1$$

$$= -\frac32 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-c)^2}} + c_1 \qquad (3)$$

1-5. استكمال التوابع التي تحوى ثلاثي الحدود :

الحالة الاولى : التكامل من الشكل :

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

نبدأ بتحويل المخرج الى مجموع اوفرق مربعين :

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm K^2\right]$$

حيث : $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm K^2$

ونختار الاشارة زائد او ناقص حسبما تكون العبارة في الطرف الايسر موجبة او سالبة ، اى حسبما يكون جذرا المقدار : ax^2+bx+c ~~تخيليين~~ (المميز سالب) او حقيقيين (المميز موجب) .

والتكامل I_1 يأخذ الشكل :

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm K^2\right]}$$

نجرى تغييرا في المتحول فنفرض $x+\frac{b}{2a} = t$ فيكون $dx = dt$

فنحصل على :

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm K^2}$$

وهو تكامل شهير وارد في الجدول (الدستوران 12 ، 13)

مثال (١) :

$$I = \int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+4x+10}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+4+10-4} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}$$

نفرض $x+2 = t$ ومنه $dx = dt$ والتكامل يصبح :

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\,\text{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{6}}+c$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}}\,\text{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt{6}}+c$$

مثال (٢) :

$$I = \int\frac{dx}{x^2+x-2}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}$$

نفرض $x+\frac{1}{2} = t$ فيكون $dx = dt$

$$I = \int\frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}} = -\frac{1}{3}\,\text{Log}\left|\frac{\frac{3}{2}+t}{\frac{3}{2}-t}\right|+c$$

$$= -\frac{1}{3}\,\text{Log}\left|\frac{2+x}{1-x}\right|+c$$

وذلك بالاعتماد على الدستور (13) من الجدول .

الحالة الثانية : التكامل من الشكل :

$$I_2 = \int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$$

نكتب المقدار المتكامل بالشكل الاتي :

$$I_2 = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + (B-\frac{Ab}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

التكامل الاخير هو التكامل I_1 الوارد في الحالة (١) . اما التكامل الاول فيمكن حسابه باجراء التعويض $ax^2+bx+c = t$ ومنه $(2ax+b)\,dx=dt$ فيكون :

$$\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \int\frac{dt}{t}$$

$$= \text{Ln}\,|t| + c_1 = \text{Ln}\,|ax^2+bx+c| + c_1$$

واخيرا نجد :

$$I_2 = \frac{A}{2a}\,\text{Ln}\,|ax^2+bx+c| + (B-\frac{Ab}{2a})\,I_1 + c_1$$

مثال (١) : احساب التكامل :

$$I = \int\frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx$$

باستخدام الطريقة السابقة نكتب التكامل بالشكل :

$$I = \int\frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+(3+\frac{1}{2}\,2)}{x^2-2x-5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x-5} + 4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,|x^2-2x-5| + 4\int\frac{dx}{(x-1)^2-6}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\text{Ln}\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right| + c$$

الحالة الثالثة : التكامل من الشكل :

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

باستخدام التحويل الوارد في الحالة الاولى ، هذا التكامل يرد (حسب اشارة a) الى الشكل :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm K^2}} \quad \text{من اجل} \quad a > 0$$

او الى الشكل :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \quad \text{من اجل} \quad a < 0$$

وهما تكاملان واردان في جدول التكاملات الشهيرة (الدستوران 15 ، 16)

الحالة الرابعة : التكامل من الشكل :

$$I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$$

نلجأ الى تحويل مماثل للحالة الثانية فنكتب :

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx + (B-\frac{Ab}{2a}) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

نحسب التكامل الاول باجراء التعويض :

$$ax^2 + bx + c = t \quad , \quad (2ax + b)\, dx = dt$$

فنحصل على :

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + c_1 = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + c_1$$

اما التكامل الثاني فهو تكامل وارد في الحالة الثالثة من هذه الفقرة .

مثال (١) : احسب التكامل :

$$I = \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\, dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\, dx$$

$$= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\, dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln \left| x+2+\sqrt{(x+2)^2+6} \right| + c =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln \left| x+2+\sqrt{x^2+4x+10} \right| + c$$

1-6 . التكامل بالتجزئة :

بفرض u , v تابعان للمتحول x وقابلان للاشتقاق بالنسبة الى x عندئذ اذا فاضلنا الجداء u.v نجد :

$$d(u.v) = u\, dv + v\, du$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$u.v = \int u\, dv + \int v.\, du$$

ومنه :

$$\int u.\, dv = u.v - \int v.du \qquad (1)$$

هذا الدستور يدعى دستور التكامل بالتجزئة . ويستخدم هذا الدستور لتكامل مقدار يتألف من جداء عاملين u ، dv بحيث نستطيع حساب v من التفاضل dv وبحيث نستطيع حساب التكامل $\int v.\, du$ ، عندئذ نستطيع حساب التكامل $\int u.dv$ بسهولة .

ان اختيار u ، dv من عبارة ما تحت التكامل يعتمد على المران والممارسة لكثير من التكاملات . وسوف نعرض فيما يلي امثلة توضح لنا كيفية اجراء

التكامل بهذه الطريقة .

مثال (١) : احسب التكامل :

$$I = \int x .\sin x\, dx$$

نفرض $u=x$ و $dv = \sin x\, dx$ ومنه

$$v = -\cos x \quad , \quad du = dx$$

بتطبيق الدستور (1) نجد :

$$\int x .\sin x\, dx = -x .\cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

مثال (٢) : احسب التكامل

$$I = \int \operatorname{arctg} x \,.\, dx$$

نفرض $u = \operatorname{arctg} x$ ، $dv = dx$ ومنه

$$v = x \quad , \quad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

بتطبيق الدستور (١) نجد :

$$I = \int \operatorname{arctg} x\, dx = x.\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x.\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(1+x^2) + c$$

ولنتعرض الان لبعض النماذج الهامة من التكاملات التي تصادفنا دوما ولنحاول تصنيفها بنماذج مختلفة ونبين فيها كيفية اختيار u و dv تسهيلا لعملية التكامل :

النموذج الاول : التكامل من احد الاشكال الاتية :

$$\int x^k . e^{ax}\, dx \ , \ \int x^k \sin ax\, dx \ , \ \int x^k \cos ax\, dx$$

او بشكل اعم : اذا كان المقدار المستكمل مؤلفاً من جداء كثير حدود $p(x)$ في تابع اسي او تابع مثلثي من الشكل :

$$\int p(x) . e^{ax} dx \ , \ \int p(x) \sin ax\, dx \ , \ \int p(x) \cos ax\, dx$$

في مثل هذه الاشكال نفرض دوما $u = p(x)$ والجزء الاخر من التابع المستكمل dv ، وسنوضح ذلك بالامثلة الاتية :

مثال (١) :

$$I = \int x^2 . e^x\, dx$$

نفرض $u = x^2$ ، $dv = e^x\, dx$ يكون :

$$v = e^x \quad , \quad du = 2x\, dx$$

$$I = \int x^2 . e^x\, dx = x^2 . e^x - 2\int x\, e^x\, dx$$

لحساب التكامل الاخير نستخدم طريقة التجزئة ايضا فنفرض :

$u_1 = x$ ، $dv_1 = e^x\, dx$ ومنه

$$v_1 = e^x \quad , \quad du_1 = dx$$

$$\int x .\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + c$$

واخيرا نجد :

$$I = \int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\,(x\, e^x - e^x) + c$$
$$= e^x\,(x^2 - 2x + 2) + c$$

مثال (٢) :

$$I = \int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x\, dx$$

نفرض : $u = x^2 + 7x - 5$ ، $dv = \cos 2x\, dx$ ومنه

$$v = \frac{1}{2} \sin 2x \quad , \quad du = (2x+7)\, dx$$

$$I = (x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2} - \int (2x+7)\frac{\sin 2x}{2}\, dx \quad (1)$$

نكامل الاخير بالتجزئة ايضا فنفرض :

$u_1 = \frac{2x+7}{2}$ ، $dv_1 = \sin 2x\, dx$ ومنه

$$v_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x \quad , \quad du_1 = dx$$

$$\int \frac{2x+7}{2}\sin 2x\, dx = \frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= -\frac{(2x+7)\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

نعوض في (1) فنجد :

$$I = (x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2} + \frac{2x+7}{4}\cos 2x - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

مثال (٣) :

$$I = \int (x^3+1)\sin 2x\, dx$$

نفرض $u = x^3 + 1$ ، $dv = \sin 2x\, dx$ ومنه

$$v = -\frac{1}{2}\cos 2x \quad , \quad du = 3x^2\, dx$$

$$I = -\frac{1}{2}(x^3+1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int x^2 . \cos 2x\, dx \qquad (1)$$

نكامل الاخير بالتجزئة ايضا فنفرض :

$u_1 = x^2$ ، $dv_1 = \cos 2x\, dx$ ومنه

$$v_1 = \frac{1}{2}\sin 2x \quad , \quad du_1 = 2x\, dx$$

$$\int x^2 . \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x^2\, \text{xin}\, 2x - \int x \sin 2x\, dx \qquad (2)$$

كذلك نحسب التكامل الاخير بالتجزئة فنفرض :

$u_2 = x$ ، $dv_2 = \sin 2x\, dx$ ومنه

$$v_2 = -\frac{1}{2}\cos 2x \quad , \quad du_2 = dx$$

$$\int x \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \qquad (3)$$

نعوض الناتج في (2) فيكون :

$$\int x^2 . \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

نعوض الناتج في (1) فنجد :

$$I = -\frac{1}{2}(x^3+1)\cos 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{\sin 2x}{4}\right) + c$$

ملاحظة : نضطر في بعض الحالات لاجراء تغيير في المتحول ثم نتوصل الى تكامل من النموذج الاول .

مثال (٤) :

$$I = \int (\sqrt{x} + 1)\, e^{\sqrt{x}}\, dx$$

نفرض $t = \sqrt{x}$ ، ومنه $x = t^2$, $dx = 2t\, dt$

والتكامل يصبح :

$$I = 2\int (t+1)t\, e^t\, dt = \int (2t^2+2t)\, e^t\, dt$$

وهو من شكل جداء كثير حدود في تابع اسي يحسب بطريقة التجزئة :

نفرض $u = 2t^2 + 2t$, $dv = e^t . dt$

$$v = e^t \quad , \quad du = (4t+2)\, dt$$

$$I = (2t^2+2t)e^t - \int (4t+2)e^t\, dt \qquad (1)$$

نكامل الاخير بالتجزئة ايضا فنفرض :

$$dv_1 = e^t\, dt \quad , \quad u_1 = 4t+2$$

$$V_1 = e^t \quad , \quad du_1 = 4dt$$

$$\int (4t+2)e^t dt = (4t+2)e^t - 4\int e^t\, dt$$

$$= (4t+2)e^t - 4e^t$$

نعوض الناتج في (1) فنجد :

$$I = (2t^2+2t)e^t - (4t+2)e^t + 4e^t + c$$

$$I = (2t^2 - 2t + 2)e^t + c$$

نعوض $t = \sqrt{x}$ فنجد :

$$I = (2x - 2\sqrt{x} + 2)e^{\sqrt{x}} + c$$

النموذج الثاني : التكامل من احد الاشكال الاتية :

$$\int p(x)\,\arcsin x\,dx \quad , \quad \int p(x)\,\arccos x\,dx$$

$$\int p(x)\,\text{arctg}\,x\,dx \quad , \quad \int p(x)\,\text{arcctg}\,x\,dx$$

$$\int p(x)\,\text{Log}\,x\,dx$$

في هذه الحالة نفرض $dv = p(x)\,dx$

والقسم الباقي من المقدار المستكمل يساوي u خلافاً للنموذج الاول

وسنوضح ذلك بالامثلة الاتية :

مثال (١) :

$$I = \int x\,\text{arctg}\,x\,dx$$

نفرض $u = \text{arctg}\,x$, $dv = x\,dx$ ومنه

$$v = \frac{x^2}{2} \quad , \quad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$I = \int x\,\text{arctg}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2} \qquad (1)$$

ولنحسب التكامل الاخير :

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x - \text{arctg}\,x$$

نعوض في (1) فنجد :

$$I = \int x\,\text{arctg}\,x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{arctg}\,x - \frac{x - \text{arctg}\,x}{2} + c$$

مثال (٢) :

$$I = \int x\,\text{Log}\,x\,dx$$

نفرض $u = \text{Log}\,x$, $dv = x\,dx$

$$v = \frac{x^2}{2} \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$I = \int x\,\text{Log}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\text{Log}\,x - \int \frac{x}{2}\,dx$$

$$I = \frac{x^2}{2}\,\text{Log}\,x - \frac{x^2}{4} + c$$

مثال (٣) :

$$I = \int \arcsin x\,dx$$

نفرض $u = \arcsin x$, $dv = dx$

$$v = x \quad , \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

النموذج الثالث : التكاملات من الشكل

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx \quad , \quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

لنحسب التكامل الاول :

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx$$

نفرض : $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$

ومنه $du = a\,e^{ax}\,dx$, $v = \frac{1}{b}\sin bx$

نطبق دستور التكامل بالتجزئة (1)

$$I_1 = \frac{1}{b} \sin b\,x \,.\, e^{ax} - \frac{a}{b} \int e^{ax} . \sin b\,x\, dx \qquad (1)$$

لنطبق ايضا طريقة التجزئة لحساب التكامل الاخير فنفرض

$$dv = \sin b\,x\, dx \quad , \quad u = e^{ax}$$

$$v = -\frac{1}{b} \cos b\,x \qquad du = a\, e^{ax}\, dx$$

$$\int e^{ax} . \sin b\,x\, dx = -\frac{1}{b} \cos b\,x + \frac{a}{b} \int e^{ax} . \cos b\,x\, dx$$

نعوض في (1) فنجد :

$$\int e^{ax} . \cos b\,x\, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin b\,x + \frac{a}{b^2} e^{ax} . \cos b\,x - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} . \cos b\,x\, dx$$

ومنه :

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} . \cos b\,x\, dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b} \sin b\,x + \frac{a}{b^2} \cos b\,x\right)$$

$$I_1 = \int e^{ax} . \cos b\,x\, dx = \frac{e^{ax}\,(b \sin b\,x + a \cos b\,x)}{a^2 + b^2} + c$$

وبنفس الطريقة السابقة نحسب التكامل الثاني I_2 فنجد :

$$I_2 = \int e^{ax} . \sin b\,x\, dx = \frac{e^{ax}\,(a \sin b\,x - b \cos b\,x)}{a^2 + b^2} + c$$

مثال (١) :

$$I = \int e^{x} . \cos 2x\, dx$$

نفرض :

$$dv = \cos 2x\, dx \quad , \quad u = e^{x}$$

$$v = \frac{1}{2} \sin 2x \quad , \quad du = e^{x}\, dx$$

بتطبيق دستور التجزئة (1) نجد :

$$I = \frac{1}{2} e^{x} . \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^{x} . \sin 2x\, dx \qquad (1)$$

لنحسب التكامل الاخير بالتجزئة ايضا فنفرض :

$$dv_1 = \sin 2x\, dx \quad , \quad u_1 = e^{x}$$

$$v_1 = -\frac{1}{2} \cos 2x \quad , \quad du_1 = e^{x}\, dx$$

$$\int e^{x} . \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2} e^{x} \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^{x} . \cos 2x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{x} . \cos 2x + \frac{1}{2} I$$

نعوض في (1) فنجد :

$$I = \frac{1}{2} e^{x} . \sin 2x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} e^{x} . \cos 2x + \frac{1}{2} I\right)$$

ومنه :

$$I = \frac{e^{x}}{5} (2 \sin 2x + \cos 2x) + c$$

مثال (٢) :

$$I = \int e^{2x} . \sin 3x\, dx$$

نفرض

$$dv = \sin 3x\, dx \quad , \quad u = e^{2x}$$

$$v = -\frac{1}{3} \cos 3x \quad , \quad du = 2e^{2x}\, dx$$

نطبق دستور التجزئة (1) فنجد :

$$I = -\frac{1}{3} e^{2x} . \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} . \cos 3x\, dx \qquad (1)$$

نكامل الاخير بالتجزئة ايضا :

$$I_1 = \int e^{2x} . \cos 3x\, dx$$

نفرض :

$$dv_1 = \cos 3x\, dx \quad , \quad u_1 = e^{2x}$$

$$v_1 = \frac{1}{3} \sin 3x \quad , \quad du_1 = 2e^{2x}\, dx$$

$$I_1 = \frac{1}{3} e^{2x} . \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} . \sin 3x\, dx$$

$$I_1 = \frac{1}{3} e^{2x} . \sin 3x - \frac{2}{3} I$$

نعوض في (1) فنجد :

$$I = -\frac{1}{3} e^{2x} . \cos 3x + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} I \right]$$

$$I\left(1+\frac{4}{9}\right)=-\frac{1}{3}e^{2x}.\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x$$

$$13\,I=-3e^{2x}.\cos 3x+2e^{2x}\sin 3x$$

$$13\,I=e^{2x}(-3\cos 3x+2\sin 3x)$$

$$I=\frac{e^{2x}}{13}(-3\cos 3x+2\sin 3x)+C$$

ملاحظة : لقد تعرضنا في الفقرة السابقة لنماذج مختلفة من التكاملات التي تستكمل بطريقة التجزئة ، الا انه يوجد انواع اخرى من التكاملات تستكمل بطريقة التجزئة ايضا ولا يمكن حصرها في نماذج معينة .

مثال (١) : احسب التكامل :

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

نضرب المقدار المستكمل بـ $\sqrt{a^2-x^2}$ ونقسم عليه فنجد :

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int x.\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (1)$$

نحسب التكامل الاخير بالتجزئة فنفرض :

$$dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ ,\quad u=x$$

$$v=-\sqrt{a^2-x^2}\ ,\quad du=dx$$

$$I_1=\int x\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

نعوض في (١) فنجد :

$$I=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-I$$

$$2I=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}$$

ومنه :

$$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c$$

مثال (٢) : احسب التكامل :

$$I=\int\cos(\text{Log }x)\,dx$$

نفرض :

$$dv=dx\ ,\quad u=\cos(\text{Log }x)$$

$$v=x\ ,\quad du=-\sin(\text{Log }x).\frac{dx}{x}$$

$$I=x.\cos(\text{Log }x)+\int\sin(\text{Log }x)\,dx \qquad (1)$$

نحسب التكامل الاخير بالتجزئة ايضا :

$$I_1=\int\sin(\text{Log }x)\,dx$$

نفرض :

$$dv=dx\ ,\quad u=\sin(\text{Log }x)$$

$$v=x\ ,\quad du=\cos(\text{Log }x)\frac{dx}{x}$$

$$I_1=x.\sin(\text{Log }x)-\int x.\cos(\text{Log }x)\,dx$$

$$I_1=x.\sin(\text{Log }x)-I$$

$$I=x.\cos(\text{Log }x)+x\sin(\text{Log }x)-I$$

$$I=\frac{x}{2}\left[\cos(\text{Log }x)+\sin(\text{Log }x)\right]+c$$

مثال (٢) : احسب التكامل :

$$I=\int x^3\,\text{Ln}^2x\,dx$$

نفرض :

$$dv=x^3\,dx\ ,\quad u=\text{Ln}^2x$$

$$v=\frac{x^4}{4}\ ,\quad du=2\,\text{Ln }x.\frac{dx}{x}$$

$$I=\frac{x^4}{4}.\text{Ln}^2x-\frac{1}{2}\int x^3.\text{Ln }x.\,dx \qquad (1)$$

نحسب التكامل الاخير بالتجزئة ايضا فنفرض :

$$dv_1=x^3\,dx\ ,\quad u_1=\text{Ln }x$$

$$v_1=\frac{x^4}{4}\ ,\quad du_1=\frac{dx}{x}$$

$$I_1 = \int x^3 \operatorname{Ln} x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \operatorname{Ln} x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx$$
$$= \frac{x^4}{4} \operatorname{Ln} x - \frac{x^4}{16}$$

نعوض في (1) فنجد :

$$I = \frac{x^4}{4} \operatorname{Ln}^2 x - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} \operatorname{Ln} x - \frac{x^4}{16} \right) + c$$
$$I = \frac{x^4}{4} \operatorname{Ln} x \left(\operatorname{Ln} x - \frac{1}{2} \right) + \frac{x^4}{32} + c$$

ملاحظة : يمكن استخدام طريقة التكامل بالتجزئة لحساب التكامل من الشكل :

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

نكتب التكامل بالشكل :

$$I_n = \int \frac{x^2+1-x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$$
$$= I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx \qquad (1)$$

حيث فرضنا :

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

والآن نحسب التكامل الثاني بطريقة التجزئة :

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int x \cdot \frac{x\,dx}{(1+x^2)^n}$$

نفرض $u = x$ ، $\frac{x\,dx}{(1+x^2)^n} = dv$ ومنه

$$du = dx \ , \quad v = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}}$$

فيكون :

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$
$$= \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \cdot I_{n-1}$$

نعوض في (1) فنجد :

$$I_n = I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}$$
$$I_n = \frac{3-2n}{2(1-n)} I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}$$

او بالشكل :

$$\boxed{I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}} \qquad (2)$$

نلاحظ انه لحساب التكامل I_n نبدأ بحساب I_{n-1} ثم لحساب I_{n-1} نحسب I_{n-2} الخ .... حتى نصل الى حساب :

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

الطريقة التي اتبعناها تدعى طريقة التراجع ، والدستور (2) يدعى دستور تدريج .

مثال : احسب التكامل :

$$I_3 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

نطبق الدستور (2) مع ملاحظة ان : $n=3$.

$$I_3 = \frac{2.3-3}{2(3-1)} \cdot I_2 + \frac{x}{2(3-1)(1+x^2)^2}$$
$$I_3 = \frac{3}{4} \cdot I_2 + \frac{x}{4(1+x^2)^2} \qquad (1)$$

ولحساب I_2 نطبق الدستور (2) ايضا فنجد :

$$I_2 = \frac{2.2-3}{2(2-1)} I_1 + \frac{x}{2(2-1)(1+x^2)}$$
$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{x}{2(1+x^2)}$$
$$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)}$$

نعوض في (1) فنجد :

$$I_3 = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right] + \frac{x}{4(1+x^2)^2}$$

$$I_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + c$$

كذلك يمكن تطبيق طريقة التكامل بالتجزئة لحساب التكامل من الشكل :

$$I_1 = \int \cos^n x \, dx$$

او :

$$I_2 = \int \sin^n x \, dx$$

فمثلا لحساب

$$I_1 = \int \cos^n x \, dx$$

نكتب التكامل بالشكل :

$$I_1 = \int \cos^{n-1} x . \cos x \, dx$$

نفرض $u = \cos^{n-1} x \quad , \quad dv = \cos x \, dx$

ثم نطبق دستور التكامل بالتجزئة فنحصل على المطلوب .

مثال : احسب التكامل :

$$I = \int \cos^3 x \, dx$$

نكتب التكامل بالشكل :

$$I = \int \cos^2 x . \cos x \, dx$$

نفرض : $u = \cos^2 x \quad , \quad dv = \cos x \, dx$

$$du = -2\cos x . \sin x \quad , \quad v = \sin x$$

$$I = \sin x . \cos^2 x + 2 \int \sin^2 x . \cos x \, dx$$

$$= \sin x . \cos^2 x + 2 \int \sin^2 x \, d(\sin x)$$

$$= \sin x . \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin^3 x + c$$

ويمكن حل هذا المثال بطريقة تغيير التحول فنكتب التكامل بالشكل :

$$I = \int \cos^2 x . \cos x . dx$$

$$I = \int (1-\sin^2 x) \, d \sin x$$

نفرض $u = \sin x$ ويكون

$$I = \int (1-u^2) \, du = u - \frac{u^3}{3} + c$$

$$I = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

تمـاريـن (١)

تمرين (١) : احسب التكاملات الاتية :

1. $\int (x + \sqrt{x})\, dx$, $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c$

2. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$, $6\sqrt{x} - \frac{1}{10} x^2 \sqrt{x} + c$

3. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x}}$, $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + c$

4. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$, $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$, $\frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + c$

6. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$, $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4} x^2 \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + c$

موجود في التمارين

تمرين (٢) : احسب التكاملات الاتية بطريقة تغيير المتحول :

1. $\int e^{5x}\, dx$, $\frac{1}{5} e^{5x} + c$

2. $\int \sin ax\, dx$, $-\frac{\cos ax}{a} + c$

3. $\int \cos 5x\, dx$, $\frac{\sin 5x}{5} + c$

4. $\int \frac{\operatorname{Ln} x}{x}\, dx$, $\frac{1}{2} \operatorname{Ln}^2 x + c$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$, $-\frac{\operatorname{ctg} 3x}{3} + c$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$, $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + c$

7. $\int \frac{dx}{3x-7}$, $\frac{1}{3} \operatorname{Ln} |3x-7| + c$

8. $\int \frac{dx}{1-x}$, $-\operatorname{Ln} |1-x| + c$

9. $\int \frac{dx}{5-2x}$, $-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |5-2x| + c$

10. $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$, $-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} |\cos 2x| + c$

11. $\int \operatorname{ctg} (5x-7) dx$, $\frac{1}{5} \operatorname{Ln} |\sin (5x-7)| + c$

12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg} 3x}$, $-\frac{1}{3} \operatorname{Ln} |\cos 3x| + c$

13. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{3}\, dx$, $3 \operatorname{Ln} \left|\sin \frac{x}{3}\right| + c$

14. $\int \operatorname{tg}x \cdot \sec^2 x\, dx$, $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + c$

15. $\int (\operatorname{ctg} e^x)\, e^x\, dx$, $\operatorname{Ln} |\sin e^x| + c$ موجود في التمارين

16. $\int (\operatorname{tg} 4x - \operatorname{ctg} \frac{x}{4}) dx$, $-\frac{1}{4} \operatorname{Ln} |\cos 4x| - 4\operatorname{Ln} \left|\sin \frac{x}{4}\right| + c$

17. $\int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx$, $\frac{\sin^3 x}{3} + c$

18. $\int \cos^3 x \cdot \sin x\, dx$, $-\frac{\cos^4 x}{4} + c$

19. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$, $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + c$

20. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$, $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + c$

21. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+1}}$, $\frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + c$

22. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$, $-\frac{1}{\sin x} + c$

23. $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$, $\frac{1}{2\cos^2 x} + c$

24. $\int \frac{tg\, x}{\cos^2 x} dx$, $\frac{1}{2} tg^2 x + c$

25. $\int \frac{ctg\, x}{\sin^2 x} dx$, $-\frac{1}{2} ctg^2 x + c$

[illegible] 26. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tgx-1}}$, $2\sqrt{tg\, x-1} + c$

[illegible] 27. $\int \frac{Ln\,(x+1)}{x+1} dx$, $\frac{Ln^2\,(x+1)}{2} + c$

28. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$, $\sqrt{2\sin x+1} + c$

29. $\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $2\sqrt{1+\sin^2 x} + c$

30. $\int \frac{\sqrt{tgx+1}}{\cos^2 x} dx$, $\frac{2}{3}\sqrt{(tgx+1)^3} + c$

31. $\int \frac{\cos 2x \, dx}{(2+3\sin 2x)^3}$, $-\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(2+3\sin 2x)^2} +$

32. $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} dx$, $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + c$

33. $\int \frac{Ln^2 x \, dx}{x}$, $\frac{Ln^3 x}{3} + c$

34. $\int \frac{\arcsin x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{\arcsin^2 x}{2} + c$

35. $\int \frac{arctg\, x \, dx}{1+x^2}$, $\frac{1}{2} arctg^2 x + c$

36. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $-\frac{\arccos^3 x}{3} + c$

37. $\int \frac{arctg\, x}{1+x^2} dx$, $-\frac{arcctg^2 x}{2} + c$

38. $\int \frac{x \, dx}{x^2+1}$, $\frac{1}{2} Ln\,(x^2+1) + c$

39. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$, $\frac{1}{2} Ln\,(x^2+2x+3) + c$

40. $\int \frac{\cos x \, dx}{2\sin x + 3}$, $\frac{1}{2} Ln\,(2\sin x + 3) + c$

41. $\int \frac{dx}{x \, Ln\, x}$, $Ln\,(Ln\, x) + c$

42. $\int 2x\,(x^2+1)^4 dx$, $\frac{(x^2+1)^5}{5} + c$

43. $\int tg^4 x \, dx$, $\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + c$

44. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\, arctgx}$, $Ln\, |arctg\, x| + c$

45. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(3tg\, x+1)}$, $\frac{1}{3} Ln\,(3tgx+1) + c$

46. $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx$, $\frac{1}{4} tg^4 x + c$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}$, $Ln\, |\arcsin x| + c$

48. $\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x} dx$, $\frac{1}{6} Ln\, |2+3\sin 2x| + c$

[illegible] 49. $\int \cos\,(Ln\, x) \frac{dx}{x}$, $\sin\,(Ln\, x) + c$

50. $\int \cos\,(a+bx)\,dx$, $\frac{1}{b} \sin\,(a+b\,x) + c$

51. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$, $e^{\sin x} + c$

52. $\int a^{x^2} \cdot x \, dx$, $\frac{a^{x^2}}{2 \ln a} + c$

53. $\int e^{\frac{x}{a}} \, dx$, $a \cdot e^{\frac{x}{a}} + c$

54. $\int (e^{2x})^2 \, dx$, $\frac{1}{4} e^{4x} + c$

55. $\int 3^x \cdot e^x \, dx$, $\frac{3^x \cdot e^x}{\ln 3 + 1} + c$

56. $\int (e^{5x} + a^{5x}) dx$, $\frac{1}{5} \left(e^{5x} + \frac{a^{5x}}{\ln a} \right) + c$

57. $\int e^{x^2+4x+2} (x+2) dx$, $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+2} + c$

58. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x \cdot b^x} dx$, $\frac{(\frac{a}{b})^x - (\frac{b}{a})^x}{\ln a - \ln b} - 2x + c$

59. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{2 + e^{2x}}$, $\frac{1}{2} \ln (2 + e^{2x}) + c$

موجود في التمارين 60. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} x) + c$

61. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$, $\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3x}{4}\right) + c$

62. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$, $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + c$

63. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$, $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{2+3x}{2-3x} \right| + c$

64. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$, $\ln \left| x + \sqrt{x^2+9} \right| + c$

65. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$, $\frac{1}{b} \ln \left| b\,x + \sqrt{b^2x^2-a^2} \right| + c$

66. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$, $\frac{1}{a} \ln \left| ax + \sqrt{b^2+a^2x^2} \right| + c$

67. $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$, $\frac{1}{2ac} \ln \left| \frac{ax-c}{ax+c} \right| + c$

68. $\int \frac{x^2 \, dx}{5-x^6}$, $\frac{1}{6\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}} \right| + c$

69. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + c$

70. $\int \frac{x \, dx}{x^4+a^4}$, $\frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2} + c$

71. $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, $\arcsin e^x + c$

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} \, x + c$

73. $\int \frac{\cos x \, dx}{a^2 + \sin^2 x}$, $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x}{a} \right) + c$

74. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$, $\arcsin (\ln x) + c$

في التمارين 75. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $-\frac{1}{2} (\arccos x)^2 + \sqrt{1-x^2} + c$

76. $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$, $\frac{1}{2} \ln (1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + c$

77. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$, $\frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + c$

في التمارين

78. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + c$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$

80. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$, $\operatorname{arctg} e^x + c$

81. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,.\,\sin 2x\,dx$, $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3} + c$

82. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $-2\sqrt{1+\cos^2 x} + c$

83. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$? $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + c$

84. $\int \frac{\sqrt[3]{tg^2 x}}{\cos^2 x}\,dx$, $\frac{3}{5}\sqrt[3]{tg^5 x} + c$

في التمارين

85. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, tg\, x\right) + c$

تمرين (٣) : احسب التكاملات الآتية من الشكل :

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\,dx$$

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c$

في التمارين

2. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$, $\frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + c$

3. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Ln}\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + c$

4. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$, $\frac{1}{4} \operatorname{Ln}\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + c$

5. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$, $\operatorname{arctg}(2x-1) + c$

6. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{5}} + c$

7. $\int \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+11}$, $\operatorname{Ln}|3x^2-7x+11| + c$

8. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\,dx$, $\frac{3}{10}\operatorname{Ln}(5x^2-3x+2) - \frac{11}{5\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{10x-3}{\sqrt{31}} + c$

9. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx$, $\frac{2}{3}\operatorname{Ln}(3x-1) + \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(2x+1) + c$

في التمارين

10. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\,dx$, $\frac{1}{5}\operatorname{Ln}(5x^2-x+2) + \frac{8}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{10x-1}{\sqrt{39}} + c$

في التمارين

11. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx$, $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{Ln}|2x^2-x+1| + \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{\sqrt{7}} + c$

12. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$, $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2tg x+1}{\sqrt{7}} + c$

تمرين (٤) : احسب التكاملات الآتية من الشكل

$$\int \frac{Ax + b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

في التمارين

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$, $\frac{1}{2}\arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + c$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$, $\operatorname{Ln}\left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + c$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$, $\operatorname{Ln}\left| x+a+\sqrt{2ax+x^2}\right| + c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{6x+7}{\sqrt{109}} + c$

في التمارين الإضافية 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Ln} \left| 6x+5+\sqrt{12x(3x+5)} \right| + c$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$, $\arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{17}} + c$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \text{Ln} \left| 10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)} \right| + c$

في التمارين الإضافية 8. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$,

$$\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4} \text{Ln} \left| 2x+1+\sqrt{4x^2+4y+3} \right| + c$$

تمرين (٥) : احسب التكاملات الآتية بطريقة التجزئة

1. $\int x\, e^x\, dx$, $e^x (x-1) + c$
2. $\int x \text{ Ln } x\, dx$, $\frac{1}{2} x^2 \left(\text{Ln } x - \frac{1}{2} \right) + c$
3. $\int x \sin x\, dx$, $\sin x - x \cos x + c$
4. $\int \text{Ln } x\, dx$, $x (\text{Ln } x - 1) + c$
5. $\int \arcsin x\, dx$, $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$
6. $\int \text{Ln } (1-x)dx$, $-x-(1-x) \text{ Ln}(1-x) + c$
7. $\int x^n . \text{ Ln } x\, dx$, $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\text{Ln } x - \frac{1}{n+1} \right) + c$
8. $\int x . \text{ arctg } x\, dx$, $\frac{1}{2} \left[(x^2+1)\text{arctg } x - x \right] + c$
9. $\int x . \arcsin x\, dx$, $\frac{1}{4} \left[(2x^2-1)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right] + c$ في التمارين
10. $\int \text{Ln } (x^2+1)dx$, $x \text{ Ln}(x^2+1) - 2x + 2\text{arctg } x + c$

11. $\int \text{arctg} \sqrt{x}\, dx$, $(x+1)\text{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + c$
12. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$, $2\arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + c$

في التمارين الإضافية 13. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$, $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \text{arctg} \sqrt{x} + c$

14. $\int x . \cos^2 x\, dx$, $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + c$

في التمارين الإضافية 15. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $x - \sqrt{1-x^2} . \arcsin x + c$

16. $\int \frac{x \text{ arctg } x}{(x^2+1)^2} dx$, $\frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \text{arctg } x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{arctg } x}{1+x^2} + c$

17. $\int x \text{ arctg} \sqrt{x^2-1}\, dx$, $\frac{1}{2} x^2 \text{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + c$

18. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$, $\text{Ln} \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{1}{x} \arcsin x + c$

19. $\int \text{Ln } (x+\sqrt{1+x^2})dx$, $x \text{ Ln} \left| x+\sqrt{1+x^2} \right| - \sqrt{1+x^2} + c$

20. $\int \arcsin x . \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + c$

في التمارين التالية استخدم تحويلات مثلثية .

21. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx$, $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + c$

22. $\int x^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$, $2\arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4} x^3 \sqrt{4-x^2} + c$

23. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c$

24. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$, $\sqrt{x^2-a^2} - \arccos\frac{a}{x} + c$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$, $\frac{x}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + c$

الفصل الثاني

مكاملة التوابع الكسرية ، الصماء ، والمثلثية

سندرس في بداية هذا الفصل مكاملة التوابع الكسرية من الشكل :

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

حيث $f(x)$ ، $\varphi(x)$ كثيرا حدود بأمثال حقيقية • وقبل البدء في طرق مكاملة هذه التوابع لا بد لنا من عرض بعض الخواص الاساسية لكثيرات الحدود في الحالة العامة •

2-1 • تفريق كثير الحدود الى مضاريب في الحالة العامة

نسمي كثير حدود او تابع ناطق صحيح في المتحول x التابع

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

حيث n عدد صحيح يدعى درجة كثير الحدود • والامثال A_0 ، A_1 ، $\dots A_n$ هي اعداد حقيقية او عقدية ، كما ان المتحول x يمكن ان يأخذ قيما حقيقية او قيما عقدية •

نسمي جذراً لكثير الحدود قيمة المتحول x التي تعدم كثير الحدود •

نظرية (١) : نظرية بيزو

ان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على ثنائي الحد $x-a$ يساوي $f(a)$

البرهان : ان حاصل قسمة $f(x)$ على المقدار $x-a$ هو كثير حدود

$f_1(x)$ درجته اصغر من درجة كثير الحدود $f(x)$ بـ واحد ، والباقي هـو عـدد ثابت R . يمكن ان نكتب :

$$f(x) = (x-a).f_1(x) + R \qquad (1)$$

ان هذه المساواة صحيحة من اجل جميع قيم x المخالفة لـ a ; (لان التقسيم عـلى $x-a$ لا معنى له من اجل $x=a$) .

فعندما تتناهى x نحو a فان نهاية الطرف الايسر من المسـاواة (1) تساوى $f(a)$ ونهاية الطرف الايمن تساوى R . والتابعان $f(x)$ ، $(x-a)\,f_1(x)+R$ متساويان من اجل جميع قيم $x\neq a$ ونهايتاهما من اجـل $x\to a$ متساويتان ايضا اى $f(a)=R$.

نتيجة : اذا كان a جذراً لكثير الحدود اى اذا كان $f(a)=o$ عـندئذ $f(x)$ يقبل القسمة تماما عـلى المقدار $x-a$ وبالتالي يمكـن ان نكتب :

$$f(x) = (x-a).f_1(x)$$

حيث $f_1(x)$ كثير حدود .

مثال (١) : ان كثير الحدود :

$$f(x) = x^3-6x^2+11x-6$$

ينعدم من اجل $x=1$ اى $f(1)=o$ عـندئذ يكون كثير الحـدود $f(x)$ قابلا للقسمة تماما عـلى المقدار $x-1$:

$$x^3-6x^2+11\,x-6 = (x-1)(x^2-5x+6)$$

وبالنسبة للمعادلات ذات المجهول الواحد ، نسمي جذراً للمعادلة كـل عـدد (حقيقي او عـقدى) اذا عوضناه في المعادلة بدلا من x حـوّل المعادلة الى مطابقة .

مثال (٢) : الاعـداد $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$, $x_3=\frac{9\pi}{4}$.... هي جذور للمعادلة $\cos x = \sin x$.

ونسمي معادلة جبرية من الدرجة n المعادلات من الشكل $P(x)=o$ حيث $P(x)$ كثير حدود من الدرجة n . وينتج من هذا التعريف ان جـذور المعادلة الجبرية $p(x)=o$ تتطابق مع جذور كثير الحدود $P(x)$ والمسألـة المطروحة الان هي معرفة فيما اذا كانت كل معادلة تملك جذورا ؟ .

وبالطبع الجواب هو كلا لانه يوجد معادلات غير جبرية لا تملك جـذورا حقيقية او عـقدية مثل : المعادلة $e^x=o$

بينما اذا اعتبرنا المعادلات الجبرية فقط فيكون الجواب نعم . وذلك بالاعتماد عـلى النظرية الاساسية في الجبر .

نظرية (٢) : (النظرية الاساسية في الجبر)

كل تابع ناطق وصحيح $f(x)$ يملك عـلى الاقل جذرا واحدا حقيقيا او عـقديا .

(تبرهن هذه النظرية في الجبر المتقدم ونقبلها هنا دون برهان)

نستفيد من هذه النظرية لبرهان النظرية الاتية :

نظرية (٣) : كل كثير حدود من الدرجة n يمكن تفريقه الى n مـن المضاريب الخطية من الشكل $(x-a)$ مضروبة بامثال x^n .

البرهان : ليكن كثير الحدود $f(x)$ من الدرجة n .

$$f(x) = A_0\, x^n + A_1\, x^{n-1} + \dots + A_n$$

بالاعـتماد عـلى النظرية الاساسية في الجبر فان كثير الحدود يملك عـلى الاقل جذرا واحدا وليكن a_1 . وحسب نتيجة نظرية بيزو يمكن ان نكتب :

$$f(x) = (x-a_1).f_1(x)$$

حيث $f_1(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n-1)$. كما ان كثير الحدود $f_1(x)$ يملك ايضا جذرا a_2 فنكتب :

$$f_1(x) = (x-a_2).f_2(x)$$

حيث $f_2(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n-2)$. وبالمثل :

$$f_2(x) = (x-a_3).f_3(x)$$

وهكذا بتكرار هذه الطريقة عددا مناسبا من المرات نحصل على :

$$f_{n-1}(x) = (x-a_n)f_n$$

حيث f_n كثير حدود من الدرجة صفر اي يساوي عددا ثابتا .

هذا الثابت يساوي لا مثال x^n ، اي $f_n = A_0$

عند ئذ نستطيع ان نكتب :

$$f(x) = A_0 (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n) \qquad (2)$$

من هذه المساواة نستنتج ان الاعداد $a_1 , a_2 , ..., a_n$ هي جذور كثير الحدود $f(x)$ لان الطرف الايمن (وبالتالي الطرف الايسر) يساوي الصفر عندما نعوض ؛ $x=a_1 , x=a_2 , ... x=a_n$

مثال (٣) : ان كثير الحدود :

$$f(x) = x^3-6x^2+11x-6$$

ينعدم من اجل $x=1$, $x=2$, $x=3$ فيكتب بالشكل :

$$x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

ان اي قيمة اخرى $x=a$ تختلف عن الاعداد $a_1 , a_2 , ... a_n$ لا يمكن ان تكون جذرا لكثير الحدود $f(x)$ لان اي مضروب من مضاريب الطرف الايمن

من العلاقة (2) لا ينعدم من اجل $x=a$ ، لذلك يمكن ان نتوصل للنتيجة الاتية :

كل كثير حدود من الدرجة n لا يملك اكثر من n جذرا مختلفا .

نظرية (٤) :

اذا كان $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ كثيرى حدود من الدرجة n وتطابقت قيمتاهما من اجل $n+1$ قيمة مختلفة $a_0 , a_1 , a_2 ... a_n$ للمتحول المستقل x

عند ئذ $\varphi_1(x)$ يطابق $\varphi_2(x)$.

البرهان : نفرض $f(x)$ يساوي الى فضل كثيرى الحدود $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$

اي : $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$.

فحسب هذا الفرض ، ان $f(x)$ هو كثير حدود لا تزيد درجته عن n وينعدم من اجل : $x=a_1 , x=a_2 ... x=a_n$ عند ئذ يكتب بالشكل :

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$$

وحسب الفرض ايضا فان $f(x)$ ينعدم دوما من اجل $x=a_0$ اي $f(a_0) = 0$ حتى ولو لم ينعدم اي من المضاريب الخطية وبالتالي $A_0=0$ وينتج من المساواة (2) ان كثير الحدود $f(x)$ يطابق الصفر ومنه :

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$$

اذن : $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$

نظرية (٥) : اذا كان كثير الحدود :

$$F(x) = A_0x^n+A_1x^{n-1}+ ... +A_{n-1}x+A_n$$

يطابق الصفر مهما كانت x عند ئذ تكون جميع امثاله تساوي الصفر .

البرهان : نفرق كثير الحدود الى مضاريب اعتمادا على الدستور(2) :

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n =$$

$$= A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \qquad (1)$$

فاذا كان كثير الحدود يطابق الصفر مهما كانت x فيجب ان يطابق الصفر ايضا من اجل اى قيمة ل x تخالف $a_1, a_2, \dots, a_n$ • وفي هذه الحالة فان المضاريب $x-a_1$ ، $x-a_2 \dots x-a_n$ لا تنعدم وبالتالي $A_0=0$ •

ونبرهن بنفس الطريقة ان $A_1=0$ و $A_2=0$ ، الخ •••

نظرية (٦) : اذا تطابق كثيرا حدود فان امثال الحدود ذات القوى المتساوية تكون متساوية •

البرهان : ان فضل كثيرى حدود متطابقين هو كثير حدود مطابق للصفر • وبالتالي فحسب النظرية السابقة تكون جميع الامثال في كثير الحدود الناتج تساوي الصفر •

مثال : اذا كان كثير الحدود ax^3+bx^2+cx+d مطابقا لكثير الحدود x^2-5x عندئذ يكون $a=0$, $b=1$, $c=-5$, $d=0$

2-2. الجذور المكررة لكثير حدود

وجدنا ان كثير الحدود $f(x)$ من الدرجة n يمكن تفريقه الى جداء مضاريب خطية من الشكل :

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \qquad (1)$$

فاذا كان بعض هذه المضاريب مكررا فيمكن تجميعها ، وكثير الحدود يكتب بالشكل :

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_n)^{k_m} \qquad (1')$$

حيث $k_1+k_2+\dots+k_m = n$

في هذه الحالة نقول : ان الجذر a_1 مكرر k_1 مرة والجذر a_2 مكرر k_2 مرة الخ • k_1 ، k_2 ، $k_m \dots$ تدعى مراتب التكرار وعندما $k_1 = 1$ نقول ان الجذر a_1 هو جذر بسيط لكثير الحدود •

مثال : ان كثير الحدود $f(x) = x^3-5x^2+8x-4$

يمكن ان يفرق الى مضاريب خطية ، فيكتب بالشكل :

$$f(x) = (x-2)(x-2)(x-1)$$

$$f(x) = (x-2)^2 . (x-1)$$

نلاحظ ان $a_1 = 2$ هو جذر مكرر مرتين (جذر مضاعف) وان $a_2 = 1$ هو جذر بسيط •

فاذا كان a جذرا مكررا k مرة لكثير حدود فيمكن ان نقول : ان كثير الحدود يملك k من الجذور المتساوية • ونستنتج من نظرية تفريق كثير الحدود الى مضاريب خطية •

النظرية الاتية :

كل كثير حدود من الدرجة n يملك تماما n من الجذور (الحقيقية او العقدية) •

ملاحظة : ما قلناه عن جذور كثير الحدود :

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$$

يمكن ان يقال بالنسبة لجذور المعادلة الجبرية :

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

2-3. تفريق كثير الحدود في حالة الجذور العقدية

وجدنا في الدستور (1) من الفقرة (2-2) ان الجذور $a_1, a_2, \dots, a_n$ يمكن ان تكون حقيقية او عقدية • في مثل هذه الحالة نذكر النظرية الاتية :

نظرية : اذا كان العدد $a+bi$ جذرا عقديا لكثير الحدود $f(x)$ ذي الامثال الحقيقية ، فان العدد المرافق له $a-bi$ يكون جذرا له •

البرهان : اذا عوضنا المتحول x في كثير الحدود $f(x)$ بالعدد العقدي $a+bi$ وقمنا باجراء العمليات الواردة في كثير الحدود ثم جمعنا الحدود التي تحوي i والحدود التي لا تحوي i نحصل على :

$$f(a+bi) = M+Ni = o$$

ومنه $M = o$, $N = o$.

واذا عوضنا المتحول x في كثير الحدود $f(x)$ بالعدد المرافق $a-bi$ وقمنا بنفس العمليات السابقة نحصل على :

$$f(a-bi) = M-Ni$$

وبما ان $M = o$, $N = o$ نجد : $f(a-bi) = o$

وبالتالي فان $a-bi$ هو جذر لكثير الحدود •

ونستنتج مما سبق : ان الجذور العقدية الواردة في تفريق كثير الحدود

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

تكون مترافقة مثنى مثنى • فاذا اجرينا عملية الضرب لمضروبين خطيين يتعلقان بجذرين مترافقين نحصل على ثلاثي حدود من الدرجة الثانية ذي امثال حقيقية مميزه سالب :

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)] = [(x-a)-bi][(x-a)+bi]$$

$$= (x-a)^2+b^2 = x^2-2ax+a^2+b^2 = x^2+px+q$$

حيث $p = -2a$, $q = a^2+b^2$ عددان حقيقيان •

فاذا كان العدد $a+bi$ جذرا مكررا من المرتبة k فان العدد المرافق $a-bi$ يكون جذرا مكررا من المرتبة k ايضا •

اي : عند تفريق كثير الحدود الى مضاريب فان عدد المضاريب الخطية $[x-(a+bi)]$ يساوي عدد المضاريب الخطية $[x-(a-bi)]$ وبالتالي : فان كل كثير حدود ذا امثال حقيقية يمكن تفريقه الى مضاريب حقيقية من الدرجة الاولى ومن الدرجة الثانية ، فاذا قمنا بتجميع المضاريب المكررة نستطيع أن نكتب كثير الحدود بالشكل :

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots$$
$$\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$$

حيث : $k_1+k_2+\dots k_r+2m_1+\dots+2m_s = n$

مكاملة التوابع الكسرية

2-4. في هذه الفقرة سندرس مكاملة التوابع الكسرية من الشكل :

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

حيث $f(x)$, $\varphi(x)$ كثيرا حدود في المتحول x بامثال حقيقية •

اي :

$$f(x) = B_0x^m+B_1x^{m-1}+\dots+B_m$$
$$\varphi(x) = A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n$$

فاذا كانت درجة كثير الحدود في الصورة اكبر من درجة كثير الحدود في

المخرج ، نقوم باجراء عملية تقسيم الصورة على المخرج • فاذا كان $Q(x)$ حاصل قسمة الصورة على المخرج و $R(x)$ باقي القسمة عندئذ نكتب :

$$\frac{f(x)}{(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)}$$

حيث درجة $R(x)$ اصغر من درجة $\varphi(x)$

ويسمى الكسر الذى درجة صورته اصغر من درجة مخرجه بالكسر النظامي ، فمكاملة التابع الكسرى $\frac{f(x)}{(x)}$ ترد الى مكاملة كثير الحدود $Q(x)$ ومكاملة الكسر النظامي $\frac{R(x)}{\varphi(x)}$ •

مثال (١) : ليكن التابع الكسرى :

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$$

بما ان درجة الصورة اكبر من درجة المخرج ، لذلك نقسم الصورة على المخرج فنجد :

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1} = x^2-2x+3-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}$$

نلاحظ ان حاصل القسمة $Q(x)$ هو كثير حدود سهل المكاملة •

اما الكسر في الطرف الثاني فهو كسر نظامي درجة صورته اصغر من درجة مخرجه • فعند مكاملة التوابع الكسرية تعترضنا دوما مسألة مكاملة الكسور النظامية ،

تعريف : ان الكسور الناطقة النظامية من الاشكال الاتية :

I . $\frac{A}{x-a}$

II . $\frac{A}{(x-a)^k}$ $\quad (k \geq 2)$

III . $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\quad (\frac{p^2}{4} - q < 0)$

اى جذرا المخرج عقديان :

IV . $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $\quad (\frac{p^2}{4} - q < 0)$

حيث k صحيح موجب ≥ 2

تدعى كسور بسيطة •

وسنبرهن ان كل كسر ناطق يمكن كتابته بشكل مجموع كسور بسيطة • لـــذا سنركز اهتمامنا على مكاملة الكسور البسيطة •

ان التكامل من الشكل الاول (I) والتكامل من الشكل الثاني (II) امـــر بسيط لا يحتاج الى عناء •

$$\text{I} . \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\,\text{Ln}\,|x-a| + c$$

$$\text{II} . \int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx =$$

$$= A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c$$

حساب التكامل من الشكل الثالث :

$$\text{III} . \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx, \quad (p^2-4q<0)$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+a}\,dx$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+a}\,dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{A}{2}\,\text{Ln}\,|x^2+px+q| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}$$

$$= \frac{A}{2}\,\text{Ln}\,|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,.\text{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$$

(انظر 5 - 1)•

ونلاحظ ان الطريقة التي اتبعناها في حساب التكامل من الشكل الثالث تتلخص في الخطوات الاتية :

١ ـ نكمل المقدار x^2+px الى مربع كامل ونكتب ثلاثي الحدود في المخرج بالشكل :

$$x^2+px+q = x^2+px+q+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}$$
$$= (x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$$

٢ ـ نفرض $q-\frac{p^2}{4}=m^2$ (لأن $q-\frac{p^2}{4}>0$)

٣ ـ نجرى تغييرا في المتحول فنضع :

$$t=(x+\frac{p}{2})=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'$$

٤ ـ نعوض في التكامل المفروض فنجد :

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+m^2}dt$$

٥ ـ نجزىء التكامل الاخير الى مجموع تكاملين ونجرى عملية التكامل فنحصل على المطلوب .

مثال (١) :

احسب التكامل : $\int\frac{3x+5}{x^2+x+1}dx$

الحل : نلاحظ ان $p^2-4q=1-4=-3<0$

لذلك نجرى تغييرا في المتحول فنضع :

$$t=\frac{1}{2}(x^2+x+1)' ,$$

اى $x=t-\frac{1}{2}$, $dx=dt$, $t=x+\frac{1}{2}$

نعوض في التكامل المعطى فنجد :

$$\int\frac{3x+5}{x^2+x+1}dx = \int\frac{3(t-\frac{1}{2})+5}{t^2+\frac{3}{4}}dt$$
$$=\int\frac{3t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{7}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{3}{2}\operatorname{Ln}(t^2+\frac{3}{4})+\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+c$$
$$=\frac{3}{2}\operatorname{Ln}(x^2+x+1)+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

حساب التكامل من الشكل الرابع :

$$\text{IV.}\quad\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx\qquad(k=2,3,\ldots)$$

لمكاملته نقوم باجراء التحويلات الاتية :

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^k}dx$$
$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}\qquad(1)$$

التكامل الاول يمكن حسابه بتغيير المتحول ، فنفرض :

$x^2+px+q=t$ ومنه $(2x+p)dx=dt$

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{dt}{t^k}=\int t^{-k}dt$$
$$=\frac{t^{-k+1}}{1-k}+c=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+c\qquad(2)$$

اما بالنسبة للتكامل الثاني من العلاقة (1) فنضع :

$$I_k=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$= \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} ,$$

حيث فرضنا $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$, $q-\frac{p^2}{4}=m^2$

(لانه بالفرض ، جذرا المخرج عقديان ، اى : $(q-\frac{p^2}{4}>0)$:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2+m^2-t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt =$$

$$= \frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt \quad (3)$$

والتكامل الاخير يحول للشكل :

$$\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt = \int\frac{t.t.dt}{(t^2+m^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t.\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\int t.d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right)$$

نجز التكامل الاخير بالتجزئة فنجد :

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t.\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]$$

نعوض هذه النتيجة في العلاقة (3) فنجد :

$$I_k = \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} +$$

$$+ \frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right] =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}$$

ونلاحظ ان التكامل الاخير هو من نفس شكل التكامل I_k الا ان درجة المخرج في التابع المستكمل اقل بواحد اى $(k-1)$ ولذلك نستطيع ان نعبر

عن التكامل I_k بدلالة I_{k-1} .

فاذا طبقنا هذه الطريقة على التوالي نصل الى التكامل المعروف :

$$I_1 = \int\frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{m} + c$$

واذا عوضنا اخيرا t , m بما يساويهما من الفرض نحصل على التكامل (IV) بدلالة x , A , B , p , q

مثال (٢) : احسب التكامل الاتي :

$$\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - 2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+3} - 2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

لحساب التكامل الاخير نضع :

$t = \frac{1}{2}(x^2+2x+3)' = x+1$ ، فيكون :

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int\frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int\frac{dt}{(t^2+2)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2}$$

ولنحسب التكامل الاخير :

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{t\cdot d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[- \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right]$$

واخيرا نجد :

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

مثال (٣) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^3}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{2}{3}+1-1}{(x^2+x+1)^3}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\, dx -$$

$$- \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$$

لحساب التكامل الاول نفرض : $x^2+x+1 = t$, $(2x+1)dx = dt$

$$I_1 = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{2}\int t^{-3}\, dt = \frac{-3}{4t^2}$$

$$I_1 = \frac{-3}{4(x^2+x+1)^2} \qquad (1)$$

لحساب التكامل الثاني :

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

نفرض : $x+\frac{1}{2} = u$ فيكون :

$$I_2 = -\frac{5}{2}\int \frac{du}{(u^2+\frac{3}{4})^3} = -\frac{5}{2}\int \frac{du}{(\frac{3}{4})^3(\frac{4}{3}u^2+1)^3}$$

نفرض : $\frac{2u}{\sqrt{3}} = t$ فيكون : $du = \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt$

$$I_2 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^3 \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$$

نكامل الاخير بالتجزئة ، فنضع : $t = u$, $v = \frac{1}{(t^2+1)}$

ومنه : $dv = \frac{-2t\, dt}{(t^2+1)^3}$

بتطبيق الدستور : $u \cdot v = \int u\, dv + \int v\, du$

$$\frac{t}{(t^2+1)^2} = -2\int \frac{t^2\, dt}{(t^2+1)^3} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

$$= -2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} + 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^3} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{(t^2+1)^2} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \right] \qquad (2)$$

ولحساب التكامل الاخير : $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$

نستخدم نفس الطريقة : نفرض : $t = u$, $\frac{1}{t^2+1} = v$

فيكون $dt = du$, $dv = \frac{-2t\, dt}{(t^2+1)^2}$

كذلك نستخدم العلاقة $u \cdot v = \int u\, dv + \int v\, du$

$$\frac{t}{t^2+1} = -2\int \frac{dt}{(t^2+1)} + \int \frac{2\, dt}{(t^2+1)^2} + \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t \right]$$

بالتعويض في (2) نجد :

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right]$$

$$I_2 = \frac{-5\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^3 \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$$

نعوض t بدلالة x من الفرض فنجد :

$$I_2 = -\frac{40\sqrt{3}}{27}\left[\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1\right]^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right]^2+1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right]$$

$$I = I_1 + I_2$$

2-5. تفريق الكسور الناطقة النظامية الى كسور بسيطة .

سنبرهن ان كل كسر ناطق نظامي (درجة صورته اصغر من درجة مخرجه) يمكن تفريقه بشكل وحيد الى عدد منته من الكسور الناطقة البسيطة .

ليكن الكسر الناطق النظامي : $\frac{F(x)}{f(x)}$

ولنفرض ان امثال كثيري الحدود في الصورة والمخرج اعداد حقيقية وان الكسر غير قابل للاختصار (اى لا يوجد للصورة والمخرج جذور مشتركة) .

ولنبرهن النظرية الاتية :

نظرية (١) : ليكن $x=a$ جذرا مكررا من المرتبة k لكثير الحدود في المخرج .

اى $f(x) = (x-a)^k . f_1(x)$ ، $f_1(a) \neq 0$:

فالكسر النظامي $\frac{F(x)}{f(x)}$ يمكن تفريقه الى مجموع كسرين نظاميين من الشكل

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} . f_1(x)} \qquad (1)$$

حيث A يخالف الصفر و $F_1(x)$ كثير حدود درجته اصغر من درجة

المخرج $(x-a)^{k-1}.f_1(x)$.

البرهان : لنكتب المطابقة :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - A\, f_1(x)}{(x-a)^k . f_1(x)} \qquad (2)$$

(وهذه المطابقة محققة مهما كانت A) . ولنعين A بحيث يكون كثير الحدود $F(x) - A\, f_1(x)$ قابلاً القسمة على $(x-a)$.

بالاستفادة من نظرية بيزو ، يلزم ويكفي ان تتحقق المساواة :

$$F(a) - A\, f_1(a) = 0$$

بما ان $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$ يمكن تعيين A بصورة وحيدة من المساواة السابقة :

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}$$

من اجل هذه القيمة لـ A لدينا :

$$F(x) - A\, f_1(x) = (x-a)\, F_1(x)$$

حيث $F_1(x)$ كثير حدود درجته اصغر من درجة كثير الحدود $(x-a)^{k-1}. f_1(x)$ واذا اختصرنا الكسر في العلاقة (2) بتقسيم حديه على $(x-a)$ نحصل على العلاقة المطلوبة (1) .

نتيجة : يمكن اتباع نفس طريقة البرهان السابق من اجل الكسر النظامي :

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} . f_1(x)}$$

الوارد في العلاقة (1) . بالمثل ، اذا كان مخرج الكسر يقبل جذرا مكررا $x=a$ من المرتبة k يمكن ان نكتب :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)}$$

حيث : $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ كسر نظامي غير قابل للاختصار • ويمكن تطبيق هذه النظرية ايضا على هذا الكسر الجديد اذا كان $f_1(x)$ يقبل جذورا حقيقية اخرى •

ولندرس الان الحالة التي يكون فيها المخرج يملك جذورا عقدية • ولنذكر اولا ان الجذور العقدية لكثير الحدود ذى الامثال الحقيقية هي مترافقة مثنى مثنى •

عند تفريق كثير الحدود ذى الامثال الحقيقية نلاحظ ان كل زوج من الجذور العقدية المترافقة يقابلها تركيب من الشكل : x^2+px+q • فاذا كانت الجذور العقدية المترافقة مكررة من المرتبة μ فان التركيب المقابل لها يكون $(x^2+px+q)^{\mu}$ •

نظرية (٢) : اذا كان $f(x)=(x^2+px+q)^{\mu} \cdot \varphi_1(x)$ حيث $\varphi_1(x)$ كثير حدود غير قابل القسمة على x^2+px+q فان الكسر النظامي $\frac{F(x)}{f(x)}$ يمكن التعبير عنه بمجموع كسرين نظاميين من الشكل التالي :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{\phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1} \cdot \varphi_1(x)} \qquad (3)$$

حيث $\phi_1(x)$ كثير حدود درجته اقل من درجة كثير الحدود $(x^2+px+q)^{\mu-1} \cdot \varphi_1(x)$

البرهان : لنكتب المطابقة الاتية :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2+px+q)^{\mu} \cdot \varphi_1(x)}$$

$$= \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{F(x)-(Mx+N)\,\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu} \cdot \varphi_1(x)} \qquad (4)$$

المحققة مهما يكن M ، N ولنعين M ، N بحيث يكون كثير الحدود $F(x)-(Mx+N) \cdot \varphi_1(x)$ قابلا للقسمة على المقدار x^2+px+q •

لذلك يلزم ويكفي ان يكون للمعادلة :

$$F(x) - (Mx+N)\,\varphi_1(x) = 0$$

جذران $\alpha \pm i\beta$ هما نفس جذرى ثلاثي الحدود x^2+px+q وبالتالي يكون :

$$F(\alpha+i\beta) - [M(\alpha+i\beta)+N] \cdot \varphi_1(\alpha+i\beta) = 0$$

او :

$$M(\alpha+i\beta) + N = \frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$$

لكن الكسر $\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ هو عدد عقدى يمكن كتابته بالشكل $k+iL$ حيث k ، L عددان حقيقيان ، وبذلك يكون :

$$M(\alpha+i\beta)+N = k+iL$$

ومنه :

$$M\alpha+N = k \quad , \quad M\beta = L$$

$$M = \frac{L}{\beta} \quad , \quad N = \frac{k\beta - L\alpha}{\beta}$$

فاذا اخذنا الامثال M ، N بهذه الطريقة فان كثير الحدود $F(x)-(Mx+N) \cdot \varphi_1(x)$ يقبل العدد $\alpha+i\beta$ جذرا له ، وبالتالي يقبل العدد $\alpha-i\beta$ جذرا له ايضا • وبالتالي فان كثير الحدود هذا يقبل القسمة على $x-(\alpha+i\beta)$ وعلى $x-(\alpha-i\beta)$ وبالتالي يقبل القسمة على جدائهما ، اى يقبل القسمة على المقدار x^2+px+q ، فاذا سمينا حاصل هذه القسمة $\phi_1(x)$ نجد :

$$F(x) - (Mx+N) \cdot \varphi_1(x) = (x^2+px+q)\,\phi_1(x)$$

فاذا اختصرنا المقدار x^2+px+q من حدى الكسر في العلاقة (4) نحصل على العلاقة (3) ، وواضح ان $\phi_1(x)$ هو كثير حدود من درجة اصغر من درجة المخرج •

اذا طبقنا النظريتين (1) ، (2) على الكسر النظامي $\frac{F(x)}{f(x)}$ نستطيع

تعيين جميع الكسور البسيطة المتعلقة بجذور المخرج $f(x)$ • وعنـــد ئـــذ نستطيع ان نقول : اذا كان

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \cdots\cdots (x^2+pxq)^{\mu} \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots (x^2+px+q)^{\nu}$$

فان الكسر $\frac{F(x)}{f(x)}$ يمكن تـفريقه بالشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} + \\ & + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \\ & - - - - - - - - - - - - - - - - \\ & + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \cdots\cdots \\ & - - - - - - - - - - - - - - - - \\ & + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}} + \\ & + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ويمكن تعيين الامثال A , A_1 , B ... , B_1 , ... اذا لاحظنا ان المساواة (5) هي مطابقة ، وبالتالي اذا وحدنا مخارج هذه الكسور نحصل عـــلى كثير الحدود في صورة الطرف الايمن يطابق كثير الحدود في صورة الطـــرف الايسر • فاذا ساوينا بين امثال القوى المتساوية لـ x في الطرفين نحصـــل عـلى جملة معادلات تعين لنا الامثال المجهولة A ، A_1 ، .... B ، B_1 ، ... ويمكن ايضا ان نعين هذه الامثال بالاعـــتماد عـلى الملاحظة التالية :

ان كثيرى الحدود في الطرفين الايمن والايسر من المساواة بعد توحيـد مخارج الكسور في الطرفين ، متطابقان وبالتالي فان اى قيمة عـددية لاحد همـا

تساوى القيمة العددية للاخر مهما اعطينا الى x من قيم ، لذلـــك اذا اعـطينا الى x قيما عـددية نختارها كما نشاء نحصل عـلى المعادلات اللازمة لتعيين هذه الامثال •

ويمكن ان نوجز ما سبق بما يلي : لتـفريق الكسر النظامي $\frac{F(x)}{f(x)}$ الـــى كسور بسيطة نميز اربع حالات :

الحالة الاولى : اذا كانت جميع مضاريب المخرج $f(x)$ من الدرجة الاولى وغـير مكررة • عـند ئذ كل مضروب غـير مكرر مثل $(x-a)$ يوافقه كسر بسيـــط من الشكل $\frac{A}{x-a}$ حيث A عـدد ثابت •

مثال (١) : فرق الكسر الاتي الى مجموع كسور بسيطة :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}$$

نكتب الكسر بالشكل التالي :

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \cancel{\frac{B}{x-1}} + \frac{B}{x-1} + \frac{c}{x+2} \qquad (1)$$

لتعيين الثوابت نتبع الطريقة العامة وذلك بتوحيد المخارج وحذفهـــا واجراء التطابق بين امثال قوى x المتساوية في الطرفين :

$$2x+3 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+cx(x-1)$$
$$= A(x^2+x-2) +Bx^2+2Bx+cx^2-cx$$
$$2x+3 = (A+B+c)x^2 +(A+2B-c)x-2A$$

اذا ساوينا بين امثال قوى x المتساوية في الطرفين نجد :

$$A+B+c = 0 \qquad (1)$$
$$A+2B-c = 2 \qquad (2)$$
$$-2A = 3 \qquad (3)$$

من الاخيرة $A=\frac{-3}{2}$ نعوض A في الاولى والثانية فنجد :

$$B + c = \frac{3}{2}$$

$$2B - c = \frac{7}{2}$$

بالجمع نجد : $3B = 5$ ومنه $B = \frac{5}{3}$

بالتعويض في (1) نجد $c = -\frac{1}{6}$.

ويمكن في مثل هذه الحالة اللجوء الى طريقة اسهل من الطريقة العامة وذلك بضرب الطرفين باحد مخارج الكسور البسيطة في الطرف الايمن واجراء الاختصار ثم اعطاء x القيمة التي تعدم المخرج .

ففي المثال (١) : نضرب الطرفين بـ x ونختصر فنجد :

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} = A + \frac{Bx}{x-1} + \frac{cx}{x+2}$$

نعطي الى x القيمة صفر فنجد : $A = -\frac{3}{2}$

وبالمثل نضرب الطرفين بـ $x-1$ ونختصر فنجد :

$$\frac{2x+3}{x(x+2)} = \frac{A(x-1)}{x} + B + \frac{c(x-1)}{x+2}$$

نعطي الى x القيمة $x = 1$ فنجد :

$$\frac{5}{3} = 0 + B + 0$$

ومنه : $B = \frac{5}{3}$.

كذلك نضرب الطرفين بـ $(x+2)$ ونختصر فنجد :

$$\frac{(2x+3)}{x(x-1)} = \frac{A(x+2)}{x} + \frac{B(x+2)}{x-1} + c$$

نعطي الى x القيمة $x = -2$ فنجد : $-\frac{1}{6} = 0 + 0 + c$

اي $c = -\frac{1}{6}$

اذا عوضنا A , B , C بقيمها في (1) نحصل على :

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{-3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

الحالة الثانية :

اذا كانت مضاريب المخرج $f(x)$ من الدرجة الاولى وبعضها مكرر اي اذا كان المخرج من الشكل :

$$f(x) = (x-a)^n.(x-b)^m...$$

عندئذ كل مضروب من الدرجة الاولى ومكرر n مرة يقابله مجموع n كسرا بسيطا من الشكل :

$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \dots \frac{A_n}{(x-a)}$$

وكل مضروب من الدرجة الاولى ومكرر m مرة يقابله مجموع m كسرا بسيطا من الشكل السابق .

مثال (٢) : فرق الكسر الاتي الى مجموع كسور بسيطة :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$$

نلاحظ ان المضروب $(x+1)$ مكرر ثلاث مرات والمضروب $(x-2)$ مكرر مرة واحدة فالكسر يفرق كالاتي :

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

تعيين الثوابت A_1 , A_2 , A_3 , B بالطريقة العامة وذلك بتوحيد المخارج في الطرفين وحذفها واجراء التطابق بين امثال قوى x المتساوية في الطرفين فنجد :

$$x^2+2 = A_1(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_3(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3 \quad (1)$$

$$x^2+2 = (A_3+B)x^3+(A_2+3B)x^2+(A_1-A_2-3A_3+3B)x + (-2A_1-2A_2-2A_3+B)$$

اذا ساوينا بين امثال x^3 , x^2 , x^1 , x° في الطرفين نحصل على جملة المعادلات :

$$0 = A_3+B$$
$$1 = A_2+3B$$
$$0 = A_1-A_2-3A_3+3B$$
$$2 = -2A_1-2A_2-2A_3+B$$

بحل هذه الجملة من المعادلات نجد :

$$B = \frac{2}{9} \quad , \quad A_3 = -\frac{2}{9} \quad , \quad A_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad A_1 = -1$$

ويمكن ايضا تعيين بعض هذه الثوابت من المساواة (1) التي هي مطابقة في x وذلك باعطاء x قيما خاصا نختارها كما نشاء .

فاذا جعلنا $x=-1$ في المطابقة (1) نجد : $3=-3A_1$ ومنه $A_1=-1$

واذا جعلنا $x=2$ نجد $6=27B$ ومنه $B = \frac{2}{9}$.

وهكذا نستطيع تعيين باقي الثوابت ، والكسر يصبح :

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}$$

الحالة الثالثة : اذا كانت مضاريب المخرج ثلاثيات حدود من الدرجة الثانية من الشكل x^2+px+q وغير مكررة . عند ئذ كل مضروب من هذا الشكل يقابله كسر بسيط من الشكل $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

مثال (٧) : فرق الكسر الاتي الى مجموع كسور بسيطة :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{1}{x(x^2+4)}$$

نكتب الكسر بالشكل :

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

بتوحيد المخارج وحذفها نجد :

$$1 = A(x^2+4) + x(Bx+C)$$
$$1 = (A+B)x^2 + Cx+4A$$

اذا ساوينا بين امثال x^2 , x^1 , x° نجد :

$$A + B = 0$$
$$C = 0$$
$$4A = 1$$

ومنه

$$C = 0 \quad , \quad B = -\frac{1}{4} \quad , \quad A = \frac{1}{4}$$

والكسر يصبح :

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{1}{4x} - \frac{x}{4(x^2+4)}$$

الحالة الرابعة : اذا كانت مضاريب المخرج $f(x)$ ثلاثيات حدود من الدرجة الثانية ومكررة n مرة من الشكل : $(x^2+px+q)^n$ عند ئذ كل مضروب من هذا الشكل يقابله مجموع n كسرا بسيطا من الشكل :

$$\frac{A_1x+B_1x}{(x^2+px+q)^n} + \frac{A_2x+B_2x}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n+B_nx}{x^2+px+q}$$

مثال (٤) : فرق الكسر الاتي الى مجموع كسور بسيطة :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2} = \frac{A_1x+B_1}{(x^2+2)^2} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+2)}$$

بتوحيد المخارج وحذفها واجراء المطابقة بين امثال x ذات القوى المتساوية نجد : $B_2 = 1$, $A_2 = 1$, $B_1 = 0$, $A_1 = -2$

والكسر يصبح :

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x}{(x^2+2)^2} + \frac{x+1}{(x^2+2)}$$

والان بعد ان درسنا كيفية تفريق الكسور النظامية الى مجموع كسور بسيطة عندئذ نستطيع بسهولة اجراء التكاملات من هذا الشكل .

2-6. مكاملة الكسور الناطقة النظامية

لنحسب التكاملات من الشكل :

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\, dx$$

حيث $\frac{F(x)}{f(x)}$ كسر نظامي (درجة صورته اقل من درجة مخرجه) ، قبل البدء بعملية المكاملة نقوم بتفريق الكسر الى مجموع كسور بسيطة وفقا للحالات الاربعة التي تعرضنا اليها في الفقرة السابقة ثم نقوم بعمليات التكامل .

مثال (١) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}\, dx$$

نقوم اولا باجراء عملية تفريق الكسر المستكمل الى مجموع كسور بسيطة

فنجد :

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{-3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

[المثال (١) من الحالة الاولى]

$$I = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} + c$$

$$I = -\frac{3}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x| + \frac{5}{3}\,\mathrm{Ln}\,|x-1| - \frac{1}{6}\,\mathrm{Ln}\,|x+2| + c$$

$$I = \mathrm{Ln}\left|\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}\,(x+2)^{\frac{1}{6}}}\right| + c$$

مثال (٢) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\, dx$$

نفرق الكسر المستكمل الى مجموع كسور بسيطة [المثال (٢) من الحالة الثانية]

فنجد :

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-1)} = \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}$$

$$I = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} + c$$

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\,\mathrm{Ln}\,|x+1|$$

$$+ \frac{2}{9}\,\mathrm{Ln}\,|x-2| + c$$

$$I = -\frac{2x-1}{(6x+1)^2} + \frac{2}{9}\,\mathrm{Ln}\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + c$$

مثال (٣) : أحسب التكامل :

$$I = \int \frac{x\, dx}{(x^2+1)(x-1)}$$

نفرق الكسر الى مجموع كسور ناطقة (الحالة الثالثة)

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$$

ومنه : $x = (Ax+B)(x-1) + c(x^2+1)$

نجعل $x=1$ فنجد $1 = 2c$ ومنه $c = \frac{1}{2}$

نجعل $x=0$ فنجد $0 = -B+c$ ومنه $B = \frac{1}{2}$

اذا ساوينا بين امثال x^2 في الطرفين نجد :

$0 = A+c$ ومنه $A = -\frac{1}{2}$. والتكامل يصبح :

$$\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\, dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}\,(x^2+1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, x + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x-1| + c$$

مثال (٤) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\, dx$$

نفرق الكسر المستكمل الى مجموع كسور بسيطة (الحالة الرابعة) .

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} + \frac{E}{x+1}$$

ومنه :

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 = (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1) + E(x^2+2x+3)^2$$

لتعيين الثوابت A, B, C, D, E نستفيد من الطريقتين المذكورتين في الفقرة (2-5) ، طريقة المطابقة وطريقة اعطاء المتحول x قيما عددية مناسبة فنجد :

$A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=0$, $E=1$ ، والتكامل يصبح :

$$I = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

ان التكامل الاول كنا قد حسبناه سابقا [مثال (٢) ، فقرة (2-4)]
والتكامل الثاني يمكن حسابه مباشرة .

$$I = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\, \mathrm{arctg}\, \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \mathrm{Ln}\,|x+1| + c$$

مثال (٥) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\, dx$$

نفرق المخرج الى مضاريب خطية فنجد :

$$x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2}$$

بتوحيد المخارج وحذفها نجد :

$$2x^2+5x-1 = A_1(x-1)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-1)$$

من اجل $x=0$ نجد : $-2A_1 = -1$ ومنه $A_1 = \frac{1}{2}$

من اجل $x=1$ نجد : $3A_2 = 6$ ومنه $A_2 = 2$

من اجل $x=-2$ نجد : $6A_3 = -3$ ومنه $A_3 = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x| + 2\,\mathrm{Ln}\,|x-1| - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x+2| + c$$

مثال (٦) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\, dx$$

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}$$

بتوحيد المخارج وحذفها نجد :

$$x^2+2x+3 = A_1(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1) \qquad (1)$$

من اجل $x=1$ نجد $4A_1 = 6$ ومنه $A_1 = \frac{3}{2}$

من اجل $x=-1$ نجد $-2A_3 = 2$ ومنه $A_3 = -1$

والآن نحتاج الى معادلة ثالثة لتعيين A_2 ، وبما انه لا يوجد قيم اخرى لـ x تعدم احد المضاريب لذلك نختار قيمة مناسبة الى x تسهل لنا عملية الحساب . فمثلا ، اذا اخترنا $x=0$ نحصل على المعادلة :
$3 = A_1 - A_2 - A_3$ منها نحصل على $A_2 = -\frac{1}{2}$.

ملاحظة : هناك طريقة اخرى لتعيين الثابت الاخير وذلك باشتقاق طرفي العلاقة (1) ثم اعطاء x قيمة مناسبة .

$$2x+2 = 2A_1(x+1) + A_2(x-1) + A_2(x+1) + A_3$$

من اجل $x=-1$ نجد $0 = -2A_2 + A_3$ ومنه $A_2 = \frac{A_3}{2}$

وبالتالي $A_2 = -\frac{1}{2}$

وبعد تعيين الثوابت نحصل على :

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x-1| - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

مثال (٧) :

احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$$

نفرق المخرج الى جداء مضاريب فنجد :

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

حيث x^2+x+1 غير قابل للتفريق :

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+x+1}$$

بتوحيد المخارج وحذفها نجد :

$$3x^2+2x-2 = A(x^2+x+1) + (Bx+c)(x-1)$$

$$= (A+B)x^2 + (A-B+c)x + A - c$$

اذا ساوينا بين امثال x^2 , x^1 , x° في الطرفين نجد :

$$A+B = 3$$

$$A-B+c = 2$$

$$A-c = -2$$

بحل هذه الجملة نجد : $A=1$, $B=2$, $c=3$

والتكامل يصبح :

$$I = \int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$$

$$I = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx$$

التكامل الاول يساوى $\mathrm{Ln}\,|x-1|$ واما التكامل الثاني فيكتب بالشكل :

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{2\,dx}{x^2+x+1}$$

$$= \mathrm{Ln}\,(x^2+x+1) + 2\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

نفرض $u = x+\frac{1}{2}$, $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$ فالتكامل الاخير يصبح :

$$2\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{2}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{a}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

اذن :

$$I = \mathrm{Ln}\,|x-1| + \mathrm{Ln}\,(x^2+x+1) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

مثال (٨) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$$

نكتب الكسر بالشكل :

$$\frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

بتوحيد المخارج وحذفها والمطابقة بين امثال قوى x المتساوية في الطرفين نجد :

$$E=0 \;,\; D=-1 \;,\; C=-\frac{1}{3} \;,\; B=\frac{2}{3} \;,\; A=\frac{1}{3}$$

وعندئذ يكون :

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+2}\,dx + \int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+2)^2}$$

$$I = \frac{1}{3}\,Ln\,|x-1| + \frac{1}{3}\,Ln\,(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2(x^2+2)} + c$$

من الامثلة السابقة نلاحظ ما يلي : ان مسألة مكاملة توابع كسرية نظامية تؤول الى حساب تكاملات من الاشكال التالية :

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} \;,\quad \int \frac{x\,dx}{(x^2+px+q)^m} \;,\quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m}$$

التكامل الاول يساوي $Ln\,|x+a|$ عندما $n=1$

ويساوي $\frac{(x+a)^{1-n}}{1-n}$ عندما $n > 1$

ومن اجل التكاملين الثاني والثالث نكتب ثلاثي الحدود بشكل مجموع مربعين اى :

$$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})$$
$$= u^2 + a^2$$

حيث $u = x+\frac{p}{2}$ و $a = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$ (وهذا ممكن لان $4q-p^2 > 0$) . فالتعويض $u = x+\frac{p}{2}$ يرد المسألة الى حساب التكاملين :

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^m} \;,\quad \int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^m}$$

فالتكامل الاول : $\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^m}$ يساوى $\frac{1}{2}\,Ln\,(u^2+a^2)$

عندما $m=1$ ويساوى $\frac{1}{2}\cdot\frac{(u^2+a^2)^{1-m}}{1-m}$ عندما $m > 1$

اما التكامل الثاني : $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^m}$ يساوى $\frac{1}{a}\,arctg\,\frac{u}{a}$

عندما $m = 1$ • وعندما $m > 1$ فيمكن رده الى الحالة $m=1$

بتطبيق دستور التدريج الآتي عدة مرات :

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^m} = \frac{1}{2a^2(m-1)}\cdot\frac{u}{(u^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)}\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{m-1}}$$

وهذا ما كنا وجدناه سابقا عند حساب التكامل من النموذج (IV) في الفقرة (2-4) .

وخلاصة القول : ان مكاملة الكسور الناطقة النظامية ترد الى مكاملة عدد منته من التكاملات البسيطة نتائجها :

١ ـ تراكيب لوغارتمية اذا كانت الكسور البسيطة من النموذج I .

٢ ـ توابع كسرية ناطقة اذا كانت الكسور البسيطة من النموذج II .

٣ ـ تراكيب لوغارتمية وقوس ظل اذا كانت الكسور البسيطة من النموذج III .

٤ ـ توابع كسرية ناطقة وقوس ظل اذا كانت الكسور البسيطة من النموذج IV .

2-7. مكاملة التوابع الصماء (الجذرية)

سندرس في هذه الفقرة طرق حساب التكاملات غير المحددة للتوابع الصماء التي تؤول الى مكاملة توابع كسرية ناطقة التي درسناها في الفقرة السابقة وذلك باجراء تحويل مناسب للتابع المستكمل .

١ ــ التكامل من الشكل :

$$I = \int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots x^{\frac{r}{s}}\right) dx \qquad (1)$$

حيث R يمثل تابعا ناطقا بدلالة $x \; , \; x^{\frac{m}{n}} \; , \dots\dots \; x^{\frac{r}{s}}$

وبعبارة اخرى : ان الرمز $R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots , x^{\frac{r}{s}}\right)$ يدل على

اننا نقوم بعمليات ناطقة على المقادير $x \; , \; x^{\frac{m}{n}} \; , \dots\dots \; x^{\frac{r}{s}}$

ليكن k المخرج المشترك للكسور $\frac{m}{n} \; , \dots\dots \; \frac{r}{s}$

فاذا فرضنا $x=t^k$ ومنه $dx = k.t^{k-1}dt$.

عندئذ كل قوة كسرية للمتحول x يمكن ان نعبر عنها بقوة صحيحة للمتحول t وبالتالي فالتابع المستكمل يتحول الى تابع ناطق في المتحول t

مثال (١) :

$$I = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx$$

الحل : المخرج المشترك للكسرين $\frac{1}{2} \; , \; \frac{3}{4}$ هو $k=4$

لنفرض $x=t^4$ ومنه $dx = 4t^3dt$

عندئذ يكون :

$$I = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx = 4\int \frac{t^2}{t^3+1} \cdot t^3 \, dt$$

$$I = 4\int \frac{t^5}{t^3+1} dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right) dt =$$

$$= 4\int t^2 dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1} dt = 4\,\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln\left|t^3+1\right| + c$$

$$= \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + c$$

مثال (٢) :

$$I = \int \frac{1+x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \; , \; \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

المخرج المشترك للكسرين $\frac{1}{2} \; , \; \frac{1}{3}$ هو $k=6$ لذلك نفرض :

$x=t^6$ ومنه $dx = 6t^5dt$

والتكامل يصبح بالشكل :

$$I = 6\int \frac{(1+t^6+t^3)t^5}{t^3+t^2} dt = 6\int \frac{t^9+t^6+t^3}{(t+1)} dt$$

وهذا تكامل تابع كسري درجة صورته اكبر من درجة مخرجه لذلك نبدأ بتقسيم الصورة على المخرج .

$$\frac{t^9+t^6+t^3}{t+1} = t^8-t^7+t^6+t^2-t+1-\frac{1}{t+1}$$

ومنه :

$$I = 6\int \left(t^8-t^7+t^6+t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$I = 6\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1| + c\right.$$

نعوض t بما يساويها من الفرض :

$$I = 6\left[\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} - \ln\left|x^{\frac{1}{6}}+1\right|\right] + c$$

مثال (٣) : احسب التكامل :

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$$

المخرج المشترك للكسور $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ هو $k=12$

لذلك نفرض $x = t^{12}$ ومنه $dx = 12\, t^{11}\, dt$

$$I = 12 \int \frac{t^8 - t^3}{t^6}\, t^{11} dt$$

$$I = 12 \int (t^{13} - t^8) dt$$

$$I = 12 \left(\frac{t^{14}}{14} - \frac{t^9}{9} \right) + c$$

$$I = \frac{6}{7} t^{14} - \frac{4}{3} t^9 + c$$

$$I = \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + c$$

٢ ـ التكامل من الشكل :

$$I = \int R \left[x , \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}} , \dots , \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}} \right] dx \qquad (2)$$

الحل : ليكن k المخرج المشترك للكسور $\frac{m}{n}$, ... , $\frac{r}{s}$,

ولنفرض : $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$

عندئذ يرد التكامل الى تكامل تابع كسري ناطق .

مثال (١) :

$$I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

الحل : نفرض $x+4 = t^2$ ومنه $x = t^2 - 4$, $dx = 2dt$

والتكامل يصبح بالشكل :

$$I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt$$

$$= 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} = 2t + 2 \operatorname{Ln} \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + c$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2 \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right| + c$$

مثال (٢) :

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$$

الحل : نفرض $\sqrt{x+1} = t$ ومنه $x+1 = t^2$

ومنه $dx = 2t\, dt$ نعوض في التكامل فنجد :

$$I = 2 \int \frac{t+2}{t^4 - t}\, t\, dt = 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt$$

$$t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$$

$$I = \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1} \right) dt$$

$$= \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{t^2+t+1} \right) dt$$

$$I = \operatorname{Ln}(t-1)^2 - \operatorname{Ln}(t^2+t+1) + \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$+ \operatorname{Ln} \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c$$

نعوض t بما يساويها من الفرض فنجد :

$$I = \operatorname{Ln} \left[\frac{(\sqrt{x+1} - 1)^2}{x+1+\sqrt{x+1} + 1} \right] - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{3}} + c$$

مثال (٣) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3 (x-2)}}$$

نكتب المقدار المستكمل بالشكل الاتي :

$$\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} \times \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \times \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$I = \int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$$

نفرض $\frac{x-2}{x-1} = t^2$ ومنه $x = \frac{2-t^2}{1-t^2}$

ومنه $dx = \frac{-2t(1-t^2)+2t(2-t^2)}{(1-t^2)^2}\,dt$

$$dx = \frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}$$

$$I = \int t \cdot \frac{\frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}}{\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-2\right)} = 2\int dt$$

$$I = 2t+c = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + c$$

٣ ـ التكامل من الشكل :

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \qquad (1)$$

حيث R تابع ناطق وحيث $b^2-4ac \neq 0$

ويعتبر التكامل من هذا الشكل من اهم التكاملات الصماء لكثرة وروده ولحساب هذا التكامل نستعين بتحويلات العالم الرياضي اولر .

وقد استخدم اولر ثلاثة انواع من التعويض (او التحويل) نعرضها فيما يلي :

١ ـ التعويض الاول :

اذا كان $a > 0$ نضع $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x+t$

اذا اعتبرنا الاشارة (+) نجد :

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\;x\,t+t^2$$

وعندئذ نستطيع تعيين x كتابع ناطق في المتحول t فنجد :

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\;.\;t}$$

(كذلك dx هو تابع ناطق في المتحول t) وبالتالي :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,.\,x+t = \sqrt{a}\;\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}+t$$

اى ان المقدار $\sqrt{ax^2+bx+c}$ قد تحول الى تابع ناطق في t

وبما ان المقادير $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x , dx يعبر عنها بتوابع ناطقة في المتحول t عندئذ التكامل (1) يرد الى تكامل تابع ناطق في المتحول t

مثال (١) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$$

بما ان $a=1 > 0$ ، نضع $\sqrt{x^2+c} = -x+t$ ومنه

$x^2+c = x^2-2tx+t^2$ ومنه

$$x = \frac{t^2-c}{2t}$$

$$dx = \frac{t^2+c}{2t^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2+c} = -x+t = -\frac{t^2-c}{2t}+t = \frac{t^2+c}{2t}$$

بالتعويض في التكامل نجد :

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{\frac{t2+c}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+c}{2t}} = \int\frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right| + c_1$$

(انظر الدستور (١٦) من جدول التكاملات الشهيرة) .

ملاحظة : اذا فرضنا $\sqrt{x^2+c} = x+t$ نحصل على نفس النتيجة مع اختلاف في الثابت الكيفي .

مثال (٢) :

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$$

نفرض : $\sqrt{x^2-x+1} = \pm\sqrt{a}\,.\,x+t$

بما ان $a = 1 > 0$ نستخدم احد التحويلين المذكورين فاذا اخترنا الاشارة (−) يكون : $\sqrt{x^2-x+1} = -x+t$

بتربيع الطرفين نجد : $x^2-x+1 = x^2-2xt+t^2$

$$x(2t-1) = t^2-1$$

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}$$

ومنه : $dx = \frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}\,dt = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt$

نعوض في التكامل المعطى فنجد :

$$I = \int \frac{2\,\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt}{t} = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\,dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-t+1}{t(t-\frac{1}{2})^2}\,dt$$

نفرق الكسر المستكمل الى كسور بسيطة فنكتب :

$$\frac{t^2-t+1}{t(t-\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-\frac{1}{2}} + \frac{C}{(t-\frac{1}{2})^2}$$

بتوحيد المخارج وحذفها ثم اجراء المطابقة بين امثال القوى المتساوية لـ t نجد : $A = 4$, $B = -3$, $C = \frac{3}{2}$.

والتكامل يصبح بالشكل :

$$I = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{\frac{3}{2}}{(t-\frac{1}{2})} + \frac{\frac{3}{4}}{(t-\frac{1}{2})^2} \right) dt$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t-\frac{1}{2}} + c$$

نعوض t بقيمتها من الفرض : $t = x+\sqrt{x^2-x+1}$

فنحصل على قيمة التكامل I بدلالة x .

٢ — التعويض الثاني :

اذا كان $c > 0$ نضع :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

ومنه : $ax^2+bx+c = x^2t^2+2xt\sqrt{c} + c$

حيث اخذنا الاشارة (+) .

ومنه نحسب x كتابع ناطق في المتحول t فنجد :

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}$$

وبما ان x , dx يمكن التعبير عنهما بدلالة توابع ناطقة في t عندئذ بتعويض قيم x , $\sqrt{ax^2+bx+c}$ و dx بدلالة t في التكامل

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

نحصل على تكامل تابع ناطق في t .

مثال (١) : احسب التكامل الآتي :

$$I = \int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$$

الحل : نفرض : $\sqrt{1+x+x^2} = x\,t+1$

ومنه : $1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1$

ومنه : $dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\,dt \quad , \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}$$

$$1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}$$

نعوض هذه المقادير في التكامل المطلوب فنجد :

$$I = \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}\,dt$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt + c$$

$$= -2t + Ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + Ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + c =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + Ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right| + c$$

مثال (٢) :

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$$

الحل : كنا حسبنا هذا التكامل وفقا للتعويض الاول ، وبما ان $c=1>0$ يمكن حسابه وفقا للتعويض الثاني ، لذلك نفرض :

$$\sqrt{x^2-x+1} = x\,t \pm \sqrt{c}$$

$$\sqrt{x^2-x+1} = x.t-1$$

بتربيع الطرفين نجد :

$$x^2-x+1 = x^2t^2-2x.t+1$$

$$x^2-x = x^2t^2-2xt$$

بالاختصار على x نجد :

$$x-1 = x.t^2-2t$$

ومنه : $x = \frac{1-2t}{1-t^2}$

$$dx = -\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}\,dt$$

$$\sqrt{x^2-x+1} = -\frac{t^2-t+1}{(1-t^2)}$$

$$\sqrt{x^2-x+1}+x = \frac{t}{t-1}$$

نعوض المقادير في التكامل المعطى فنجد :

$$I = -\int \frac{2(t^2-t+1)}{t(t-1)(t+1)^2}\,dt$$

بتفريق الكسر المستقل الى مجموع كسور بسيطة نجد :

$$I = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$I = 2\,Ln|t| - \frac{1}{2}Ln|t-1| - \frac{3}{2}Ln|t+1| + \frac{3}{t+1} + c$$

نعوض t بقيمتها من الفرض :

$$t = \frac{1+\sqrt{x^2-x+1}}{x}$$

فنجد قيمة التكامل بدلالة x .

٣ ـ التعويض الثالث :

بفرض α ، β جذرين حقيقيين للمقدار ax^2+bx+c

نضع :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$$

وبما ان :

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

عندئذ :

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t$$

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$$

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2$$

ومنه :

$$x = \frac{\alpha\beta - \alpha t^2}{a-t^2}$$

وبما ان dx ، $\sqrt{ax^2+bx+x}$ توابع ناطقة الى t

عندئذ فالتكامل المطلوب يرد الى تكامل تابع ناطق في t .

ملاحظة (١) : ان تغيير المتحول الوارد في التعويض الثالث يمكن تطبيقه في الحالتين $a < 0$ و $a > 0$ اذا كان فقط للمقدار : ax^2+bx+c جذران حقيقيان .

مثال (١) : احسب التكامل :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$$

الحل : بما ان : $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$

نضع :

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t$$

$$(x+4)(x-1) = (x+4)^2t^2$$

$$(x-1) = (x+4)t^2$$

ومنه

$$dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt \quad , \quad x = \frac{1+4t^2}{1-t^2}$$

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = \left[\frac{1+4t^2}{1-t^2} + 4\right] t = \frac{5t}{1-t^2}$$

نعوض هذه المقادير في التكامل المعطى فنجد :

$$I = \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 . 5t}\,dt = \int \frac{2\,dt}{1-t^2}$$

$$I = Ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c$$

$$= Ln \left| \frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \right| + c$$

$$= Ln \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + c$$

ملاحظة (٢) : نلاحظ ان التحويل الوارد في التعويضين الاول والثالث لاولر تكفي لرد التكامل من الشكل $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ الى تكامل تابع ناطق . في الحقيقة اذا كان ثلاثي الحدود ax^2+bx+c يملك جذورا حقيقية ($b^2-4ac > 0$) عندئذ نكون في الحالة الثالثة من طرق تعويض اولر . واذا كان $b^2-4ac \leqslant 0$ عندئذ في هذه الحالة نكتب ثلاثي الحدود بالشكل :

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2 + (4ac-b^2) \right]$$

وواضح ان اشارة ثلاثي الحدود هي من اشارة a دوما ، وكي يكون المقدار $\sqrt{ax^2+bx+c}$ حقيقيا يجب ان يكون المقدار المجذور موجبا وبالتالي $a > 0$ وعندئذ نكون في الحالة الاولى .

$$I = \int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$$

٢-٨. حساب التكاملات من الشكل :

$$I = \int R(\sqrt{ax+b} , \sqrt{cx+d})dx$$

حيث R تابع ناطق ، وحيث a , b , c , d اعداد حقيقية .

لحساب مثل هذه التكاملات نفرض ان احد الجذرين يساوي متحولا جديدا t ولنفرض مثلا : $\sqrt{ax+b} = t$ عند ئذ :

$$ax + b = t^2$$

$$dx = \frac{2t.dt}{a} \quad , \quad x = \frac{t^2-b}{a}$$

عند ئذ نجد :

$$cx+d = \frac{c(t^2-b)}{a} + d$$

$$\sqrt{cx+d} = \sqrt{\frac{c}{a} \, t^2+(d- \frac{cb}{a})}$$

بالتعويض في التكامل I نجد :

$$I = \int R(t, \sqrt{\frac{c}{a} t^2+(d- \frac{cb}{a})}). \quad \frac{2t\ dt}{a}$$

وهو تكامل من الشكل الثالث المدروس في الفقرة السابقة .

مثال (١) :

احسب التكامل :

$$I = \int \frac{\sqrt{5x + 3}}{\sqrt{x+1} \ +1} \ dx$$

لحساب هذا التكامل نفرض : $\sqrt{x+1} = t$ فيكون

$x+1 = t^2$ ومنه $dx = 2t \ dt \ , \ x = t^2-1$

$5x+3 = 5t^2-2$ ومنه $\sqrt{5x+3} = \sqrt{5t^2-2}$

نعوض في التكامل المعطى فنجد :

$$I = 2\int \frac{\sqrt{5t^2-2}}{t+1}. \ t. \ dt$$

وهو تكامل من الشكل الثالث ، من الفقرة السابقة .

٢-٩. تكاملات ثنائيات الحد التفاضلية

نسمي ثنائي حد تفاضلي التركيب من الشكل :

$x^m(a+bx^n)^p \ dx$

حيث m,n,p,a,b اعداد ثابتة .

نظرية : ان تكامل ثنائي الحد التفاضلي :

$$I = \int x^m \ (a+bx^n)^p \ dx$$

يمكن رده الى تكامل تابع ناطق اذا كانت m , n , p اعدادا ناطقة وبالتالي يمكن كتابته بدلالة توابع بسيطة في الحالات الثلاثة الاتية :

١) اذا كان p عددا صحيحا (موجب ، سالب ، او صفر) .

٢) اذا كان $\frac{m+1}{n}$ عددا صحيحا (موجب ، سالب ، او صفر) .

٣) اذا كان $\frac{m+1}{n} + p$ عددا صحيحا (موجب ، سالب ، او صفر)

البرهان : نجري تغييرا في المتحول فنضع : $x = z^{\frac{1}{n}}$ ومنه

$dx = \frac{1}{n} . z^{\frac{1}{n} -1} . dz$ والتكامل يصبح بالشكل :

$$I = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n} -1} . (a+bz)^p \ dz$$

$$I = \frac{1}{n}\int z^q \ (a+bz)^p \ dz \qquad (1)$$

حيث $q = \frac{m+1}{n} -1$

أ ً. p عدد صحيح و q عدد ناطق نكتبه بالشكل $\frac{r}{s}$. والتكامل (١) يصبح بالشكل :

$$I = \int R(z^{\frac{r}{s}} \ , \ z)dz$$

وقد وجدنا في الفقرة (2-7) الشكل الاول ان مثل هذا التكامل يرد

الى تكامل تابع ناطق باجراء تغيير في المتحول $z=t^s$.

٢ً. $\frac{m+1}{n}$ هو عدد صحيح وبالتالي $q=\frac{m+1}{n}-1$ هو صحيح ايضا .

بما ان p عدد ناطق يكتب بالشكل $p=\frac{\lambda}{\mu}$ والتكامل (1) يرد الى الشكل :

$$I=\int R\left[z^q,\ (a+bz)^{\frac{\lambda}{\mu}}\right]dz$$

وقد درسنا تكاملات من هذا الشكل في الفقرة (2-7) ايضا اذ يمكن رده الى تكامل تابع ناطق بفرض $a+bz=t^{\mu}$

٣ً. $\frac{m+1}{n}+p$ هو عدد صحيح وبالتالي :

$\frac{m+1}{n}-1+p=q+p$ هو عدد صحيح ايضا ، وعندئذ التكامل (1) يصبح بالشكل :

$$I=\int z^q(a+bz)^p dz=\int z^{q+p}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$$

حيث $q+p$ هو عدد صحيح ، $p=\frac{k}{l}$ عدد ناطق

وعندئذ نحصل على التكامل من الشكل :

$$I=\int R\left[z,\ \left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\frac{k}{l}}\right]dz$$

وهذا التكامل درسناه ايضا في الفقرة (2-7) اذ يمكن رده الى تكامل تابع ناطق باجراء تغيير في المتحول $\frac{a+bz}{z}=t^l$

والان لنعرض امثلة توافق الحالات الثلاثة المذكورة .

مثال (1)

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$I=\int x^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx$$

نلاحظ ان $p=-1$ (عدد صحيح) لذلك نفرض $x^{\frac{2}{3}}=z$

$$I=\int z^{-1}(1+z)^{-1}\cdot\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}dz$$

نفرض $z^{\frac{1}{2}}=t$ فيكون $z=t^2$, $dz=2t\,dt$

والتكامل يصبح بالشكل :

$$I=\frac{3}{2}\int t^{-1}(1+t^2)^{-1}\,2t\,dt=$$

$$=3\int\frac{dt}{1+t^2}=3\,\mathrm{arctg}\,t+c$$

$$=3\,\mathrm{arctg}\sqrt{z}+c=3\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}+c$$

مثال (2) :

$$I=\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

هنا $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2$ (عدد صحيح)

لذلك نفرض $x^2=z$ ومنه $x=z^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot dz$

والتكامل يصبح :

$$I=\int z^{\frac{3}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$$

نفرض $(1-z)^{\frac{1}{2}}=t$ وبذلك اصبح المقدار داخل القوس تابعا ناطقا

ولدينا : $1-z=t^2$, $z=1-t^2$, $dz=-2t\,dt$

وبالتالي التكامل يصبح :

$$I = \frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\int (t^2-1).t^{-1}.2\,t\,dt$$

$$= \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + c$$

$$= \frac{t}{3}(t^2-3)+c = \frac{\sqrt{1-z}}{3}(-z-2) + c =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-x^2-2) + c$$

مثال (٣) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$= \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

هنا : $m=-2$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$, $\frac{m+1}{n}+p=-2$ (عدد صحيح)

نحول المقدار داخل القوس الى عبارة خطية :

نفرض $x^2=z$, $x=z^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$

$$I = \int z^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}}.\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$= \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}}dz = \frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz$$

العامل الاول هو تابع ناطق • وكي يصبح العامل الثاني تابعا ناطقا ايضا :

نفرض : $\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = t$ ومنه $\frac{1+z}{z} = t^2$, $z=\frac{1}{t^2-1}$

وبالتالي : $dz = -\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}$

$$I = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz$$

$$= \frac{1}{2}\int (t^2-1)^3.t^{-3}\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2} = -\int\frac{t^2-1}{t^2}dt$$

$$= -t-\frac{1}{t}+c = -\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

ملاحظة : لقد برهن العالم الرياضي تشيبشيف ان تكامل ثنائي الحد التفاضلي ذي الاس الناطق لا يمكن التعبير عنه بتوابع بسيطة الا في الحالات الثلاثة المذكورة آنفا • (بشرط $a \neq 0$, $b \neq 0$) واذا كان احد الاعداد : p , $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ ليس صحيحا عند ئذ لا يمكن التعبير عن هذا التكامل بواسطة توابع بسيطة •

مكاملة التوابع المثلثية

10-2. مكاملة بعض الاشكال للتوابع المثلثية

درسنا فيما سبق مكاملة التوابع الجبرية (ناطقة او صماء) • وفي هذه الفقرة ندرس مكاملة بعض التوابع غير الجبرية ، ونبدأ بدراسة مكاملة التوابع المثلثية من الشكل :

$$I = \int R(\sin x\ ,\ \cos x)dx \qquad (1)$$

نبرهن اولا ان هذا التكامل يمكن رده دوما الى مكاملة تابع ناطق باجراء تغيير في المتحول بفرض :

$$tg\,x = t \qquad (2)$$

نكتب $\sin x$, $\cos x$ بدلالة $t = tg\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ولدينا ايضا $x = arctg\ t \quad , \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

اذن نستطيع التعبير عن $\sin x$, $\cos x$ بدلالة توابع ناطقة في المتحول t . والتكامل (1) يصبح بالشكل :

$$I = \int R(\sin x;\ \cos x)dx = \int R\left[\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

مثال (1) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

باستخدام الدساتير السابقة نجد :

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2\,t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t}$$

$$= Ln\,|t| + c = Ln\,\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

وتغيير المتحول بالشكل السابق يصلح لحل جميع التكاملات التي تحوي العبارة $R(\cos x\ ,\ \sin x)$ ، وفي الحقيقة هذه الطريقة في تغيير المتحول تصلح في الغالب لتحويل المقدار المستكمل الى توابع ناطقة معقدة جدا . ولهذا السبب يفضل عدم استخدامها واللجوء الى طرق اخرى تحقق نفس الهدف .

١) اذا كان التكامل من الشكل : $\int R(\sin x)\cos x\,dx$

نجرى تغييرا للمتحول بفرض $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$

فنحصل على تكامل من الشكل : $\int R(t)dt$

٢) اذا كان التكامل من الشكل : $\int R(\cos x)\sin x\,dx$

يمكن ان يرد الى مكاملة تابع ناطق باجراء التحويل الاتي :

نفرض : $\cos x = t \quad , \quad \sin x\ dx = -\,dt$

٣) اذا كان التابع المستكمل يتعلق بـ $tg\ x$. نجرى تغييرا في المتحول بفرض : $tgx = t$, $x = arctg\ t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

عندئذ يرد تكامل هذا التابع الى تكامل تابع ناطق :

$$\int R(tg\ x)dx = \int R(t)\cdot\frac{dt}{1+t^2}$$

٤) اذا كان التابع المستكمل من الشكل $R(\sin x,\cos x)dx$ حيث $\sin x$ ، $\cos x$ تابعان من قوة زوجية نستخدم التحويل :

$$tg\ x = t$$

لان $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ يمكن التعبير عنهما بعبارة ناطقة في $tg\ x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

بعد ان نقوم باجراء تغيير المتحول بهذا الشكل نحصل على تكامل تابع ناطق .

مثال (٢) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\, dx$$

الحل : يمكن رده بسهولة الى تكامل من الشكل :

$$\int R(\cos x) \sin x\, dx$$

نكتب التكامل بالشكل :

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x . \sin x\, dx}{2+\cos x}$$

$$= \int \frac{(1-\cos^2 x)}{2+\cos x} \sin x\, dx$$

نفرض $\cos x = z$ ومنه $\sin x\, dx = -dz$

$$I = \int \frac{1-z^2}{1+z} (-dz) = \int \frac{1-z^2}{z+2}\, dz$$

$$= \int \left(z-2+ \frac{3}{z+2} \right) dz = \frac{z^2}{2} - 2z+3 \ln(z+2) + c$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3 \ln (\cos x +2) + c$$

مثال (٣) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$$

الحل : نفرض $tg\, x = t$ فيكون :

$$I = \int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2- \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{tg\, x}{\sqrt{2}} \right) + c$$

٥) اذا كان التكامل من الشكل :

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

حيث : $R(\sin x,\cos x) = \sin^m x \, . \, \cos^n x$

(حيث m , n عددان صحيحان) .

نميز ثلاث حالات :

آ) التكامل من الشكل : $\int \sin^m x . \cos^n x\, dx$

حيث على الاقل احد العددين m , n فردي . ولنفرض ان n فردي مثلا . ولنضع $n=2p+1$ فالتكامل يصبح بالشكل :

$$I = \int \sin^m x . \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x . \cos^{2p} x . \cos x\, dx$$

$$= \int \sin^m x\, (1-\sin^2 x)^p . \cos x\, dx$$

نفرض $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$

والتكامل يصبح بالشكل :

$$I = \int \sin^m x . \cos^n x\, dx = \int t^m (1-t^2)^p\, dt$$

وهو تكامل تابع ناطق في المتحول t .

مثال (٤) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x . \cos x}{\sin^4 x}\, dx$$

$$I = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^4 x}\, dx$$

نفرض $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$ فنجد :

$$I = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2}$$

$$= - \frac{1}{3t^2} + \frac{1}{t} + c$$

$$= - \frac{1}{3\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} + c$$

ب) التكامل من الشكل :

$$I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$$

حيث m , n زوجيان وغير سالبين .

نفرض $m = 2p$, $n = 2q$ ، ونستخدم الدستورين المثلثيين :

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad (3)$$

لنعوض في عبارة التكامل I فنجد :

$$I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = \int \sin^{2p} x \cdot \cos^{2q} x \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx .$$

نقوم بعملية فك الاقواس فنحصل على قوى زوجية وفردية لـ $\cos 2x$ فالحدود ذات القوى الفردية يمكن مكاملتها وفقا للحالة (آ) . اما بالنسبة للحدود ذات القوى الزوجية فنقوم بتخفيض درجتها على التتالي باستخدام الدستور (3) حتى نصل الى تكاملات من الشكل : $\int \cos kx \, dx$ نستطيع حسابها بسهولة .

مثال (٥) :

$$I = \int \sin^4 x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1+\cos 4x) \, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x\right] + c$$

جـ) اذا كان الأسان زوجيين وكان احدهما على الاقل سالبا :

ان الطريقة المذكورة في الفقرة (ب) غير مجدية في هذه الحالة ، لذلك نلجأ للفرض $tg\, x = t$ (او $Ctg\, x = t$)

مثال (٦) : احسب التكامل الاتي :

$$I = \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^6 x}$$

$$I = \int \frac{\sin^2 x \, (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x} dx$$

$$I = \int tg^2 x \cdot (1+tg^2 x)^2 dx$$

نفرض $tg\, x = t$, $x = arctg\, t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$I = \int t^2(1+t^2)^2 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2) dt$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + c$$

٦) التكاملات من احد الاشكال الاتية :

a) $\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$,

b) $\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx$

c) $\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$

لحساب مثل هذه التكاملات ، نقوم باجراء التحويلات المثلثية الاتية :

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

لمكاملة الاول مثلا ، نكتب :

$$I = \int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] dx$$

$$= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + c$$

وبالمثل نحسب التكاملين (b) , (c)

مثال (٧) :

$$\int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int \left[-\cos 8x + \cos 2x\right] dx$$

$$= -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

٢-١١. استخدام التحويلات المثلثية لحساب تكامل بعض التوابع الصماء

نعود لحساب التكامل : (1) $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

الذي درسناه في الفقرة (٢-٧) نموذج (٣) .

سنبين الآن كيف يمكن رد هذا التكامل الى تكامل من الشكل :

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z)\,dz \qquad (2)$$

الذي درسناه في الفقرة السابقة .

نكتب ثلاثي الحدود الموجود تحت الجذر بالشكل التالي :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

نفرض $x+\frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$ فيكون

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}$$

ولندرس الان الحالات المختلفة الاتية :

١) اذا كان $a > 0$, $c-\frac{b^2}{4a} > 0$

نضع $a = m^2$, $c-\frac{b^2}{4a} = n^2$

وبالتالي يكون

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2+n^2}$$

٢) اذا كان $a > 0$, $c-\frac{b^2}{4a} < 0$

نضع $a = m^2$, $c-\frac{b^2}{4a} = -n^2$

وبالتالي يكون :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2 t^2-n^2}$$

٣) اذا كان $a < 0$, $c-\frac{b^2}{4a} > 0$

نضع $a = -m^2$, $c-\frac{b^2}{4a} = n^2$

وبالتالي يكون : $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{n^2-m^2t^2}$

٤) اذا كان $a < 0$, $c-\frac{b^2}{4a} < 0$

في هذه الحالة يكون المقدار $\sqrt{ax^2+bx+c}$ عقديا مهما كانت x .

والخلاصة : ان التكامل (1) يمكن رده الى احد الاشكال الاتية :

$$\text{I.} \quad \int R(t, \sqrt{m^2t^2+n^2})\,dt \qquad (3.1)$$

$$\text{II.} \quad \int R(t, \sqrt{m^2t^2-n^2})\,dt \qquad (3.2)$$

$$\text{III.} \quad \int R(t, \sqrt{n^2-m^2t^2})\,dt \qquad (3.3)$$

واضح ان التكامل (3.1) يرد الى تكامل من الشكل (2) إذا اجرينا تحويلا :

$$t = \frac{n}{m}\,\mathrm{tg}\, z$$

كذلك التكامل (3.2) يرد الى تكامل من الشكل (2) ايضا اذا فرضنا :

$$t = \frac{n}{m}\sec z$$

والتكامل (3.3) يرد الى تكامل من الشكل (2) اذا فرضنا :

$$t = \frac{n}{m}\sin z$$

مثال : أحسب التكامل الاتي :

نظرية شكري المحافظي

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

الحل : ان هذا التكامل هو من الشكل (III) . لذلك نفرض

$x = a\sin z$ ومنه $dx = a\cos z\,dz$

$$I=\int\frac{a\cos z\,dz}{\sqrt{(a^2-a^2\sin^2 z)^3}}=\int\frac{a\cos z\,dz}{a^3\cos^3 z}$$

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{\cos^2 z}=\frac{1}{a^2}\cdot tg\ z+c=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sin z}{\cos z}+c$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}+c=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+c$$

٠٩٤٥٤٤٩٩٢٨

تمارين (٢)

تمرين (١) : احسب تكاملات الكسور الناطقة التالية :

1. $\int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$, $Ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+c$

2. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+5)}$, $\frac{1}{8}\,Ln\,\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}+c$

محلول في العملي 3. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$, $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+Ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+c$

4. $\int\frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$, $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\,Ln\,\frac{x-1}{(x+1)^3}+$

$+\frac{16}{3}\,Ln\,(x+2)+c$

5. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$, $\frac{1}{x-1}+Ln\,\frac{x-2}{x-1}+c$

محلول في النظري 6. $\int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$, $\frac{3}{x-2}+Ln\,\frac{(x-2)^2}{x^2}+c$

7. $\int\frac{3x+2}{x(1+x)^3}\,dx$, $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+Ln\,\frac{x^2}{(x+1)^2}+c$

8. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$, $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+Ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+c$

9. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$, $Ln\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$

10. $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$, $Ln\,\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{x-1}{2}+c$

11. $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$, $Ln\,\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\,arctg\,\frac{x}{2}-$

$-\frac{3}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}+c$

12. $\int \frac{dx}{x^3+1}$, $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3} + c$

13. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx$, $\ln \frac{x^2+4}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$

14. $\int \frac{4\, dx}{x^4+1}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} +$

$+ 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + c$

15. $\int \frac{x^5}{x^3-1} dx$, $\frac{1}{3} \left[x^3 + \ln (x^3-1) \right] + c$

تمرين (٢) : احسب تكاملات التوابع الصماء الآتية :

1. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$, $\frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{x^3} - \ln \left(\sqrt[4]{x^3} + 1 \right) \right] + c$

2. $\int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6 \sqrt[4]{x}} dx$, $\frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + c$

3. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}} dx$, $- \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + 2 \ln x -$

$- 24 \ln \left(\sqrt[12]{x} + 1 \right) + c$

4. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1} dx$, $\frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} +$

$+ 4 \sqrt[6]{x^3} - 6 \sqrt[6]{x^2} + 6 \sqrt[6]{x} - 9 \ln \left(\sqrt[6]{x} + 1 \right) +$

$+ \frac{3}{2} \ln \left(\sqrt[6]{x^2} + 1 \right) + 3 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + c$

5. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$, $\ln \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$

6. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$, $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + c$ إضافي

7. $\int \frac{\sqrt[7]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8} + \sqrt[14]{x^{15}}} dx$,

$14 \left[\sqrt[14]{x} - \frac{1}{2} \sqrt[7]{x} + \frac{1}{3} \sqrt[14]{x^3} - \frac{1}{4} \sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{5} \sqrt[14]{x^5} \right] + c$

8. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx$,

$\sqrt{3x^2-7x-6} + \frac{11}{2\sqrt{3}} \ln \left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3} x - 2} \right) + c$

تمرين (٣) احسب التكاملات الآتية من الشكل :

$$\int R\left(x , \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

1. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-x+3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+3} - \sqrt{3}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| + c$ إضافي

2. $\int \frac{dx}{x \sqrt{2+x-x^2}}$, $- \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + c$

3. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+4x-4}}$, $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + c$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx$, $\sqrt{x^2+2x} + \ln \left| x+1+\sqrt{x^2+2x} \right| + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$, $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + c$

6. $\int \sqrt{2x-x^2} dx$, $\frac{1}{2} \left[(x-1) \sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1) \right] + c$

7. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2-1}}$, $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln \left| x+\sqrt{x^2-1} \right| + c$ إضافي

8. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$, $Ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right| + c$

9. $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$, $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + c$

10. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$, $Ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right| + c$

تمرين (٤) : احسب تكاملات ثنائيات الحد التفاضلية الآتية :

1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, $2(1+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} + c$

2. $\int x^{\frac{1}{3}}(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}\,dx$, $\frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15}(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}} + c$

3. $\int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$

4. $\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$, $-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x+\frac{1}{x}) + c$

5. $\int \sqrt[4]{(1+x^{\frac{1}{2}})^3}\,dx$, $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{4}} + c$

6. $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, $\frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}{5}$

7. $\int x^5 . \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$, $\frac{5x^3-3}{40}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}$

تمرين (٥) احسب تكاملات التوابع المثلثية الآتية :

1. $\int \sin^3 x\,dx$, $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$

2. $\int \sin^5 x\,dx$, $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c$

3. $\int \cos^4 x . \sin^3 x\,dx$, $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + c$

4. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$, $\operatorname{cosec} x - \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + c$

5. $\int \cos^2 x\,dx$, $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

6. $\int \sin^4 x\,dx$, $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + c$

7. $\int \cos^6 x\,dx$, $\frac{1}{16}(5x+4\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4}\sin 4x) + c$

8. $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$, $\frac{1}{128}(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8}) + c$

9. $\int tg^3 x\,dx$, $\frac{tg^2 x}{2} + Ln|\cos x| + c$

10. $\int ctg^5 x\,dx$, $-\frac{1}{4}ctg^4 x + \frac{1}{2}ctg^2 x + Ln|\sin x| + c$

11. $\int ctg^3 x\,dx$, $-\frac{ctg^2 x}{2} - Ln|\sin x| + c$

12. $\int \sec^8 x\,dx$, $\frac{tg^7 x}{7} + 3\frac{tg^5 x}{5} + tg^3 x + tg\,x + c$

13. $\int tg^4 x \sec^4 x\,dx$, $\frac{tg^7 x}{7} + \frac{tg^5 x}{5} + c$

14. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$, $tg\,x + \frac{1}{3}tg^3 x + c$

15. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$, $c - \operatorname{cosec} x$

16. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$, $\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x + 3\cos^{-\frac{1}{3}} x + c$

sin 3x = 3 sin x − 4 sin³x
cos 3x = 4 cos³x − 3 cos x

17. $\int \sin x \sin 3x \, dx \;,\; -\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + c$

18. $\int \cos 4x \cos 7x \, dx \;,\; \frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin 3x}{6} + c$

19. $\int \cos 2x \sin 4x \, dx \;,\; -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + c$

20. $\int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4} \, dx \;,\; -\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{x}{2} + c$

21. $\int \frac{dx}{4-5\sin x} \;,\; \frac{1}{3} \ln \left| \frac{tg \frac{x}{2} - 2}{2tg \frac{x}{2} - 1} \right| + c$

22. $\int \frac{dx}{5-3\cos x} \;,\; \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| 2\, tg \frac{x}{2} \right| + c$

23. $\int \frac{\sin x \, dx}{1+\sin x} \;,\; \frac{2}{1+tg \frac{x}{2}} + x + c$

24. $\int \frac{\cos x \, dx}{1+\cos x} \;,\; x - tg \frac{x}{2} + c$

25. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx \;,\; \operatorname{arctg} (2\sin^2 x - 1) + c$

26. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2} \;,\; \frac{1}{2} tg \frac{x}{2} + \frac{1}{6} tg^3 \frac{x}{2} + c$

27. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + tg^2 x} \;,\; -\frac{1}{2} \left[ctg\, x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{tg\, x}{\sqrt{2}} \right) \right] + c$

28. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} \, dx \;,\; \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{tg\, x}{\sqrt{2}} \right) - x + c$

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية العادية

تمهيد : لقد درسنا في الفصلين الاول والثاني التكاملات غير المحددة وطرق الاستكمال • وفي هذا الفصل ندرس تطبيقات التكامل لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى •

3-1. تعريف المعادلة التفاضلية

تسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تحقق علاقة بين المتحول المستقل x والتابع المجهول $y = f(x)$ ومشتقاته المتتالية $y', y'', \ldots y^{(n)}$ ونعبر عن المعادلة التفاضلية رمزا بالشكل التالي :

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$$

او بالشكل :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

وتسمي معادلة من هذا الشكل بمعادلة تفاضلية عادية ، حيث التابع المجهول y تابع الى متحول مستقل واحد x •

اما اذا كان التابع المجهول z مثلا تابعا الى متحولين مستقلين او اكثر عندئذ كل علاقة تربط بين هذا التابع ومشتقاته الجزئية والمتحولات المستقلة $x, y, \ldots\ldots$ تسمى معادلة تفاضلية جزئية وتكون من الشكل :

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots\right) = 0$$

مثال (١) : المعادلة :

$$x\frac{dy}{dx} + x\,y - y^2 = o$$

هي معادلة تفاضلية عادية حيث x المتحول المستقل و y التابع المجهول .

والمعادلة : $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + x\,y$

معادلة تفاضلية جزئية .

وسوف تقتصر دراستنا في هذا الفصل على المعادلات التفاضلية العادية

3-2. مرتبة المعادلة التفاضلية

ان مرتبة المعادلة التفاضلية هي مرتبة اعلى المشتقات الموجودة في المعادلة :

فالمعادلة : $y' - 3x\,y^2 - 5 = o$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى .

والمعادلة : $y'' + ay' - 3y + \cos x = o$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية .

3-3. درجة المعادلة التفاضلية

ان درجة المعادلة التفاضلية هي قوة المشتق ذي الرتبة العظمى بعد التخلص من الجذور والكسور بالنسبة للتابع ومشتقاته .

امثلة : المعادلة : $xy - y'^2 + x - 1 = o$

هي معادلة من المرتبة الاولى والدرجة الثانية .

والمعادلة : $y'''^3 + y''y - x\sin x = o$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة والدرجة الثالثة .

والمعادلة : $y'' + (1+y')^{\frac{3}{2}} = x-1$

هي معادلة من المرتبة الثانية والدرجة الثانية

3-4. حلول المعادلة التفاضلية

نسمي حلا او تكاملا للمعادلة التفاضلية كل تابع $y=f(x)$ يقلب المعادلة التفاضلية الى مطابقة مهما كان المتحول المستقل x .

فاذا كان لدينا معادلة تفاضلية من المرتبة n :

$$F(x,y,y',y'',\ldots y^{(n)}) = o$$

وكان $y=f(x)$ حلا لها عندئذ تتحقق المطابقة الاتية :

$$F[x,f(x),\ f'(x),\ldots f^{(n)}] = o$$

مهما كانت x .

مثال (١) : المعادلة التفاضلية : $y''+y = o$

تقبل $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ حلا لها ، حيث c_1 ، c_2 ثابتان كيفيان .

بمعنى انه مهما اعطينا للثابتين c_1 ، c_2 من قيم فان العبارة السابقة تبقى حلا للمعادلة التفاضلية .

مثال (٢) : المعادلة التفاضلية : $y''' + \frac{3}{x}\,y'' = o$

تقبل $y=c_1x+\frac{c_2}{x}+c_3$ حلا لها .

نلاحظ من هذين المثالين ان عدد الثوابت الكيفية في الحل يساوي الى مرتبة المعادلة التفاضلية وهذا ما تؤكده النظرية الاتية التي نقبلها بدون برهان .

نظرية : المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة n تقبل حلا يحوي n ثابتا كيفيا .

ان الحل الموصوف في هذه النظرية يدعى بالحل العام للمعادلة . وبصورة عامة ان هذا الحل العام وحيد . بمعنى انه : من اجل اي معادلة تفاضلية معطاة لا تقبل هذه المعادلة اكثر من حل يحوي n من الثوابت المستقلة (الاساسية) فاذا وجد حلان للمعادلة كل منهما يحوي n من الثوابت المستقلة فهما حلان متكافئان يمكن الحصول على احدهما من الاخر .

3-5 . المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الاولى

لقد تعرضنا في الفقرات السابقة الى تعاريف عامة في المعادلات التفاضلية العادية .

وفيما يأتي سوف نقصر دراستنا على المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى والعادية فقط .

لتكن :

$$f(x,y,c)=0 \qquad (1)$$

معادلة مجموعة من المنحنيات المستوية ، حيث c وسيط متحول يأخذ عدة قيم عددية معينة . فمن اجل كل قيمة عددية نعطيها للوسيط c نحصل على منحن من منحنيات هذه المجموعة . فاذا اشتققنا طرفي هذه المعادلة (1) بالنسبة للمتحول x نجد :

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad (2)$$

واذا حذفنا الوسيط c بين المعادلتين (1) , (2) نحصل على معادلة من الشكل :

$$F(x,y,y')=0 \qquad (3)$$

هذه المعادلة تدعى معادلة تفاضلية لمجموعة المنحنيات (1) . والمعادلة (1) تدعى بالتكامل العام للمعادلة التفاضلية (3) او بالحل العام لهذه المعادلة . وواضح ان المعادلة (3) هي معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى وحلها العام (1) هو تابع جبري يحوي ثابتا كيفيا واحدا c .

واذا اعطينا للثابت الكيفي c قيمة معينة c_0 فان العلاقة $f(x,y,c_0)=0$ تدعى حلا خاصا للمعادلة (3) .

واذا وجد حل للمعادلة التفاضلية (3) لا يمكن استخراجه من عبارة الحل العام (1) مهما اعطينا للثابت من قيم عددية فهذا الحل يدعى بالحل الشاذ للمعادلة التفاضلية .

مثال : المعادلة التفاضلية :

$$y=xy'+\frac{1}{y'}$$

تقبل التابع $y=cx+\frac{1}{c}$ حلا عاما .

لانه يحققها مهما كان الثابت c .

كما تقبل $y^2=4x$ حلا شاذا لها لانه يحقق المعادلة التفاضلية ولا ينشأ عن الحل العام مهما اعطينا الى c من قيم .

وفي هذا الفصل سنتعرض لدراسة طرق حل المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الاولى فقط . وسنبدأ هذه الدراسة بالتعرض لبعض الاشكال الخاصة لهذه المعادلات .

3-6. المعادلات التفاضلية ذات المتحولات المنفصلة

وجدنا في الفقرة السابقة ان الشكل العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة الاولى هـو :

$$F(x,y,y') = 0 \qquad (1)$$

فاذا امكن كتابتها بالشكل :

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

نقول ان المعادلة قابلة للحل بالنسبة للمشتق • ونكتب بالشكل :

$$f(x,y)dx - dy = 0$$

وبشكل اعم نكتب بالشكل :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (3)$$

فاذا كانت امثال dx تابعة الى x فقط وامثال dy تابعة الـى y فقط عندئذ تسمى معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة وتصبح من الشكل :

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (4)$$

والحل العام لهذه المعادلة نحصل عليه مباشرة بأخذ تكامل الطرفين فنجد :

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c \qquad (5)$$

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$x\,dx + (y+1)dy = 0$$

الحل : تكامل الطرفين فنجد :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{2} = c$$

او :

$$x^2 + (y-1)^2 = 2c = c_1$$

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

الحل : تكامل الطرفين :

$$\operatorname{Ln}|x| + \operatorname{arctg} y = c$$

هو الحل العام للمعادلة •

مثال (٣) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

تكامل الطرفين فنجد :

$$\operatorname{Ln}|y| + \operatorname{Ln}|x| = \operatorname{Ln} c \qquad (c > 0)$$

$$\operatorname{Ln}|x \cdot y| = \operatorname{Ln} c$$

ومنه $|x \cdot y| = c$ ومنه $x \cdot y = \pm c$

$$y = \frac{A}{x} \quad \text{او} \quad y = \pm\frac{c}{x}$$

حيث $A = \pm c$

مثال (٤) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$$

نكتب المعادلة بالشكل :

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0$$

تكامل الطرفين فنجد :

$$\operatorname{Ln}|x| + x + \operatorname{Ln}|y| - y = c$$

او :

$$\operatorname{Ln}|x\,y| + x - y = c$$

7-3. المعادلات التفاضلية القابلة لفصل المتحولات ....

الشكل العام لها :

$$f_1(x)\, g_1(y)dx + f_2(x)\, g_2(y)dy = 0 \qquad (1)$$

ترد هذه المعادلة الى الشكل (4) بتقسيم طرفيها على الجداء $f_2(x).g_1(y)$ بشرط $f_2(x).g_1(y) \neq 0$ فنجد :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0$$

وحلها العام هو :

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = c$$

ملاحظة : عندما قسمنا طرفي المعادلة (1) على الجداء $f_2(x).g_1(y)$ يمكن ان نخسر بعض حلول المعادلة (1) . ان هذه الحلول تتعين من جذور المعادلة $g_1(y) = 0$ او المعادلة $f_2(x) = 0$.

فاذا كان $y=b$ جذرا حقيقيا للمعادلة $g(y) = 0$ فان $y=b$ يكون حلا للمعادلة التفاضلية فهو اما حل خاص لها يمكن استنتاجه من الحل العام باعطاء الثابت الكيفي قيمة معينة او يكون حلا شاذا يحقق المعادلة التفاضلية ولا ينشأ عن الحل العام ، ويمكن ان نقول نفس الكلام بالنسبة لجذور المعادلة $f_2(x) = 0$.

مثال (1) : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$2x(y^2+1)dx + dy = 0$$

ترد المعادلة الى معادلة ذات متحولات منفصلة وذلك بتقسيم طرفيها على المقدار y^2+1 المخالف للصفر فنجد :

$$2x\,dx + \frac{dy}{y^2+1} = 0$$

نكامل الطرفين فنجد :

$$x^2 + \operatorname{arctg} y = c$$

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$$

ترد المعادلة الى معادلة ذات متحولات منفصلة بتقسيم طرفيها على المقدار $(1+x^2)\,(1+y^2)$ المخالف للصفر فنجد :

$$\frac{x\,dx}{1+x^2} - \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0$$

بالمكاملة نجد :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,(1+x^2) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,(1+y^2) = \mathrm{Ln}\,c$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{1+x^2}{1+y^2} = \mathrm{Ln}\,c^2$$

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = c^2 = c_1 \qquad (c_1 > 0)$$

مثال (٣) : حل المعادلة التفاضلية :

$$2x\sqrt{y}\,dx + (1+x^2)dy = 0$$

ترد هذه المعادلة الى معادلة ذات متحولات منفصلة وذلك بتقسيم طرفيها على المقدار $\sqrt{y}\,(1+x^2)$ بشرط ان لا يساوي الصفر فنجد :

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$$

نكامل الطرفين فنجد :

$$\mathrm{Ln}\,(1+x^2) + 2\sqrt{y} = \mathrm{Ln}\,c \qquad c > 0$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{1+x^2}{c} = 2\sqrt{y}$$

$$1+x^2 = c_\circ\, e^{2\sqrt{y}}$$ هو الحل العام .

واذا فرضنا ان $\sqrt{y}(1+x^2) = 0$ اى $y=0$ فواضح انه حـل للمعادلة التفاضلية المعطاة لانه يحققها الا انه حل شاذ لانه لا يمكـن الحصول عليه من عبارة الحل العام مهما اعطينا الى c من قيم عددية.

مثال (٤) : حل المعادلة التفاضلية :

$$x(y^2-1)dx + y(x^2+1)dy = 0$$

نرد هذه المعادلة الى معادلة ذات متحولات منفصلة وذلك بتقسيم طرفيها على المقدار $(y^2-1)(x^2+1) \neq 0$ فتصبح بالشكل :

$$\frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{y\,dy}{y^2-1} = 0$$

بالمكاملة نجد :

$$\frac{1}{2}\ \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ \ln|y^2-1| = c$$

$$\ln(x^2+1)\,|y^2-1| = 2c$$

$(x^2+1)\,|y^2-1| = e^{2c} =$ ٨ > 0

وهو الحل العام للمعادلة ذات المتحولات المنفصلة .

واذا فرضنا المقدار $(y^2-1)(x^2+1) = 0$ اى $y = \pm 1$

نلاحظ ان $y = \pm 1$ هما حلان خاصان للمعادلة الاصلية لانهما يحققانها ويمكن الحصول عليهما ايضا اذا اعطينا الى ٨ القيمة صفر في عبارة الحل العام .

مثال (٥) : حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

نرد المعادلة الى معادلة ذات متحولات منفصلة بتقسيم طرفيها على $y \neq 0$

فتصبح بالشكل :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

بالمكاملة نجد :

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln c\ , \qquad c > 0$$

ومنه .

$$|y| = c\,|x|$$

او

$y = \pm\, c\,x$ او $y = c_1 x$

حيث c_1 تأخذ قيما موجبة او سالبة مع $c_1 \neq 0$

فالحل العام للمعادلة ذات المتحولات المنفصلة هو $y = c_1 x$

ولكن عند التقسيم على y نكون قد خسرنا الحل $y=0$ الذى يحقق المعادلة الاصلية . وهذا الحل يمكن الحصول عليه من الحل العام $y = c_1 x$ اذا اعطينا للثابت c_1 قيمة تساوى الصفر وبذلك نحصل على الحل $y=0$ الذى خسرناه .

ويمكن القول : ان جملة حلول المعادلة الاصلية تتألف من مجموعة الحلول $y = c_1 x$ حيث $c_1 \neq 0$ (وهو الحل العام للمعادلة ذات المتحولات المنفصلة) . والحل الخاص $y=0$.

مثال (٦) : حل المعادلة :

$$2xy\,dx + (1-x^2)dy = 0$$

نرد المعادلة الى معادلة ذات متحولات منفصلة بتقسيم طرفيها على المقدار $y(1-x^2) \neq 0$ فتصبح بالشكل :

$$\frac{2x}{1-x^2}\,dx + \frac{dy}{y} = 0$$

نكامل الطرفين فنجد :

$$-\ln|1-x^2| + \ln|y| = \ln c \;;\quad c > 0$$
$$\ln|y| = \ln c\,|1-x^2|$$
ومنه :
$$|y| = c\,|1-x^2|$$
$$y = \pm c\,(1-x^2)$$
او : $y = c_1(1-x^2)$ حيث $c_1 = \pm c$

وهو الحل العام للمعادلة ذات المتحولات المفصولة حيث $c_1 \neq 0$.

واذا فرضنا $y(1-x^2) = 0$ عندئذ $x = \pm 1$ او $y=0$

نلاحظ ان $x = \pm 1$ هما حلان للمعادلة الاصلية لانهما يحققانها وهما حلان شاذان لانه لا يمكن الحصول عليهما من الحل العام . اما $y=0$ فهو حل خاص للمعادلة الاصلية يمكن الحصول عليه بجعل $c_1 = 0$ في عبارة الحل العام .

فجملة حلول المعادلة الاصلية تتألف من مجموعة القطوع المكافئة $y=c_1(1-x^2)$ باعتبار $c_1 \neq 0$ والحل الخاص $y=0$ (وهو محور السينات) والحلان الشاذان $x = \pm 1$ وهما مستقيمان يوازيان المحور oy .

ملاحظة : في المثالين (٥) ، (٦) كان المطلوب حل المعادلة التفاضلية اى ايجاد جميع حلولها الممكنة لذلك لم نكتف بايجاد الحل العام فقط بل تعرضنا لايجاد الحلول الشاذة والخاصة التي خسرناها من جراء تقسيم طرفي المعادلة على جداء تابعين اما اذا طلب الينا ايجاد الحل العام فقط فنكتفي بايجاده فقط دون التعرض الى باقي الحلول الممكنة .

مثال (٧) : حل المعادلة التفاضلية :
$$2x\sin y\,dx + (x^2+3)\cos y\,dy = 0$$

ثم اوجد الحل الخاص المار بالنقطة $M(1, \frac{\pi}{2})$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على $(x^2+3)\sin y \neq 0$ نجد :
$$\frac{2x\,dx}{x^2+3} + \frac{\cos y\,dy}{\sin y} = 0$$
بالمكاملة نجد :
$$\ln(x^2+3) + \ln|\sin y| = c_1$$
$$\ln(x^2+3) + \ln|\sin y| = \ln c$$
حيث : $c > 0 \;,\; c_1 = \ln c$
$$(x^2+3).\,|\sin y| = c$$
$$(x^2+3)\sin y = \pm c$$
وبفرض $\lambda = \pm c$ يكون :
$$(x^2+3)\sin y = \lambda$$
هو الحل العام .

من اجل $\sin y = 0$ اى $y = k\pi$ حيث $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$

وهو حل خاص لانه ينشأ عن الحل العام من اجل $\lambda = 0$.

ولايجاد الحل الخاص المار بالنقطة $(1, \frac{\pi}{2})$ نعوض في الحل العام $x=1 \,,\, y=\frac{\pi}{2}$ نجد :
$$(1+3)\sin\frac{\pi}{2} = \lambda$$
ومنه نجد : $\lambda = 4$

والحل الخاص المطلوب هو :
$$(x^2+3)\sin y = 4$$
ومنه
$$y = \arcsin\frac{4}{x^2+3}$$

3-8 المعادلات التي ترد الى معادلات قابلة لفصل المتحولات

هناك بعض الاشكال من المعادلات التفاضلية ترد الى معادلات تفاضلية قابلة لفصل المتحولات وذلك بتغيير المتحولات .

١ ـ المعادلات من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$$

(حيث a , b ثابتان) يمكن ردها الى معادلة قابلة لفصل المتحولات

بفرض $z = ax+by$ واشتقاق الطرفين بالنسبة الى x نجد :

$$\frac{dz}{dx} = a+b\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = a+b\,f(z)$$

معادلة تفاضلية فيها x متحول و z تابع ويمكن فصل المتحولين فيها :

$$\frac{dz}{a+b\,f(z)} = dx \qquad \text{ومنه}$$

$$x = \int \frac{dz}{a+b\,f(z)} + c$$

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

الحل : نفرض $z = 2x + y$ يكون

$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد :

$$\frac{dz}{dx} - 2 = z$$

بفصل المتحولات نجد :

$$\frac{dz}{z+2} = dx$$

$$\mathrm{Ln}\,|z+2| = x + \mathrm{Ln}\,c \quad , \quad c > 0$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{z+2}{c} = x$$

$$\left|\frac{z+2}{c}\right| = e^{x}$$

$$z+2 = \pm\, c\,e^{x} = \lambda\,e^{x}$$

$$z = -2 + \lambda\,e^{x}$$

$$2x + y = -2 + \lambda\,e^{x}$$

$$y = \lambda\,e^{x} - 2x - 2$$

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$$

نفرض $z = x-y$ ومنه $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$

$$1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1$$

$$z\,dz = -\,dx \quad , \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}$$

بالمكاملة نجد : $z^{2} = -2x + c$

$$(x-y)^{2} = -2x + c$$

مثال (٣) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = (y-4x)^{2}$$

الحل : نفرض $z = y-4x$ ومنه $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + 4$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$\frac{dz}{dx} + 4 = z^{2}$$

او :

$$\frac{dz}{z^2-4} - dx = 0$$

بالمكاملة نجد :

$$x + \frac{1}{4}\ln\frac{z+2}{z-2} = c_1$$

$$\ln\frac{z+2}{z-2} = \ln c - 4x$$

$$\frac{z+2}{z-2} = c\, e^{-4x} \quad , \quad \frac{y-4x+2}{y-4x-2} = c\, e^{-4x}$$

مثال (٤) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$tg^2(x+y)dx - dy = 0$$

للحل نفرض $z = x+y$ فيكون $dy = dz - dx$

نعوض في المعادلة فنجد :

$$tg^2 z\, dx - (dz-dx) = 0$$

ومنه :

$$dx - \frac{dz}{1+tg^2 z} = 0$$

او :

$$dx - \cos^2 z\, dz = 0$$

بالمكاملة نجد :

$$x - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\sin 2z = c_1$$

$$2(x-y) = c+\sin 2(x+y)$$

٢ ـ المعادلة من الشكل :

$$y f_1(x\,y)dx + x\, f_2(x\,y)dy = 0$$

من شكل المعادلة نفرض $z = x\,y$, $y = \frac{z}{x}$

نعوض في المعادلة فتصبح : $x\,dy = dz - \frac{z}{x}dx$

$$\frac{z}{x} f_1(z)dx + f_2(z)dz - \frac{z}{x} f_2(z)dx = 0$$

او بالشكل :

$$\frac{f_2(z)dz}{z\left[f_1(z) - f_2(z)\right]} + \frac{dx}{x} = 0$$

وهي معادلة منفصلة المتحولات

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$y(x\,y+1)dx + x(1+x\,y+x^2\,y^2)dy = 0$$

الحل نفرض $x\,y = z$ ومنه $y = \frac{z}{x}$

$$dy = \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$\frac{z}{x}(z+1)dx + x(1+z+z^2)\left(\frac{x\,dz - z\,dx}{x^2}\right) = 0$$

بعد حذف المخارج وترتيب الحدود تصبح :

$$z^3\, dx - x(1+z+z^2)dz = 0$$

بفصل المتحولات تصبح :

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z^3} - \frac{dz}{z^2} - \frac{dz}{z} = 0$$

بالمكاملة نجد :

$$\ln x + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} - \ln z = c_1$$

$$2z^2\ln\left(\frac{z}{x}\right) - 2z - 1 = c\, z^2$$

$$2x^2\, y^2\, \ln y - 2\,x\,y - 1 = c\, x^2\, y^2$$

ومن المعادلات التفاضلية التي ترد الى معادلات قابلة لفصل المتحولات

3-9. التوابع المتجانسة

تعريف : نقول عن التابع $f(x,y)$ انه متجانس من درجة تجانس n في المتحولين x , y اذا استبدلنا كل x بـ λx وكل y بـ λy وتحققت المطابقة الاتية :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \qquad (1)$$

من اجل جميع قيم x , y , λ

مثال (1) : التابع $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

هو تابع متجانس من الدرجة الاولى ، لان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3} = \lambda\sqrt[3]{x^3+y^3} = \lambda f(x,y)$$

مثال (2) : التابع : $f(x,y) = x y - y^2$.

هو تابع متجانس من الدرجة الثانية ، لانه :

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 [x y - y^2] = \lambda^2 f(x,y)$$

مثال (3) : التابع : $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x y}$

هو تابع متجانس من الدرجة صفر ، لان

$$\frac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2-y^2}{x y}$$

اى : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y)$

نظرية : اذا كان التابع $f(x,y)$ متجانسا من الدرجة n في المتحولين x , y يكون :

$$f(x,y) = x^n f(1,z) = x^n F(z)$$

حيث $z = \frac{y}{x}$

البرهان : بما ان $f(x,y)$ متجانس من الدرجة n فالمطابقة (1) تكون محققة ، اى :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

نختار $\lambda = \frac{1}{x}$ فيكون $\lambda x = 1$, $\lambda y = \frac{y}{x}$

نعوض في المطابقة (1) فنجد :

$$f(1, \frac{y}{x}) = (\frac{1}{x})^n f(x,y)$$

ومنه :

$$x^n f(1, \frac{y}{x}) = f(x,y)$$

لكن :

$$f(1, \frac{y}{x}) = F(\frac{y}{x}) = F(z)$$

اذن :

$$f(x, y) = x^n F(z)$$

3-10. المعادلات التفاضلية المتجانسة

تعريف (1) : نقول عن المعادلة التفاضلية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

انها متجانسة اذا كان التابعان $M(x,y)$, $N(x,y)$ متجانسين ولهما نفس درجة التجانس .

ينتج من هذا التعريف ، بما ان $M(x,y)$ متجانس من الدرجة n يكون :

$$M(x,y) = x^n F_1(z)$$

وكذلك الامر بالنسبة للتابع $N(x,y)$ نكتب :

$$N(x,y) = x^n F_2(z)$$

وذلك حسب النظرية السابقة • نعوض في المعادلة (١) نجد :

$$x^n F_1(z)dx + x^n F_2(z)dy = 0$$

بالاختصار على x^n يكون :

$$F_1(z)dx + F_2(z)dy = 0 \qquad (2)$$

ومن الفرض $z = \frac{y}{x}$ يكون : $y = x.z$

$$dy = x\,dz + z\,dx$$

نعوض في (2) نجد :

$$F_1(z)dx + F_2(z)(x\,dz + z\,dx) = 0$$

$$\left[F_1(z) + z\,F_2(z)\right] dx + F_2(z).x\,dz = 0 \qquad (3)$$

وهذه معادلة قابلة لفصل المتحولات ، حلها العام من الشكل :

$$\varphi(x,z,c) = 0$$

أو :

$$\varphi(x, \frac{y}{x}, c) = 0$$

ملاحظة : هناك تعريف اخر للمعادلة المتجانسة من المرتبة الاولى •

تعريف (٢) : نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الاولى انها متجانسة اذا كانت من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \qquad (4)$$

في الحقيقة اذا فرضنا $z = \frac{y}{x}$ نجد $y = x.z$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

أو :

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

ومنه :

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$$

وهي ذات متحولات منفصلة ، بمكاملة الطرفين نجد :

$$\int \frac{dz}{f(z)-z} = \operatorname{Ln}|x| + \operatorname{Ln} c \qquad c > 0$$

ومنه

$$x = C.\,e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}$$

هو الحل العام

من المعادلة (4) الواردة في التعريف (٢) نلاحظ ان الطرف الايمن من المعادلة هو تابع متجانس في المتحولين x ، y ودرجة تجانسه هو الصفر •

ونلاحظ ان التعريفين (١) ، (٢) للمعادلة المتجانسة متكافئان لان المعادلة في التعريف (١) :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

حيث $M(x,y)$, $N(x,y)$ من درجة تجانس واحدة ،تكتب بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = F(\frac{y}{x})$$

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$$

الحل : نلاحظ انها معادلة متجانسة في المتحولين x ، y لانها من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$$

لذلك لحلها نفرض $z = \frac{y}{x}$ ومنه $y = x.z$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نجد :

$$x \frac{dz}{dx} + z = z + tg\, z$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{\sin z}{\cos z}$$

ومنه
$$\frac{\cos z\, dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$$

بالمكاملة نجد :

$$Ln\,|\sin z| = Ln\,|x| + Ln\, c$$

$$\sin z = c\,x \quad , \quad \sin \frac{y}{x} = c\,x$$

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$(x+y)dx - (y-x)dy = 0$$

الحل : المعادلة متجانسة ، لحلها نفرض : $y = x.z$

$$dy = x\, dz + z\, dx$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$(x+xz)dx - (xz-x)(x\, dz + z\, dx) = 0$$

$$(1+2z-z^2)dx + x(1-z)dz = 0$$

وترد الى تفرقة متحولات فتصبح بالشكل :

$$\frac{(1-z)dz}{1+2z-z^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

بالمكاملة نجد :

$$\frac{1}{2} Ln\,|1+2z-z^2| + Ln\,|x|\ \frac{1}{2} Ln\, c$$

$$x^2(1+2z-z^2) = c \quad , \quad x^2+2xy-y^2 = c$$

مثال (٣) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,y}{x^2-y^2}$$

الحل : الطرف الثاني تابع متجانس من الدرجة صفر ، وبالتالي فالمعادلة التفاضلية متجانسة ، نفرض : $z = \frac{y}{x}$, $y = x.z$

نعوض في المعادلة : $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{1-z^2}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z^3}{1-z^2}$$

بفصل المتحولات نجد :

$$\frac{1-z^2}{z^3} dz = \frac{dx}{x} \quad , \quad \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z}\right)dz = \frac{dx}{x}$$

بالمكاملة نجد :

$$-\frac{1}{2z^2} - Ln\,|z| = Ln\,|x| + Ln\, c$$

$$-\frac{1}{2z^2} = Ln\,|x.z.c|$$

$$-\frac{x^2}{2z^2} = Ln\,|c\,y|$$

او :
$$x = y\sqrt{-2c\, Ln\,|c\,y|}$$

مثال (٤) : حل المعادلة التفاضلية :

$$x^2\frac{dy}{dx} = x^2+y^2+x.y$$

الحل : نقسم طرفيها على x^2 بفرض $x \neq 0$ فتصبح :

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)$$

انها متجانسة ، لذلك نفرض $z = \frac{y}{x}$, $y = x.z$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$z + \frac{dz}{dx}\, x = 1+z^2+z$$

$$x \frac{dz}{dx} = 1+z^2$$

بفصل المتحولات نجد :

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}$$

بالمكاملة نجد : $\text{arctg}\, z = Ln\,|x| + Ln\,|c|$

$$\text{arctg}\, z = Ln\,|c.x|$$

حيث : $-\frac{\pi}{2} < Ln\,|c.x| < \frac{\pi}{2}$

ومنه : $z = tg\,(Ln\,|c.x|)$

$$y = x.tg\,(Ln\,|c.x|)$$

عندما قسمنا طرفي المعادلة على x^2 فرضنا $x \neq 0$ ومن اجل $x=0$ وهي معادلة مستقيم يمثل حلا للمعادلة المفروضة لانه يحققها ولا ينشأ عن الحل العام مهما اعطينا لـ c من قيم لذلك فهو حل شاذ .

مثال (٥) : حل المعادلة التفاضلية :

$$(x^2+y^2)\frac{dx}{dy} = 2xy$$

الحل : المعادلة تكتب بالشكل :

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

بشرط : $x \neq 0$, $y \neq 0$.

نفرض $\frac{y}{x} = z$ ومنه $y = x.z$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$2(z + x\frac{dz}{dx}) = \frac{1}{z} + z$$

$$2x\frac{dz}{dx} = \frac{1-z^2}{z}$$

بفصل المتحولات نجد :

$$\frac{2z\,dz}{1-z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{2z\,dz}{z^2-1} = -\frac{dx}{x}$$

بشرط $z \neq \pm 1$ ، بالمكاملة نجد :

$$Ln\,|z^2-1| = -Ln\,|x| + Ln\,|c|$$

$$Ln\,|z^2-1| = Ln\,\left|\frac{c}{x}\right|$$

$x(z^2-1) = c$ نعوض z بقيمتها فنجد :

$y^2-x^2 = c.x$ وهو الحل العام .

نلاحظ ان $x=0$ هو حل للمعادلة التفاضلية وهو حل شاذ بينما $y=0$ ليس حلا للمعادلة .

ومن اجل $z = \pm 1$ يكون $y = \pm x$ وكلاهما حل خاص للمعادلة التفاضلية لانه يمكن الحصول عليهما باعطاء $c=0$ في عبارة الحل العام .

ملاحظة : اذا طلب الينا ايجاد الحل العام فقط لمعادلة تفاضلية فلا داعي لمناقشة المقادير التي نقسم عليها طرفي المعادلة ونكتفي بشرط كون هذه المقادير تخالف الصفر .

--- اما اذا طلب الينا حل المعادلة التفاضلية فقط فيجب مناقشة هذه المقادير وعندئذ نوجد الحل العام والحلول الشاذة في حالة وجودها .

3-11. المعادلات التفاضلية التي ترد الى معادلات متجانسة

الشكل العام لهذه المعادلات هو :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (١)$$

نلاحظ ان صورة الكسر هي الطرف الايسر من معادلة مستقيم D_1 معادلته $a_1x+b_1y+c_1=0$ ، كذلك المخرج هو الطرف الايسر من معادلة مستقيم D_2 معادلته : $a_2x+b_2y+c_2=0$

هذان المستقيمان اما ان يتقاطعا في نقطة (x_0,y_0) من المستوى xoy وهذا يتم عندما $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

او اما ان يتوازيا وهذا يتم عندما $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

الحالة الاولى : في حالة التقاطع نوجد نقطة التقاطع (x_0,y_0) بحل جملة المعادلتين :

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

حلا مشتركا .

بعد تعيين نقطة التقاطع $O(x_0,y_0)$ ، نسحب جملة المحاور الاصلية الى هذه النقطة فنحصل على جملة جديدة XOY .

ومن المعلوم في الهندسة التحليلية ان :

$x = x_0+X$, $y = y_0+Y$ هما دستورا السحاب يربطان احداثيات نقطة (x,y) منسوبة الى الجملة القديمة باحداثييها (X,Y) منسوبة الى الجملة الجديدة .

$dx = dX$, $dy = dY$ ، بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على المعادلة :

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$$

وهي معادلة متجانسة في المتحولين X , Y فحل بالطريقة المعتادة، ثم نعود الى المتحولات القديمة باستبدال $X = x-x_0$, $Y = y-y_0$ فنحصل على المطلوب .

الحالة الثانية : المستقيمان D_1, D_2 متوازيان اي ان العلاقة $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ محققة ، فاذا فرضنا t قيمة هاتين النسبتين يكون :

$$a_1 = t.a_2 \quad , \quad b_1 = t.b_2$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$$\frac{dt}{dx} = f\left(\frac{t(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right)$$

فاذا فرضنا $z = a_2x+b_2y$ ومنه $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right)$ والمعادلة تصبح :

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = f\left(\frac{tz+c_1}{z+c_2}\right)$$

اي المعادلة اصبحت من الشكل :

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = F(z)$$

وهي معادلة ذات متحولات قابلة للفصل تحل بالطريقة المعروفة ثم نعود الى المتحولات الاصلية باستبدال z بقيمته المفروضة .

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$$

الحل : المستقيمان $x-y+1 = o$, $x+y-3 = o$

متقاطعان ، بحل جملة المعادلتين السابقتين نجد $x=1$, $y=2$ أي

النقطة المشتركة هي $(1,2)$ ، نضع :

$$x = X+1 \quad , \quad y = Y+2$$ فنحصل على المعادلة

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}$$

وهي متجانسة ، نفرض $Z = \frac{Y}{X}$, $Y = X.Z$

باشتقاق الطرفين بالنسبة الى X والتعويض نجد :

$$Z + X\frac{dZ}{dX} = \frac{1-Z}{1+Z}$$ ومنه

$$\frac{(1+Z)dZ}{1-2Z-Z^2} = \frac{dX}{X}$$

بالمكاملة نجد :

$$-\frac{1}{2}\, Ln\,|1-2Z-Z^2| = Ln\,|X| - \frac{1}{2}\, Ln\, c$$

$$(1-2Z-Z^2)X^2 = c$$

نعوض Z بقيمتها فنجد :

$$X^2 - 2XY - Y^2 = c$$

بالعودة الى المتحولات الاصلية نجد :

$$x^2-2xy-y^2+2x+6y = c_1$$

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$(2x+3y+1)dx + (10x+15y+4)dy = o$$

الحل : المستقيمان $2x+3y+1 = o$, $10x+15y+4 = o$

متوازيان ، لذلك نفرض المقدار المشترك $2x+3y = z$

ومنه $dy = \frac{1}{3}(dz-2dx)$, $y = (z-2x)$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد :

$$(z+1)dx + \frac{1}{3}(5z+4)(dz-2dx) = o$$

ومنه :

$$dx - \frac{5z+4}{7z+5}\, dz = o$$

وتكتب بالشكل :

$$dx - \left(\frac{5}{7} + \frac{3}{7(7z+5)}\right) dz = o$$

بالمكاملة نجد :

$$49x-35z-3 \cdot Ln(7z+5) = c$$

بتعويض z بقيمتها نجد الحل العام :

$$21x+105y+3 \cdot Ln(14x+21y+5) = c_1$$

تمارين (٣)

١ ـ اوجد الحل العام للمعادلات الاتية :

1. $\sin x \sin^2 y\, dy - \cos^2 x\, dy = 0$
2. $y^3\, dx + x^6\, dy = 0$
3. $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\, dy = 0$
4. $e^{2x-y}\, dx + e^{x+y}\, dy = 0$
5. $2y\,(x^2-x-1)dx + (x^3-x)dy = 0$
6. $(y^2+2y+5)dx - dy = 0$
7. $y^2 \cos \sqrt{x}\, dx - 2\sqrt{x}\; e^{\frac{1}{y}}\, dy = 0$
8. $y\, dx + (1+x^2)\, \operatorname{arctg} x\, dy = 0$
9. $(1+y^2)dx + x\,y\, dy = 0$
10. $(x\cdot y - x\,y^3)dx + dy = 0$
11. $(1+x^2)dy - \sqrt{1-y^2}\, dx = 0$
12. $\sqrt{1-x^2}\, dy - \sqrt{1-y^2}\, dx = 0$
13. $3e^x\, \operatorname{tg} y\, dx + (1-e^x)\sec^2 y\, dy = 0$
14. $(x-x\,y^2)dx + (y-x^2 y)dy = 0$
15. $(y-a)dx + x^2 dy = 0$

٢ ـ اوجد الحل العام للمعادلات الاتية :

1. $y^2 dx + (x^2-x\,y)dy = 0$
2. $2x\,y\, dx - (3x^2+y^2)dy = 0$

3. $(15x+11y)dx + (5y+9x)dy = 0$
4. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$
5. $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2+y^2}\, dx$
6. $(2x\, \operatorname{tg} \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x})dx + x \sec^2 \frac{y}{x}\, dy = 0$
7. $(y-2x)e^{\frac{y}{x}}\, dx + (2y-x\, e^{\frac{y}{x}})dy = 0$
8. $(10x-4y+12)dx - (x+5y+3)dy = 0$
9. $(-7x-y+2)dx + (8x+14y+2)dy = 0$
10. $(4x-6y-1)dx - (2x-3y+2)dy = 0$
11. $(x-y-1)dx + (y-x+2)dy = 0$
12. $(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0$
13. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$
14. $x\,y' - y\cos \operatorname{Ln} \frac{y}{x} = 0$
15. $x\,y' - y \operatorname{Ln} \frac{y}{x} = 0$

٣ ـ اوجد الحل العام للمعادلات الاتية :

1. $x^2y^3 dx + 5x^2 y\, dy + 6y\, dx = 0$
2. $(y-x\,y^2+x^2y^3)dx + (x^3y^2+x^2y)dy = 0$
3. $y(3x^2y^2-12)dx + x(2x^2y^2+x\,y)dy = 0$
4. $(1+2x\,y - x^2y^2)dx + 2x^2 dy = 0$

توجيه : اضرب طرفي المعادلة بـ y

5. $(1+x\,y \sin x\,y)dx + x^2 \sin x\,y\, dy = 0$

اجوبة التمرين (١) :

1. $\sec x + \operatorname{ctg} y = c$,
2. $5x^5+2y^2 = c\, x^5y^2$
3. $x = a \sin (y+c)$
4. $2e^x + e^{2y} = c$
5. $x^2(x+1)y = c(x-1)$
6. $y= 2\, \operatorname{tg}(2x+c) - 1$
7. $y \operatorname{Ln}(c- \sin \sqrt{x}) = 1$
8. $y \operatorname{arctg} x = c$
9. $x.\ (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = c$
10. $y^2(c.\ e^{x^2} + 1) = 1$
11. $\arcsin y - \operatorname{arctg} x = c$
12. $y \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-y^2} = c$
13. $\operatorname{tg} y = c\ (1-e^x)^3$
14. $x^2+y^2 = x^2y^2 + c$
15. $(y-a) = c\ e^{\frac{1}{x}}$

اجوبة التمرين (٢)

1. $y = c.\ e^{\frac{y}{x}}$
2. $x^2 + y^2 = c\ y^3$
3. $(x+y)^2(y+3x)^3 = c$

4. $x^2 + 2xy - y^2 = c$
5. $c^2 x^2 - 2cy - 1 = 0$
6. $x^2 \operatorname{tg} \frac{y}{x} = c$
7. $y^2 - x^2 e^{\frac{y}{x}} = c$
8. $(x-y+1)^2 (2x+y+3)^3 = c$
9. $(x+y)^2 (2y-x+1)^5 = c$
10. $24x - 12y + 15 \operatorname{Ln} (8x-12y-7) = c$
11. $(y-x+2)^2 + 2x = c$
12. $2x + y - 1 = c.\ e^{2y-x}$
13. $\operatorname{Ln} \left| \frac{y+2}{c} \right| = - \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}$
14. $\operatorname{Ln} |c.x| = \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{y}{x} \right| \right)$
15. $y = x\ .\ e^{1+c\,x}$

اجوبة التمرين (٣)

1. $x(xy-3)^5 = c\ (xy - 2)^5$
2. $x^4 = C\ .\ e^{2xy} (2xy-1)^3$
3. $x^7 (xy-4)^9 (xy+3)^5 = c$
4. $x\ (xy+1) = c\ (xy-1)$
5. $x = C\ e^{\cos xy}$

12-3. المعادلة التفاضلية التامة

لتكن المعادلة :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى ، حيث M , N تابعان مستمران بالنسبة للمتحولين x , y في الساحة D من المستوى xoy .

نقول عن هذه المعادلة انها تامة اذا كان طرفها الايسر تفاضلا تاما (كليا) لتابع $F(x,y)$ قابل للاشتقاق على الساحة D .
اى :

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

وبالتالي فالمعادلة (1) تكتب بالشكل :

$$dF = 0 \qquad (2)$$

والحل العام لهذه المعادلة هو :

$$F(x,y) = c \qquad (3)$$

حيث c ثابت كيفي .

مثال (١) : لتكن المعادلة :

$$2x\,dx + 3y^2\,dy = 0$$

نلاحظ ان الطرف الايسر من هذه المعادلة هو تفاضل تام للتابع :

$$F(x,y) = x^2+y^3$$

فالحل العام هو :

$$x^2+y^3 = c$$

مثال (٢) : برهن ان المعادلة الاتية تامة ثم اوجد حلها العام .

$$(x^3+xy^2+x^2)dx + x^2y\,dy = 0$$

المعادلة تكتب بالشكل :

$$(x^3+x^2)dx + (xy^2\,dx+x^2y\,dy) = 0$$

نلاحظ ان الطرف الايسر عبارة عن مجموع تفاضلين تامين فتكتب بالشكل :

$$d\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right) + d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) = 0$$

وبما ان مجموع تفاضلين يساوى الى تفاضل المجموع نكتب :

$$d\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2y^2\right) = 0$$

اذن المعادلة تامة

بالمكاملة نجد :

$$F = \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2y^2 = c$$

هو الحل العام .

نلاحظ في المثال الاول ان الطرف الاول هو تفاضل تام لتابع سهل ايجاده بمجرد النظر والخبرة في الاشتقاقات . اما المثال الثاني فهو اصعب من الاول ويحتاج الى تجميع الحدود في الطرف الايسر بشكل مناسب بالاضافة الى الخبرة في الاشتقاقات .

وبالطبع ان طريقة التجميع هذه لا تكون ناجحة في الحالات المعقدة ولا تفيدنا في كون المعادلة المعطاة تامة اوغير تامة .

لذلك نلجأ الى النظرية الاتية الهامة التي تفيدنا في معرفة الشروط الواجب توفرها لتكون المعادلة تامة .

نظرية : الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة التفاضلية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

معادلة تامة هو ان تتحقق المطابقة التالية :

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

البرهان :

١) لزوم الشرط :

الفرض : المعادلة (1) تامة

الطلب : المطابقة (2) محققة

بما ان المعادلة (1) تامة فحسب التعريف (١) يوجد تابع $F(x,y)$ بحيث :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$
$$\equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

من ذلك ينتج ان :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \ , \ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

باشتقاق الاولى جزئيا بالنسبة الى y نجد :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \qquad (3)$$

وباشتقاق الثانية جزئيا بالنسبة الى x نجد :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (4)$$

بالمقارنة بين (3) , (4) نجد :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ وهو المطلوب

٢) كفاية الشرط :

الفرض : المطابقة (2) محققة

الطلب : المعادلة (1) تامة

نفتش عن تابع $F(x,y)$ بحيث يكون تفاضله التام يطابق الطرف الايسر من المعادلة (1) ، اي

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$
$$\equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (5)$$

وبالتالي يجب ان تتحقق العلاقتان :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \ , \ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

نكامل الاولى بالنسبة الى x مع اعتبار y ثابتا فنجد :

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (6)$$

حيث $\varphi(y)$ تابع كيفي في المتحول y يجب تعيينه ، لذلك نشتق العلاقة (6) جزئيا بالنسبة الى y فنجد :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + \varphi(y)\right]$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \varphi'(y)$$

لكن لدينا : $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ ، فيكون :

$$\int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$
$$\varphi'(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx \qquad (7)$$

ولنبرهن ان $\varphi'(y)$ تابع الى y فقط نشتق الطرف الثاني بالنسبة الى x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx\right] =$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv 0$$

وذلك حسب المطابقة (2)

وبما ان مشتق $\varphi'(y)$ بالنسبة الى x يساوى الصفر اذن $\varphi(y)$ مقدار تابع الى y فقط يمكن مكاملته بالنسبة الى y وحساب $\varphi(y)$ وتعويضه في (6) فنحصل على التابع المطلوب .

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$(4x^3 + 6x\,y^3)dx + (9x^2y^2+3)dy = 0$$

الحل :

$$M(x,y) = 4x^3+6x\,y^3 \quad , \quad N(x,y) = 9x^2y^2+3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 18\,x\,y^2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 18\,x\,y^2$$

اذن شرط المعادلة التامة محقق ، لحلها نفتش عن التابع $F(x,y) = c$ بحيث :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 6x\,y^3$$

$$F(x,y) = \int (4x^3+6x\,y^3)dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = x^4+3x^2\,y^3+ \varphi(y) \qquad (1)$$

ولنوجد الان التابع $\varphi(y)$ ، نستفيد من الشرط :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 9x^2y^2+3$$

نشتق طرفي (1) بالنسبة الى y فيكون :

$$9x^2y^2 + \varphi'(y) = 9x^2y^2+3$$

ومنه $\varphi(y) = 3y \quad , \quad \varphi'(y) = 3$

نعوض في (1) فيكون :

$$F(x,y) = x^4+3x^2y^3+3y$$

والحل العام للمعادلة هو :

$$x^4+3x^2y^3+3y = c$$

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$(x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy = 0$$

الحل :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$ اذن المعادلة تامة

نفتش عن التابع $F(x,y) = c$ بحيث :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x+y+1 \quad , \quad F = \frac{x^2}{2} + yx + x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi'(y)$$

$$x + \varphi'(y) = x - y^2+3$$

$$\varphi'(y) = -y^2+3 \quad , \quad \varphi(y) = \frac{-y^3}{3} + 3y + c_1$$

$$F = \frac{x^2}{2} + x\,y + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1$$

والحل العام هو :

$$3x^2+6x\,y+6x-2y^3+18y = c_2$$

ملاحظة (١) : عند حساب $\varphi(y)$ اضفنا ثابت التكامل c_1 وهذا غير ضروري لانه سيدمج مع الثابت الكيفي c

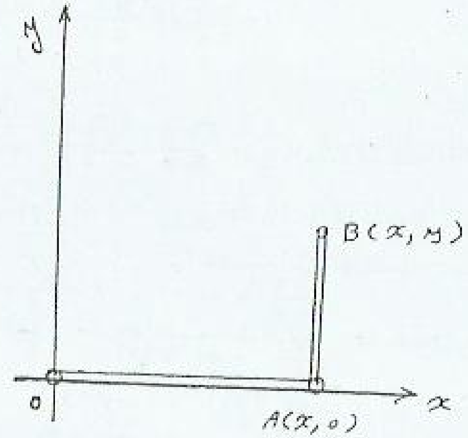
ملاحظة (٢) : هناك طريقة اخرى لتعيين التابع $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy$$

من اجل نقطة البدء (x_0,y_0) نختار مثلا نقطة الاصل o ونجرى التكامل على طول الخط المنكسر المؤلف من القطعتين OA ثم AB حيث

$o(o,o)$ ، $A(x,o)$ ، $B(x,y)$

كما في الشكل التالي :



$$F(x,y) = \int_{(o,o)}^{(x,o)} (x+1)dx + \int_{(x,o)}^{(x,y)} (x-y^2+3)dy$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

والحل العام هو :

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = c$$

13-3 ، المعادلات التفاضلية غير التامة وعامل التكميل

وجدنا ان الشكل العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة الاولى هو :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = o \qquad (1)$$

حيث $M(x,y)$, $N(x,y)$ تابعان مستمران في الساحة D من المستوى xoy .

فاذا كان الطرف الايسر من المعادلة (1) لا يشكل تفاضلا كليا ، اي اذا كان :

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

عندئذ نقول ان المعادلة (1) غير تامة .

ولحل مثل هذه المعادلة نحاول ان نجعلها معادلة تامة وذلك بضرب طرفيها بتابع $\mu(x,y) \neq o$ معرف في نفس الساحة D فالتابع $\mu(x,y)$ الذي يجعل هذه المعادلة تامة يدعى عامل التكميل .

مثال (1) : لتكن المعادلة

$$x\,dx + y\,dy + (x^2+y^2)x^2\,dx = o$$

اذا ضربنا طرفيها بالتابع $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ ، نجد :

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + x^2\,dx = o$$

وهذه معادلة تامة لانها مجموع تفاضلين :

$$d\left[\frac{1}{2} Ln\,(x^2+y^2)\right] + d\left(\frac{x^3}{3}\right) = o$$

اذن التابع $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ هو عامل تكميل للمعادلة ..

بالمكاملة نجد :

$$\frac{1}{2} Ln\,(x^2+y^2) + \frac{x^3}{3} = Ln\,c_1$$

$$Ln\,(x^2+y^2) + \frac{2x^3}{3} = Ln\,c$$

$$\ln(x^2+y^2) + \ln e^{\frac{2x^3}{3}} = \ln c$$

$$(x^2+y^2)\,e^{\frac{2x^3}{3}} = c$$

ولا شك انه ليس بالسهل دوما ايجاد عامل تكميل للمعادلة غير التامة
ولنبحث الان كيف نوجد عامل تكميل لمعادلة تفاضلية غير تامة بشكلها العام :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

اذا ضربنا طرفيها بعامل التكميل $\mu(x,y) \neq 0$ تصبح :

$$\mu . M\,dx + \mu . N\,dy = 0 \qquad (2)$$

وهي معادلة تامة حسب تعريف عامل التكميل .

وبالتالي تتحقق العلاقة :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu . M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu . N)$$

اى :

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

وتكتب بالشكل :

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad (3)$$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية فيها التابع المجهول μ والمتحولان x,y
ان كل حل لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية هو عامل تكميل للمعادلة (1)
ويبرهن انه في شروط معينة ان هذه المعادلة تملك عددا لا متناهيا من الحلول
لكن في الحالة العامة يصعب حل مثل هذه المعادلة لايجاد عامل التكميل μ
بل من الاسهل حل المعادلة التفاضلية نفسها دون اللجوء الى عامل التكميل
الا انه في بعض الحالات الخاصة تكون المعادلة (3) بالشكل البسيط يسهل
حلها وبالتالي يمكن ايجاد عامل التكميل بسهولة .

الحالة الاولى : نفرض ان عامل التكميل μ تابع الى x فقط .

عندئذ يكون : $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$

والمعادلة (3) تصبح من الشكل :

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (4)$$

فاذا كان الطرف الايمن من المعادلة (4) تابعا ل x فقط عندئذ
المعادلة منفصلة المتحولات فيمكن حلها بسهولة وايجاد قيمة $\mu(x)$.

اما اذا الطرف الايمن غير تابع ل x فقط عندئذ يكون فرضنا خاطئا
اى لا يكون عامل التكميل تابعا ل x فنلجأ الى الحالة الثانية بفرض جديد :

الحالة الثانية : نفرض ان عامل التكميل μ تابع الى y فقط .

عندئذ يكون : $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$

والمعادلة (3) تصبح بالشكل :

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dy} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} \qquad (5)$$

فاذا كان الطرف الايمن من هذه المعادلة تابعا ل y فقط عندئذ
المعادلة منفصلة المتحولات فيمكن حلها بسهولة وايجاد قيمة $\mu(y)$ اما اذا
كان الطرف الايمن غير تابع ل y فقط عندئذ يكون فرضنا خاطئا اى لا يكون
هناك عامل تكميل تابع ل y فقط فنلجأ الى الحالة الثالثة بفرض جديد .

الحالة الثالثة : نفرض ان عامل التكميل تابع للمقدار $z = (x+y)$
اى $\mu(x+y)$ عندئذ يكون :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}$$

بالتعوض في المعادلة (3) نحصل على المعادلة :

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M} \qquad (6)$$

اذا كان الطرف الايمن من هذه المعادلة تابعا لـ z اي تابعا لـ x+y عندئذ يوجد للمعادلة (6) حل وبالتالي يوجد للمعادلة (1) عامل تكميل $\mu(x+y)$ ، اما اذا كان الطرف الايمن من المعادلة (6) غير تابع الى x+y فلا يوجد لهذه المعادلة حل وبالتالي لا يوجد عامل تكميل من الشكل المفروض.

وهكذا بتكرار مثل هذه الفروض المختلفة ، فنفرض ان عوامل التكميل تابعة لـ $(x-y)$, $x.y$, x^2-y^2 , x^2+y^2 , ... حتى نحصل على نتيجة تتفق مع الفرض . لذلك ندرس مسألة ايجاد عامل التكميل في الحالة العامة .

الحالة العامة : نفرض بشكل عام ان عامل التكميل $\mu(z)$ حيث $z = f(x,y)$ وبالتالي يكون :

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} , \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

بالتعويض في (3) نجد المعادلة :

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}} \qquad (7)$$

فاذا كان الطرف الايمن من هذه المعادلة تابعا لـ z فقط فتكون المعادلة قابلة الحل وبالتالي يوجد عامل تكميل من الشكل المفروض، واذا لم يكن الطرف الايمن تابعا لـ z فقط فلا يوجد للمعادلة حل وبالتالي لا يوجد عامل

في هذه الحالة عوامل تكميل تابعة لـ z .

فعندما $z = x$, $z = y$, $z = x+y$, $z = x-y$, الخ..

نحصل على حالات توافق الحالات المعروضة وغيرها .

مثال (1) : اوجد عامل تكميل $\mu(x)$ للمعادلة الاتية ، ثم اوجد حلها العام .

$$(x^2+y^2+x)dx + x\,y\,dy = 0$$

الحل : $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = y$ فهي غير تامة

بتطبيق الدستور (4) من الحالة الاولى نجد :

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x} = f(x)$$

اذن يوجد عامل تكميل $\mu(x)$ نكامل المعادلة الاخيرة فنجد :

$$\mu = c\,x$$

ومن اجل $c = 1$ يكون عامل التكميل $\mu = x$. لذلك نضرب طرفي المعادلة المعطاة بـ x فنجد :

$$(x^3+x\,y^2+x^2)dx + x^2\,y\,dy = 0$$

وهي تامة الان ، يمكن حلها بطريقة التجميع فنكتب :

$$d\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right) + d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) = 0$$

ومنه :

$$3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = 0$$

هو الحل العام .

مثال (٢) : اوجد عامل تكميل للمعادلة الاتية ثم اوجد حلها العام .

$$(y+xy^2)dx - x\,dy = 0$$

$$M = y+xy^2 \; ; \; N = -x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1+2xy \; , \; \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

فالمعادلة غير تامة ، ولندرس فيما اذا كانت تقبل عامل تكميل $\mu(y)$

لذلك نطبق الدستور (5) :

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1-1-2xy}{y+xy^2} = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}$$

$$= \frac{-2}{y} = f(y)$$

اذن المعادلة التفاضلية تقبل عامل تكميل تابع الى y فيكون :

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y}\,dy$$

$$Ln\,\mu = -2\,Ln\,y + Ln\,c$$

منه : $\mu = \frac{c}{y^2}$ ، من اجل $c = 1$ يكون $\mu = \frac{1}{y^2}$

بضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل نجد :

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0$$

وهي معادلة تامة $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right)$

بحل هذه المعادلة نجد الحل العام :

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c = 0$$

او :

$$y = -\frac{2x}{x^2+2c}$$

مثال (٣) : لتكن المعادلة :

$$x\,dx + y\,dy + x\,dy - y\,dx = 0$$

برهن ان هذه المعادلة تقبل عامل تكميل من الشكل $\mu = \mu(x^2+y^2)$ ثم اوجد حلها العام .

الحل : نكتب المعادلة بالشكل النموذجي :

$$(x-y)dx + (x+y)dy = 0 \; ;$$

ونفرض ان $z = x^2+y^2$ ونطبق الدستور العام (7)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \; ; \; \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \; , \; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dz} = \frac{-2}{2x^2+2y^2} = -\frac{1}{x^2+y^2} = f(z)$$

بما ان الطرف الثاني تابع لـ z فيوجد للمعادلة حل ، المعادلة تكتب بالشكل :

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-1}{z}\,dz$$

بالمكاملة نجد : $\mu = \frac{c}{z}$ نختار $c = 1$ يكون

$\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ هو عامل التكميل .

لحل المعادلة المعطاة ، نضرب طرفيها بـ $\frac{1}{x^2+y^2}$ فتصبح :

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0$$

وتكتب بالشكل :

$$\frac{\frac{1}{2}\,d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\,d\,Ln\,(x^2+y^2) + d\,arctg\,\frac{y}{x} = 0$$

بالمكاملة نجد :

$$\operatorname{Ln} \sqrt{x^2+y^2} = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{Ln} c$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = C . e^{-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

مثال (٤) : حل المعادلة الاتية بعد ايجاد عامل تكميل مناسب لها •

$$(y+3x^2)dx + (x+ \frac{x^4}{y})dy = 0$$

الحل :

$$M = y+3x^2 \quad , \quad N = x+ \frac{x^4}{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1+ \frac{4x^3}{y}$$

فالمعادلة غير تامة •

نحاول ايجاد عامل تكميل $\mu(x)$ بأخذ $z = x$ فلا نجد عامل تكميل من هذا الشكل ، ثم نحاول ايجاد عامل تكميل $\mu(y)$ بأخذ $z = y$ في المعادلة (٧) فلا نجد عامل تكميل من هذا الشكل •

واخيرا اذا جربنا عامل تكميل من الشكل $\mu = \mu(x.y)$

نضع $z = x.y$ في المعادلة (٧) فنجد :

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dz} = \frac{-\frac{4x^3}{y}}{(x+ \frac{x^4}{y})y - (y+3x^3)x}$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dz} = \frac{2}{x.y} = \frac{2}{z}$$

بما ان الطرف الايمن تابع لـ z فقط اذن يمكن حل المعادلة فنجد :

$\mu = z^2 = x^2y^2$ • نضرب طرفي المعادلة المعطاة بـ $x^2.y^2$ فنجد :

$$(y^3x^2+3y^2x^5)dx + (x^3y^2 + y x^6)dy = 0$$

وهي معادلة تامة (تحقق من ذلك) تحل كالمعتاد •

تمارين

١ — اوجد الحل العام للمعادلات الاتية :

1. $(3x^2+y^2-y)dx + (2xy-x+3)dy = 0$
2. $(2x \operatorname{tg} y-3y^2)dx + (x^2 \sec^2 y-6xy+2)dy = 0$
3. $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$
4. $(3x^2y-4x y^3+6)dx + (x^3-6x^2y^2-1)dy = 0$
5. $(x^2+y^2)dx + 2x y dy = 0$
6. $\frac{-y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0$
7. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy = 0$
8. $(1+e^{\frac{x}{y}}) dx + e^{\frac{x}{y}} (1- \frac{x}{y})dy = 0$
9. $e^{-y} dx - (2y+x e^{-y})dy = 0$
10. $\frac{y}{x} dx + (y^3+ \operatorname{Ln} x)dy = 0$

٢ — اوجد الحل العام للمعادلات الاتية اذا علمت انها تقبل عوامل تكميل تابعة لـ x فقط او لـ y فقط •

1. $(x^3+x y^4)dx + 2y^3 dy = 0$
2. $2x y dx + (y^2-3x^2)dy = 0$

3. $(1-2x\,y^2)dx + 2x\,y(1-x-x\,y^2)dy = o$

4. $y(1+x\,y)dx + x(1-x\,y)dy = o$

5. $(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = o$

٣ ـ اوجد الحل العام للمعادلات الاتية اذا علمت انها تقبل عوامل تكميل تابعة لـ $x.y$ او لـ $x + y$

1. $(2x^3y^2-y)dx + (2x^2y^3-x)dy = o$

2. $x\,y^2\,dx + (x^2y-x)dy = o$

3. $(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)dx + (y^3+xy^2+2xy-x^2-x^3)dx = o$

٤ ـ اوجد الحل العام للمعادلتين الاتيتين اذا علمت انها تقبل عوامل تكميل تابعة لـ x^2+y^2 او تابعة لـ x^2-y^2

1. $(x^2+y^2+1)dx - 2x\,y\,dy = o$

2. $(y+x^2)dy - (x-x\,y)dx = o$

اجوبة التمرين (١)

1. $x^3+xy^2-xy+3y = c$
2. $x^2\,tg\,y - 3xy^2 + 2y = c$
3. $y^2+2xy-x^2 = c$
4. $x^3\,y-2x^2y^3 + 3x^2 - y = c$
5. $x(x^2+3y^2) = c$
6. $y = c\,x$
7. $\dfrac{e^y - 1}{x^2+1} = c$
8. $x + y\,e^{\frac{x}{y}} = c$

9. $x\,e^{-y} - y^2 = c$
10. $4y\,\ln|x| + y^4 = c$

اجوبة التمرين (٢) :

1. $y^4 + x^2 - 1 = c.\,e^{-x^2}$
2. $x^2 - y^2 = c\,y^3$
3. $x.e^{y^2} - x^2\,y^2\,e^{y^2} = c$
4. $\ln x - \ln y - \dfrac{1}{x\,y} = c$
5. $e^x\,(x \sin y - \sin y + y \cos y) = c$

اجوبة التمرين (٣) :

1. $x\,y(x^2 + y^2) + 1 = c\,x\,y$
2. $\ln\,|y| - x\,y = c$
3. $\dfrac{x + y + x\,y}{(x+y)(x+y+2)} = c$

اجوبة التمرين (٤) :

1. $x^2 - y^2 - 1 = c\,x$
2. $x^2 + y^2 = c(y-1)^2$

3-14. المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الاولى ... والمعادلات التي ترد الى خطية

تعريف :

نقول عن معادلة تفاضلية انها خطية من المرتبة الاولى اذا كانت خطية بالنسبة للتابع المجهول y ومشتقه y' .

الشكل العام لهذه المعادلة هو :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

حيث $P(x)$, $Q(x)$ تابعان مستمران بالنسبة للمتحول x (او ثابتان)

وهناك اكثر من طريقة لحل هذه المعادلة .

3-15. طرق حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الاولى :

1 — الطريقة الاولى : (طريقة عامل التكميل) .

لندرس امكانية وجود عامل تكميل تابع لـ x فقط $\mu(x)$.

نكتب المعادلة (1) بالشكل التالي :

$$(Py - Q)dx + dy = 0 \qquad (1')$$

$$M = Py - Q \quad , \quad N = 1$$

نطبق الحالة الاولى من حالات عوامل التكميل الواردة في الفقرة السابقة :

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{p-0}{1} = p$$

بما ان الطرف الايمن تابع لـ x فقط اذن يوجد عامل تكميل $\mu(x)$

بحل المعادلة :

$$\frac{d\mu}{\mu} = p(x)dx$$

$$Ln\,\mu = \int p(x)\,dx$$

$$\boxed{\mu = e^{\int p(x)\,dx}} \qquad (2)$$

والان نضرب طرفي المعادلة (1') بعامل التكميل نجد :

$$e^{\int p\,dx}\left[(py - Q)dx + dy\right] = 0 \qquad (3)$$

وهذه معادلة تامة وترتب بالشكل التالي :

$$e^{\int p\,dx} \cdot \frac{dy}{dx} + p\,y\,e^{\int p\,dx} = Q \cdot e^{\int p\,dx} \qquad (4)$$

نلاحظ ان الطرف الايسر من المعادلة (4) هو مشتق المقدار $y\,e^{\int p\,dx}$ بالنسبة الى x . فاذا كاملنا طرفي المعادلة (4) بالنسبة الى x نجد :

$$y \cdot e^{\int p\,dx} = \int Q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + c$$

$$y = e^{-\int p\,dx} \cdot \left[\int Q \cdot e^{\int p\,dx} \cdot dx + c\right]$$

ويكتب بايجاز بالشكل :

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu}\left[\int Q \cdot \mu\,dx + c\right]} \qquad (5)$$

وهو الدستور الذي يعطي الحل العام للمعادلة .

الدستوران (2) و (5) الاول يعطي عامل التكميل والثاني يعطي الحل العام مباشرة يجب حفظهما جيدا من قبل الطالب .

مثال (1) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$x \cdot y' + 3y = x^2$$

نرد المعادلة الى الشكل النموذجي العام بتقسيم طرفيها على $x \neq 0$

$$y' + \frac{3}{x}\, y = x$$

من الدستور (2) نحسب عامل التكميل :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

نطبق دستور الحل العام فنجد :

$$y = \frac{1}{x^3}\left[\int x.x^3\, dx + c\right]$$

$$y = \frac{1}{x^3}\left[\frac{x^5}{5} + c\right]$$

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$(3x^2+1)y' + 6x\, y = x - 1$$

نرد المعادلة الى الشكل النموذجي للمعادلة الخطية فنجد :

$$y' + \frac{6x}{3x^2+1}\, y = \frac{x+1}{3x^2+1}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{6x}{3x^2+1} dx} = e^{\ln(3x^2+1)} = 3x^2+1$$

$$y = \frac{1}{3x^2+1}\left[\int (x+1)dx + c\right]$$

$$y = \frac{1}{3x^2+1}\left[\frac{x^2}{2} + x + c\right]$$

مثال (٣) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$y' - \frac{2}{x+1}\, y = (x+1)^3$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2\, dx}{x+1}} = e^{\ln (x+1)^{-2}} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y = (x+1)^2\left[\int (x+1)^3 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\, dx + c\right]$$

$$y = (x+1)^2\left[\int (x+1)dx + c\right]$$

$$y = (x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2} + c\right]$$

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + c\,(1+x)^2$$

ملاحظة : قد يطلب في مثل هذه المسألة تعيين حل خاص يحقق شرطا ابتدائيا $y = y_0$ لما $x = x_0$ اى تعيين احد المنحنيات التكاملية المار من النقطة (x_0, y_0) حيث $x_0 \neq -1$ فيمكن دوما تعيين قيمة c من عبارة الحل العام ، فمثلا لايجاد الحل الخاص المحقق للشرط الابتدائي $y_0 = 3$ لما $x_0 = 0$ نعوض $x = x_0$ ، $y = y_0$ في عبارة الحل العام فنجد :

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + c(0+1)^2$$

$$c = \frac{5}{2}$$

وبالتالي فالحل الخاص المطلوب هو :

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2$$

اما من اجل النقطة (x_0, y_0) بحيث $x_0 = -1$ فلا يمكن ايجاد حل خاص يحقق هذا الشرط وذلك لان التابع $p(x) = \frac{-2}{x+1}$ هو غير مستمر عند النقطة $x_0 = -1$

٢ ـ الطريقة الثانية

نحاول التفتيش عن حل للمعادلة (١) بشكل جداء تابعين لـ x :

$$y = u(x).v(x) \qquad (2)$$

يمكننا اختيار احد هذين التابعين ثم نعين الاخر بالتعويض في المعادلة (1) .

باشتقاق طرفي المساواة (2) نجد :

$$\frac{dy}{dx} = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

نعوض في المعادلة (1) فنجد :

$$u\,\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\,v + p\,u\cdot v = Q$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} + pv\right) + v\,\frac{du}{dx} = Q \qquad (3)$$

نختار التابع v بحيث يكون :

$$\frac{dv}{dx} + pv = 0 \qquad (4)$$

بفصل المتحولات في هذه المعادلة التفاضلية نجد :

$$\frac{dv}{v} = -p\,dx$$

بالمكاملة نجد :

$$\ln v = -\int p\,dx + \ln c_1$$

$$v = c_1\cdot e^{-\int p\,dx}$$

وبما انه يكفي الحصول على حل للمعادلة (4) غير الصفر نختار :

$$v(x) = e^{-\int p\,dx} \qquad (5)$$

وواضح ان $v(x) \neq 0$ بتعويض قيمة $v(x)$ في المعادلة (3) نجد :

$$v(x)\,\frac{du}{dx} = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

بالمكاملة نجد :

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx$$

نعوض في (2) نجد :

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + c\right]$$

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + c\,v(x) \qquad (6)$$

حل المثال (٣) بالطريقة الثانية :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}\,y = (x+1)^3$$

نفرض $y = u.v$, $\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\,v$

نعوض في المعادلة المعطاة نجد :

$$u\,\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\,v - \frac{2}{x+1}\,u\,v = (x+1)^3$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}\,v\right) + v\,\frac{du}{dx} = (x+1)^3 \qquad (7)$$

لتعيين v نفرض المقدار داخل القوس في الطرف الايسر مساويا للصفر فنحصل على المعادلة :

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}\,v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2\,dx}{x+1}$$

$$\ln v = \ln (x+1)^2$$

$$v = (x+1)^2$$

بالتعويض في (7) نجد :

$$(x+1)^2 \cdot \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

$$\frac{du}{dx} = x+1$$

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + c$$

وبالتالي يكون الحل العام

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + c\,(x+1)^2$$

٣ ــ الطريقة الثالثة (طريقة لاغرانج)

وجدنا ان الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الاولى هو :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = Q(x) \qquad (1)$$

اذا كان $Q(x) \neq o$ تدعى المعادلة (1) تفاضلية خطية غير متجانسة

اما اذا كان $Q(x) = o$ عندئذ تدعى المعادلة بالخطية المتجانسة وتصبح بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = o \qquad (1')$$

لايجاد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (1) نبدأ اولا بحل المعادلة المتجانسة الناتجة عن الاولى بعد حذف طرفها الايمن .

والمعادلة (1') معادلة منفصلة المتحولات ، حلها العام .

$$y = C.\,e^{-\int p(x)\,dx} \qquad (2)$$

حيث c ثابت كيفي . وتعتمد طريقة لاغرانج على فكرة تحويل الثابت c بحيث نجعل c تابعا للمتحول x اي $c = c(x)$

باشتقاق (2) بالنسبة الى x نجد :

$$y' = c'.e^{-\int p(x)\,dx} - c\,p(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}$$

نعوض في (1) فنجد :

$$c'.e^{-\int p(x)\,dx} - c\,p(x).e^{-\int p(x)\,dx} + c\,p(x).e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

ومنه :

$$\frac{dc}{dx} = Q(x).e^{\int p(x)\,dx}$$

بالمكاملة نجد :

$$c = \int Q(x).e^{\int p(x)dx} .\,dx + c_1$$

حيث c_1 ثابت كيفي .

نعوض c بقيمتها في العلاقة (2) فنجد :

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(c_1 + Q(x).e^{\int p(x)dx} .dx\right)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) .

مثال (1) : اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية :

$$y' + \frac{3}{x}\,y = x^4 \qquad (1)$$

نأخذ المعادلة المتجانسة بعد حذف الطرف الايمن فنجد :

$$y' + \frac{3}{x}\,y = o$$

بفصل المتحولات نجد : $\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}\,dx$ حيث $y \neq o$

نكامل الطرفين :

$$Ln\,|y| = -3\,Ln\,x + Ln|c|$$

$$Ln\,\left|\frac{y}{c}\right| = Ln\,x^{-3}$$

ومنه :

$$y = c.\, x^{-3} \qquad (2)$$

والان نجعل c تابعة الى x ونشتق الطرفين فنجد :

$$y' = c'.x^{-3} - 3c\, x^{-4}$$

نعوض y', y بقيمهما في (1) نجد :

$$c'\, x^{-3} - 3c\, x^{-4} + \frac{3}{x} . c\, x^{-3} = x^4$$

بالاختصار نجد :

$$c'\, x^{-3} = x^4$$

ومنه $c' = x^7$

$c = \frac{x^8}{8} + c_1$ حيث c_1 ثابت كيفي

نعوض c بقيمتها في (2) فنجد :

$$y = \left(\frac{x^8}{8} + c_1 \right) x^{-3}$$

$$y = \frac{x^5}{8} + \frac{c_1}{x^3}$$

هو الحل العام المطلوب .

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة الاتية :

$$y' - y.\sin x = \sin x.\, \cos x \qquad (1)$$

نأخذ المعادلة المتجانسة :

$$y' - y \sin x = 0$$

بفصل المتحولات نجد :

$$\frac{dy}{y} = \sin x\, dx$$

بالمكاملة نجد :

$$y = c.\, e^{-\cos x} \qquad (2)$$

نفرض c تابعا الى x ونشتق الطرفين فنجد :

$$y' = c'.\, e^{-\cos x} + C.\, \sin x.\, e^{-\cos x}$$

نعوض y, y' بقيمتيهما في (1) فنجد :

$$c'.\, e^{-\cos x} + c.\, \sin x.e^{-\cos x} - C.e^{-\cos x} .\sin x = \sin x.\, \cos x.$$

بالاختصار نجد :

$$c'.\, e^{-\cos x} = \sin x.\, \cos x$$

$$dc = e^{\cos x} .\sin x.\, \cos x.\, dx$$

نكامل بالتجزئة بعد كتابة الطرف الايمن بالشكل التالي :

$$dc = (e^{\cos x} .\, \sin x\, dx).\, \cos x$$

نفرض $u = \cos x$ ومنه $du = -\sin x\, dx$

$dv = e^{\cos x} .\, \sin x\, dx$ ومنه $v = - e^{\cos x}$

$$c = - \cos x.\, e^{\cos x} - \int e^{\cos x} .\, \sin x\, dx + c_1$$

$$c = - \cos x.\, e^{\cos x} + e^{\cos x} + c_1$$

$$c = e^{\cos x} (1-\cos x) + c_1$$

نعوض في (2) فنجد :

$$y = e^{-\cos x} \left[e^{\cos x} (1-\cos x) + c_1 \right]$$

$$y = 1 - \cos x + c_1 e^{-\cos x}$$

هو الحل المطلوب العام .

بعد ان عرضنا الطرق الثلاث لحل المعادلة الخطية من المرتبة الاولى نلاحظ ان الطريقة الاولى هي الافضل والاسهل لذلك يجدر بالطالب اتباعها .

ملاحظة : قد تكون المعادلة التفاضلية خطية في التابع x والمتحول y وشكلها العام :

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = Q(y)$$

فاذا طبقنا الطريقة الاولى لحلها ، نجد ان :

عامل التكميل هو $\mu(y)$ ويعطى بالدستور :

$$\mu(y) = e^{\int p(y)\,dy}$$

وحلها العام يعطى بالدستور :

$$x = \frac{1}{\mu(y)}\left[\int Q(y).\mu(y)dy + c\right]$$

اما بالنسبة للطريقتين الثانية والثالثة فنتبع نفس الطريقة المتبعة في كل مرة بعد ان نستبدل كل x ب y وبالعكس.

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$(x+y^2)dy = y\,dx$$

تكتب بالشكل $\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^2}{y}$ حيث $y \neq 0$

او بالشكل : $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y$

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln \frac{1}{y}} = \frac{1}{y}$$

$$x = y\left[\int \frac{1}{y} . y\,dy + c\right]$$

$$x = y\left[\int dy + c\right]$$

$x = y(y+c)$ هو الحل العام .

3-16 المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى غير الخطية

١ ـ معادلة برنولي :

الشكل العام لهذه المعادلة

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x).\,y^n \qquad (1)$$

حيث $P(x)$, $Q(x)$ تابعان مستمران في المتحول x (او ثابتان) و $n \neq o$, $n \neq 1$ اما اذا كان $n=o$ او $n=1$ نحصل على معادلة خطية .

ترد هذه المعادلة الى معادلة خطية باجراء التعويض الاتي :

نقسم طرفيها على y^n فنجد المعادلة

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p.y^{-n+1} = Q \qquad (2)$$

نفرض $z = y^{-n+1}$, $\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}.\frac{dy}{dx}$

نعوض في المعادلة (2) فنجد :

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)pz = (-n+1)\,Q \qquad (3)$$

وهذه معادلة خطية في التابع z والمتحول x ، بحلها نجد الحل العام ثم نعوض z بقيمتها فنحصل على الحل العام لمعادلة برنولي .

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} + x\,y = x^3\,y^3 \qquad (1)$$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على y^3 فنجد :

$$y^{-3}.\ y' + x\,y^{-2} = x^3 \qquad (2)$$

نفرض $z = y^{-2}$ ومنه $\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}.\ \frac{dy}{dx}$

نعوض في المعادلة (2) فنجد :

$$\frac{dz}{dx} - 2x\,z = -2\,x^3$$

وهذه معادلة خطية .

$$\mu(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

$$z = e^{x^2}\left[\int -2x^3.\ e^{-x^2}\,dx + c\right]$$

نكامل المقدار داخل القوس بالتجزئة فنكتب :

$$I = \int -2x^3.\ e^{-x^2}\,dx = \int -2x.e^{-x^2}\,dx.\ x^2$$

نفرض $u = x^2$, $du = 2x\,dx$

$$v = e^{-x^2} \quad , \quad dv = -2x\ e^{-x^2}$$

$$I = x^2.\ e^{-x^2} - \int 2x\ e^{-x^2}\,dx$$

$$I = x^2.\ e^{-x^2} + e^{-x^2} = e^{-x^2}(1+x^2)$$

$$z = e^{x^2}\left[\ e^{-x^2}\ (1+x^2) + c\ \right]$$

$$z = (1+x^2) + c\ e^{x^2}$$

$$y^{-2} = (1+x^2) + c\ e^{x^2}$$

او :

$$y^2\ (1+x^2) + c\ y^2\ e^{x^2} = 1$$

او بالشكل الظاهرى :

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+C\ e^{x^2}}}$$

هو الحل العام .

ملاحظة : يمكن حل معادلة برنولي مباشرة كما وجدنا في الطريقة الثانية لحل المعادلة الخطية ، نفرض ان حل المعادلة بشكل جداء تابعين

$$y = u(x).\ v(x)$$

حيث $v(x)$ تابع اختيارى غير الصفر ويحقق المعادلة

$$v' + pv = 0$$

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$$

الحل : نضرب طرفي المعادلة ب $2y$ فنجد :

$$2y\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + x^2$$

$$2y\ \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}\ y^2 = x^2$$

نفرض : $z = y^2$, $\frac{dz}{dx} = 2y\ \frac{dy}{dx}$

نعوض في المعادلة الاخيرة فنجد :

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}\ z = x^2$$

وهذه خطية في التابع z والمتحول x .

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = \frac{1}{x}$$

$$z = x\left[\int \frac{1}{x}\cdot x^2\,dx + c\right]$$

$$z = x\left[\frac{x^2}{2} + c\right]$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2} + cx$$

هو الحل العام •

٢ ـ معادلة ريكاتي

الشكل العام :

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \qquad (1)$$

حيث $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ توابع مستمرة في المتحول x عندما $R(x)=0$ تصبح معادلته برنولي وعندما $P(x)=0$ تصبح معادلة خطية •

لحل هذه المعادلة لا بد من معرفة حل خاص لها ، وهذا الحل الخاص اما ان يعطى في المسألة او نحصل عليه بالتجريب •

ولنفرض ان $y = y_1$ حل خاص للمعادلة (1) واذا اجرينا تحويلا في التابع من y الى z بحيث $y = y_1+z$ سنبرهن ان المعادلة (1) ترد الى معادلة برنولي :

$$y' = y'_1 + z'$$

نعوض في (1) فنجد :

$$y'_1+z'+P(y_1+z)^2 + Q(y_1+z) + R = 0$$

بفك الاقواس والترتيب نجد :

$$z' + pz^2 + (2py_1 + Q)z + (y'_1+py_1^2 + Qy_1 +R) = 0$$

بما ان y_1 حل خاص للمعادلة (1) اذن ما داخل القوس الاخير يساوي الصفر عندئذ تصبح المعادلة بالشكل :

$$z' + pz^2 + (2py_1+Q)z = 0 \qquad (2)$$

وهذه معادلة برنولي في التابع z والمتحول x ، تحل بالطريقة المذكورة في الفقرة السابقة • نكتب المعادلة (2) بالشكل النموذجي لمعادلة برنولي :

$$z' + (2py_1+Q)z = -pz^2$$

نقسم طرفيها على z^2 فتصبح :

$$z^{-2}.z' + (2py_1+Q)\frac{1}{z} = -p$$

نفرض $\frac{1}{z} = v$ فيكون $v' = -z^{-2}.z'$ ، بالتعويض نحصل على المعادلة :

$$v' - (2py_1+Q)v = p$$

وهي معادلة خطية في التابع v والمتحول x •

نستنتج مما سبق ان الفرض $y = y_1+z$ يحول معادلة ريكاتي الى معادلة برنولي في التابع z والمتحول x •

واذا اجرينا تغييرا اخر في التابع وفرضنا $\frac{1}{z} = v$ تنقلب معادلة برنولي السابقة الى معادلة خطية في التابع v والمتحول x •

لذلك يمكن ان نستنتج ان الفرض $y = y_1+\frac{1}{v}$ يقلب معادلة ريكاتي مباشرة الى معادلة خطية في v او ان الفرض $y = y_1 + \frac{1}{z}$ يقلب معادلة ريكاتي مباشرة الى معادلة خطية في z ، وحلها العام من الشكل :

$$z = \varphi(x,c)$$

ويكون الحل العام لمعادلة ريكاتي هو :

$$y = y_1 + \frac{1}{\varphi(x,c)}$$

ملاحظة : اذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$A(x)y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

تحول هذه المعادلة الى الشكل العام لمعادلة ريكاتي بعد تقسيم طرفيها على $A(x)$ بشرط $A(x) \neq 0$ فتصبح من الشكل :

$$y' + \frac{P}{A}y^2 + \frac{Q}{A}y + \frac{R}{A} = 0$$

عندئذ تحل معادلة ريكاتي بالطريقة السابقة الا انه يجب مناقشة قيم x التي تعدم التابع $A(x)$ ، فلو فرضنا ان $x=a$ هو جذر للمعادلة $A(x)=0$ عندئذ $x=a$ قد يكون حلا للمعادلة التفاضلية او لا يكون واذا كان حلا فهو اما حل خاص او حل شاذ للمعادلة التفاضلية .

مثال (١) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$y' - y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{3}{x^2} = 0$$

اذا علمت انها تقبل $y = \frac{1}{x}$ حلا خاصا لها .

للحل : نفرض $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد :

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{3}{x^2} = 0$$

بفك الاقواس والاختصار نجد :

$$y' + \frac{3}{x}z = -1$$

وهي خطية في التابع z والمتحول x نحلها بطريقة عامل التكميل :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = x^3$$

$$z = \frac{1}{x^3}\left[\int -x^3\,dx + c\right]$$

$$z = \frac{1}{x^3}\left[-\frac{x^4}{4} + c\right] = \frac{-x}{4} + \frac{c}{x^3}$$

$$z = \frac{4c - x^4}{4x^3}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{4x^3}{4c - x^4}$$

هو الحل العام .

مثال (٢) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$$

اذا علمت انها تقبل $y = \frac{2}{x}$ حلا خاصا لها .

الحل : نجرى التحويل $y = y_1 + \frac{1}{z}$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z}$$

$$y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد :

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2} + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{z}\right) - \frac{4}{x^2} = 0$$

بفك الاقواس والاختصار نجد :

$$z' - \frac{5}{x}z = 1$$

وهي خطية في التابع z والمتحول x نحلها بطريقة عامل التكميل :

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{5}{x}dx} = \frac{1}{x^5}$$

$$z = x^5 \left[\int \frac{1}{x^5}\, dx + c \right]$$

$$z = x^5 \left[-\frac{1}{4x^4} + c \right] = \frac{-x}{4} + c\, x^5$$

$$z = \frac{4\, c\, x^5 - x}{4} = \frac{x(c\, x^4 - 1)}{4}$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{x(c\, x^4 - 1)}$$

هو الحل العام للمعادلة .

مثال (٣) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$(x+1)^2\, y' - (x+1)^2\, y^2 + 2 = 0$$

اذا علمت انها تقبل $y = \frac{1}{x+1}$ حلا خاصا لها .

الحل : اولا نقسم طرفي المعادلة على $(x+1)^2$ بشرط $x \neq -1$

تصبح المعادلة بالشكل :

$$y' - y^2 + \frac{2}{(x+1)^2} = 0$$

نجرى التحويل $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{z}$, $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{z'}{z^2}$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد :

$$-\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{z'}{z^2} - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{z} \right)^2 + \frac{2}{(x+1)^2} = 0$$

بفك الاقواس والاختصار نجد :

$$z' + \frac{2}{x+1}\, z = -1$$

خطية تحل بطريقة عامل التكميل :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x+1} dx} = e^{\ln (x+1)^2} = (x+1)^2$$

$$z = \frac{1}{(x+1)^2} \left[-\int (x+1)^2 dx + c \right]$$

$$z = \frac{1}{(x+1)^2} \left[-\frac{(x+1)^3}{3} + c \right]$$

$$z = \frac{-(x+1)}{3} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)^3 + 3c}{3(x+1)^2}$$

$$y = \frac{1}{x+1} + \frac{3(x+1)^2}{A - (x+1)^3}$$

هو الحل العام .

ملاحظة : في بعض التمارين المتعلقة بمعادلة ريكاتي لا تعطى الحل الخاص بل تعطى شكل الحل الخاص وعندئذ يجب معرفة الحل الخاص ونتائج الحل بالطريقة السابقة .

مثال (٤) : اوجد الحل العام للمعادلة

$$y' - \frac{1}{x}\, y - y^2 - \frac{1}{x^2} = 0$$

اذا علمت انها تقبل حلا خاصا من الشكل $y = \frac{a}{x}$

لمعرفة الحل الخاص نفسه يجب تعيين الثابت a اولا .

الحل : نفرض ان $y = \frac{a}{x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية المعطاة فيجب ان يحققها :

$$-\frac{a}{x^2} - \frac{a}{x^2} - \frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

منه $a = -1$ ، والحل الخاص هو : $y = \frac{-1}{x}$

نجرى التحويل :

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

نعوض في المعادلة فنجد :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{1}{x^2} = 0$$

بفك الاقواس والاختصار نحصل على المعادلة الخطية الاتية :

$$z' - \frac{1}{x} z = -1$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$z = x\left[\int -\frac{dx}{x} + c\right]$$

$$z = x\left[\operatorname{Ln}\left|\frac{1}{x}\right| + c\right]$$

$$z = x \operatorname{Ln}\left|\frac{1}{x}\right| + c\,x$$

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{C\,x + x\operatorname{Ln}\left|\frac{1}{x}\right|}$$

هو الحل العام للمعادلة المعطاة .

تمارين (3)

١ ــ اوجد الحل العام للمعادلات الاتية :

1. $\frac{dy}{dx} - x\,y = x$
2. $x\frac{dy}{dx} + y = x \operatorname{Ln} x$
3. $(y - x \sin x^2)dx + x\,dy = 0$
4. $(y - 2x\,y - x^2)dx + x^2\,dy = 0$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \operatorname{Ln} x} y = \frac{1}{x}$
6. $y\,dx - (x + 2y^2)dy = 0$
7. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$
8. $y' - a\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$
9. $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - ax^3 = 0$
10. $\frac{dy}{dx}\cos x + y \sin x = 1$
11. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
12. $y' - \frac{n}{x}y = e^x \cdot x^n$
13. $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}$
14. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$
15. $x\,y' + (x+1)y = 3x^2 \cdot e^{-x}$

٢ ـ اوجد الحل العام للمعادلات الاتية :

1. $(x+y^2)dy = y\,dx$

2. $(2\,e^y - x)y' = 1$

3. $\left(\sin^2 y + x \dfrac{\cos y}{\sin y}\right) y' = 1$

4. $(2x+y-4 \ln y)dy = y\,dx$

5. $y' = \dfrac{y}{3x-y^2}$

6. $(1-2x\,y)y' = y(y-1)$

7. $(x-2y\,x-y^2)y' + y^2 = 0$

8. $(\cos^2 y - x \sec y)dy - \sin y\,dx = 0$

٣ ـ اوجد الحل العام للمعادلات الاتية :

1. $y' - 2y\,\mathrm{tg}x + y^2\,\mathrm{tg}^4 x = 0$

2. $(2x\,y - x \cdot e^{-x^2} \cdot y^{-3})dx + dy = 0$

3. $x\,y' + y = y^2 \ln x$

4. $y' + x\,y = x^3\,y^3$

5. $(1-x^2)y' - x\,y - ax\,y^2 = 0$

6. $3y^2\,y' - a\,y^3 - x - 1 = 0$

7. $y'(x^2\,y^3 + x\,y) = 1$

8. $(y \ln x - 2)y\,dx = x\,dy$

9. $y - y' \cos x = y^2 \cos x\,(1-\sin x)$

10. $x\,y' + y = y^2 \ln x$

11. $x\,y' + 2y + x^5\,y^3 \cdot e^x = 0$

12. $y' - y\,\mathrm{tg}x = y^4 \cdot \cos x$

13. $\dfrac{dx}{dy} - x\,y = x^2\,y^3$

14. $y' \cdot \sin x \cdot x^3 = x\,y' - 2y$

15. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$

٤ ـ اوجد الحل العام للمعادلات الاتية :

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$

اذا علمت انها تقبل $y = \dfrac{1}{x}$ حلا خاصا بها

2. $y' = y^2 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{3}{x^2}$

اذا علمت انها تقبل $y = \dfrac{1}{x}$ حلا خاصا لها

3. $y' + y^2 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2} = 0$

4. $x^2(x-2)y' + x^2(x-2)y^2 - 2x(2x-3)y + 6(x-1) = 0$

اذا علمت انها تقبل $y = \dfrac{3}{x}$ حلا خاصا لها

5. $2x^2\,y' = (x-1)(y^2-x^2) + 2x\,y$

6. $x\,y' - y + y^2 - x^2 = 0$

اذا علمت انها تقبل حلا خاصا من الشكل $y = ax$

7. $y' - 2x\,y + y^2 = 5 - x^2$

اذا علمت انها تقبل حلا خاصا من الشكل $y = ax + b$

8. $x^2 y' + (x y-2)^2 = 0$

اذا علمت انها تقبل حلا خاصا من الشكل $y = \frac{a}{x}$

9. $y' + 2y e^x - y^2 = e^{2x} + e^x$

10. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$

اجوبة التمرين (١)

1. $y+1 = C.\, e^{\frac{x^2}{2}}$,
2. $4x y = 2x^2 \ln x - x^2 + c$
3. $2x y + \cos x^2 = c$
4. $y = x^2 (1+C.\, e^{\frac{1}{x}})$
5. $2y \ln x = \ln^2 x + c$
6. $x = 2y^2 + c y$
7. $2y = (x+1)^4 + c (x+1)^2$
8. $y = c x^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}$
9. $y = ax + c x \sqrt{1-x^2}$
10. $y = \sin x + C \cos x$
11. $y = \sin x - 1 + C.\, e^{-\sin x}$
12. $y = x^n (e^x + c)$
13. $x^n .\, y = ax + c$

14. $y = x^2 (1+C.\, e^{\frac{1}{x}})$
15. $x.y = (x^3 + c\, e^{-x})$

اجوبة التمرين (٢) :

1. $x = y^2 + c y$
2. $x = e^y + C.\, e^{-y}$
3. $x = \sin y\, (c - \cos y)$
4. $x = 2 \ln |y| - y + 1 + c y^2$
5. $x = c y^3 + y^2$
6. $(y-1)^2 x = y - \ln |c y|$
7. $x = y^2 (1+C.\, e^{\frac{1}{y}})$
8. $x = \cos y + C.\, \mathrm{ctg}\, y$

اجوبة التمرين (٣) :

1. $5\sec^2 x = y (\mathrm{tg}^5 x + c)$
2. $3y^4 .\, e^{4x^2} = 2e^{3x^2} + c$
3. $\frac{1}{y} = \ln x + 1 + c x$
4. $y^2 (x^2+1+c\, e^{x^2}) = 1$
5. $(c \sqrt{1-x^2} - a) y = 1$
6. $a^2 y^3 = C.\, e^{ax} - a(x+1) - 1$

7. $x\left[(2-y^2)e^{\frac{1}{2}y^2}+c\right]=e^{\frac{1}{2}y^2}$

8. $y(c\,x+\operatorname{Ln} x+1)=1$

9. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x+\sec x}{\sin x+c}$

10. $\dfrac{1}{y}=c\,x+\operatorname{Ln}|x|+1$

11. $\dfrac{1}{y^2}=x^4(2e^x+c)$

12. $\dfrac{1}{y^3}=C.\cos^3 x-3\sin x\cos^2 x$

13. $x\left(e^{-\frac{1}{2}y^2}-y^2+2\right)=1$

14. $x^2(c-\cos y)=y$

15. $x\,y(c-\operatorname{Ln}^2|y|)=1$

اجوبة التمرين (٤) :

1. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x^2}{c-x^3}$

2. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4x^3}{4c-x^4}$

3. $x\,y=\dfrac{x^2-c}{x^2+c}$

4. $y=\dfrac{3c\,x^2-2x+1}{c\,x^3-x^2+x}$

5. $y(x+2c\,e^x)=x^2-2c\,x\,e^x$

6. $y=x+\dfrac{2x}{Ce^{2x}-1}$

7. $y=x+2+4(Ce^{4x}-1)^{-1}$

8. $y(x^4+c\,x)=4x^3+c$

9. $y=e^x-(x+c)^{-1}$

10. $y=x+X(x+c)^{-1}$

الفصل الرابع

التكاملات المحددة

تمهيد : ان التكامل المحدد (او تكامل ريمان) هو من المفاهيم الهامة في التحليل الرياضي الكلاسيكي • وكان الرياضي كوشي هو اول من اعطى التعريف الدقيق للتكامل المحدد كنهاية لمجاميع تكاملية (في عام ١٨٢١) • وقد اعطى الرياضي داربو (في عام ١٨٧٥) اول برهان مكتمل لوجود التكامل المحدد من اجل تابع مستمر • الا ان الشروط اللازمة والكافية لقابلية المكاملة من اجل التوابع (غير المستمرة) كانت قد اعطيت بصيغ مختلفة وعلى التوالي من قبل ريمان وليبغ وذلك على امتداد النصف الثاني من القرن التاسع عشر • الرياضي ستلجيس ادخل مفهومه الجديد للتكامل في عام ١٨٩٤ لعلاقة ذلك ببعض المسائل الخاصة • وفي القرن العشرين استخدم تكامل ستلجيس • وبشكل واسع في المسائل العامة • في عام ١٩٠٢ ظهر مفهوم للتكامل اكثر شمولا وعمومية ويعود الفضل في ادخال هذا المفهوم الحديث للتكامل للرياضي ليبغ • ويلعب الان مفهوم ليبغ للتكامل دورا حاسما في الرياضيات المعاصرة •

في هذا الفصل سندرس بالتفصيل التكامل المحدد بالمفهوم الكلاسيكي (كوشي — داربو — ريمان) ونترك دراسة تكامل ستلجيس وكذلك تكامل ليبغ الى كتب اخرى تعطى في سنوات متقدمة من الدراسة الجامعية •

4-1 • مجاميع داربو ـ تكامل داربو :

ليكن $f(x)$ تابعا معرّفا ومحدودا على المجال المغلق والمحدود $a \le x \le b$ • نسمي مجموعة النقاط :

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

تجزئة للمجال $[a,b]$ اذا كانت :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \qquad (1)$$

من اجل اية تجزئة معطاة للمجال $[a , b]$ ، فاننا نضع :

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x), \qquad m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

ولنشكل بعد ذ المجاميع :

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad (2)$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad (3)$$

يطلق على S اسم مجموع داربو العلوى وعلى s اسم مجموع داربو السفلي •

بما ان $f(x)$ تابع محدود على المجال $[a,b]$ ، فان G° مجموعة كل الاعداد S تكون محدودة • سنرمز بـ J للحد الادنى الاعظمي للمجموعة G° • بشكل مشابه ، فاننا نرمز بـ $G_{\circ}$ لمجموعة كل الاعداد s • سنرمز بـ I للحد الاعلى الاصغرى لـ $G_{\circ}$ •

نظرية (١) : من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث

من اجل اية تجزئة للمجال $[a,b]$ يكون :

$$0 \le S - J < \varepsilon$$

وذلك اذا كان :

$$\max(x_i - x_{i-1}) < \delta.$$

يمكننا التعبير عن مضمون هذه النظرية بالشكل التالي :

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \to J$$

وذلك اذا كان : $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$

نظرية (٢) :

من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث من اجل اية تجزئة للمجال $[a,b]$ يكون :

$$-\varepsilon < s - I \le 0$$

وذلك اذا كان :

$$\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$$

يعبر عن مضمون هذه النظرية ايضا بالشكل التالي :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \to I$$

وذلك اذا كان :

$$\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$$

نظرية (٣) : المتراجحة التالية محققة :

$$J \geq I$$

ان النظريات ١ ، ٢ ، ٣ سنعتمد عليها في الدراسة المقبلة ولن نتعرض لبرهانها .

تعريف (١) : نطلق على J اسم تكامل داربو العلوى ، كما نطلق على I اسم تكامل داربو السفلي .

اذا كان $I=J$ فاننا نقول عن التابع f انه قابل للمكاملة بحسب مفهوم داربو على المجال $[a,b]$ ونطلق في هذه الحالة على العدد I اسم تكامل داربو على المجال $[a,b]$. يرمز لتكامل داربو هذا بـ :

$$(D)\int_a^b f(x)\,dx$$

نظرية (٤) : ليكن $f(x)$ تابعا محدودا على المجال المغلق والمحدود $a \leq x \leq b$. عندئذ $f(x)$ يكون قابلا للمكاملة بحسب مفهوم داربو على المجال $[a,b]$ اذا وفقط اذا كانت توجد من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ ، تجزئة للمجال $[a,b]$ بحيث من اجلها يحقق مجموع داربو العلوى ومجموع داربو السفلي المتراجحة :

$$S - s < \varepsilon \qquad (4)$$

البرهان :

١ ــ لزوم الشرط : لنفرض ان $f(x)$ قابل للمكاملة بحسب مفهوم داربو (اى $I=J$) . عندئذ من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث من اجل اى تجزئة للمجال $[a,b]$ حيث

$\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$ فان مجموعي داربو العلوى والسفلي S و s الموافقين لهذه التجزئة يحققان :

$$S < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$s > I - \frac{\varepsilon}{2}$$.

من هذا نستنتج ان :

$$S - s < \varepsilon$$

٢ ــ كفاية الشرط : لنفرض ان (4) محققة . عندئذ :

$$J - I < S - s < \varepsilon.$$

بما ان ε عدد موجب اختيارى فاننا نجد :

$$J - I \leq 0$$

ومنه :

$$J \leq I$$

وبما انه بحسب النظرية (٣) $J \geq I$ فاننا نجد ان : $J = I$.

فاذن $f(x)$ قابل للمكاملة بحسب مفهوم داربو .

تمارين :

١ ــ ليكن $f(x)$ تابعا معرّفا على المجال $[2,5]$ بالشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{عدد غير عادى } x \\ 1 & \text{عدد عادى } x \end{cases}$$

(يعرف هذا التابع باسم تابع ديريخليه) . اثبت ان التابع $f(x)$ غير قابلة للمكاملة بحسب مفهوم داربو على المجال $[2,5]$.

٢ ـ لنأخذ التابع :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{if } -\infty < x \le 0, \\ \beta & \text{if } 0 < x < \infty \end{cases}$$

حيث α و β عددين حقيقيين • اثبت ان هذا التابع قابل للكاملة بحسب مفهوم داربو على اى مجال محدود [a,b] واحسب :

$$(D)\int_a^b f(x)\,dx$$

٤ ـ ٤ • تكامل ريمان :

ليكن f(x) تابعا محدودا على المجال المغلق والمحدود [a,b] •
لنأخذ تجزئة ما للمجال [a,b] :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (1)$$

ولنكن $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ بحيث :

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$

ولنشكل المجموع :

$$T = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (2)$$

الذى نطلق عليه اسم مجموع ريمان التكاملي •

لنفرض الان انه يوجد عدد حقيقي K بحيث تتحقق الخاصة التالية :
من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|T - K| < \varepsilon \qquad (3)$$

وذلك اذا كان $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$, وبحيث لا يتعلق ذلك بطريقة التجزئة ولا باختيار النقاط ξ_i في المجالات $[x_{i-1}, x_i]$ • عندئذ نكتب :

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \to K \qquad (4)$$

وذلك عندما :

$$\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$$

تعريف (١) : اذا وجد عدد K بحيث تتحقق (4) عندئذ نسمي f(x) تابعا قابلا للكاملة بحسب مفهوم ريمان على المجال [a او في المجال] [a,b] ونطلق على العدد K اسم تكامل ريمان للتابع f(x) على المجال [a,b] ونرمزله بـ :

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx$$

نسمي العددين a و b بحدود التكامل •

اذا كان $f(x) \ge 0$ من اجل جميع قيم $a \le x \le b$ فان تكاملي ريمان وداربو يعطيان بوقت واحد المساحة المحصورة بين الخط البياني للتابع y = f(x) والمستقيمات : y=o , x=a و x=b • بناء على ذلك فانه من الطبيعي ان نتوقع تساوى هذين التكاملين :

نظرية (١) : ليكن f(x) تابعا محدودا على المجال المغلق والمحدود $a \le x \le b$ • ان التابع f(x) يكون قابلا للكاملة بحسب مفهوم ريمان اذا وفقط اذا كان f(x) قابلا للكاملة بحسب مفهوم داربو وفي هذه الحالة يكون :

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (D)\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (5)$$

البرهان : اذا كان $f(x)$ قابلا للكاملة بحسب مفهوم داربو عند ئذ من اجل اية تجزئة للمجال $[a,b]$ ومن اجل اية اعداد ξ_i حيث $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ فانه يكون :

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S$$

و من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث اذا كان $\text{if } \max(x_i - x_{i-1}) < \delta,$ فانه يكون :

$$S < I + \varepsilon,$$

$$s > I - \varepsilon,$$

حيث I هو تكامل داربو للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$.

من هذا كله نستنتج ان :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon.$$

و هذا بدوره يبين ان التابع $f(x)$ قابل للمكاملة بحسب مفهوم ريمان وبالاضافة الى ذلك تتحقق المساواة (5) .

لنفرض الان العكس اى ان $f(x)$ قابل للمكاملة بحسب مفهوم ريمان على المجال $[a,b]$ ولنرمز ب K لتكامل ريمان على هذا المجال . عند ئذ من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث من اجل اية تجزئة للمجال $[a,b]$ حيث $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$ فانه يكون :

$$K - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < K + \varepsilon \qquad (6)$$

حيث ξ_i نقاط اختيارية تحقق المتراجحات :

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i.$$

ليكن :

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

عند ئذ توجد نقطة ξ_i' من المجال $[x_{i-1}, x_i]$ يكون من اجلها :

$$f(\xi_i') > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

من هذا نستنتج ان :

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon$$

باستخدام (6) وبأخذ $\xi_i = \xi_i'$ نحصل على :

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) < K + 2\varepsilon$$

بشكل مشابه نجد ان :

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) > K - 2\varepsilon$$

من هذا كله نستنتج ان :

$$J \le S < K + 2\varepsilon < s + 4\varepsilon \le I + 4\varepsilon$$

بما ان ε عدد موجب اختياري ، فانه ينتج :

$$J \le I$$

بما انه من جهة اخرى (بحسب النظرية ٣) :

$$J \ge I$$

فانه بمقارنة المتراجحتين الاخيرتين نستنتج ان :

$$J = I$$

وهذا بدوره يثبت ان $f(x)$ قابل للمكاملة بحسب مفهوم داربو على المجال $[a,b]$ وهو المطلوب •

نشير الى انه من الان سوف نتحدث فقط عن تكاملات ريمان • وسنرمز اختصارا لتكامل ريمان للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ بـ :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

عند البرهان على الخواص المختلفة لتكامل ريمان فاننا غالبا ما نستخدم النظرية (١) • ان هذه النظرية تبين لنا انه يكفي البرهان على الخواص المقابلة التي نستبدل فيها تكامل ريمان (في كل موضع) بتكامل داربو •

وكمثال على ذلك ، نستشهد بالنتيجة التالية التي هي في الواقع نتيجة للنظرية (٤) من الفقرة 4-1 :

نظرية (٢) : ان التابع f المحدود على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ يكون قابلا للمكاملة بحسب مفهوم ريمان اذا وفقط اذا امكن من اجل اى $\varepsilon > 0$ ايجاد تجزئة للمجال $[a,b]$ بحيث يحقق مجموعا داربو العلوى والسفلي الموافقين s و S المتراجحة التالية :

$$S - s < \varepsilon$$

4-3 • خواص تكامل ريمان :

سنشير غالبا الى التوابع القابلة للمكاملة بحسب مفهوم ريمان ، اختصارا ، بالتوابع القابلة للمكاملة •

نظرية (١) : اذا كان $f(x)$ قابلا للمكاملة على المجال $[a,b]$ فعندئذ $f(x)$ يكون ايضا قابلا للمكاملة على اى مجال جزئي $[\alpha,\beta]$ من $[a,b]$

البرهان : بحسب النظريتين (١) و (٢) من الفقرة (4-1) فانه من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث من اجل اية تجزئة للمجال $[a,b]$ حيث $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$ فان مجموعي داربو S و s يحققان المتراجحتين :

$$0 \le S - J < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 \le I - s < \frac{\varepsilon}{2}.$$

بما ان $I = J$ فاننا نحصل على المتراجحة :

$$S - s < \varepsilon$$

لنأخذ الان تجزئة خاصة للمجال $[a,b]$:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{j-1} < x_j < \cdots$$

$$< x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

حيث $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$ وبحيث يكون :

$$x_{j-1} = \alpha,\ x_k = \beta.$$

عندئذ نجد ان :

$$\alpha = x_{j-1} < x_j \cdots < x_{k-1} < x_k = \beta$$

تشكل تجزئة للمجال $[\alpha,\beta]$

لنرمز بـ S^* و s^* لمجموعي داربو العلوي والسفلي والموافقـــين لهذه التجزئة للمجال $[\alpha,\beta]$ • عندئذ يكون :-

$$S - s = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= S^* - s^* + \sum_{i=1}^{j-1}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$+ \sum_{i=k+1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \geq S^* - s^*$$

من هذا نستنتج ان $S^* - s^* < \varepsilon$ • بما ان ε عدد موجـــب اختياري فان النظرية (٢ من 3-2) تؤدي الى ان f قابل للمكاملة عـــلى المجال $[\alpha,\beta]$ • وهو المطلوب •

نظرية (٣) : اذا كان f(x) قابلا للمكاملة على المجـــال [a,b] وعلى المجال [b,c] ، فعندئذ يكون f(x) قابلا للمكاملة على المجـــال [a,c] ويكون لدينا :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \qquad (1)$$

البرهان : من اجل اي عـدد $\varepsilon > 0$ توجد تجزئة للمجال [a,b] :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b \qquad (2)$$

بحيث يحقق مجموعا داربو الموافقين :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$s_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1})$$

المتراجحة التـالية :

$$S_1 - s_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

بشكل مشابه ، فانه توجد تجزئة للمجال [b,c] :

$$b < x_{k+1} < x_{k+2} < \cdots < x_{n-1} < x_n = c \qquad (3)$$

بحيث يحقق مجموعـا داربو الموافقين :

$$S_2 = \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$s_2 = \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

المتراجحة التـالية :

$$S_2 - s_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

لنعتبر الان تجزئة للمجال [a,c] معطاة بنقاط التجزئتين (1) و(2) معا • عندئذ نجد ان مجموعي داربو العلوي والسفلي S و s يعطيـــان بـ :

$$S = S_1 + S_2$$
$$s = s_1 + s_2$$

بناء عـلى ذلك فان :

$$S - s < \varepsilon.$$

باستخدام النظرية (٢ من 3-2) فاننا نستنتج بان التـابـــع f قابل للمكاملة عـلى المجال [a,c] • اذا اخذنا الان متتاليتين من التجزئـــات (1) و (2)) بحيث :

$$\text{if } \max(x_i - x_{i-1}) \to 0$$

عـندئذ بأخذ نهاية الطرفين في العلاقة :

$$S = S_1 + S_2$$

فانا نحصل على العلاقة المطلوبة في النظرية .

نظرية (٣) : ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعين قابلين للمكاملة على المجال $[a,b]$. عندئذ $f+g$ و $f-g$ هي ايضا توابع قابلة للمكاملة على المجال $[a,b]$ وتتحقق المساواة :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (4)$$

البرهان : من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عددان موجبان δ_1 و δ_2 بحيث من اجل اية تجزئة (1) للمجال $[a,b]$ ومن اجل اية نقاط ξ_i حيث ($x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$) يكون :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وذلك اذا كان :

$$\max(x_i - x_{i-1}) < \delta_1$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وذلك اذا كان :

$$\max(x_i - x_{i-1}) < \delta_2$$

اذن ، اذا كان $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$ حيث : $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ، فعندئذ يكون :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) - \left(\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\right)\right| < \varepsilon.$$

من تعريف تكامل ريمان نستنتج ان $f \pm g$ قابل للمكاملة وتتحقق المساواة (4) .

نظرية (٤) : ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعين قابلين للمكاملة على المجال $[a,b]$. اذا كان :

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

فعندئذ :

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (5)$$

البرهان : من اجل اية تجزئة (1) للمجال $[a,b]$ ومن اجل اية نقاط $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, يكون لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

بأخذ متتالية من التجزئات (1) حيث ($\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$) فانا نحصل على المتراجحة (5)

نظرية (٥) : اذا كان f قابلا للمكاملة على المجال $[a,b]$ فعندئذ من اجل اى ثابت λ يكون λf ايضا قابلا للمكاملة على المجال $[a,b]$ ، وتتحقق المساواة :

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

ان برهان هذه النظرية يتم بشكل مشابه لبرهان النظرية (٤) .

سنذكر النظرية التالية دون ان نورد برهانها :

نظرية (٦) : اذا كان f قابلا للمكاملة على المجال [a,b] فعندئذ $|f|$ يكون ايضا قابلا للمكاملة على [a,b] وتتحقق المتراجحة :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (9)$$

نظرية (٧) : (نظرية القيمة الوسطى) :

ليكن $f(x)$ تابعا قابلا للمكاملة على المجال [a,b] وليكن :

$$M = \sup_{a\le x\le b} f(x), \qquad m = \inf_{a\le x\le b} f(x)$$

عندئذ يكون :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a) \qquad (10)$$

حيث : $m \le \mu \le M.$

واذا كان $f(x)$ مستمر على المجال [a,b] فعندئذ :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \qquad (11)$$

حيث : $a < \xi < b.$

البرهان : بما ان $m \le f(x) \le M$ $x \in [a,b].$

فانه اعتمادا على النظرية (٤) نجد ان :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

لنعرف الان μ بالمساواة :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

عندئذ يكون :

$$m \le \mu \le M$$

وهذا يبرهن على المساواة (10) .

اذا كان $f(x)$ مستمرا ، فعندئذ :

$$M = f(\alpha), \qquad m = f(\beta)$$

وذلك من اجل نقطتين α و β من [a,b] .

من هذا ينتج انه اذا كانت $\alpha \ne \beta$ فانه توجد نقطة ξ بين النقطتين α و β بحيث يكون : $f(\xi) = \mu$.

وهذا يبرهن على المساواة (11) في حالة $\alpha \ne \beta$.

اذا كانت $\alpha = \beta$ اي اذا كانت $M=m$ فعندئذ (11) تكون صحيحة مهما كانت ξ من [a,b] .

4-4 . امثلة على التوابع القابلة للمكاملة :

نظرية (١) : اي تابع $f(x)$ مستمر على مجال مغلق ومحدود [a,b] يكون قابلا للمكاملة على هذا المجال .

البرهان : ان التابع $f(x)$ المستمر على [a,b] هو تابع مستمر بانتظام على هذا المجال .

وهكذا ، فانه من اجل اي $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \qquad \text{if } |x' - x''| < \delta.$$

اذا اخذنا اية تجزئة :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (1)$$

حيث : $\max(x_i - x_{i-1}) < \delta.$

فانه يكون لدينا :

$$M_i - m_i = \max_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) - \min_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$$

$$= f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)$$

حيث ξ_i^1, ξ_i^2 ينتميان للمجال $[x_{i-1}, x_i]$

بما ان : $|\xi_i^1 - \xi_i^2| < \delta$

فانه ينتج من ذلك :

$$M_i - m_i < \varepsilon$$

فاذن :

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) < (b-a)\varepsilon.$$

باستخدام النظرية (٢ من 4-2) فاننا نستنتج بان f(x) قابل للمكاملة على المجال [a,b] .

نظرية (٢) : اى تابع f(x) مطرد على مجال مغلق ومحدود [a,b] يكون قابلا للمكاملة على هذا المجال .

البرهان : لنفرض ان f(x) متزايد باطراد على المجال [a,b] . عندئذ من اجل اية تجزئة :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

يكون لدينا :

$$M_i = f(x_i) \ , \ m_i = f(x_{i-1})$$

اذن ، اذا كان :

$$\max(x_i - x_{i-1}) < \delta$$

فعندئذ يكون :

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \le \delta \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$= \delta[f(b) - f(a)] < \varepsilon.$$

وذلك اذا اخترنا : $\delta < \varepsilon/[f(b) - f(a)]$ ، حيث $\varepsilon > 0$ عدد مفروض . بما ان ε اختيارى فان النظرية (٢ من 4-2) تؤدى الى ان f(x) قابل للمكاملة على المجال [a,b] .

اذا كان f(x) متناقصا باطراد على المجال [a,b] فان البرهان يجرى بشكل مشابه .

نظرية (٣) : ليكن f(x) تابعا محدودا على المجال المغلق والمحدود [a,b] . لنفرض ان التابع f(x) مستمر في جميع نقاط المجال [a,b] باستثناء نقاط مجموعة جزئية S من [a,b] وتتمتع بالخاصة التالية :

من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ ، فان S محتواة في عدد منته من المجالات

المفتوحة $I_1, \ldots, I_n$ اطوالها : $l_1, \ldots, l_n$ تحقق المتراجحة :

$$l_1 + \cdots + l_n < \varepsilon$$

عند ئذ f يكون قابلا للمكاملة على المجال $[a,b]$.

ان هذه النظرية لن نتعرض الى برهانها في دراستنا هذه .

نتيجة (١) : كل تابع محدود ويمتلك عددا منتهيا من نقاط الانقطاع . يكون قابلا للمكاملة .

في الحقيقة اذا كانت نقاط الانقطاع هي :

$$x_1, \ldots, x_m.$$

عند ئذ من اجل اى ε نأخذ : $I_1, \ldots, I_m$

حيث :

$$I_j = \{x : x_j - \varepsilon/2m < x < x_j + \varepsilon/2m\}$$

نرى الان ان مجموعة نقاط انقطاع التابع $f(x)$ محتواة في المجالات I_j وان مجموع اطوال هذه المجالات يساوى ε .

تعريف (١) : لتكن S مجموعة من الاعداد الحقيقية تتمتع بالخاصة التالية : من اجل اى $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد عدود (قابل للعد) من المجالات المفتوحة I_j بحيث :

١ ــ كل نقطة من S تنتمي الى واحد على الاقل من المجالات I_j .

٢ ــ الاطوال l_j للمجالات I_j تحقق المتراجحة :

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n < \varepsilon \text{ for any } n$$

عند ئذ نقول عن S ان لها قياس صغرى او انها ذات قياس معدوم .

ان النظرية الشهيرة التالية تميز تلك التوابع المحدودة القابلة للمكاملة بحسب مفهوم ريمان .

نظرية (٤) : ان التابع المحدود على مجال مغلق ومحدود يكون قابلا للمكاملة بحسب ريمان اذا وفقط اذا كانت مجموعة نقاط انقطاعه ذات قياس معدوم .

ولن نتعرض الى برهان هذه النظرية في دراستنا هذه .

5-4 النظرية الاساسية في الحساب التكاملي

ليكن $f(x)$ قابلا للمكاملة على المجال $[a,b]$. من اجل اى مجال جزئي (α, β) من المجال $[a,b]$ سنضع بالتعريف :

$$\int_\beta^\alpha f(x)\, dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\, dx. \qquad (1)$$

ايضا سنضع بالتعريف :

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\, dx = 0. \qquad (2)$$

عند ئذ يمكننا التحقق من صحة العلاقة :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx + \int_\beta^\gamma f(x)\, dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\, dx. \qquad (3)$$

وذلك من اجل اى ثلاثة اعداد α, β, γ من المجال $[a,b]$ لنثبت نقطة c من المجال $[a,b]$ ولننظر في التكامل :

$$\varphi(x) = \int_c^x f(t)\, dt \qquad (4)$$

واضح ان هذا التكامل تابع لـ x ومن اجل قيم مختلفة لـ c فاننا

نحصل على تــوابع مختلفة •

بما انه بحسب العلاقة (3) يكون :

$$\int_c^x f(t)\,dt - \int_{c'}^x f(t)\,dt = \int_c^{c'} f(t)\,dt$$

فان اى تـابعين (من التوابع المعطاة بالعلاقة (4)) يختلفان عــــن بعضهما بثابت •

نظرية (١) : اذا كان $f(x)$ قابلا للمكاملة على المجال $[a,b]$ فــــان التـابع $g(x)$ (المعطى بالعلاقة (4)) مستمر عـلى المجال $[a,b]$ •

البرهان : ليكن M هو الحد الاعـلى لـ $|f|$ (بالطبع عـلى المجال $[a,b]$) • عـند ئذ التـابع $g(x)$ المعطى بالعلاقة (4) يحقق ما يلي :

$$|g(x) - g(y)| = \left|\int_c^x f(t)\,dt - \int_c^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right|$$

$$\le \left|\int_y^x |f(t)|\,dt\right| \le M\,|x - y|.$$

الان من اجل اى عــدد $\varepsilon > 0$، لنضع $\delta < \varepsilon/M$ • عـند ئذ :

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \quad \text{if } |x - y| < \delta$$

و هو المطلوب •

ان النظرية الاساسية في الحساب التكاملي هي التالية :

نظرية (٢) : في كل نقطة $x_0 \in (a,b)$ حيث التـابع $f(x)$ مستمـــر فيها فان مشتق التـابع $g(x)$ في النقطة x_0 موجود ويساوى $f(x_0)$ (اى $g'(x_0)=f(x_0)$) • وهكذا فان :

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x) \qquad (5)$$

في كل نقطة x يكون فيها $f(x)$ مستمرا •

البرهان : باستخدام العلاقة (3) يكون لدينا :

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_c^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

من هذا نستنتج ان :

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,dt. \qquad (6)$$

بما ان $f(x)$ مستمر في x_0 فانه من اجل اى $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{if } |t - x_0| < \delta.$$

لهذا اذا كان $|h| < \delta$ ، فعند ئذ يكون :

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} dt\right| = \varepsilon.$$

من العلاقة (6) ينتج عـند ئذ ان :

$$\left|\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

اذا كان $|h| < \delta$.

وهذا بدوره يعني ان $g'(x_0) = f(x_0)$

وهو المطلوب ·

اذا جعلنا h ، في البرهان السابق ، تأخذ قيما موجبة فقط (او قيما سالبة فقط) فاننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (١) : اذا كانت $x_0 \in [a,b]$ واذا كان $f(x)$ مستمرا من اليمين (او مستمر من اليسار) في النقطة x_0 عندئذ يكون للتابع $g(x)$ مشتق من اليمين (او من اليسار) في النقطة x_0 ويكون :

$$g'(x_0+0) = f(x_0+0)$$

[او $g'(x_0-0) = f(x_0-0)$]

كما نعلم فاننا نسمي $F(x)$ تابعا اصليا للتابع $f(x)$: اذا كان $F'(x) = f(x)$ · كذلك اذا كان $G(x)$ هو تابع اصلي اخر لـ $f(x)$ فان $F(x) - G(x) = C$ حيث C ثابت ·

من النظرية (٢) والنتيجة (١) نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٢) : اذا كان التابع $f(x)$ مستمرا على المجال $[a,b]$ ، عندئذ اي تابع $g(x)$ (معطى بالعلاقة (٤)) هو تابع اصلي لـ $f(x)$ ·

في الحقيقة :

$$g'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$
$$g'(a+0) = f(a)$$
$$g'(b-0) = f(b)$$

وهو المطلوب ·

ان النظرية الاساسية في الحساب التكاملي ، او بشكل ادق ، النتيجة (٢) تعطي طريقة لحساب التكاملات المحددة :

لنفرض ان التابع $f(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$ ولنفرض اننا نعرف

تابعا اصليا $F(x)$ للتابع $f(x)$ · بما ان التابع :

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

هو ايضا تابع اصلي لـ $f(x)$ (بحسب النتيجة (٢)) فان :

$$G(x) - F(x) = C$$

حيث C ثابت ·

بوضع $x = a$ ، $x = b$ فاننا نجد :

$$G(a) - F(a) = C$$
$$G(b) - F(a) = C$$

وهكذا فان :

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

بما ان $G(a)=0$ و $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ فاننا نكون قد برهنا على النظرية التالية :

نظرية (٣) : ليكن $f(x)$ تابعا مستمرا على المجال $[a,b]$ وليكن $F(x)$ تابعا اصليا لـ $f(x)$. عندئذ يكون :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (7)$$

ان الطرف الايمن من العلاقة (7) يكتب غالبا بالشكل :

$$F(x)\Big|_a^b \qquad \text{او} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

تعرف العلاقة (7) باسم دستور نيوتن ـ ليبنتز في حساب التكاملات المحددة

ان النظرية (٣) : تعطي طريقة حسنة لحساب التكاملات المحددة · فبدلا من محاولة حساب هذه التكاملات بالاعتماد على التعريف فان كل ما يطلب عمله هو

ايجاد تابع اصلي •

أمثلة :

١ ـ ان $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ هو تابع اصلي ل $f(x) = x^n$ ، $(n \neq -1)$ • فاذن بالاعتماد على النظرية (٣) نجد :

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

٢ ـ ان $\sin x$ هو تابع اصلي ل $\cos x$ فاذن :

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

٣ ـ اذا كان $-1<\alpha<\beta<1$, فان :

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x\right]_\alpha^\beta = \arcsin\beta - \arcsin\alpha.$$

4-6. طرق المكاملة :

سنستخدم النظرية (٣) من الفقرة السابقة في الحصول على علاقتين هامتين من اجل حساب التكاملات المحددة • العلاقة الاولى تسمى بعلاقة تغيير المتحولات وهي تعطى بالنظرية التالية :

نظرية (١) : ليكن $f(x)$ تابعا مستمرا على المجال المغلق $[a,b]$ وليكن $\phi(t)$ تابعا مستمرا معرفا على المجال المغلق $[c,d]$ ولنفرض ان $\phi'(t)$ موجود و مستمر على $[c,d]$ • اخيرا ، لنفرض ان قيم التابع $\phi(t)$ تنتمي الى المجال $[a,b]$ ، وان $\phi(c) = a,\ \phi(d) = b$ • عندئذ :

$$\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

البرهان : ليكن :

$$g(x) = \int_a^x f(y)\,dy$$

ولنأخذ التابع :

$$F(t) = g(\phi(t))$$

ان هذا التابع يحقق المساواة :

$$F'(t) = g'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

فاذن :

$$\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_c^d F'(t)\,dt = F(d) - F(c)$$

$$= g(\phi(d)) - g(\phi(c)) = g(b) - g(a) = \int_a^b f(y)\,dy$$

وهو المطلوب •

ان علاقة تغيير المتحولات (1) تكتب ايضا بالشكل :

$$\int_c^d f(x)\frac{dx}{dt}\,dt = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

امثلة :

١ ـ من اجل حساب التكامل :

$$\int_1^{e^2} \frac{\log t}{t}\,dt$$

نضع :

$$x = \phi(t) = \log t$$

عـنـد ئذ :

$$dx/dt = \phi'(t) = 1/t$$

وبالتـالي يكون :

$$\int_e^{e^2} \frac{\log t}{t}\, dt = \int_1^2 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$$

٢ ـ من اجل حساب التكامل :

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\, dt$$

نضع :

$$x = \phi(t) = 1 - t^2.$$

عند ئذ :

$$dx/dt = \phi'(t) = -2t$$

فاذن :

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\, dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\,\frac{dx}{dt}\, dt = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{x}\, dx$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

ان النظرية التالية تعطي العلاقة الثانية من اجل حساب التكاملات المحـدد ة ، وهي تسمى بطريقة المكاملة بالتجزئة :

نظرية (٢) : ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تـابعـين يمتلكان مشتقين مستمريـن علـى المجال المغلق $[a,b]$ • عـنـد ئذ :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx. \qquad (3)$$

البرهان : من العلاقة

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ومن النظرية (٢) ؛ من الفقرة (4.5) ينتج ان :

$$\int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b.$$

وهذا بدوره يؤدى الى (3) . وهو المطلوب •

امثلة :

١ ـ من اجل حساب التكامل :

$$\int_0^1 xe^x\, dx$$

سنستخدم العلاقة (3) بوضع :

$$f(x) = x \quad , \quad g'(x) = e^x$$

بما ان $g(x) = e^x$ ، فاننا نجد :

$$\int_0^1 xe^x\, dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = \left[xe^x - e^x\right]_0^1 = 1.$$

٢ ـ احسب التكامل :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx.$$

لنأخذ هنا :

$$g'(x) = 1, f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

بما ان :

$$g(x) = x,\ f'(x) = x/\sqrt{1+x^2}$$

فاننا نجد :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

اذا كتبا التكامل الاخيرفي الطرف الايمن بالشكل :

$$-\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx + \operatorname{arcsh} x\Big|_0^1,$$

فاننا نجد ان :

$$2I = \left[x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsh} x\right]_0^1$$

امثلة عامة :

١ ــ ليكن :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

احسب التكامل المحدد :

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

بحسب خواص التكامل لدينا :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 1)$$

٢ ــ احسب التكامل :

$$I = \int_0^2 |1 - x|\,dx$$

بما ان :

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x - 1 & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

فانه باستخدام خواص التكامل المحدد نجد :

$$\int_0^2 |1 - x|\,dx = \int_0^1 (1 - x)\,dx + \int_1^2 (x - 1)\,dx =$$

$$= -\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

٣ ــ احسب التكامل :

$$I = \int_a^b \frac{|x|}{x}\,dx$$

نلاحظ انه اذا كان $0 \leqslant a < b,$ فان :

$$f(x) = |x|/x = 1$$

وبالتالي يكون :

$$\int_a^b f(x)\,dx = b-a$$

اما اذا كان $a<b\leqslant 0,$ فان :

$$f(x) = -1$$

وبالتالي يكون :

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= -b-(-a) = a-b$$

اخيرا اذا كان $a<0<b$ فانه بتجزئة التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ الى تكاملين نجد :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = b-(-a)$$

٤ ـ احسب التكامل :

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx.$$

نلاحظ اولا ان :

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}} = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\\ -\cos x, & \pi/2\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

اعتمادا على هذا وعلى خواص التكامل المحدد نجد :

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)\,dx =$$

$$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} + (-\sin x)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = (1-0)+(0-(-1)) = 2.$$

ملاحظة : تجدر الاشارة (في المثال السابق) اذا اننا لم ننتبه الـــى كون $\cos x$ سالب المجال $[\pi/2,\ \pi]$ ووضعنا :

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \cos x$$

فاننا نحصل على نتيجة غير صحيحة :

$$\int_0^\pi \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^\pi = 0.$$

٥ ـ قدّر القيمة المطلقة للتكامل :

$$\int_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}\,dx.$$

بما ان $|\sin x|\leqslant 1$ فانه من اجل при $x\geqslant 10$ تتحقق المتراجحة :

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right| < 10^{-8}$$

لهذا فان :

$$\left|\int_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}\,dx\right| < (19-10)\,10^{-8} < 10^{-7}$$

٦ ـ برهن على صحة المتراجحة :

$$0 < \int_0^1 \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \frac{1}{8}$$

بما ان :

$$0 < \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}} < x^7 \quad , \quad 0 < x \leqslant 1$$

فان

$$0 < \int_0^1 \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \int_0^1 x^7\,dx =$$

$$= \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

وهي المتراجحة المطلوبة •

٧ ــ برهن علـى صحة المتراجحة :

$$1 < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < e$$

بما ان : $1 < e^{x^2} < e$ من اجل $1 > x > 0$ فان $0 < x < 1$:

$$\int_0^1 dx < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < \int_0^1 e\,dx$$

ومنه نحصل علـى المتراجحة المطلوبة •

٨ ــ قدّر من الاعلـى ومن الادنى التكامل المحدد :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

ان التـابع المستكمل :

$$f(x) = (\sin x)/x$$

يتناقص علـى المجال $[\pi/4, \pi/3]$ وذلك لان المشتق :

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - \operatorname{tg} x)\cos x}{x^2} < 0$$

فاذن القيمة الصغرى للتـابع علـى هذا المجال هي :

$$m = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

والقيمة العظمى للتـابع علـى هذا المجال هي :

$$M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

لهذا فان :

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\,dx \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right),$$

اى ان :

$$0{,}22 \approx \frac{\sqrt{3}}{8} \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}24$$

تمارين :

١ ـ اثبت ان :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3} & \text{if } n \text{ is odd,} \\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

٢ ـ برهن ان :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 - b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi/2}{a\sqrt{a^2 - b^2}},$$

حيث $a < b$.

٣ ـ برهن على صحة المتراجحة :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}\,dx < \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})$$

حيث $(R > 0)$.

4-7 دستور نيوتن ـ ليبنتز من اجل التوابع غير المستمرة :

اذا استخدمنا خاصة استمرار التكامل المحدد كتابع لحد التكامل الاعلى فانه يمكننا ان نثبت بان دستور نيوتن ـ ليبنتز يحافظ على صحته حتى في الحالة عندما يكون التابع المستكمل قابل للمكاملة ويمتلك في نفس الوقت عددا منتهيا من نقاط الانقطاع .

من اجل تسهيل المناقشة سنفترض ان $f(x)$ قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ ويمتلك فقط نقطة انقطاع واحدة c : b $a<c<b$. ويمكن للقارئ تعميم

البرهان الذي سنعطيه الان الى الحالة العامة عندما يكون للتابع $f(x)$ اكثر من نقطة انقطاع واحدة .

وهكذا ليكن $f(x)$ قابلا للمكاملة فاذن $f(x)$ يكون محدودا على المجال $[a,b]$:

$$|f(x)| \leq M \qquad (a \leq x \leq b)$$

وليكن $f(x)$ مستمر في كل نقطة من المجال $[a,b]$ باستثناء النقطة c من هذا المجال . لنكتب $\int_a^b f(x)\,dx$ بالشكل التالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

بما ان $f(x)$ مستمر على المجالين : $[a, c-\varepsilon]$ و $[c+\varepsilon, b]$ فان دستور نيوتن ـ ليبنتز يكون محققا من اجل هذين المجالين فاذن :

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a)$$

$$\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx = F(b) - F(c+\varepsilon)$$

كذلك من كون $f(x)$ محدودا ينتج ان :

$$\left|\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx\right| < \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} M\,dx = M\cdot 2\varepsilon$$

فاذن عندما نضع :

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx = u(\varepsilon)$$

فان :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0.$$

باستخدام العلاقات التي حصلنا عليها ، فانه يمكننا ان نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a) + \omega(\varepsilon) + F(b) - F(c+\varepsilon) =$$
$$= F(b) - F(a) + (F(c-\varepsilon) - F(c+\varepsilon)) + \omega(\varepsilon)$$

لننتقل الان الى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ في الطرفين الايمن والايسر من المطابقة الاخيرة . بما ان $F(x)$ مستمر في النقطة c فان :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [F(c-\varepsilon) - F(c+\varepsilon)] = 0$$

وبالاضافة الى ذلك فقد اثبتنا ان :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0$$

فاذن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + \lim_{\varepsilon \to 0} [F(c-\varepsilon) - F(c+\varepsilon)] +$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = F(b) - F(a).$$

وهو المطلوب برهانه .

ملاحظة : ان دستور نيوتن ــ ليبنتز لا يبقى صحيحا من اجل اى تابع قابل للمكاملة . ولا نملك الامكانية هنا في ذكر مثال لتابع قابل للمكاملة ولا تصح من اجله المساواة :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

لان بناء مثل هذا التابع ليس بالامر السهل .

8.4. اشتقاق التكامل كتابع مركب :

لننتقل الان الى النظر في العبارة :

$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$$

التي تمثل بحد ذاتها تابعا ل x . فمثلا :

$$\int_{\sin x}^{\cos x} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{\sin x}^{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \frac{\cos 2x}{2}$$

لنضع امامنا مسألة اشتقاق التوابع المعطاة بتكاملات من الشكل المذكور اعلاه .

لننظر اولا في الحالتين الخاصتين التاليتين :

1) $$\Phi_1(x) = \int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$$

2) $$\Phi_2(x) = \int_{\varphi(x)}^{x_1} f(t)\,dt$$

ان التابع $\Phi_1(x)$ يمثل تابعا مركبا ل x . وبالفعل اذا رمزنا ل $\varphi(x)$ ب U يكون لدينا :

$$\Phi_1(x) = \int_{x_0}^{u} f(t)\,dt$$

اى ان $\Phi_1(x)$ هو تابع للمتحول U حيث U بدوره تابع ل x .

بحسب نظرية اشتقاق التوابع المركبة يكون لدينا :

$$\frac{d}{dx}\Phi_1(x)=\frac{d\Phi_1}{du}\,\frac{du}{dx}=\left[\frac{d}{du}\int_{x_1}^{u} f(t)\,dt\right]\frac{du}{dx}=$$

$$=f(u)\,u'(x)=f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

من اجل التابع $\varnothing_2(x)$ لدينا :

$$\Phi_2(x)=\int_{\psi(x)}^{x_1} f(t)\,dt=-\int_{x_1}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

واعتمادا على العلاقة المستخرجة من اجل $\frac{d}{dx}\varnothing_1(x)$ نجد :

$$\frac{d}{dx}\Phi_2(x)=-f[\psi(x)]\,\psi'(x)$$

لننتقل الان الى الحالة العامة . ليكن :

$$f(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$$

من اجل ايجاد مشتق $f(x)$ بالنسبة لـ x ، نأخذ عدد ما c ونجزئ التكامل المفروض الى جزئين :

$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt=\int_{\psi(x)}^{c} f(t)\,dt+\int_{c}^{\varphi(x)} f(t)\,dt.$$

اعتمادا على ما سبق فانه باشتقاق كل حد في الطرف الايمن على حده ، نجد :

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt=f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)-f[\psi(x)]\,\psi'(x)$$

٩-4 عبارة الحد الباقي في دستور تايلور بواسطة التكامل المحدد :

اعتمادا على دستور الكاملة بالتجزئة فانه يمكننا من اجل الحد الباقي في دستور تايلور ايجاد صيغة اخرى لهذا الحد التي يكون استخدامها مناسبا بشكل افضل .

لننظر في المطابقة :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),\qquad(1)$$

حيث $R_n(x)$ يساوي بالتعريف :

$$f(x)-\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right].$$

لنفرض الان ان $f(x)$ يمتلك مشتقا من المرتبة $(n+1)$.
باشتقاق المطابقة (1) $n+1$ مرة نجد :

$$\left.\begin{aligned}
f'(x)&=f'(a)+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n'(x),\\
f''(x)&=f''(a)+\frac{f'''(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}+R_n''(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f^{(n+1)}(x)&=R_n^{(n+1)}(x).
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

لنضع في المطابقة (1) وكذلك في المطابقات الناتجة (2) (باستثناء

الاخيرة) $x=a$ • عـنـد ئذ نجد :

$$R_n(a)=R'_n(a)=R''_n(a)=\ldots=R_n^{(n)}(a)=0$$

يمكننا الان ان نكتب :

$$R_n(x)-R_n(a)=\int_a^x R'_n(t)\,dt$$

بما ان $R_n(a)=0$ فان :

$$R_n(x)=\int_a^x R'_n(t)\,dt \qquad (3)$$

لنطبق دستور المكاملة بالتجزئة عـلى التكامل (3) n مرة اخذين بعـين الاعتبار ان :

$$R'_n(a)=R''_n(a)=\ldots\ldots R_n^{(n)}(a)=0$$

وكذلك x ثابت (عـند ئذ : $d(x-t)=-dt$) فنجد :

$$R_n(x)=\int_a^x R'_n(t)\,dt=-\int_a^x R'_n(t)\,d(x-t)=$$

$$=-\left[(x-t)R'_n(t)\right]\Big|_a^x+\int_a^x (x-t)R''_n(t)\,dt=$$

$$=-\int_a^x (x-t)R''_n(t)\,d(x-t)=$$

$$=-\left[\frac{(x-t)^2}{2}R''_n(t)\right]\Big|_a^x+\frac{1}{2!}\int_a^x (x-t)^2 R'''_n(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2!}\int_a^x (x-t)^2 R'''_n(t)\,d(x-t)=\ldots$$

$$\ldots=-\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n R_n^{(n+1)}(t)\,d(x-t)$$

بالاعتماد عـلى العلاقة الاخيرة في (2) يكون لدينا بعد ان نضع مـن جديد $d(x-t)=-dt$:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

وهذا هو الشكل الجديد للحد الباقي •

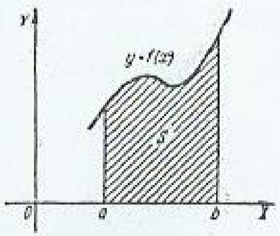
مثال : اذا كان $f(x)=e^x$ فان :

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n e^t\,dt.$$

10-4 • تطبيقات التكامل المحدد :

١ ـ مساحة ساحة مستوية :

ليكن لدينا منحنيا مستمرا معطى بالمعادلة $y=f(x)$ و $f(x)$ ولننظر في الساحة المستوية المحدودة بهذا المنحني وبالمستقيمـين $X=a$ و $X=b$ وبالقطعة المستقيمة (من المحور OX) b X a انظر الشكل (١) • عـند ئذ مساحة هذه الساحة تعطى بالتكامل :

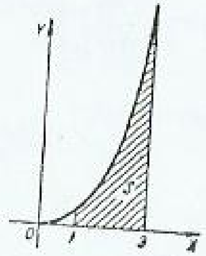


(شكل ١)

امثلة :

مثال ١ ـ احسبمساحة الساحة المحدودة بمنحني القطع المكافـــــئ •

وبالمستقيمين $x=1$ و $x=3$ وبمحور الفواصل (الشكل ٢) : $y = \frac{x^2}{2}$



(شكل ٢)

بحسب العلاقة (1) يكون لدينا :

$$S=\int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = 4\frac{1}{3}$$

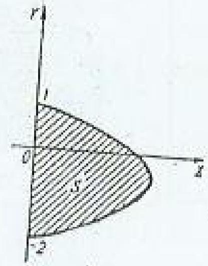
مثال ٢ ـ احسب ساحة الساحة المحدودة بالمنحني $x = 2 - y - y^2$

وبمحور التراتيب (الشكل ٣) :

اذا جعلنا محور التراتيب يلعب دور محور الفواصل عندئذ المساحة

المطلوب حسابها يعبر عنها بالتكامل :

$$S=\int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,dy = 4\frac{1}{2}$$



(شكل ٣)

في الحالة العامة اذا كانت الساحة المستوية محدودة بالمنحنيين المستعرين

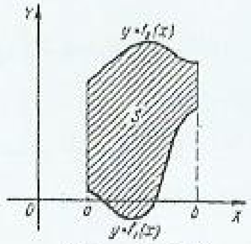
$y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ وبالمستقيمين $x=a$ و $x=b$ حيث :

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

انظر (الشكل ٤)

فعندئذ تكون مساحة هذه الساحة معطاة ب :

$$S=\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx. \qquad (2)$$



(الشكل ٤)

مثال ٣ ـ احسب ساحة الساحة المحصورة بين المنحنين :

$$y = 2 - x^2 \qquad y^3 = x^2$$

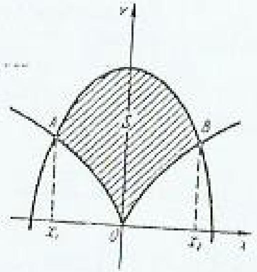
بحل جملة هاتين المعادلتين نجد حدود التكامل :

$$x_2 = -1 \quad , \quad x_1 = -1$$

(وهي تقابل $x=a$ و $x=b$) .

اعتمادا على العلاقة (2) نجد :

$$S=\int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^{2/3})\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}$$



(شكل ٥)

اذا كانت معادلة المنحني معطاة بالشكل الوسيطي :

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\psi(t),$$

فان مساحة الساحة المستوية المحدودة بهذا المنحني وبالمستقيمين الموافقين لـ $x=a$ و $x=b$ وبمحور الفواصل يعبر عنها بالتكامل :

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

حيث t_1 و t_2 تعين من المعادلتين :

$$a=\varphi(t_1)\ \text{и}\ b=\varphi(t_2)$$

وحيث $\psi(t)\geq 0$ على المجال $[t_1, t_2]$

مثال ٤ ـ اوجد مساحة الساحة المحصورة بالقطع الناقص مستخدما التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

بحكم تناظر القطع بالنسبة للمحاور الاحداثية نحسب اولا ربع هذه المساحة (انظر الشكل ٦) • لنعوض في المعادلة $x=a\cos t$ اولا $x=0$ ثم

$x=a$ فنحصل على حدود التكامل : $t_1=\frac{\pi}{2}$ و $t_2=0$ •

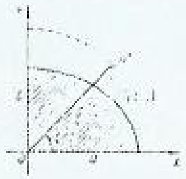
عندئذ يكون :

$$\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt$$

$$=ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi ab}{4}$$

ومنه :

$$S=\pi ab$$

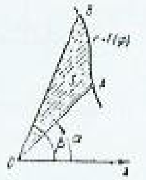


(شكل ٦)

الساحة في الاحداثيات القطبية :

اذا كان لدينا منحنيا مستمرا معطى في الاحداثيات القطبية بالمعادلة $r=f(\varphi)$ فان مساحة القطاع AOB (شكل ٧) المحدودة بقوس من هذا المنحني وبنصفي القطرين القطبين OA و OB الموافقين للقيمتين $\varphi_1=\alpha$ و $\varphi_2=\beta$ يعبر عنها بالتكامل :

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$



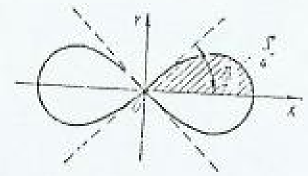
(شكل ٧)

مثال ٥ ـ اوجد مساحة الساحة المحصورة داخل لمنسكات برنولـــــي $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (الشكل ٨) .

بحكم تناظر المنحني في هذه الحالة فانه يكون لدينا :

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}$$

ومنه : $S = a^2$



(شكل ٨)

٢ ـ طول قوس من منحن :

١ ـ طول قوس من منحن في الاحداثيات القائمة :

ان طول قوس من منحن املس $y=f(x)$ حيث هذا القوس محصور بـــــين نقطتين لهما الفاصلتين :

$$x = b \quad \text{و} \quad x = a$$

يعطى بالتكامل (حيث S يرمز لطول هذا القوس) :

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

مثال ١ : اوجد طول الاستروئيد :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

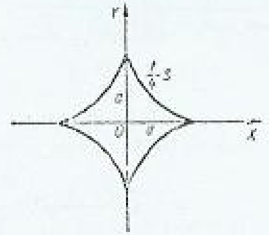
باشتقاق معادلة الاستروئيد نجد :

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

لهذا فانه من اجل طول قوس يمثل ربعا واحدا من الاستروئيد يكـــــون لدينا :

$$\frac{1}{4} s = \int_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx = \frac{3}{2} a$$

ومنه : $S = 6a$.



(شكل ٩)

٢ ـ طول قوس من منحن معطى بالشكل الوسيطي :

لنفرض ان المنحني معطى بمعادلتين وسيطيتين :

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$

حيث كل من $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ يمتلك مشتقا مستمرا .

عندئذ S طول القوس من المنحني المفروض يعطى بـ :

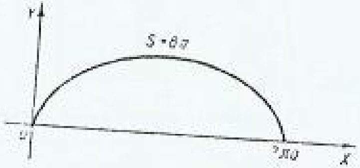
$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt \quad \ldots\ldots$$

حيث t_1 و t_2 قيم الوسيط t اللذين توافقان بداية ونهاية القوس.

مثال ٢ : اوجد طول قنطرة واحدة من السيكلوئيد :

$$x = a\,(t-\sin t)$$
$$y = a\,(1-\cos t)$$

(انظر الشكل ١٠)



(شكل ١٠)

لدينا :

$$X'(t) = \frac{dx}{dt} = a\,(1-\cos t)$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = a\sin t$$

لهذا فان :

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a.$$

ان حدود التكامل $t_1=0$ و $t_2=2\pi$ توافق بداية ونهاية القوس المطلوب حساب طوله .

اذا كان المنحني الاملس معطى بالمعادلة $r=f(\varphi)$ في الاحداثيات

القطبية r و φ فان s طول القوس يساوي :

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$$

حيث α و β تمثلان قيم الزاوية القطبية في نقطتي بداية ونهاية القوس .

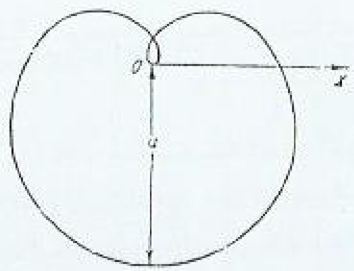
مثال ٣ : اوجد طول كل المنحني $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. حيث ان هذا المنحني يرسم بالنقطة (φ و r) عندما تتغير φ من 0 حتى 3π . (شكل ١١)

لدينا :

$$r'=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}.$$

لهذا فان طول كل المنحني يساوي :

$$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=\frac{3\pi a}{2}.$$



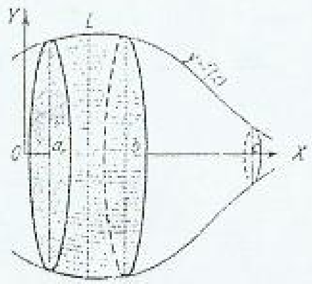
(شكل ١١)

حجم جسم دوراني : ان حجم الجسم الناتج عن دوران ساحة مستوية

محدودة بالمنحني $y = f(x)$ وبالمحور OX وبالمستقيمين $x=a$ و $x=b$ حول المحور OX يعطى بالعلاقة :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad (3)$$

(انظر شكل ١٢)



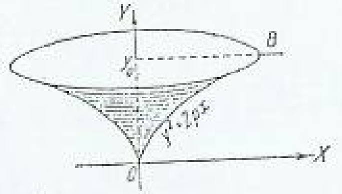
(شكل ١٢)

بالمثل فان حجم الجسم الناتج عن الدوران حول المحور OY للساحة المحدودة بالمنحني $x=\varphi(y)$ والمحور OY وبالمستقيمين $y=\alpha$ و $y=\beta$ يعطى بالعلاقة :

$$V = \pi \int_\alpha^\beta [\varphi(y)]^2 dy = \pi \int_\alpha^\beta x^2 dy \qquad (4)$$

أمثلة :

مثال ١ ــ احسب حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران الجزء OB من القطع $y^2 = 2px$ حول المحور OY (شكل ١٣) .



(شكل ١٣)

اذا قمنا بحل معادلة القطع بالنسبة لـ x نجد :

$$x = \frac{y^2}{2p}$$

ومنه بحسب العلاقة (4) نحصل على الحجم المطلوب :

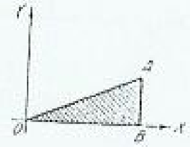
$$V = \pi \int_0^{y_0} \frac{y^4}{4p^2} dy = \frac{\pi y^5}{20p^2}\Big|_0^{y_0} = \frac{\pi y_0^5}{20p^2}$$

مثال ٢ ــ حساب حجم مخروط . ان المخروط ينتج عن دوران المثلث OAB حول المحور OX (شكل ١٤) . اذا رمزنا بـ R لنصف قطر قاعدة المخروط وبـ R لارتفاعه (شكل ١٥) عندئذ معادلة المولد ستكون :

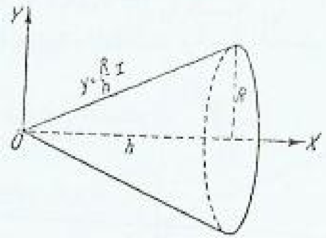
$$y = \frac{R}{h} x$$

وحدود التكامل o و h . اذن الحجم المطلوب بحسب العلاقة (3) يساوي :

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h} x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{3}$$



(شكل ١٤)



(شكل ١٥)

ملاحظة : اذا كانت معادلة المنحني الدائر معطاة بالشكل الوسيطي :

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t);$$

حيث $x=\varphi(t)$ تعين t كتابع وحيد القيمة لـ x فعندئذ اذا اجرينا تغييرا في المتحول في التكامل :

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

فاننا نجد :

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}[\psi(t)]^2\varphi'(t)\,dt$$

حيث $\varphi(t_1)=a, \quad \varphi(t_2)=b$

وهي العلاقة التي تعين حجم جسم دوراني ناتج عن دوران المنحني $x=\varphi(t), \; y=\psi(t)$ حول المحور OX .

بالمثل نجد :

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2}[\varphi(t)]^2\psi'(t)\,dt$$

حيث $\psi(t_1)=\alpha, \quad \psi(t_2)=\beta$

وهي العلاقة التي تعين حجم جسم دوراني ناتج عن دوران المنحني $x=\varphi(t), \; y=\psi(t)$ حول المحور OY .

تمارين غير محلولة :

١ ـ احسب مساحة الساحة المستوية المحدودة بالمنحنيين $y = 2^x$ ، $y = 2x - x^2$ وبالمستقيمين $x=0$ و $x=2$.

٢ ـ احسب مساحة الساحة المستوية المحدودة بالمنحنيين $x = -2y^2$ ، $x = 1 - 3y^2$.

٣ ـ احسب مساحة الساحة المستوية المحدودة بالمنحنيين $x^2 = 4y$ و $y = \frac{8}{x^2+4}$

٤ ـ احسب مساحة الساحة المستوية الموجودة في الربع الاول والمحدودة بالمنحنيات :

$$x^2+y^2=5 \quad , \quad x^2 = 4y \quad , \quad y^2 = 4x$$

٥ ـ احسب مساحة الساحة المستوية المحدودة بالمنحنيين $y = x+1$ ، $y = \cos x$.

٦ ـ احسب التكاملات المحددة :

$$I=\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2-1};\qquad I=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3};$$

$$I=\int_{0}^{\pi/4}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx;\qquad I=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}\,dx;$$

$$I=\int_{1/\pi}^{2/\pi}\frac{\sin(1/x)}{x^2}\,dx;\qquad I=\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x};$$

$$I=\int_{0}^{1}\frac{x^2\,dx}{1+x^6};\qquad I=\int_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx;$$

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx;\qquad I=\int_{0}^{3}\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$I=\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

٧ ـ اثبت انه من اجل اى تابعين $f(x)$ و $g(x)$ قابلين للمكاملة على المجال a,b تتحقق المتراجحة التالية (متراجحة شفارتز) :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

استخدم هذه المتراجحة في اثبات ان :

$$\left|\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\right|<\sqrt{1,2}\approx 1,095$$

الفصل الخامس

التكاملات الثنائية والثلاثية

تمهيد : سنحاول في هذا التمهيد ان نعرض المفاهيم الاساسية من تحليل التوابع لعدة متحولات ا في المستوى R^2 وفي الفضاء الثلاثي R^3) والتي سنعتمد عليها في دراستنا للتكاملات الثنائية والثلاثية وايضا المنحنية .

لنبدأ اولا باعطاء هذه المفاهيم في المستوى R^2 :

ـ المسافة او البعد بين نقطتين من R^2 :

لتكن $p=(x_1,y_1)$ و $q=(x_0,y_0)$ نقطتين من المستوى R^2 . ان المسافة (او البعد) بين النقطتين p و q هو عدد حقيقي غير سالب نرمز له بـ $d(p,q)$ ونعرّفه بالعلاقة :

$$d(p,q)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

وتبعا لذلك فاننا سنطلق على المستوى R^2 اسم المستوى الاقليدي .
ان مجموع نقطتين $p=(x_1,y_1)$, $q=(x_0,y_0)$ يعرّف بالمساواة :

$$(x_0,y_0)+(x_1,y_1)=(x_0+x_1,y_0+y_1)$$

كذلك فان ضرب النقطة (x_0,y_0) بالعدد الحقيقي λ نعرّفه بالعلاقة

$$\lambda(x_0,y_0)=(\lambda x_0,\lambda y_0)$$

من الواضح ان :

$$\sqrt{(\lambda x_0)^2+(\lambda y_0)^2}=|\lambda|\sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

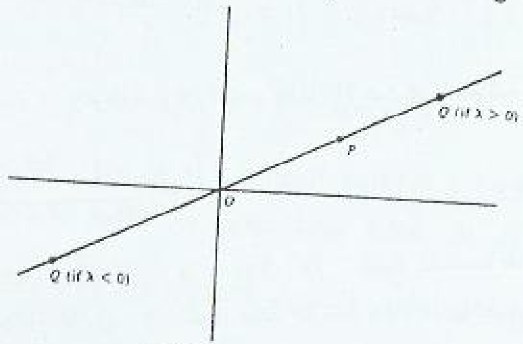
ان العلاقة الاخيرة تعني هندسيا انه اذا كانت :

$O = (o,o)$, $P = (x_0, y_0)$, $Q = (\lambda x_0, \lambda y_0)$

فعندئذ :

$$\overline{OQ} = |\lambda| \overline{OP}$$

ان موضع النقطة Q في المستوى الاقليدى موضح في الشكل (آ) :



شكل (آ)

ـ المستقيم والقطعة المستقيمة في R^2 :

ان المستقيم المعين بالنقطتين (x_0, y_0) و (x_1,y_1) هو مجموعة كل النقاط من الشكل :

$$\lambda(x_0,y_0) + (1-\lambda)(x_1,y_1)$$

عندما تسمح λ كل الاعداد الحقيقة .

(نرمز بـ R لمجموعة كل الاعداد الحقيقة الا اذا اشير الى خلاف ذلك) .

اما القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (x_0,y_0) و (x_1,y_1) فتعرّف على انها مجموعة كل النقاط (x,y) من الشكل :

$$t(x_1,y_1) + (1-t)(x_0,y_0)$$

من اجل $0 \le t \le 1$.

ـ المجاورة او الدائرة المفتوحة :

ان مجموعة كل النقاط (x,y) والتي تحقق المتراجحة :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r \qquad (r > 0)$$

تسمى دائرة مفتوحة ذات المركز (x_0,y_0) ونصف القطر r . يطلق على الدائرة المفتوحة ايضا اسم مجاورة للنقطة (x_0,y_0) ذات نصف القطر r .

ـ الدائرة المغلقة :

نطلق على مجموعة كل النقاط (x,y) والتي تحقق المتراجحة :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \le r \qquad (r > o)$$

اسم دائرة مغلقة مركزها (x_0,y_0) ونصف قطرها r .

ـ النقطة الداخلية والمجموعة المفتوحة :

لتكن G مجموعة من نقاط المستوى الاقليدى R^2 .
ولتكن $P_0 \in G$. نسمي P_0 نقطة داخلية لـ G اذا وجدت دائرة مفتوحة مركزها P_0 ومحتواه بكاملها في G .

نسمي G مجموعة مفتوحة في R^2 اذا كانت جميع نقاط G هي نقاط داخلية لـ G .

يمكن التحقق من ان كل دائرة مفتوحة في R^2 تشكل مجموعة مفتوحة في R^2 .

ـ المجموعة المغلقة :

لتكن F مجموعة من نقاط المستوى الاقليدي R^2 .
نسمي F مجموعة مغلقة اذا كانت متممتها هي مجموعة مفتوحة .

— النقطة الحدودية وحدود مجموعة :

لتكن G مجموعة من نقاط المستوى الاقليدي R^2 .
نسمي P نقطة حدودية للمجموعة G اذا كانت اية مجاورة للنقطة P تحوي نقطة واحدة على الاقل من G ونقطة واحدة على الاقل من متممة G .

سنطلق على مجموعة كل النقاط الحدودية للمجموعة G اسم حدود المجموعة G ونرمز لها بـ ∂G .

— داخلية مجموعة :

نطلق على مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة G اسم داخلية المجموعة G وهكذا فان المجموعة G تكون مفتوحة اذا وفقط اذا كانت داخلية المجموعة G تتطابق مع المجموعة G نفسها .

— غلاقة مجموعة :

نطلق على المجموعة $G \cup \partial G$ اسم غلاقة المجموعة G .

— المجموعة المتصلة (او المرتبطة) :

لتكن G مجموعة جزئية من R^2 . نسمي G مجموعة متصلة او مرتبطة اذا كان من اجل كل نقطتين $p, q \in G$ يوجد خط منكسر يصل بين p و q ويقع بكامله في G . فمثلا الدائرة المفتوحة او المغلقة هي مجموعة متصلة .

— الساحة والساحة المغلقة :

لتكن D مجموعة جزئية من R^2 . نسمي D ساحة اذا كانت المجموعة

D مفتوحة ومتصلة بآن واحد . اذا كانت D ساحة فاننا نطلق على غلاقتها اي $D \cup \partial D$ اسم ساحة مغلقة .

— المجموعة المحدودة وقطر مجموعة :

لتكن G مجموعة جزئية من R^2 . نسمي G مجموعة محدودة اذا وجد عدد موجب M بحيث :

$$\sqrt{x^2+y^2} < M \quad , \quad \forall (x,y) \in G$$

هذا يعني ان G محتواه في دائرة مفتوحة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها M .

لنفرض الان ان G محدودة . ولنرمز بـ W لمجموعة كل الاعداد الحقيقية غير السالبة التالية :

$$\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}$$

وذلك عندما تمسح كل من (x_0,y_0) و (x_1,y_1) جميع نقاط المجموعة G . بما ان G محدودة فاذن W هي مجموعة محدودة (بالطبع في R) وبالتالي فانه يوجد لـ W حد اعلى اصغري . سنطلق على هذا الحد الاعلى الاصغري للمجموعة W اسم قطر المجموعة G .

— التقارب في R^2 :

لتكن $\{P_n\}$ متتالية من نقاط المستوى الاقليدي R^2 حيث $P_n = (x_n, y_n)$. ولنفرض انه توجد نقطة $q = (a,b)$ بحيث :

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2} \to 0 \quad \text{if } n \to \infty.$$

عندئذ نقول عن المتتالية $\{P_n\}$ انها تتقارب من النقطة q ، ونسمي q بنهاية المتتالية $\{P_n\}$. ونكتب في هذه الحالة :

$$\lim_{n\to\infty} P_n = q$$

او :

$$P_n \to q \quad \text{if } n\to\infty$$

نشير هنا الى ان المتتالية $\{P_n\}$ تتقارب من النقطة q ، اذا وفقط اذا كانت كل مجاورة للنقطة q تحوى جميع حدود المتتالية $\{P_n\}$ باستثناء عدد منته منها .

نظرية (١) : المتتالية $\{(x_n,y_n)\}$ تتقارب من النقطة (a,b) اذا وفقط اذا كانت :

$$\lim x_n = a \quad , \quad \lim y_n = b$$

نظرية (٢) : اذا كانت المتتالية $\{(x_n,y_n)\}$ تتقارب من النقطة (a,b) فعند ئذ كل متتالية جزئية تتقارب من (a,b) .

سنترك برهان هاتين النظريتين للقارئ .

ـ نقطة التراكم لمتتالية :

لتكن $\{P_n\}$ متتالية من نقاط R^2 . نسمي q نقطة تراكم (او نقطة لاصقة) للمتتالية $\{P_n\}$ اذا وجدت متتالية جزئية $\{P_{nk}\}$ تتقارب من q .

ـ نقطة التراكم لمجموعة :

لتكن G مجموعة جزئية من R^2 . ولتكن $q = (a,b)$ نقطة من R^2 .
نسمي q بنقطة تراكم للمجموعة G اذا تحققت الخاصة التالية :
من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ توجد نقطة $G \ni P = (x,y)$ حيث $p \neq q$ وبحيث يكون :

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\varepsilon$$

ـ التابع المستمر على مجموعة جزئية من R^2 :

لتكن G مجموعة جزئية من R^2 . وليكن f تابعا معرّفا على G ويأخذ قيمه في مجموعة الاعداد الحقيقية R . هذا يعني ان كل نقطة $(x,y) \in G$ يقابلها وفق f عدد حقيقي وحيد نرمز له بـ f(x,y) . وهكذا فاننا سنطلق على هذا التابع اسم تابع حقيقي لمتحولين او اختصارا تابع لمتحولين . نسمي G بمجموعة تعريف التابع f اما المجموعة $R \supseteq \{ f(x,y) : (x,y) \in G \}$ فتسمى بمجموعة قيم التابع .

لنفرض الان انه من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \,,\, (x,y) \in G \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

عند ئذ نقول عن التابع f(x,y) انه مستمر في النقطة (x_0,y_0) .
اذا كان التابع f(x,y) مستمرا في كل نقطة من نقاط G فعند ئذ نقول عن هذا التابع انه مستمر على G او في G .

نظرية (٣) : ليكن f(x,y) تابعا معرّفا على المجموعة $R^2 \supseteq G$ ان التابع f(x,y) يكون مستمرا في النقطة $G \ni q$ اذا وفقط اذا كان من اجل اى متتالية $\{P_n\}$ متقاربة من q (حيث $P_n=(x_n,y_n) \in G$ و $q = (a,b)$) يكون :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = f(a,b)$$

امثلة :

١ ـ التابع $f(x,y) = x^2 + y^2$ مستمر على كل R^2

٢ ـ التابع $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ معرّف ومستمر على الدائـــرة المغلقة : $x^2 + y^2 \leq 1$.

٣ ـ التابع $f(x,y) = \frac{1}{(x-1)(y-2)}$

معرّف و مستمر على المجموعة :

$$G = \{(x,y) \;:\; 0 < x < 1 \,,\; 1 < y < 2\}$$

٤ ـ التابع المعرّف بالشكل :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

غير مستمر في النقطة $(0,0)$.

ـ التابع المحدود :

اذا كان $f(x,y)$ تابعا حقيقيا معرّفا عـلى المجموعـة $G \subseteq R^2$ فاننا نسمي هذا التابع محدودا عـلى G اذا وجد عـدد حقيقي موجـب M بحيث :

$$\forall (x,y) \in G \qquad |f(x,y)| \leq M$$

ـ المشتقات الجزئية للتوابع الحقيقية لمتحولين حقيقيين :

ليكن $z = f(x,y)$ تابعا معرّفا عـلى مجموعة جزئية مفتوحـة G من المستوى الاقليدى R^2 . لنعط المتحول x تزايدا Δx تاركين المتحـول y ثابتا (بالطبع $\Delta x \gtrless 0$) ولنشكل النسبة :

$$\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

اذا وجدت لهذه النسبة نهاية محدودة عـندما $\Delta x \to 0$ فاننـا نطلق عـلى هذه النهاية اسم المشتق الجزئي للتابع $z = f(x,y)$ بالنسبة لـ x في النقطة $(x,y) \in G$. نرمز لهذا المشتق الجزئي بـ :

$f'_x(x,y)$ أو z'_x أو $\frac{\partial z}{\partial x}$

اذن لدينا بالتعريف :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

وذلك اذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة .

بشكل مماثل نعرف المشتق الجزئي للتابع $z = f(x,y)$ بالنسبة للمتحول y في نقطة $(x,y) \in G$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

وذلك اذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة .

من تعريف المشتق الجزئي يتضح انه عـند حساب المشتقات الجزئيـة يمكننا استخدام القواعـد المعروفة في حساب مشتقات التوابع لمتحول واحـد لانه عـند محاولة معرفة المشتق الجزئي للتابع $z = f(x,y)$ بالنسبـة لـ x فاننا ننظر الى هذا التابع كما لو كان تابعا لمتحول واحد فقط x ، وكذلك هو الامر عـند محاولة معرفة المشتق الجزئي بالنسبة الى y اذ ننظـر الى التابع كما لو كان تابعا لمتحول واحد فقط y .

مثال : لنأخذ التابع :

$$z = x^2 y^3$$

المعرّف عـلى كل R^2 .

لحساب $\frac{\partial z}{\partial x}$ نعتبر y ثابتا ونشتق اشتقاقا عـاديا بالنسبة للمتحـول x فنجد ان :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,y^3$$

وعند حساب $\frac{\partial Z}{\partial y}$ نعتبر x ثابتا ونشتق اشتقاقا عاديا بالنسبة الى المتحول y فنجد ان :

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 3x^2 y^2$$

ـ التفاضل الكلي :

لنفرض انه يوجد عددان حقيقيان A و B بحيث يمكن كتابة عبارة التزايد الكلي ΔZ للتابع $Z = f(x,y)$ بالشكل التالي :

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + h(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

حيث $h(\Delta x,\Delta y)$ تابع لـ Δx و Δy ويحقق الشرط :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} h(\Delta x,\Delta y) = 0$$

عندئذ نسمي $Z = f(x,y)$ تابعا قابلا للمفاضلة في النقطة (x,y) .

يمكن ان نستنتج بسهولة انه في حالة كون التابع قابلا للمفاضلة فان :

$$A = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad , \quad B = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

اذن عندما يكون $Z = f(x,y)$ قابلا للمفاضلة فان :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial x}{\partial y}\Delta y + h(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

في هذه الحالة يطلق على العبارة التالية :

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

اسم التفاضل الكلي للتابع $Z = f(x,y)$ الذي نرمز اليه بـ dz .

اذن لدينا بالتعريف :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

او (بما ان $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$) :

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

ـ ان المفاهيم السابقة في المستوى R^2 يمكن تعميمها على الفضاء الثلاثي R^3 وذلك بعد الاخذ بعين الاعتبار مفهوم البعد او المسافة بين اى نقطتين $p = (x_1,y_1,z_1)$, $q = (x_0,y_0,z_0)$ من R^3 والمعطى بالشكل التالي :

$$d(p,q) = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2}$$

(ان الفضاء الثلاثي R^3 تبعا لهذه المسافة يسمى بالفضاء الاقليدى ثلاثي البعد) .

فمثلا مجموعة كل النقاط (x,y,z) من R^3 والتي تحقق المتراجحة :

$$\sqrt{(X-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < r \qquad (r > 0)$$

تسمى كرة مفتوحة ذات المركز (x_0,y_0,z_0) ونصف القطر r .

يطلق على الكرة المفتوحة ايضا اسم مجاورة U للنقطة (x_0,y_0,z_0) ذات نصف القطر r .

بناء على ذلك اذا كانت $G \subseteq R^3$ وكانت $p_0 \in G$ فاننا نسمي p_0 نقطة داخلية لـ G اذا وجدت كرة مفتوحة مركزها p_0 ومحتواه بكاملها في G .

وهكذا فاننا نسمي G مجموعة مفتوحة في R^3 اذا كانت جميع نقاط G هي نقاط داخلية لـ G . كذلك اذا كانت $\{P_n\}$ متتالية من نقاط الفضاء الاقليدى R^3 حيث $P_n = (x_n,y_n,z_n)$ واذا وجدت نقطة $q = (a,b,q)$ بحيث :

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2+(z_n-c)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{if } n\to\infty$$

عندئذ نقول عن المتتالية $\{P_n\}$ انها تتقارب من النقطة q نسمي q نهاية المتتالية $\{P_n\}$ ونكتب في هذه الحالة :

$$\lim_{n\to\infty} P_n = q$$

نظرية (٤) : المتتالية $\{(x_n,y_n,z_n)\}$ تتقارب من النقطة (a,b,c) اذا وفقط اذا كانت :

$$\lim x_n = a \;,\quad \lim y_n = b \;,\quad \lim z_n = c$$

يترك برهان هذه النظرية للقارئ .

اذا كان الآن $f(x,y,z)$ تابعا حقيقيا معرّفا على مجموعة جزئية G من R^3 :

$$f : G \longrightarrow R$$

فان مفهوم الاستمرار لهذا التابع في نقطة من G يعطى بشكل مماثل لمفهوم استمرار تابع لمتحولين :

فاذا كان من اجل اى عدد $\varepsilon>0$ يوجد عدد $\delta>0$ بحيث :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(y-z_0)^2} < \delta \;,\quad (x,y,z)\in G \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)| < \varepsilon$$

عندئذ نقول عن التابع $f(x,y,z)$ انه مستمر في النقطة (x_0,y_0,z_0) . اذا كان التابع $f(x,y,z)$ مستمرا في كل نقطة من نقاط G فعندئذ نقول عن هذا التابع انه مستمر على G او في G .

نظرية (٥) : ليكن $f(x,y,z)$ تابعا معرّفا على المجموعة $R^2 \supseteq G$. ان التابع $f(x,y,z)$ يكون مستمرا في النقطة $G \ni q=(a,b,c)$ اذا وفقط اذا كان من اجل اى متتالية

$\{P_n\}$ متقاربة من q حيث :

$n = 1,2,\ldots$, $G \ni P_n = (x_n,y_n,z_n)$ يكون :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n,z_n) = f(a,b,c)$$

اخيرا وبشكل مماثل لحالة التابع لمتحولين فاننا نعرّف المشتقات الجزئية بالنسبة لتابع لثلاثة متحولات . فاذا كان $U = f(x,y,z)$ تابعا معرّفا على مجموعة جزئية مفتوحة G من الفضاء الاقليدي R^3 فاننا نعرف المشتق الجزئي لهذا التابع بالنسبة للمتحول x (ونرمز له بـ $\frac{\partial U}{\partial x}$) في نقطة $(x,y,z) \in G$ بالشكل التالي :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

وذلك اذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة .

بشكل مماثل نعرّف المشتقين الجزئيين الآخرين بالنسبة للمتحولين y و z حيث نرمز لهما على الترتيب بـ $\frac{\partial U}{\partial y}$ و $\frac{\partial U}{\partial z}$.

واذا امكننا كتابة التزايد الكلي Δu للتابع $u = f(x,y,z)$ بالشكل التالي :

$$\Delta u = A.\Delta x + B.\Delta y + C.\Delta z + \alpha(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

حيث A,B,C اعداد حقيقية ثابتة وحيث $\alpha(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ تابع لـ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ويحقق الشروط :

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \alpha(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = 0$$

فعندئذ نسمي $u = f(x,y,z)$ تابعا قابلا للمفاضلة في النقطة (x,y,z) . ويمكن ان نستنتج بسهولة انه في حالة كون التابع قابلا

للمفاضلة فان :

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} \;,\quad B = \frac{\partial u}{\partial y} \;;\quad C = \frac{\partial u}{\partial z}$$

اذن عندما يكون $u = f(x,y,z)$ قابلا للمفاضلة فان :

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\Delta z + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

في هذه الحالة يطلق على العبارة التالية :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\Delta z$$

اسم التفاضل الكلي للتابع $u = f(x,y,z)$ الذى نرمز اليه بـ dU .

اذن لدينا بالتعريف :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\Delta z$$

او (بما ان $\Delta x = dx$ ، $\Delta y = dy$ ، $\Delta z = dz$) :

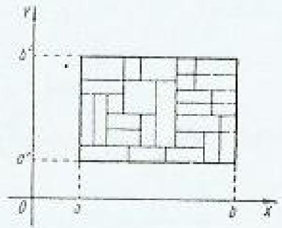
$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot dz$$

التكامل الثنائي

5-1 . تعريف التكامل الثنائي على ساحة مستطيلة .

ليكن $z = f(x, y)$ تابعا معرفا ومحدودا على الساحة المستطيلة D المعرّفة بالمتراجحات :

$$a \leqslant x \leqslant b,\; a' \leqslant y \leqslant b'$$



(شكل ١)

لنجزئ الساحة المستطيلة D الى عدد اختيارى من الساحات الجزئية (التي ليس من الضرورى ان تكون متساوية فيما بينها) .

ولتكن : $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$

مساحات هذه الساحات الجزئية .

نشير هنا الى اننا سنرمز في نفس الوقت لهذه المستطيلات الجزئية بنفس الرموز : $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$

لنختار الان في كل من هذه المستطيلات الجزئية نقطة ما ولنرمز لهذه النقاط على الترتيب بـ :

$$(\xi_1, \eta_1),\; (\xi_2, \eta_2),\; \ldots\; \ldots,\; (\xi_n, \eta_n)$$

ولنشكل المجموع :

$$A = f(\xi_1,\eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2,\eta_2)\Delta\sigma_2 + \dots + f(\xi_n,\eta_n)\Delta\sigma_n$$

من السهل ان نلاحظ هنا انه اذا كان :

$$f(x,y) > 0, \quad \text{في} \quad D$$

فان المجموع A يمثل مجموع حجوم متوازيات مستطيلات قواعدها $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots$ وارتفاعاتها :

$$f(\xi_1,\eta_1), f(\xi_2,\eta_2), \dots$$

سنطلق على مجموعة المستطيلات الجزئية :

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots$$

اسم تجزئة للمستطيل D . سنرمز لهذه التجزئة بـ δ .

كما سنرمز بـ $|\delta|$ لطول اكبر الاقطار للمستطيلات الجزئية : $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots$ التي تشكل التجزئة δ .

اخيرا فاننا سنطلق على متتالية التجزئات $\{\delta_n\}$ اسم متتالية نظامية اذا كانت .

$$\lim_{n\to\infty} |\delta_n| = 0$$

تعريف (١) : اذا تحققت الخاصة التالية :

من اجل اي متتالية نظامية من التجزئات $\{\delta_n\}$ فان المتتالية المقابلة من المجاميع $\{A_n\}$ متقاربة دوما من نهاية واحدة I (بشكل مستقل عن اختيار النقاط (ξ,η)) فاننا نقول عن التابع $f(x,y)$ انه قابل للمكاملة على الساحة المستطيلة D (او في الساحة المستطيلة D) . كما نطلق على النهاية I اسم التكامل الثنائي للتابع $f(x,y)$ على الساحة المستطيلة D.
يرمز للتكامل الثنائي هذا بـ :

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \quad \text{أو} \quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

ملاحظة (١) : اذا كان التابع $z=f(x,y)$ مستمرا وغير سالب على الساحة المستطيلة D ، فان حجم المنطقة ، المحدودة بالسطح $z=f(x,y)$ وبمستوي الاحداثيات OXY وبالمستويات المارة باضلاع المستطيل D موازية للمحور OZ ، تعرف على انها قيمة التكامل الثنائي :

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma.$$

ان هذا التعريف لحجم المنطقة المبني على الحدس يمكن في الواقع تعليله كما يلي :

لنرمز بـ : $M_1, M_2, \dots, M_n$ للقيم العظمى للتابع $f(x,y)$ في مستطيلات التجزئة δ كذلك لنرمز بـ : $m_1, m_2, \dots, m_n$ للقيم الصغرى للتابع $f(x,y)$ في مستطيلات التجزئة δ .

ولتكن : $(\bar\xi_1,\bar\eta_1), (\bar\xi_2,\bar\eta_2), \dots$ النقاط التي يأخذ فيها $f(x,y)$ هذه القيم العظمى و : $(\xi_1,\eta_1), (\xi_2,\eta_2), \dots$ النقاط التي يأخذ فيها $f(x,y)$ هذه القيم الصغرى . لنضع :

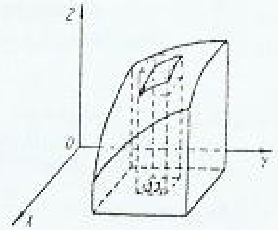
$$S = f(\bar\xi_1,\bar\eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\bar\xi_2,\bar\eta_2)\Delta\sigma_2 + \dots = M_1\Delta\sigma_1 + M_2\Delta\sigma_2 + \dots,$$
$$s = f(\xi_1,\eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2,\eta_2)\Delta\sigma_2 + \dots = m_1\Delta\sigma_1 + m_2\Delta\sigma_2 + \dots$$

ان متوازيات المستطيلات المقابلة للمجموع S تغطي بمجموعها المنطقة المعتبرة اما متوازيات المستطيلات المقابلة للمجموع s فانها بمجموعها محتواه في هذه المنطقة . (شكل ٢)

بما انه من اجل اية متتالية اختيارية ونظامية من التجزئات (δ_n) يكون :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \iint_D f(x,y)\,d\sigma,$$

...ا يتوافق تماما مع تصورنا الحدسي السابق عند تعريف حجم المنطقة



(شكل ٢)

مثال : ان التابع $z = c$ قابل للمكاملة على اية ساحة مستطيلة ويكون :

$$\iint_D c\,d\sigma = c|D|$$

($|D|$ ترمز لمساحة الساحة المستطيلة D).

في الواقع اذا اخذنا تجزئة اختيارية δ واخترنا النقاط : $(\xi_1,\eta_1), (\xi_2,\eta_2), \ldots$ في المستطيلات الجزئية الداخلة في تشكيل التجزئة δ (نقطة واحدة في كل مستطيل جزئي) فاننا نرى بأن :

$$f(\xi_1,\eta_1)=c,\quad f(\xi_2,\eta_2)=c,\ \ldots$$

اذن :

$$A = c\Delta\sigma_1 + c\Delta\sigma_2 + \ldots = c|D|.$$

وبالتالي يكون لدينا بحسب تعريف التكامل الثنائي :

$$\iint_D c\,d\sigma = c|D|. \qquad (1)$$

هندسيا فان التابع $z = c$ يمثل مستويا يوازي المستوى الاحداثي oxy .

اذا كان $c>0$، فان التكامل (١) يعبر عن حجم متوازي المستطيلات الذي قاعدته D وارتفاعه c .

ان النظرية التالية توضح دور استمرار التابع $f(x,y)$ في قابلية المكاملة لهذا التابع :

نظرية (١) : اذا كان التابع $z=f(x,y)$ مستمرا على الساحة المستطيلة D ، فعندئذ يكون قابلا للمكاملة على هذه الساحة .

ان برهان هذه النظرية يجري بشكل مشابه لبرهان النظرية المقابلة من اجل تابع لمتحول واحد (انظر تكامل ريمان) .

ان النظرية التالية تبدو اكثر شمولا من النظرية السابقة :

نظرية (٢) : ان التابع $f(x,y)$ المعرّف والمحدود على الساحة المستطيلة D يكون قابلا للمكاملة على هذه الساحة اذا كانت جميع نقاط القطاعه تقع على منحنيات (عددها منته) تمثل الخطوط البيانية لتوابع مستمرة (من الشكل $y=\varphi(x)$ او $x=\psi(y)$) .

لن نتعرض الى برهان هذه النظرية في دراستنا هذه .

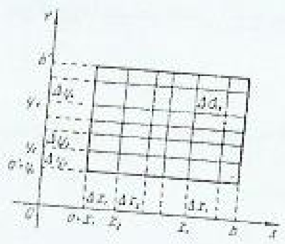
2-5. التكامل الثنائي كتكامل مكرر :

ان النظرية التالية ستسمح لنا بحساب التكامل الثنائي بوساطة تكاملات عادية .

نظرية (١) : اذا كان التابع $f(x,y)$ مستمرا على الساحة المستطيلة $D(a\le x\le b,\ a'\le y\le b')$ ، فعندئذ :

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy \right\} dx = \int_{a'}^{b'} \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy.$$

البرهان :



(شكل ٣)

لنجرى تجزئتين اختياريتين δ' و δ'' : للمجال $[a, b]$ بواسطة القطع المستقيمة $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ وللمجال $[a', b']$ بواسطة القطع المستقيمة $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots$

لتكن :

$$a = x_1 < x_2 < \dots,$$

$$a' = y_1 < y_2 < \dots,$$

نهايات القطع المستقيمة المشكلة للتجزئتين : δ' و δ''.

لنرسم من النقاط $x_1, x_2, \dots$ مستقيمات موازية للمحور OY ومن النقاط $y_1, y_2, \dots$ مستقيمات موازية للمحور OX (انظر الشكل ٣).

بهذه الصورة فاننا نحصل على تجزئة δ للمستطيل D . ليكن $\Delta\sigma_{ik}$ يرمز لذلك المستطيل الجزئي من التجزئة δ والذى مسقطه على OX هو Δx_i وعلى OX هو Δy_k . لنرمز اخيرا ب m_{ik}, M_{ik} للقيمتين العظمى والصغرى للتابع $f(x, y)$ في المستطيل الجزئي $\Delta\sigma_{ik}$.

للضع :

$$F(x) = \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy. \qquad (1)$$

لتكن : $\xi_1, \xi_2, \dots$ نقاطا اختياريا على القطع $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$.

وليكن :

$$A = F(\xi_1)\Delta x_1 + F(\xi_2)\Delta x_2 + \dots \qquad (2)$$

اعتمادا على (١) نستطيع ان نكتب :

$$F(\xi_1) = \int_{a'}^{b'} f(\xi_1, y)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} f(\xi_1, y)\, dy + \int_{y_2}^{y_3} f(\xi_1, y)\, dy + \dots \qquad (3)$$

وبما ان :

$$m_{11} \leqslant f(\xi_1, y) \leqslant M_{11} \qquad y_1 \leqslant y \leqslant y_2,$$

فان :

$$m_{11}\Delta y_1 \leqslant \int_{y_1}^{y_2} f(\xi_1, y)\, dy \leqslant M_{11}\Delta y_1.$$

وبشكل مماثل :

$$m_{12}\Delta y_2 \leqslant \int_{y_2}^{y_3} f(\xi_1, y)\, dy \leqslant M_{12}\Delta y_2$$

الخ ......

لهذا فانه اعتمادا على (3) يكون :

$$m_{11}\Delta y_1 + m_{12}\Delta y_2 + \dots \leqslant F(\xi_1) \leqslant M_{11}\Delta y_1 + M_{12}\Delta y_2 + \dots$$

وبشكل مماثل نجد ان :

$$m_{21}\Delta y_1 + m_{22}\Delta y_2 + \ldots \leqslant F(\xi_2) \leqslant M_{21}\Delta y_1 + M_{22}\Delta y_2 + \ldots$$

الخ ......

بما ان $\Delta\sigma_{ik} = \Delta x_i \Delta y_k$, فانه اعتمادا على (2) نجد ان :

$$m_{11}\Delta\sigma_{11} + m_{12}\Delta\sigma_{12} + \ldots + m_{21}\Delta\sigma_{21} + m_{22}\Delta\sigma_{22} + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant A \leqslant M_{11}\Delta\sigma_{11} + M_{12}\Delta\sigma_{12} + \ldots + M_{21}\Delta\sigma_{21} + M_{22}\Delta\sigma_{22} + \ldots$$

اذا رمز للطرف الايسر في هذه المتراجحات ب s وللطرف الايمن ب S نحصل على المتراجحات :

$$s \leqslant A \leqslant S. \qquad (4)$$

اذا اخذنا الان متتاليتين نظاميتين من التجزئات $\{\delta_n'\}$ و $\{\delta_n''\}$ للمجالين $[a', b']$ $[a, b]$ فان متتالية التجزئات الموافقة $\{\delta_n\}$ للمستطيل D هي ايضا ستكون نظامية •

ووفقا للمتراجحات (4) سيكون لدينا :

$$s_n \leqslant A_n \leqslant S_n. \qquad (5)$$

بما ان :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_D f(x, y)\,d\sigma,$$

فانه اعتمادا على (5) من اجل كل متتالية نظامية من التجزئات $\{\delta_n\}$ ستكون $\lim A_n$ موجودة وعندئذ بحسب (2) التابع $F(x)$ يكون قابلا للمكاملة على المجال $[a, b]$ ويكون :

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} A_n = \iint_D f(x, y)\,d\sigma.$$

من هذا نستنتج وبحكم العلاقة (1) ان :

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{a'}^{b'} f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

وبشكل مماثل نحصل على العلاقة :

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \int_{a'}^{b'} \left\{ \int_a^b f(x, y)\,dx \right\} dy.$$

وهو المطلوب •

امثلة :

١ ــ احسب التكامل الثنائي :

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy$$

حيث الساحة المستطيلة D محدودة بالمستقيمات :

x=2 , x=5 , y=1 , y=3

لدينا :

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy = \int_1^3 dy \int_2^5 x^2 y\,dx =$$

$$= \int_1^3 dy \left[\frac{x^3 y}{3}\right]_{x=2}^{x=5} = \frac{1}{3}\int_1^3 (125y - 8y)\,dy = \frac{117}{3}\,\frac{y^2}{2}\Big|_1^3 = 156.$$

نلاحظ انه كان بامكاننا ايضا اجراء المكاملة بالترتيب المعاكس :

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy = \int_2^5 dx \int_1^3 x^2y\,dy =$$

$$= \int_2^5 dx\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=3} = \frac{1}{2}\int_2^5 (9x^2 - x^2)\,dx = 4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = 156.$$

٢ ـ لنبين ان :

$$\iint_D f(x)\varphi(y)\,dx\,dy = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_c^d \varphi(y)\,dy\right],$$

حيث $f(x),\ \varphi(y)$ تابعين مستمرين في المجالين $[a, b]$ و $[c, d]$، على الترتيب ، والتكامل الثنائي يؤخذ على الساحة المستطيلة D المحدودة بالمستقيمات :

$$x=a\ ,\ x=b\ ,\ y=c\ ,\ y=d$$

لدينا هنا :

$$\iint_D f(x)\varphi(y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x)\varphi(y)\,dy.$$

بما ان x تعتبر ثابتة عند المكاملة بالنسبة لـ y فان :

$$\int_c^d f(x)\varphi(y)\,dy = f(x)\int_c^d \varphi(y)\,dy,$$

وبالتالي فان :

$$\iint_D f(x)\varphi(y)\,dx\,dy = \int_a^b f(x)\,dx\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

بما ان $\int_c^d \varphi(y)\,dy$ هو عدد ثابت فانه يمكن اخراجه من تحت رمز التكامل $\int_a^b$ وبذلك نحصل على العلاقة المطلوبة .

بعض خواص التكامل الثنائي على ساحة مستطيلة :

نظرية (٢) : مجموع تابعين $\varphi(x, y)$ و $f(x, y)$ كل منهما قابل للمكاملة على المستطيل D هو ايضا قابل للمكاملة على هذا المستطيل ويكون لدينا :

$$\iint_D [f(x, y) + \varphi(x, y)]\,d\sigma = \iint_D f(x, y)\,d\sigma + \iint_D \varphi(x, y)\,d\sigma.$$

نظرية (٣) : اذا كان C ثابتا وكان $f(x, y)$ قابلا للمكاملة على المستطيل D فعندئذ الجداء : $(f(x,y))$ C يكون ايضا قابلا للمكاملة على D وتتحقق المساواة :

$$\iint_D cf(x, y)\,d\sigma = c\iint_D f(x, y)\,d\sigma.$$

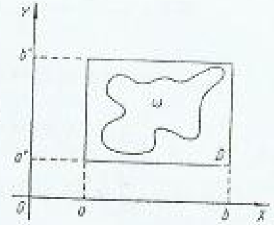
ان هذه النظريات تنتج مباشرة من تعريف التكامل الثنائي ويبرهن عليها بنفس الشكل الذي برهنت فيه النظريات المقابلة من اجل التكامل العادي (تكامل ريمان) .

3-5. التكامل الثنائي على ساحة ما :

لتكن W ساحة مغلقة ومحدودة . وليكن $z = f(x, y)$ معرّفا ومحدودا على الساحة W . ولتكن :

$$D\ \ (a \leqslant x \leqslant b,\ \ a' \leqslant y \leqslant b')$$

ساحة مستطيلة تحوي بداخلها الساحة W .



(شكل ٤)

لنعرّف على الساحة D تابعا جديدا $F(x,y)$ بالشكل التالي :

$$F(x,y) = f(x,y)$$

وذلك اذا كانت النقطة $(x,y) \in W$

$$F(x,y) = 0$$

وذلك من اجل النقاط الباقية من الساحة D .

سنقول عن التابع $f(x,y)$ انه قابل للمكاملة في الساحة W اذا كان $F(x,y)$ قابلا للمكاملة في الساحة D . ان التكامل الثنائي للتابع $f(x,y)$ على الساحة W يساوي قيمة التكامل $\iint_D F(x,y)\,d\sigma$

ان التكامل الثنائي على الساحة W نرمز له ، كالسابق ، بالرمز :

$$\iint_W f(x,y)\,d\sigma$$

أو :

$$\iint_W f(x,y)\,dx\,dy$$

اذن لدينا بالتعريف :

$$\iint_W f(x,y)\,d\sigma = \iint_D F(x,y)\,d\sigma$$

تعريف (١) : نطلق على الساحة المحدودة W اسم ساحة منتظمة

اذا كانت حدود هذه الساحة تتألف من عدد منته من المنحنيات المستمرة من الشكل $y=\varphi(x)$ و $x=\psi(y)$.

نظرية (١) : التابع $f(x,y)$ المحدود على الساحة المغلقة والمنتظمة W والمستمر بداخلها يكون قابلا للمكاملة في هذه الساحة .

أمثلة :

١ ـ ان كثير الاضلاع المغلق يشكل ساحة منتظمة . في الحقيقة ان حدود كثير الاضلاع تتألف من عدد منته من القطع المستقيمة التي تمثل بحد ذاتها الخطوط البيانية لتوابع مستمرة من النوع :

$$y = ax + b \quad \text{أو} \quad x = c$$

٢ ـ الساحة المغلقة والمحدودة بالقطع الناقص تشكل ايضا ساحة منتظمة . فاذا كان القطع الناقص معطى بالمعادلة :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

فان حدود الساحة المشار اليها تتألف من المنحنيين :

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

و :

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

حيث :

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

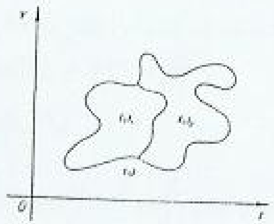
٣ ـ اذا كانت الساحة المغلقة W تتألف من عدد منته من الساحات المنتظمة $W_1, W_2, \ldots, W_k$ حيث كل زوج من هذه الساحات لا يملك نقاط داخلية مشتركة فان الساحة W تكون ايضا منتظمة . في الحقيقة ان حدود الساحة W تتألف من عدد منته من المنحنيات المستمرة من الشكل $y=\varphi(x)$ و $x=\psi(y)$ ، والتي كل

منها ينتمي الى حدود واحدة من الساحات $\omega_1, \ldots, \omega_k$.

نظرية (٢) : لتكن الساحة ω هي مجموع ساحتين منتظمتين ω_1 و ω_2 (بدون نقاط داخلية مشتركة شكل ٥) .

اذا كان التابع $f(x,y)$ محدودا على الساحتين المغلقتين ω_1 و ω_2 ومستمر داخل كل منها فانه يكون قابلا للمكاملة في كل واحدة من الساحات ω ، ω_1 ، ω_2 وتتحقق المساواة :

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\omega_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{\omega_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$



(شكل ٥)

البرهان : لنأخذ مستطيلا D يحوي الساحة ω . لنرمز بـ $F(x,y)$ و $F_1(x,y)$ و $F_2(x,y)$ للتوابع الموافقة المعرّفة على المستطيل D والمنشأة بالشكل الذي ورد ذكره سابقا من اجل التابع $f(x,y)$ على الساحات ω ، ω_1 ، ω_2 . ان كل من هذه التوابع قابل للمكاملة على D . اذن لدينا :

$$\left.\begin{aligned}
\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma &= \iint_{D} F(x, y)\, d\sigma;\\
\iint_{\omega_1} f(x, y)\, d\sigma &= \iint_{D} F_1(x, y)\, d\sigma;\\
\iint_{\omega_2} f(x, y)\, d\sigma &= \iint_{D} F_2(x, y)\, d\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

نلاحظ بان التوابع : $F_1(x,y)+F_2(x,y)$ و $F(x,y)$ تختلف فيما بينها فقط في نقاط موجودة على الجزء الحدودي المشترك للساحتين ω_1 و ω_2 .

اذن :

$$\iint_{D} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D} [F_1(x, y) + F_2(x, y)]\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{D} F_1(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D} F_2(x, y)\, dx\, dy.$$

اذا اخذنا بعين الاعتبار العلاقات (1) فاننا نحصل على المطلوب.

ملاحظة (١) : ان النظرية (١) تعطي الامكانية لحساب مساحة اي ساحة منتظمة ω . اذا رمزنا لهذه المساحة بـ $|\omega|$ فعندئذ يكون لدينا :

$$|\omega| = \iint_{\omega} d\sigma.$$

ان التكامل في الطرف الايمن موجود لان التابع $f(x,y) = 1$, مستمر ومحدود على اية ساحة ω .

ملاحظة (٢) : اذا كان التابع $f(x,y)$ مستمر وغير سالب في الساحة المنتظمة ω فان النقاط (x,y,z) التي من اجلها $(x,y) \in \omega$ و z تحقق المتراجحات :

$0 \leqslant z \leqslant f(x,y)$ تشكل جسما حجمه معرّف بالعلاقة :

$$V = \iint_{w} f(x, y)\, d\sigma$$

مثال : لنرمز بـ W لكثير اضلاع مغلق ما ولنجزئ كثير الاضلاع هذا بطريقة اختيارية الى عدد منته من كثيرات الاضلاع: $W_1, W_2, \dots, W_n$ •

لتضع $f(x,y) = c_k$ داخل W_k $(k=1, 2, \dots, n)$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ هي ثوابت • اما على حدود كثيرات الاضلاع فاننا نعرّف التابع $f(x,y)$ بشكل اختياري بشرط ان يبقى التابع محدودا • بحسب النظرية (٢) يكون لدينا :

$$\iint_{w} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{w_1} c_1\, d\sigma + \iint_{w_2} c_2\, d\sigma + \dots + \iint_{w_n} c_n\, d\sigma =$$

$$= c_1|\omega_1| + c_2|\omega_2| + \dots + c_n|\omega_n|.$$

خواص التكامل الثنائي على ساحة :

من اجل التوابع القابلة للمكاملة على ساحة اختيارية منتظمة W ، فانه تصح النظريات التالية :

نظرية (٣) : مجموع تابعين $f(x,y)$ و $\varphi(x,y)$ قابلين للمكاملة على الساحة المنتظمة W يكون ايضا قابلا للمكاملة على هذه الساحة ويكون :

$$\iint_{w} [f(x, y) + \varphi(x, y)]\, d\sigma = \iint_{w} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{w} \varphi(x, y)\, d\sigma$$

نظرية (٤) : اذا كان c ثابتا وكان $f(x,y)$ قابلا للمكاملة على الساحة المنتظمة W فان الجداء $c\,f(x,y)$ يكون ايضا قابلا للمكاملة على هذه الساحة ويكون :

$$\iint_{w} c f(x, y)\, d\sigma = c \iint_{w} f(x, y)\, d\sigma.$$

ان براهين هذه النظريات يمكن الحصول عليه باستخدام تعريف التكامل الثنائي على ساحة منتظمة والنظريتين (٢) و (٣) من الفقرة 5-2

بعض المتراجحات من اجل التكاملات الثنائية — نظرية القيمة الوسطى •

ان النظريات المعروضة فيما يلي وكذلك طريقة برهانها مماثلة تماما للنظريات المقابلة من اجل التكاملات العادية •

نظرية (٥) : اذا كان التابع $f(x,y)$ قابلا للمكاملة على الساحة المنتظمة W وغير سالب عليها فان التكامل الثنائي لهذا التابع على هذه الساحة ايضا غير سالب •

نظرية (٦) : اذا كان التابعان $f(x,y)$ و $\varphi(x,y)$ قابلين للمكاملة على الساحة المنتظمة W ويحققان في هذه الساحة المتراجحة :

$$f(x, y) \leqslant \varphi(x, y),$$

فعندئذ يكون ايضا :

$$\iint_{w} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant \iint_{w} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

نظرية (٧) : اذا كان التابع $f(x,y)$ قابلا للمكاملة على الساحة المنتظمة W فان التابع $|f(x,y)|$ يكون ايضا قابلا للمكاملة على هذه الساحة ويكون :

$$\left| \iint_{w} f(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant \iint_{w} |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

نظرية (٨) : اذا كان التابع $f(x,y)$ قابلا للمكاملة على الساحة المنتظمة W ويحقق على هذه الساحة المتراجحات :

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

فعند ئذ :

$$m|\omega| \leqslant \iint_{\omega} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant M|\omega|.$$

ان المتراجحة الاخيرة يمكن اعطاؤها صيغة نظرية القيمة الوسطى :

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, dx\, dy = \mu|\omega|.$$

حيث :

$$m \leqslant \mu \leqslant M,$$

وبالتالي فان :

$$\mu = \frac{1}{|\omega|} \iint_{\omega} f(x, y)\, dx\, dy$$

وهي القيمة الوسطى للتابع f (x,y) في الساحة المنتظمة W .

اخيرا اذا كان التابع f (x,y) مستمرا في الساحة المغلقة والمنتظمة W ،

فان :

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, dx\, dy = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot |\omega|.$$

حيث $(\bar{x}, \bar{y})$ نقطة داخلية من الساحة W .

5-4. التكامل الثنائي على ساحة كتكامل مكرر :

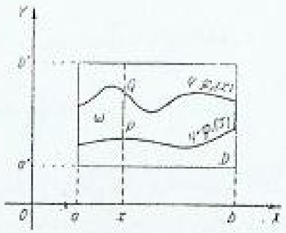
لنفرض ان الساحة المنتظمة W معرّفة بالمتراجحات التالية :

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$

حيث $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ تابعين مستمرين على المجال $[a, b]$

وحيث : $a < x < b$ $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$

انظر الشكل (٦) :



(شكل ٦)

سنطلق على مثل هذه الساحة اسم ساحة عادية (او طبيعية) بالنسبة للمحور OX .

ليكن D مستطيلا ما معرّفا بالمتراجحات :

$$a \leqslant x \leqslant b,\ a' \leqslant y \leqslant b'$$

ويحوى الساحة W .

اذا كان التابع f (x,y) مستمرا على الساحة W فكما هو واضح :

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D} F(x, y)\, d\sigma, \qquad (1)$$

حيث :

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{في نقاط } \omega \\ 0 & \end{cases}$$

في النقاط الباقية من D .

من اجل قيمة مثبتة لـ x فان التابع F (x,y) الذى ينظر اليه كتابع للمتحول y فقط يمتلك على الاكثر نقطتي انقطاع اللتين يمكن ان تكونا P و Q وهما النقطتان اللتين يقطع فيهما ، المستقيم المار من النقطة x موازيا للمحور OY ، حدود الساحة W . بهذه الصورة فانه من اجل اى x فان التكامل :

$$\int_{a'}^{b'} F(x,y)\,dy.$$

موجود .

من هذا نستنتج ان :

$$\iint_D F(x,y)\,d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{a'}^{b'} F(x,y)\,dy \right\} dx. \qquad (2)$$

الان بأخذ x اختيارية وبوضع :

$$y_1 = \varphi_1(x),\quad y_2 = \varphi_2(x),$$

فاننا نجد ان :

$$\int_{a'}^{b'} F(x,y)\,dy = \int_{a'}^{y_1} F(x,y)\,dy + \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\,dy + \int_{y_2}^{b'} F(x,y)\,dy.$$

بما ان $F(x,y) = 0$ من اجل $a' \leqslant y < y_1$:

وكذلك من اجل $y_2 < y \leqslant b'$, فان :

$$\int_{a'}^{b'} F(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\,dy.$$

نلاحظ ايضا بانه من اجل $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ يكون لديا :

$$F(x,y) = f(x,y)$$

فاذن :

$$\int_{a'}^{b'} F(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

اخيرا من العلاقتين (1) (2) نستنتج :

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx. \qquad (3)$$

ملاحظة : يمكننا اجراء نفس المناقشة من اجل ساحة عادية بالنسبة للمحور OY ومعرّفة بالمتراجحات :

$$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y),\quad c \leqslant y \leqslant d.$$

في هذه الحالة يكون لدينا :

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy. \qquad (4)$$

اذا امكن تقسيم الساحة W الى عدد منته من الساحات العادية W_1 ، W_2 ، . . . . فعندئذ :

$$\iint_W f(x,y)\,d\sigma = \iint_{W_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint_{W_2} f(x,y)\,d\sigma + \cdots$$

من اجل حساب التكاملات على الساحات W_1 ، W_2 ، . . . فاننا نستخدم العلاقتين اللتين حصلنا عليهما (3) و (4) .

امثلة :

١ ـ احسب التكامل الثنائي للتابع :

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

المأخوذ على المثلث D المحدود بالمحورين الاحداثيين وبالمستقيم $y = -x+1$.

من الواضح ان هذا المثلث هو ساحة عادية معرّفة بالمتراجحات :

$$0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant y \leqslant 1 - x.$$

اذن :

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 1 - x.$$

وبذلك يكون :

$$\iint_{\omega} (x^2 + xy + 2y^2)\, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + xy + 2y^2)\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2(1-x) + x\,\frac{(1-x)^2}{2} + 2\,\frac{(1-x)^3}{3} \right] dx = \frac{7}{24}.$$

ان المثلث السابق يمكن ايضا تعريفه بالمتراجحات :

$$0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1 - y.$$

ويمكن للطالب ان يتحقق بنفسه من ان للتكامل :

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x^2 + xy + 2y^2)\, dx$$

نفس القيمة $\frac{7}{24}$.

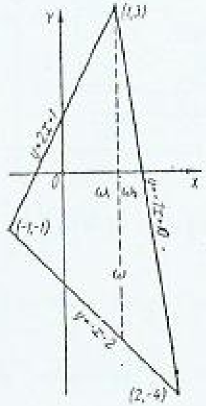
٢ ـ احسب التكامل الثنائي :

$$\iint_{\omega} (2x + 3y + 1)\, dx\, dy$$

حيث الساحة W محدودة بالمثلث الذى رؤوسه $(-1,-1)$ ، $(2,-4)$ ، $(1,3)$. ثم اوجد القيمة الوسطى للتابع المستكمل في هذا المثلث .

نشكل اولا ، بالطريقة المعروفة ، معادلات المستقيمات التي تتحدد عليها

اضلاع المثلث (هذه المعادلات موجودة على الشكل ٧) .



(شكل ٧)

ثم بعد ذلك وبواسطة المستقيم $x = 1$ نجزئ المثلث الى ساحتين عاديتين W_1 ، W_2 . (كان يمكن ايضا استخدام المستقيم $y = -1$) . كما نعلم فان :

$$\iint_{\omega} (2x + 3y + 1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{\omega_1} (2x + 3y + 1)\, dx\, dy + \iint_{\omega_2} (2x + 3y + 1)\, dx\, dy.$$

بما ان W_1 ، W_2 ساحتان عاديتان فان كل تكامل ثنائي في الطرف الايمن يمكن استبداله بتكامل مكرر وبالتالي نجد :

$$\iint_{\omega_1} (2x + 3y + 1)\, dx\, dy = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-x-2}^{2x+1} (2x + 3y + 1)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left[2xy + \frac{3}{2} y^2 + y \right]_{y=-x-2}^{y=2x+1} dx = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{21}{2} x^2 + 9x - \frac{3}{2} \right) dx = 4.$$

بشكل مشابه نجد :

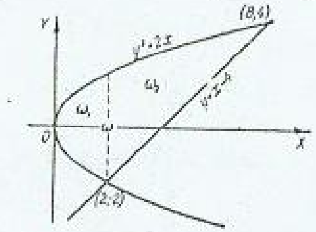
$$\iint_{\omega_2} (2x+3y+1)\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{-x-2}^{-7x+10} (2x+3y+1)\,dy =$$
$$= \int_1^2 \left[2xy + \frac{3}{2}y^2 + y\right]_{y=-x-2}^{y=-7x+10} = \int_1^2 (60x^2 - 198x + 156)\,dx = -1.$$

اخيرا نجد :

$$\iint_{\omega} (2x+3y+1)\,dx\,dy = 3.$$

لايجاد القيمة الوسطى للتابع $2x+3y+1$ في المثلث السابق فانه ينبغي تقسيم قيمة التكامل على ساحة المثلث التي تساوى 9 • وبالتالي من اجل القيمة الوسطى نحصل على العدد $1/3$ •

٣ ـ احسب مساحة الساحة W المحدودة بالقطع المكافئ $y^2 = 2x$ وبالوتر الواصل بين النقطتين $(2,-2)$ و $(8,4)$ (انظر الشكل ٨)



(شكل ٨)

ان المستقيم $x=2$ يقسم الساحة W الى ساحتين عاديتين :
الساحة W_1 المعرّفة بالمتراجحات :

$$0 \leqslant x \leqslant 2,$$
$$-\sqrt{2x} \leqslant y \leqslant +\sqrt{2x}.$$

والساحة W_2 المعرّفة بالمتراجحات :

$$2 \leqslant x \leqslant 8,$$
$$x-4 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x}.$$

بهذه الصورة فان :

$$\iint_{\omega} dx\,dy = \iint_{\omega_1} dx\,dy + \iint_{\omega_2} dx\,dy =$$
$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dy + \int_2^8 dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} dy =$$
$$= \int_0^2 2\sqrt{2x}\,dx + \int_2^8 (\sqrt{2x} - x + 4)\,dx = 18.$$

ان مساحة الساحة W يمكن حسابها بطريقة اخرى • وبالضبط هذه الساحة يمكن النظر اليها كساحة عادية معرّفة بالمتراجحات :

$$-2 \leqslant y \leqslant 4,$$
$$\frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant y+4.$$

اذن :

$$\iint_{\omega} dx\,dy = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dx =$$
$$= \int_{-2}^{+4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right) dy = 18.$$

٤ ـ احسب مساحة الساحة العادية W المعرّفة بالمتراجحات :

$$a \leqslant x \leqslant b,$$
$$f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x),$$

حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$ تابعين مستمرين على المجال $[a,b]$ تحقق من اجلهما المتراجحة : $f_1(x) < f_2(x)$ من اجل $a < x < b$.

في هذه الحالة يكون لدينا :

$$|\omega| = \iint\limits_{\omega} d\sigma = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy.$$

لكن :

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy = f_2(x) - f_1(x).$$

اذن :

$$|\omega| = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx.$$

٥ ـ احسب حجم الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

ان تقاطع المستوى OXY مع هذه الكرة هو الدائرة :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

سنرمز بـ W للنقاط التي تقع داخل وعلى حدود هذه الدائرة •

من الواضح ان نصف الكرة الواقع فوق المستوى OXY هو مجموعة كل النقاط (x,y,z) حيث W ∋ (x,y) اما z فتحقق المتراجحات :

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

بحسب تعريفنا للحجم فاننا نجد حجم الكرة المطلوب :

$$V = 2 \iint\limits_{\omega} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma$$
$$= 2 \int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{+\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy.$$

$$z = x^2 + y^2$$

المقتطع بواسطة المستويات :

$$x=o\ ,\ y=o\ ,\ x+y=1\ ,\ x+y = 2$$

(أنظر الشكل ١٠)

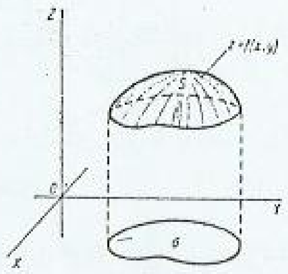
بما ان التابع $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ والساحة σ (مسقط الجزء من السطح المعطى على المستوى XOY) تحقق الشروط السابقة فاذن يمكن حساب الساحة المطلوبة باستخدام الدستور السابق • لدينا اولا :

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\sqrt{1 + f'^2_x(x,y) + f'^2_y(x,y)} = \sqrt{2}.$$

ومنه :

$$S = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{2}\, d\sigma = \sqrt{2} \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \sqrt{2}\, \sigma =$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{2}$$



(شكل ٩)

عند المكاملة بالنسبة لـ y فانه يجب اعتبار x ثابتة .
يمكن ادخال مجهول جديد بان نضع :

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\sin\varphi \quad , \quad dy=\sqrt{r^2-x^2}\cos\varphi\, d\varphi.$$

عندئذ :

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dy$$

$$=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (r^2-x^2)\cos^2\varphi\, d\varphi=\frac{\pi}{2}(r^2-x^2).$$

اذن :

$$V=2\int_{-r}^{+r}\frac{\pi}{2}(r^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

استخدام التكامل الثنائي في حساب مساحات السطوح :

اذا كان السطح S معطى بالمعادلة :

$$z = f(x,y)$$

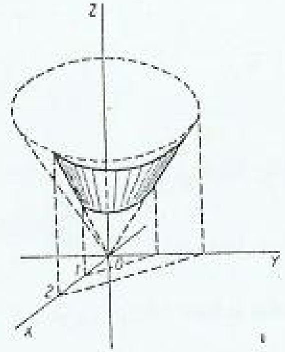
حيث $f(x,y)$ هو تابع يملك مشتقات جزئية (من المرتبة الاولى) :

$$f'_y(x,y) \quad و \quad f'_x(x,y)$$

مستمرة في الساحة المغلقة σ التي تمثل مسقط السطح S على المستوى XOY
(الشكل ٩) ، عندئذ مساحة السطح S تعطى بالعلاقة :

$$S=\iint_{\sigma}\sqrt{1+f'^2_x(x,y)+f'^2_y(x,y)}\;dx\,dy.$$

مثال : اوجد مساحة الجزء من السطح المخروطي :



(شكل ١٠)

5-5 . تغيير المتحولات في التكاملات الثنائية :

المعين التابعي (او اليعقوبي) :

لنفرض ان التابعين :

$$x = \varphi(u, v)$$
$$y = \psi(u, v) \qquad (1)$$

يعيّنان تطبيقا من ساحة ω في المستوى UOV على ساحة σ في المستوى XOY . ولنفرض ان التابعين $\varphi(u, v)$ و $\psi(u, v)$ مستمرين في الساحة ω مع مشتقاتها الجزئية من المرتبة الاولى .

عندئذ نطلق على المعين :

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

اسم المعين التابعي او المعين اليعقوبي للتطبيق (1) . يرمز لهذا المعين ايضا باحد الرمزين التاليين :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \quad \text{أو} \quad J(u, v)$$

بشكل مشابه اذا كانت التوابع :

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

تعين تطبيقا من منطقة T من الفضاء UVW على منطقة V في الفضاء XYZ واذا فرضنا ان هذه التوابع مستمرة مع مشتقاتها الجزئية في المنطقة V فان المعين اليعقوبي لهذا التطبيق يكون :

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

تغيير المتحولات في التكامل الثنائي :

ليكن مطلوبا الان الانتقال في التكامل الثنائي :

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

من المتحولين x y الى متحولين جديدين u v اللذين يرتبطان بـ x, y بالعلاقتين التاليتين :

$$x = \varphi(u, v)$$
$$y = \psi(u, v) \qquad (2)$$

ولنفرض ان الشروط التالية محققة :

١ ـ التابع $f(x, y)$ مستمر على الساحة المغلقة σ المحدودة بمحيط املس جزئيا .

٢ ـ العلاقتان (2) تعرّفان تطبيقا غامرا و متباينا من ساحة مغلقة ω في المستوى UOV على الساحة المغلقة σ في المستوى XOY

٣ ـ التابعان $\varphi(u, v)$ و $\psi(u, v)$ مستمران مع مشتقاتهما الجزئية (من المرتبة الاولى) في الساحة المغلقة ω .

عندئذ تتحقق المساواة التالية :

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\, |J(u, v)|\, du\, dv.$$

تعرف هذه العلاقة باسم علاقة تغيير المتحولات في التكامل الثنائي .

مثال (١) : اوجد مساحة الساحة المستوية المحدودة بالمنحنيات :

$$y=x,\ y=2x,\ y=x^2,\ y=4x^2$$

ان العلاقتين :

$$\frac{y}{x}=u,\ \frac{y}{x^2}=v$$

او :

$$x=\frac{u}{v},\ y=\frac{u^2}{v}$$

تعرفان تطبيقا غامرا ومتباينا من الساحة المفروضة σ من المستوى XOY على المستطيل الذى اضلاعه :

$$u=1,\ u=2,\quad v=1,\ v=4$$

من المستوى UOV .

ان المعين اليعقوبي لهذا التطبيق يساوى :

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \end{vmatrix}=\frac{u^2}{v^3}$$

في الساحة σ لدينا :

$$J(u,v)=\frac{u^2}{v^3}>0.$$

اذن :

$$\sigma=\iint_{\sigma} dx\,dy=\iint_{\omega}\frac{u^2}{v^3}\,du\,dv=$$

$$=\int_1^2 u^2du\int_1^4\frac{dv}{v^3}=\frac{35}{32}$$

مثال (٢) : الانتقال في التكامل الثنائي الى الاحداثيات القطبية :

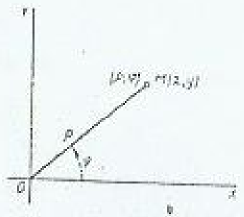
لتكن (ρ,φ) هي الاحداثيات القطبية لـ (x,y) :

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi. \qquad (3)$$

حيث :

$$0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi.$$

انظر الشكل (١)



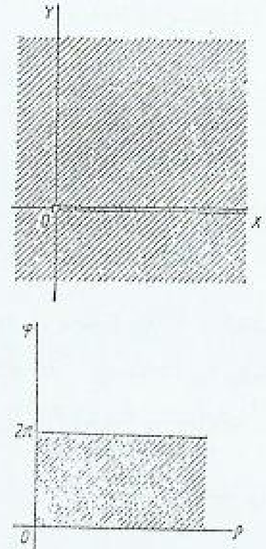
شكل (١)

يمكننا النظر الى العلاقتين : $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi.$

(حيث ρ, φ يتغيران ضمن الحدود المشار اليها اعلاه) . على انهما يعطيان تطبيقا من الشريط :

$$T\,(\,0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$$

في المستوى بجملة احداثيات قائمة $\rho O \varphi$ على كل المستوى XOY انظر الشكل (٢)



شكل (٢)

وفي هذه الحالة فان كل نقطة داخلية (ρ, φ) :

$$0<\rho<+\infty ,\ 0<\varphi<2\pi$$

من الشريط T يقابلها نقطة واحدة (x, y) حيث :

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi \quad)$$

من المستوى XOY . ان هذه النقطة تختلف عن مبدأ الاحداثيات (لان $\rho\neq 0$) ولا تقع على نصف المحور الموجب OX (لان $\varphi\neq 0\ ,\ \varphi\neq 2\pi$) .

وبالعكس فان كل نقطة (x, y) من المستوى XOY وتختلف عن مبدأ الاحداثيات O ولا تقع على نصف المحور الموجب تقابل نقطة واحدة (ρ, φ) من الشريط T .

ان حدود الشريط T يقابلها وفق التطبيق المذكور مبدأ الاحداثيات ونصف المحور الموجب OX .

وعندئذ فان جميع النقاط $(0, \varphi),\ 0\le\varphi\le 2\pi$ من المستوى $\rho O\varphi$ تطبق في نقطة واحدة $O(0, 0)$ من المستوى XOY وكل نقطتين $(\rho, 0)$ و $(\rho, 2\pi)$ ، $0<\rho<+\infty$ من المستوى $\rho O\varphi$ تطبقان في نقطة واحدة $(x=\rho,\ y=0)$ من النصف الموجب للمحور OX .

بهذه الصورة فان العلاقتين (3) تعينان تطبيقا غامرا ومتباينا من مجموعة النقاط الداخلية للشريط T على مجموعة نقاط المستوى XOY التي لا تقع على نصف المحور الموجب OX .

لنحسب المعين اليعقوبي للتطبيق (3) :

$$J(\rho,\varphi)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

في كل نقطة من الشريط T (باستثناء النقاط الحدودية $(0, \varphi),\ 0\le\varphi\le 2\pi$) يكون لدينا :

$$J(\rho,\varphi)=\rho>0$$

باستخدام علاقة تغيير المتحولات في التكامل الثنائي (حيث يلعب دور « u » و « v » الاحداثيان القطبيان ρ و φ) فاننا نحصل على علاقة الانتقال في التكامل الثنائي الى الاحداثيات القطبية :

$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\omega} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

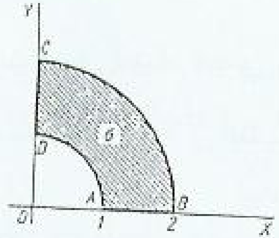
حيث σ ساحة مفروضة في المستوى XOY ، اما ω فهي ساحة في المستوى $\rho O\varphi$ (وبشكل ادق تقع في الشريط T) التي صورتها وفق التطبيق (3) هي الساحة σ .

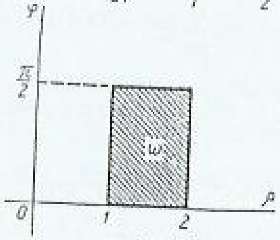
مثال (٣) : لنحسب التكامل :

$$\iint_{\omega} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

على ربع الحلقة $1 < x^2+y^2 < 4$. الواقعة في الربع الاول .

انظر الشكل (٢) :





شكل (٢)

بالانتقال الى الاحداثيات القطبية يكون لدينا :

$$\iint_{\omega} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{\omega} e^{\rho^2}\,\rho\,d\rho,$$

حيث ω هي الساحة في المستوى $\rho o \varphi$ التي صورتها هي ربع الحلقة المعطاة .

بما انه عند التطبيق :

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$$

فان القوس AD من الدائرة $x^2+y^2=1$ يقابل القطعة من المستقيم $\rho=1, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ والقوس BC من الدائرة $x^2+y^2=4$ يقابل القطعة من المستقيم : $\rho=2,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ والقطعتين

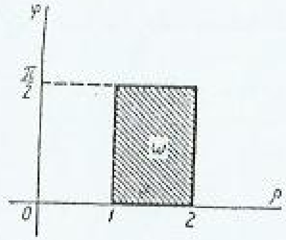
$AB\ (y=0)$ $CD\ (x=0)$ تقابلان القطعتين من المستقيمين

$$\varphi=0 \text{ و } \varphi=\frac{\pi}{2}\ (1<\rho<2)$$

فان الساحة ω هي عبارة عن المستطيل :

$$\left\{1<\rho<2,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}$$

في المستوى $\rho\varphi$ انظر الشكل (٢مكرر) :

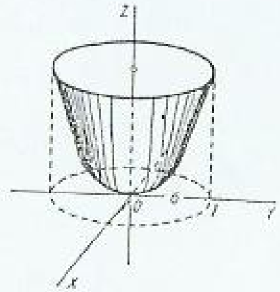


شكل (٢مكرر)

فاذن نستطيع ان نكتب :

$$\iint_{\omega} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 e^{\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{4}(e^4-e)$$

مثال (٤) : احسب ساحة الجزء من السطح $x^2+y^2=z$, المقتطع بالاسطوانة $x^2+y^2=1$ انظر الشكل (٤) .



شكل (٩)

بما ان :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x , \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

فان :

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

حيث σ هي الدائرة : $x^2 + y^2 < 1$ في المستوى XOY

بالانتقال الى الاحداثيات القطبية نجد ان

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4\rho^2} \, \rho d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

6-5 . تعريف التكامل الثلاثي وخواصه :

فيما يلي سنعتبر دوما V منطقة لها حجم محدد في الفضاء الثلاثي XYZ :

ليكن $f(x,y,z)$ تابعا ما معرّفا على المنطقة المغلقة V من الفضاء XYZ . لنجزئ المنطقة V الى n منطقة جزئية :

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$$

حيث لا تمتلك هذه المناطق نقاطا داخلية مشتركة . في كل منطقة جزئية ΔV_i لنختار نقطة $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ، ولنشكل بعد ذلك المجموع :

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i \qquad (1)$$

حيث في هذا المجموع ΔV_i ترمز لحجم المنطقة ΔV_i . نطلق على هذا المجموع اسم مجموع تكاملي من اجل التابع $f(x,y,z)$ على المنطقة V .

واضح انه من اجل التابع $f(x,y,z)$ فانه يمكننا تشكيل عدد غير منته من المجاميع التكاملية على المنطقة V .

لنعرّف الان قطر المنطقة المغلقة على انه اكبر بعد من مجموعة الابعاد بين كل نقطتين حدود بتين من هذه المنطقة . وليكن λ يرمز لاكبر اقطار المناطق الجزئية :

$$\Delta V_1, \quad \Delta V_2, \ldots\ldots, \quad \Delta V_n$$

اذا وجدت للمجاميع التكاملية (1) نهاية محدودة عندما $\lambda \to 0$ فاننا نطلق على هذه النهاية اسم التكامل الثلاثي للتابع $f(x,y,z)$ على المنطقة V. ونرمز له باحد الرمزين التاليين :

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV$$

او :

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

حيث هنا : $f(x, y, z)$ — هو التابع المستكمل ، V — منطقة المكاملة ، x, y, z — متحولات المكاملة ، dV (او $dx\, dy\, dz$) — عنصر الحجم .

بهذه الصورة فان :

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta V_i$$

وذلك عندما تكون هذه النهاية موجودة ومحدودة .

من التعريف ينتج ان التكامل الثلاثي (كما هو الحال في الثنائي) لا يتعلق بطريقة تجزئة المنطقة V الى مناطق جزئية ولا يتعلق كذلك بالطريقة التي نختار فيها النقاط M_i في المناطق الجزئية .

ان النظرية التالية ، و التي لن نتعرض الى برهانها ، تعطي الشروط الكافية لوجود التكامل الثلاثي :

نظرية (١) : اذا كان التابع $f(x,y,z)$ مستمرا في المنطقة المغلقة V، فان التكامل الثلاثي $\iiint_V f(x, y, z)\, dV$ يكون موجودا .

نلاحظ انه في الحالة عندما يكون :

$$f(x,y,z) \equiv 1 \qquad \forall (x,y,z) \in V$$

فان :

$$\iiint_V dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$$

نشير الى ان V في الطرف الايمن ترمز لحجم المنطقة V .

بهذه الصورة فان حجم الجسم V يمكننا حسابه بمساعدة التكامل الثلاثي بوساطة العلاقة :

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dx\, dy\, dz$$

سنورد الان بعض الخواص البسيطة للتكامل الثلاثي وذلك من اجل توابع مستمرة في مناطق المكاملة .

١ — ان المضروب الثابت يمكن اخراجه من تحت رمز التكامل :

$$\iiint_V k f(x, y, z)\, dV = k \iiint_V f(x, y, z)\, dV$$

٢ —

$$\iiint_V [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)]\, dV =$$

$$= \iiint_V f_1(x, y, z)\, dV + \iiint_V f_2(x, y, z)\, dV.$$

٣ — اذا كانت المنطقة V مجزأة الى منطقتين V_1 و V_2 لا تمتلكان نقاطا داخلية مشتركة فان :

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z)\, dV$$

٤ — اذا كان :

$$f(x, y, z) \geq 0, \qquad \iiint_V f(x, y, z) \geq 0$$

٥ — اذا كان :

$$f_1(x, y, z) \leqslant f_2(x, y, z)$$

فان :

$$\iiint_V f_1(x,y,z)\,dV \leqslant \iiint_V f_2(x,y,z)\,dV$$

٦ ـ

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)\,dV\right| \leqslant \iiint_V |f(x,y,z)|\,dV$$

٧ ـ اذا كان التابع $f(x,y,z)$ مستمرا في المنطقة المغلقة V فانـــه توجد في هذه المنطقة نقطة $M(\xi,\eta,\zeta)$ بحيث :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = f(\xi,\eta,\zeta)\,V$$

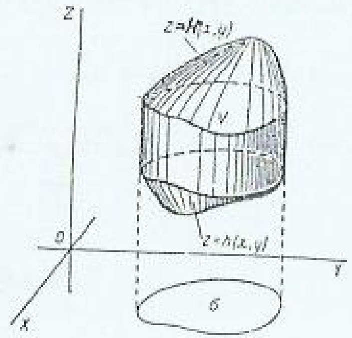
حيث V في الطرف الايمن ترمز لحجم المنطقة المفروضة •

حساب التكاملات الثلاثية :

نظرية (٢) : لتكن V منطقة محدودة من الاسفل ومن الاعلـــــــس بالسطحـــين :

$$Z = H(x,y) \quad \text{و} \quad Z = h(x,y)$$

(حيث كل من التابعين $h(x,y)$ و $H(x,y)$ مستمر علـى الساحـــة المغلقة σ من المستوى XOY) ، وبالسطح الاسطواني الذى مولداتـــه توازى المحور OZ اما حدود الساحة σ فهي المنحني الدليلي (شكل ١) :



(شكل ١)

عـنـد ئذ من اجل اى تابع $f(x,y,z)$ مستمر في المنطقة المغلقة V تتحقق المساواة :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_\sigma \left[\int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy \qquad (2)$$

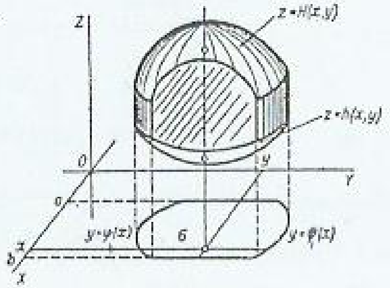
التي تسمح بتحويل حساب التكامل الثلاثي الى حساب تكامل ثنائي • ان التكامل الموجودة في الطرف الايمن من المساواة (2) يكتب عادة بالشكل :

$$\iint_\sigma dx\,dy \int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

وعـنـد حساب التكامل الثلاثي بحسب (2) فاننا نحسب اولا التكامـــــل الداخلي بالنسبة للمتحول z (باعـتبار ان x و y ثوابت ويمكن النظـــر اليها عـلى انهما وسيطان) • بعد ذلك التابع الناتج عـن المكاملة والـذى يتعلق بـ x و y نقوم بمكاملتــه عـلى الساحة σ بالنسبة للمتحولــين x و y •

اذا كانت الساحة σ من المستوى XOY محدودة بـ : $x=a$ ، $x=b$ و $(a<b)$: $y=\varphi(x),\ y=\psi(x)$

(حيث كل من $\psi(x)$ $\varphi(x)$ تابع مستمر عـلى المجال $[a,b]$ وتتحقـق من اجلها المتراجحة : $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ • (انظر الشكل ٢)



(الشكل ٢)

عـنـد ئذ من العلاقة (2) نستطيع ان نكتب :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (3)$$

التي تسمح بحساب التكامل الثلاثي عـن طريق حساب ثلاثة تكاملات محددة ·

في الحالة الخاصة اذا كانت المنطقة V هي متوازي مستطيلات وجوهه

($l<k$) $z=k$, $z=l$, ($c<d$) $y=d$, $y=c$, ($a<b$) $x=b$, $x=a$

فانه بحسب العلاقة (3) يكون لدينا :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^k f(x,y,z)\,dz$$

اخيرا اذا كان $f(x,y,z)$ يساوي جداء ثلاثة توابع كل واحد منهـــا يتعلق بمتحول واحد فقط :

$$f(x,y,z) = f_1(X) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$$

عـند ئذ التكامل الثلاثي عـلى متوازي المستطيلات السابق V يســـاوي جداء ثلاثة تكاملات محددة :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b f_1(x)\,dx \int_c^d f_2(y)\,dy \int_l^k f_3(z)\,dz \qquad (4)$$

وهذه المساواة تنتج مباشرة من خواص التكاملات الثلاثية والثنائية ·

امثلة :

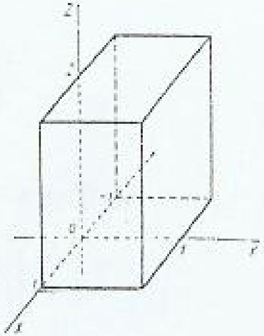
١ ــ احسب التكامل :

$$\iiint_V (x+y-z)\,dx\,dy\,dz$$

حيث V هو متوازي المستطيلات المحدود بالمستويات :

$z=2$, $z=0$, $y=1$, $y=0$, $x=+1$, $x=-1$

(انظر الشكل ٣)



(شكل ٣)

بحسب العلاقة (4) يكون لدينا :

$$\iiint_V (x+y-z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y-z)\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 (2x+2y-2)\,dy = \int_{-1}^{1} (2x-1)\,dx = -2$$

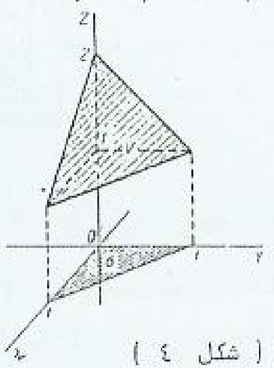
٢ ــ احسب التكامل :

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$$

عـلى المنطقة V المحدودة بالمستويات :

$y=0$, $X=0$, $z=1$, $X+y+z=2$

(انظر الشكل ٤)



(شكل ٤)

ان مسقط المنطقة V على المستوى XOY هو ساحة مثلثية محدودة بالمستقيمات :

$$X+y=1 \quad , \quad y=o \quad , \quad x=o$$

بتطبيق العلاقتين (2) و (3) نجد ان :

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \iint_\sigma x\,dx\,dy \int_1^{2-x-y} dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} dz =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{24}$$

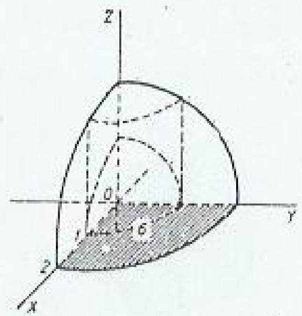
٣ ــ شكل الصيغة المناسبة من اجل حساب التكامل الثلاثي :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

حيث المنطقة V تقع في الثمن الاول من الفضاء XYz ومحدودة بالسطوح التالية :

$$x=o \ , \ y=o \ , \ z=o \ , \ X^2+y^2+z^2=1 \ , \ x^2+y^2+z^2=4$$

(انظر الشكل ٥)



(شكل ٥)

بما ان السطح الذي يحد المنطقة V من الاسفل معطى بمعادلتين (معادلة المستوى $z=o$ ومعادلة سطح الكرة : $x^2+y^2+z^2=1$)

اذن لنجزىء المنطقة V الى جزئين بالسطح الاسطواني : $x^2+y^2=1$.

لنرمز بـ σ_1 لجزء الدائرة $x^2+y^2 \leqslant 1$ وبـ σ_2 لجزء الحلقة $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$ الموجودان في الربع الاول من المستوى XOY ولنرمز بـ V_1 للجزء من V الذي مسقطه σ_1 وبـ V_2 للجزء الاخر المتبقي من V والذي مسقطه σ_2 . عندئذ :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

ان التكاملين الثلاثيين على المنطقتين V_1 و V_2 سنقوم بحسابهما باستخدام العلاقتين (2) و (3) :

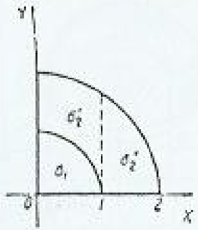
$$\iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\sigma_1} dx\,dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$$

$$\iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\sigma_2} dx\,dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$$

ملاحظة : عند الانتقال في التكامل الثنائي على الساحة σ_2 الى تكامل مكرر جزأنا الساحة σ_2 الى ساحتين جزئيتين σ_2' و σ_2'' (انظر الشكل ٦) .



(شكل ٦)

5-7 . تغيير المتحولات في التكاملات الثلاثية :

لنفرض ان الشروط التالية محققة :

١ ــ التابع $f(x,y,z)$ مستمر في المنطقة المغلقة V من الفضاء XYZ ،

٢ ــ التوابع :

$$x = \varphi(u,v,w), \quad y = \psi(u,v,w), \quad z = \chi(u,v,w)$$

تمتلك مشتقات جزئية مستمرة في المنطقة المغلقة T من الفضاء UVW ،

٣ ــ مجموعة التوابع (المذكورة في الشرط الثاني) تشكل تطبيقا غامرا ومتباينا من المنطقة المغلقة T على المنطقة المغلقة V ،

عندئذ :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_T f(\varphi(u,v,w),\ \psi(u,v,w),\ \chi(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

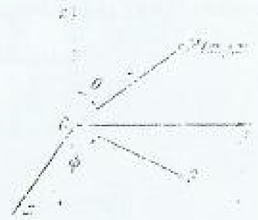
ان هذه العلاقة تؤمن لنا الانتقال في التكامل الثلاثي من المتحولات x,y,z الى متحولات جديدة u,v,w .

لنتوقف الان عند حالتين من اكثر الحالات استخداما عند تغيير المتحولات في التكاملات الثلاثية :

١ ــ الانتقال في التكامل الثلاثي من الاحداثيات الديكارتية الى الاحداثيات الكروية :

كما هو معلوم فان الاحداثيات الكروية (r,ϕ,θ) لنقطة M ترتبط بالاحداثيات الديكارتية (x,y,z) لهذه النقطة بالعلاقات التالية :

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (2)$$
$$z = r\cos\theta$$



(شكل ١)

حيث $0 \le r < +\infty$ اما قيم الزاويتين ϕ و θ فتؤخذ بالشكل التالي :

$$0 \le \phi \le 2\pi$$
$$0 \le \theta \le \pi$$

ان العلاقات (2) حيث المتحولات r,ϕ,θ تتغير بحسب التحديد السابق يمكن النظر اليها على انها تعرّف تطبيقا للشريط :

$$\{0 \le r < +\infty,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\quad 0 \le \theta \le \pi\} \qquad (3)$$

(من الفضاء في الاحداثيات القائمة r,ϕ,θ) على كل الفضاء XYZ .

انظر الشكل (٢) :

يمكن التحقق من ان العلاقات (2) تعين تطبيقا غامرا ومتباينا من مجموعة النقاط الداخلية للشريط (3) على مجموعة نقاط الفضاء XYZ التي لا تقع في نصف المستوى XOZ $(x \ge 0)$.

ان المعين اليعقوبي لهذا التطبيق يساوى :

$$J(r,\phi,\theta) = r^2\sin\theta$$

(تحقق من ذلك !)

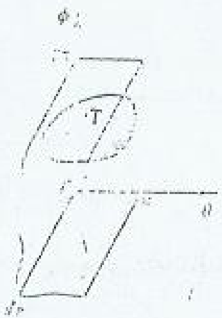
في الشريط المفروض فان المعين اليعقوبي للتطبيق (2) غير سالب ويساوي الصفر فقط على حدود هذا الشريط .

بتطبيق علاقة تغيير المتحولات في التكامل الثلاثي على التطبيق (2) نجد أن :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_T f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

حيث T هي المنطقة من الفضاء r, θ, ϕ التي صورتها هي المنطقة V .

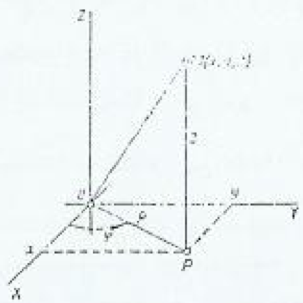


(شكل ٢)

٢ ـ الانتقال في التكامل الثلاثي من الاحداثيات الديكارتية الى الاحداثيات الاسطوانية :

كما هو معلوم فان الاحداثيات الاسطوانية ρ, φ, z لنقطة M ترتبط بالاحداثيات الديكارتية z, y, x لهذه النقطة بالعلاقات التالية :

انظر الشكل (٣)



(شكل ٣)

حيث $0 < \rho < +\infty, \; -\infty < z < +\infty$

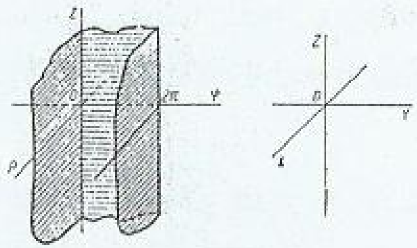
اما قيمة الزاوية φ فسنأخذها ضمن الحدود التالية : $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

يمكننا النظر الان الى العلاقات(4) ، حيث المتحولات ρ, φ, z تتغير بحسب التحديد السابق ، على انها تعرّف تطبيقا للشريط :

$$\{0 \leq \rho < +\infty, \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \; -\infty < z < +\infty\}$$

(من الفضاء في جملة احداثيات قائمة $\rho\varphi z$) على كل الفضاء XYZ .

انظر الشكل (٤)



(شكل ٤)

ان العلاقات (٤) تحقق تقابلا بين مجموعة النقاط الداخلية لهـــذا الشريط وبين مجموعة نقاط الفضاء XYZ التي لا تقع في نصف المستوى XOZ ($x \geqslant 0$) • اما بين مجموعة النقاط الحدودية لهذا الشريط وبين النقاط الموافقة لها في نصف المستوى ($x \geqslant 0$) XOZ فان هذا التقابل لا يحصل •

لنحسب المعين اليعقوبي للتطبيق (٤) :

$$J(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

وهو غير سالب في الشريط المفروض ($\rho = 0$ فقط على حدود الشريط) بتطبيق علاقة تغيير المتحولات في التكاملات الثلاثية على التطبيق (٤) نحصل على العلاقة التي تسمح بالانتقال في التكامل الثلاثي من الاحداثيات الديكارتية الى الاحداثيات الاسطوانية :

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_T f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

حيث T هي المنطقة من الفضاء $\rho\varphi z$ التي صورتها وفق التطبيق (٤) هي المنطقة V •

مثال : احسب حجم الجسم V المحدود بالسطحين :

$$x^2 + y^2 = z \quad , \quad z = 1$$

لنرمز بـ T للمنطقة من الفضاء $\rho\varphi z$ المحدودة بالسطوح :

$$\rho^2 = z, \quad z = 1, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = 2\pi$$

(انظر الشكل ٥) :

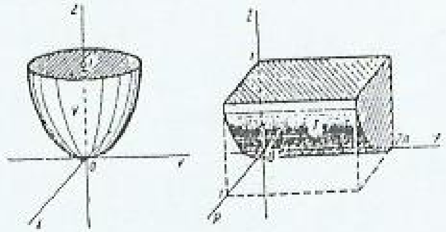
وفق التطبيق (٤) فان صورة هذه المنطقة في الفضاء XYZ ستكون

المنطقة المعطاة V • فاذن :

$$V = \iiint_V dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_T \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_{\rho^2}^1 dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} .$$



(شكل ٥)

تمارين غـير محلولة :

١ ـــ احسب التكاملات الثنائية التالية و ذلك بالانتقال الى الاحداثيـــات القطبية :

$$-\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy.$$

$$-\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy.$$

حيث الساحة D تعرف بالمتراجحات :

$$x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$$

$$-\iint_D (h-2x-3y)\,dx\,dy.$$

حيث D هي الدائرة :

$$x^2+y^2\leqslant R^2.$$

$$-\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

حيث D هي الدائرة :

$$x^2+y^2\leqslant Rx.$$

$$-\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy.$$

حيث D هي الجزء من الحلقة :

$$x^2+y^2\geqslant 1,\quad x^2+y^2\leqslant 9,\quad y\geqslant\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y\leqslant x\sqrt{3}.$$

٢ ـــ احسب التكامل الثنائي :

$$-\iint_D xy\,dx\,dy,$$

حيث D هي الساحة المحصورة بالمنحني :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

والواقعة في الربع الاول .

٣ ـــ احسب التكامل الثنائي :

$$-\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy,$$

حيث D هي الساحة المحصورة بالمنحني :

$$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$$

والواقعة في الـربع الاول .

٤ ـــ احسب التكاملات الثلاثية التالية :

$$-\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 dz.$$

$$-\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c (x+y+z)\,dz.$$

$$-\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\,dz.$$

$$-\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz.$$

$$-\int_0^{e-1} dx\int_0^{e-x-1} dy\int_e^{x+y+e}\frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\,dz.$$

$$-\iiint_V\frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3},$$

حيث Ω هي المنطقة المحصورة بالمستويات :

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1.$$

$$-\iiint_{\Omega} xy\, dx\, dy\, dz,$$

حيث Ω هي المنطقة المحصورة بالسطح : $z = xy$ وبالمستويات

$$x + y = 1 \quad z = 0\ (z \geqslant 0).$$

$$-\iiint_{\Omega} y \cos(z + x)\, dx\, dy\, dz,$$

حيث Ω هي المنطقة المحصورة بالاسطوانة : $y = \sqrt{x}$ وبالمستويات

$$y = 0,\ z = 0 \quad x + z = \pi/2.$$

٥ ــ احسب التكاملات الثلاثية التالية اما بالانتقال الى الاحداثيات الاسطوانية أو الى الاحداثيات الكروية :

$$-\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz.$$

$$-\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$$

$$-\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz.$$

$$-\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$$

$$-\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

حيث المنطقة Ω معرّفة بالمتراجحات التالية :

$$z \geqslant 0,\ r^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2.$$

$$-\iiint_{\Omega} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$$

حيث Ω هي الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1.$$

$$-\iiint_{\Omega} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$$

حيث Ω هي الاسطوانة :

$$x^2 + y^2 \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant z \leqslant 1.$$

٦ ــ احسب التكامل :

$$-\iiint_R (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)\, dx\, dy\, dz$$

حيث المنطقة R محدودة بالسطح :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

استخدم من اجل ذلك التحويل :

$$x = au,\ y = bv,\ z = cw.$$

٧ ــ احسب التكامل :

$$-\iiint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

حيث R حيث نفس المنطقة في التمرين (٦) استخدم نفس التحويل .

٨ ــ احسب التكامل :

$$-\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

حيث R هي الدائرة :

$$x^2 + y^2 \leq a^2.$$

٩ ــ ان مركز منطقة D في R^3 هي نقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ معطاة ب :

$$\bar{x}_i = \frac{\iiint\limits_D x_i \, dV}{\iiint\limits_D dV} \qquad (i = 1,2,3).$$

اوجد مركز المنطقة المحدودة بالمستوى $z = 0$ وبالسطح :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z/c = 1.$$

١٠ ــ اوجد مركز المنطقة المحصورة بالسطح :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

حيث $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ،

الفصل السادس

التكاملات المنحنية

6-١. التكاملات المنحنية من النوع الاول :

ليكن AB منحنيا في الفضاء XYZ وليكن f(x,y,z) تابعا ما معرّفا في كل نقطة (x,y,z) من المنحني AB .

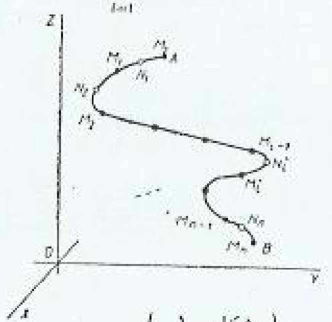
لنجزئ المنحني AB الى n جزء بواسطة النقاط :

$$M_1, \ldots M_{n-1}$$

(انظر الشكل ١)

لتكن $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ نقطة اختيارية من القوس $M_{i-1}M_i$ ولنرمز ب Δs_i لطول القوس $M_{i-1}M_i$ ولنشكل بعد ذلك المجموع :

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \, \Delta s_i \qquad (1)$$



(شكل ١)

نطلق على هذا المجموع اسم مجموع تكاملي من اجل التابع $f(x,y,z)$ المعطى على المنحني AB . واضح ان هذا المجموع يتعلق بطريقة تجزئة المنحني AB وكذلك بالطريقة التي نختار بها النقاط N_i على الاقواس $M_{i-1}M_i$.

لنضع :

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$$

اذا وجدت للمجموع (1) نهاية محدودة I عندما $\lambda \to 0$ ، بحيث لا تتعلق هذه النهاية بطريقة التجزئة ولا بطريقة اختيار النقاط N_i ، فاننا نطلق على هذه النهاية I اسم التكامل المنحني للتابع $f(x,y,z)$ على طول المنحني AB والذى نرمز له ب :

$$\int_{AB} f(x,y,z)\, ds \qquad (2)$$

ملاحظة : ان التعريف الدقيق للنهاية المحدودة I من اجل المجاميع التكاملية (1) يعطى بالشكل التالي :

من اجل اى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث :

$$\lambda < \delta \Longrightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta s_i \right| < \varepsilon$$

وذلك مهما كانت طريقة التجزئة ومهما كان نوع الاختيار للنقاط N_i .

يطلق في بعض الاحيان على التكامل (2) اسم تكامل منحني من النوع الاول .

خواص التكامل المنحني من النوع الاول :

ان الخواص التالية تنتج من التعريف مباشرة (حيث نفرض ان التكاملات المذكورة فيما يلي موجودة) :

١ ـ قيمة التكامل المنحني (2) لا تتعلق بتوجيه المنحني AB .

٢ ـ المضروب الثابت يمكن اخراجه من تحت رمز التكامل .

٣ ـ التكامل المنحني لمجموع تابعين يساوى مجموع التكاملين المنحنيين لهذين التابعين .

٤ ـ اذا كانت النقطة C تقسم المنحني AB الى جزأين : AC و CB فان :

$$\int_{AB} f(x,y,z)\, ds = \int_{AC} f(x,y,z)\, ds + \int_{CB} f(x,y,z)\, ds$$

٥ ـ اذا تحققت في نقاط المنحني AB المتراجحة :

$$f_1(x,y,z) \leq f_2(x,y,z)$$

فان :

$$\int_{AB} f_1(x,y,z)\, ds \leq \int_{AB} f_2(x,y,z)\, ds$$

٦ ـ

$$\left| \int_{AB} f(x,y,z)\, ds \right| \leq \int_{AB} |f(x,y,z)|\, ds$$

٧ ـ اذا كان $f(x,y,z) = 1$ فان :

$$\int_{AB} ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = S$$

حيث S يرمز لطول المنحني AB .

العلاقة بين التكامل المنحني على طول منحني والتكامل المحدد :

ليكن المنحني AB معطى بالمعادلات الوسيطية :

$$x = x(t) \quad y = y(t), \; z = z(t)$$

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

حيث كل من : $x(t), y(t), z(t)$ يمتلك مشتقا مستمرا على المجال $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ والنقطة A توافق $t = \alpha$ والنقطة B توافق $t = \beta$

اما $f(x, y, z)$ فهو تابع مستمر على هذا المنحني .

لنعين على AB اتجاها محددا وليكن مثلا من A الى B . من اجل كل نقطة $M(x, y, z)$ من المنحني AB فان الطول s للقوس AM يحسب بالعلاقة :

$$s = s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (2)$$

وعند ذلك فانه من اجل النقطة A يكون $s=0$ ومن اجل النقطة B يكون $s = S$ ، حيث :

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\; dt$$

يمثل طول المنحني AB .

يمكننا التحقق من ان :

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),\; y(t),\; z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (3)$$

مثال : احسب التكامل المنحني :

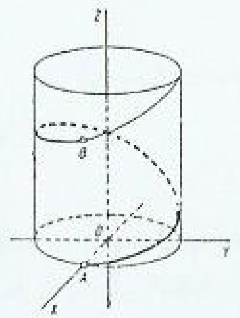
$$\int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$

حيث AB يمثل لفة واحدة من اللولب الاسطواني :

$$x = \cos t \quad , \quad y = \sin t \quad z = t$$

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

انظر الشكل (٢) :



(شكل ٢)

بحسب العلاقة (3) نستطيع ان نكتب :

$$\int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \int_{0}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} (1 + t^2)\, dt = 2\sqrt{2}\,\pi \left(1 + \frac{4\pi^2}{3}\right).$$

اذا كان AB منحنيا مستويا معطى بالمعادلة الديكارتية :

$$y = \varphi(x), \; a \leqslant x \leqslant b$$

حيث $\varphi(x)$ يمتلك مشتقا مستمرا على المجال $a \leqslant x \leqslant b$ فانه اذا اعتبرنا هنا x بمثابة الوسيط فاننا نحصل من العلاقة (3) كحالة خاصة على العلاقة :

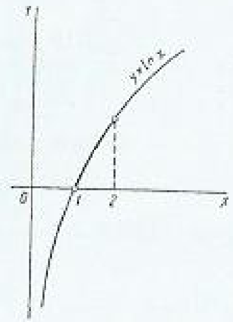
$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx \qquad (٩)$$

مثال : احسب التكامل :

$$\int_{AB} x^2 ds \quad .$$

حيث AB هو الجزء من المنحني اللوغارتمي $y = \ln x$ من $x=1$ حتى $x=2$

انظر الشكل (٣) :



شكل (٣)

بحسب العلاقة (٩) يكون لدينا :

$$\int_{AB} x^2 ds = \int_1^2 x^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=1}^{x=2}$$

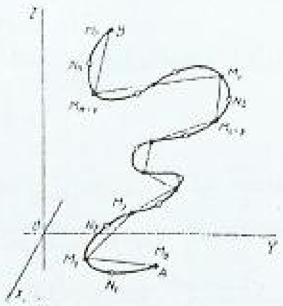
$$= \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$$

6-2. التكاملات المنحنية من النوع الثاني :

ليكن AB منحنيا في الفضاء XYZ وليكن $P(x,y,z)$ تابعا محرّفا في كل نقطة (x,y,z) من هذا المنحني . لنجزئ AB الى n جزءاً بواسطة النقاط :

$$M_1, \ldots, M_n$$

(انظر الشكل ٤) .



شكل (٤)

لنرمز بـ x_i ، y_i ، z_i لاحداثيات النقاط M_i ، $i = 0, 1, \ldots, n$

لتكن $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ نقطة اختيارية من القوس $M_{i-1}M_i$

ولنشكل المجموع :

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i$$

حيث $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ يمثل مسقط $M_{i-1}M_i$ على المحور OX .

نطلق على هذا المجموع اسم مجموع تكاملي من اجل التابع $P(x,y,z)$ على المنحني AB بالنسبة للمتحول X .

اذا وجدت لهذا المجموع نهاية محدودة عندما $\lambda \to 0$ فاننا نطلق على هذه النهاية اسم التكامل المنحني بالنسبة للمتحول x للتابع $P(x,y,z)$ على المنحني AB وبالاتجاه من A الى B ونرمز له بـ :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx \qquad (1)$$

اذن لدينا بالتعريف :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta x_i$$

انّ كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة .

اذا لاحظنا الان ان مسقط $M_{i-1}M_i$ على المحور OX يتعلق بشكل اساسي بتوجيه القوس ويغير اشارته عند ما يتغير توجيه القوس فاننا نستنتج ان التكامل المنحني بالنسبة للمتحول x يتعلق بتوجيه المنحني AB وعند تغيير توجيه المنحني فان التكامل يغير اشارته :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = -\int_{BA} P(x,y,z)\,dx$$

ملاحظة : هنا AB و BA يرمزان لنفس المنحني في الحالة الاولى المنحني موجه من A الى B وفي الحالة الثانية المنحني موجه بالاتجاه المعاكس من B الى A .

بشكل مماثل ومن اجل التوابع Q(x,y,z) و R(x,y,z) المعطاة على المنحني AB يمكننا تعريف التكاملات المنحنية على هذا المنحني بالنسبة للمتحولين y و z :

$$\int_{AB} Q(x,y,z)\,dy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta y_i \qquad (2)$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta z_i \qquad (3)$$

ان كانت هذه النهايات موجودة ومحدودة .

ان التكاملات المنحنية بالنسبة للمتحولات x, y, z تسمى بالتكاملات المنحنية من النوع الثاني .

ان التكامل المعرّف بالمساواة التالية يسمى ايضا تكاملا منحنيا من النوع الثاني :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \qquad (4)$$

$$= \int_{AB} P(x,y,z)\,dx + \int_{AB} Q(x,y,z)\,dy + \int_{AB} R(x,y,z)\,dz$$

خواص التكاملات المنحنية من النوع الثاني :

١ ـ المضروب الثابت يمكن اخراجه من تحت رمز التكامل .

٢ ـ التكامل المنحني لمجموع تابعين يساوي مجموع تكاملين :

$$\int_{AB} (P_1 + P_2)\,dx = \int_{AB} P_1 dx + \int_{AB} P_2 dx,$$

$$\int_{AB} (Q_1 + Q_2)\,dy = \int_{AB} Q_1 dy + \int_{AB} Q_2 dy,$$

$$\int_{AB} (R_1 + R_2)\,dz = \int_{AB} R_1 dz + \int_{AB} R_2 dz.$$

٣ ـ اذا كانت النقطة C تقسم المنحني AB الى جزأين فان :

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}$$

٤ ـ ان التكامل المنحني على منحني مغلق L لا يتعلق باختيار نقطة البدء بل يتعلق فقط باتجاه الدوران على هذا المنحني .

يرمز للتكامل المنحني على منحني مغلق L بـ $\oint_L$

٥ ـ اذا كان AB منحنيا واقعا في مستو معامد للمحور OX فان :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = 0$$

في الحقيقة في هذه الحالة فان جميع Δx_i تكون معدومة في المجموع التكاملي الموافق وهذا يعني ان :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta x_i = 0$$

بشكل مماثل : من اجل المنحني AB الواقع في مستو معامد للمحور OY فان :

$$\int_{AB} Q(x,y,z)\,dy = 0$$

ومن اجل المنحني AB الواقع في مستو معامد للمحور oz نجد :

$$\int_{AB} R(x,y,z)\,dz = 0$$

6-3. الشروط الكافية لوجود التكاملات المنحنية من النوع الثاني :

سنعطي اولا تعريف المنحني الاملس :

نسمي AB منحنيا املسا اذا وجدت معادلات وسيطية لهذا المنحني :

$$x=x(t)\ ,\quad y=y(t)\ ,\quad z=z(t)$$

$$t_1 < t < t_2$$

حيث $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ توابع تملك مشتقات مستمرة على المجال $[t_1\ ,\ t_2]$.

ونسمي AB منحنيا املسا بالتجزئة اذا امكن تجزئة هذا المنحني الى عدد منته من الاقواس الملساء .

نظرية (١) : اذا كان AB منحنيا املسا بالتجزئة وكانت $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ توابع مستمرة على المنحني AB ، فان التكاملات المنحنية :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx,\quad \int_{AB} Q(x,y,z)\,dy,\quad \int_{AB} R(x,y,z)\,dz,$$

تكون موجودة .

سوف لن نتعرض لبرهان هذه النظرية في كتابنا هذا .

ليكن الان AB منحنيا معطى بالمعادلات الوسيطية :

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$
$$z=z(t)$$

حيث $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ توابع تملك مشتقات مستمرة للمتحول t الذي يتغير من $t=\alpha$ الى $t=\beta$ ($\alpha>\beta$ او $\alpha<\beta$) .

لنفرض ان النقطة A تقابل قيمة الوسيط $t=\alpha$ والنقطة B تقابل $t=\beta$ بحيث ان تغير t من α الى β يقابله حركة النقطة $M\ (\ x(t),\ y(t)\ ,\ z(t)\ )$ على المنحني AB بالاتجاه من A الى B .

عندئذ اذا كانت التوابع :

$$P(x,y,z),\ Q(x,y,z)\quad R(x,y,z)$$

مستمرة على المنحني AB فان التكاملات المنحنية :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx\quad \int_{AB} Q(x,y,z)\,dy\quad \int_{AB} R(x,y,z)\,dz$$

تكون موجودة •

يمكننا التحقق في هذه الحالة من ان التكاملات المنحنية السابقة يمكن ردها الى تكاملات محددة بواسطة العلاقات التالية :

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\int_{AB} Q(x,y,z)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),\ y(t),\ z(t))\,y'(t)\,dt$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t),\ y(t),\ z(t))\,z'(t)\,dt$$

وفي الحالة العامة يكون :

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]\,dt$$

مثال ١ : احسب التكامل المنحني :

$$\int_{AB} x^2 dx - yz\,dy + z\,dz$$

حيث AB هي قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين :

A (1,2,-1) و B (3,3,2) •

ان معادلة المستقيم AB تعطى ب :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

او بالشكل الوسيط

$$x = 1+2t,\ y = 2+t,\ z = -1+3t.$$

من اجل القطعة المستقيمة AB فان الوسيط t يتغير من $t_A=0$ حتى $t_B=1$ • اذن :

$$\int_{AB} x^2 dx - yz\,dy + z\,dz = \int_0^1 [(1+2t)^2\cdot 2 - (2+t)(-1+3t) + (-1+3t)3]\,dt$$

$$= \int_0^1 (5t^2 + 12t + 1)\,dt = \frac{26}{3}.$$

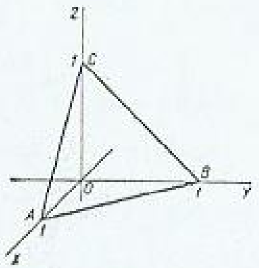
مثال ٢ : احسب التكامل :

$$\oint (x+y+z)\,dx$$

على الخط المنكسر المغلق ABCA الذي رؤوسه هي النقاط :

A(1,0,0) , B(0,1,0) , C(0,0,1)

(انظر الشكل ٥) :



(شكل ٥)

لدينا بالتعريف :

$$\oint_{ABCA} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$$

لكن :

$$\int_{BC} (x+y+z)\,dx = 0,$$

لان طريق الكاملة BC يقع في المستوى المعامد للمحور OX .

من جهة اخرى فان معادلة القطعة المستقيمة AB تكتب بالشكل :

$$X=x \quad , \quad y=1-x \quad , \quad z=0$$

بما ان $X_A=1$, $X_B=0$ فان :

$$\int_{AB} (x+y+z)\,dx = \int_1^0 [x+(1-x)]\,dx = -1$$

كذلك فان معادلة القطعة المستقيمة CA تكتب بالشكل :

$$x=x \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=1-x$$

بما ان $x_C=0$, $X_A=1$ فان :

$$\int_{CA} (x+y+z)\,dx = \int_0^1 [x+(1-x)]\,dx = 1$$

اخيرا نجد ان :

$$\oint_{ABCA} (x+y+z)\,dx = -1+0+1=0$$

ملاحظة : اذا كان AB منحنيا مستويا معطى بالمعادلة :

$y=f(x)$ حيث $f(x)$ يملك مشتقا مستمرا واذا كان $P(x,y)$

و $Q(x,y)$ تابعين مستمرين على هذا المنحني واذا اخذنا X بمثابة الوسيط عندئذ من العلاقات :

(1) و (2) و (3) نحصل على العلاقات التالية :

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \int_{x_A}^{x_B} P(x,f(x))\,dx,$$

$$\int_{AB} Q(x,y)\,dy = \int_{x_A}^{x_B} Q(x,f(x))f'(x)\,dx,$$

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_A}^{x_B} [P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)]\,dx.$$

حيث هنا XA و XB قيم الوسيط X الموافقة للنقطتين A و B على الترتيب .

مثال ٣ : احسب التكامل :

$$\int_{AB} xy\,dx - (x-y)\,dy$$

حيث AB هو القوس من القطع المكافئ $y=x^2$ والذي يوافق $X_A=-1$ ، $X_B=-2$. اذا اخذنا x بمثابة الوسيط فاننا نجد :

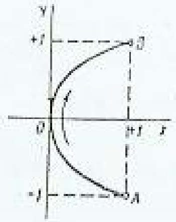
$$\int_{AB} xy\,dx - (x-y)\,dy = \int_{-1}^{-2} [x^3 - (x-x^2)\cdot 2x]\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{-2} = 15\frac{11}{12}$$

مثال ٤ : احسب التكامل :

$$\int_{AOB} y\,dx,$$

حيث AOB هو قوس من القطع المكافئ $y^2=x$ وحيث $A(1,-1)$ و $B(1,1)$ (انظر الشكل ٦) :



(شكل ٦)

بحسب خواص التكاملات المنحنية نستطيع ان نكتب :

$$\int_{AOB} y\,dx = \int_{AO} y\,dx + \int_{OB} y\,dx.$$

بما ان القوس AO يمثل بالمعادلة : $y = -\sqrt{x},\ 0 < x < 1$

حيث $X_A=1$ ، $x_o=o$ والقوس OB يمثل بالمعادلة : $y=\sqrt{x}$

$1 \leqslant x \leqslant o$ حيث $x_o = o$ ، $x_B = 1$ فان :

$$\int_{AOB} y\,dx = \int_1^0 (-\sqrt{x})\,dx + \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3}$$

6-4. شروط استقلال التكامل المنحني (من النوع الثاني) عن شكل طريق المكاملة :

لتكن : $P(x,y,z)$ ، $Q(x,y,z)$ ، $R(x,y,z)$

توابع مستمرة في المنطقة D من الفضاء XYZ سنعتبر في هذه المنطقة فقط المنحنيات الملساء جزئيا •

لنأخذ في المنطقة D نقطتين اختياريتين A و B • يمكننا وصل هاتين النقطتين بمنحنيات مختلفة واقعة في المنطقة D • ان التكامل المنحني :

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

في المنطقة D عن شكل طريق المكاملة يكافىء ان هذا التكامل يساوى الصفر على اى منحني مغلق L واقع في المنطقة D (تحقق من ذلك !) •

ان النظرية التالية تعطي الشروط اللازمة والكافية حتى يكون التكامل المنحني :

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

مستقلا في المنطقة D عن شكل طريق المكاملة •

نظرية (١) : حتى يكون التكامل المنحني :

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

(حيث $P(x,y,z)$ ، $Q(X,y,z)$ ، $R(x,y,z)$ توابع مستمرة في المنطقة D) مستقلا في المنطقة D عن شكل طريق المكاملة ، فانه يلزم ويكفي ان تكون العبارة :

$$P\ dx + Q\ dy + R\ dz$$

تفاضلا تاما لتابع ما (في المنطقة D) •

البرهان :

١ ـ كفاية الشرط : لنفرض انه يوجد تابع $U(x, y, z)$ حيث تتحقق في المنطقة D المساواة :

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU(x, y, z)$$

لنبين انه في هذه الحالة فان التكامل المنحني :

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

في المنطقة D لا يتعلق بشكل طريق المكاملة •

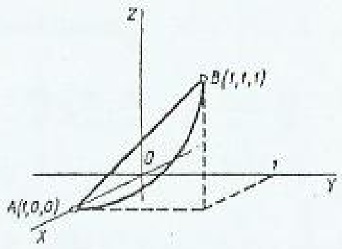
لتكن A و B نقطتين اختياريتين مثبتتين من المنطقة D • وليكن AB

على كل واحد من هذه المنحنيات يعطك، بشكل عام، قيمته الخاصة المتعلقة بهذا المنحني .

لنحسب مثلا التكامل :

$$\int_{AB} x\,dx+xy\,dy+y\,dz$$

على القطعة المستقيمة AB من المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,0,0)$ و $B(1,1,1)$ (انظر الشكل ٧) .



(شكل ٧)

ان معادلة هذا المستقيم هي :

$$\frac{X-1}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$$

اى : $x=1 \quad , \quad y=z$

اذا اخذنا y بمثابة الوسيط هنا ، فيكون لدينا :

$$\int_{AB} x\,dx+xy\,dy+y\,dz = \int_0^1 2y\,dy = 1$$

لنحسب الان نفس التكامل السابق على القوس AB من القطع المكافىء المعطى بالمعادلتين : $X=1 \quad , \quad z=y^2$. (انظر الشكل ٧) .

اذا اخذنا في هذه الحالة y بمثابة الوسيط ($x=1 \ , \ y=y \ , \ z=y^2 \ , \ y_A=0 \ , \ y_B=1$) فاننا نجد :

منحنيا ما واصلا بين النقطتين A و B وواقعا في D .

اذا كانت :

$$x=x(t) \quad , \quad y=y(t) \quad , \quad z=z(t)$$

هي المعادلات الوسيطية لهذا المنحني فان :

$$\begin{aligned}\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz &= \\ = \int_{t_A}^{t_B} dU(x(t), y(t), z(t)) &= \\ = U(x(t_B), y(t_B), z(t_B)) &- \\ - U(x(t_A), y(t_A), z(t_A)) &= \\ = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A)&\end{aligned}$$

اى ان التكامل يتعلق فقط بوضع النقطتين A و B ولا يتعلق بشكل المنحني AB .

٢ ــ لزوم الشرط : لنفرض الان ان التكامل المنحني :

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

مستقل في المنطقة D عن شكل طريق المكاملة . لنثبت في المنطقة D النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ اما النقطة $B(x,y,z)$ فنعتبرها كنقطة متغيرة .

ان التكامل المنحني :

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

سيتعلق بوضع النقطة $B(x,y,z)$ اى انه تابع للمتحولات x,y,z معرّف في المنطقة D . لنرمز لهذا التابع بـ $U(x,y,z)$:

$$\int_{AB} x\,dx + xy\,dy + y\,dz = \int_0^1 (y + 2y^2)\,dy = \frac{7}{6}$$

ان المثال السابق يبين ان قيمة التكامل :

$$\int_{AB} x\,dx + xy\,dy + y\,dz$$

تتعلق بشكل المنحني الذى نجرى عليه المكاملة •

لكنه يمكننا في نفس الوقت ان نورد امثلة لتكاملات منحنية قيمها على اى منحني يصل بين نقطتين مفروضتين A و B تكون واحدة • من هذه التكاملات نذكر مثلا :

$$\int_{AB} (yz + 1)\,dx + (xz - 2)\,dy + xy\,dz$$

$$\int_{AB} x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

تعريف : سنقول عن التكامل المنحني :

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

انه مستقل عن شكل طريق المكاملة في المنطقة D اذا كانت قيم هذا التكامل متساوية على جميع المنحنيات الملساء جزئيا والواقعة في المنطقة المفروضة D حيث لهذه المنحنيات نقطة بداية واحدة ونقطة نهاية واحدة • في هذه الحالة وعند كتابة التكامل يكفي ان نذكر فقط نقطة البداية ونقطة النهاية لطريق المكاملة حيث من المألوف بالارتباط مع ذلك استخدام الرموز التالية :

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

او :

$$\int_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

ان استقلال التكامل المنحني :

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(x, y, z)$$

ولنبين ان العبارة المستكلمة :

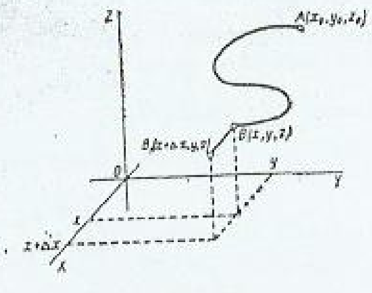
$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

تساوى تفاضل التابع $U(x,y,z)$ في المنطقة D •

لتكن $B(x,y,z)$ نقطة ما مثبتة من المنطقة D • لنعطي x تزايدا Δx عندئذ :

$$U(x + \Delta x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x+\Delta x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

بما ان قيمة التكامل المنحني لا تتعلق بشكل طريق المكاملة فاننا سننظر الى التكامل $\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)}$ مأخوذا على اى منحني AB والتكامل $\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x+\Delta x, y, z)}$ على المنحني AB_1 المؤلف من المنحني المأخوذ AB والقطعة المستقيمة BB_1) حيث B_1 - هي النقطة التي احداثياتها $x+\Delta x, y, z$) (انظر الشكل ٨) •



شكل (٨)

لدينا الآن :

$$\Delta_x U = U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x+\Delta x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz -$$

$$- \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} P(x, y, z)\,dx$$

لان القطعة المستقيمة BB_1 تقع في مستوى معامد للمحوريـــن OY و OZ • اذا عبرنا عـن التكامل الاخير من خلال تكامل محدد وطبقنــا نظرية القيمة الوسطى عـلى التكامل المحدد وجدنا ان :

$$\Delta_x U = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z)\,dt = P(x + \theta\Delta x, y, z)\,\Delta x,$$

حيث $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ •

اذا قسمنا طرفي هذه المساواة عـلى Δx فانه بحكم استمرار التابــع P(x,y,z) سيكون لدينا :

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta\Delta x, y, z) = P(x, y, z)$$

بشكل مماثل يمكن ان نبرهن عـلى ان :

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z)$$

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z).$$

بما ان التوابع P(x,y,z) ، Q(x,y,z) و R(x,y,z) مستمرة في المنطقة D ، فان المشتقات الجزئية $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ للتابع U(x,y,z) مستمرة في هذه الساحة • من هذا نستنتج انه في كــل نقطة من المنطقة D فان التابع U(x,y,z) قابل للمفاضلة وان :

$$dU(X,y,z) = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

ان النظرية التالية تظهر الشروط التي يجب وضعها على التوابــع

P(x,y,z) ، Q(x,y,z) ، R(X,y,z) حتى تمثل العبــــارة P dx + Q dy + R dz تـفاضلا كليا لتابع ما •

نظرية (٢) : اذا كانت التوابع P(X,y,z) ، Q(x,y,z) ، R(x,y,z) تملك في المنطقة D مشتقات جزئية مستمرة (من المرتبة الاولى) فانه حـــتى تكون العبارة :

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

تـفاضلا تاما لتابع ما يلزم ويكفي ان تتحقق العلاقات التالية :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

في كل نقطة من D •

سنقبل بهذه النظرية دون ان نورد برهانها •

مثال : ان العبارة :

$$(2Xy^3 - 2z)\,dx + (3X^2y^2 + 1)\,dy + (3 - 2X)\,dz$$

تمثل تـفاضلا تاما لتابع U(X,y,z) في كل الفضاء XYZ لان :

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - 2z) = 6xy^2 = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + 1),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2xy^3 - 2z) = -2 = \frac{\partial}{\partial x}(3 - 2x), \quad \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y^2 + 1) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}(3 - 2x)$$

من اجل تعيين التابع U(x,y,z) ، لدينا :

$$(2xy^3 - 2z)\,dx + (3x^2y^2 + 1)\,dy + (3 - 2x)\,dz = dU$$

اى :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy^3 - 2z, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2y^2 + 1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 3 - 2x.$$

بمكاملة الاولى بالنسبة لـ x نجد :

$$U=x^3y^3-2xz+\varphi(y,z)$$

حيث $\varphi(y,z)$ اى تابع (قابل للمفاضلة) للمتحولين y و z

وفي هذه الحالة يكون لدينا :

$$\frac{\partial U}{\partial y}=3x^3y^2+\varphi'_y(y,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-2x+\varphi'_z(y,z)$$

اذا قارنا المعادلتين الاخيرتين مع المعادلتين الثانية والثالثة من (١) نرى ان :

$$\varphi'_y(y,z)=1,\ \varphi'_z(y,z)=3$$

من هذا نستنتج ان :

$$\varphi(y,z)=y+\psi(z)$$

حيث $\psi(z)$ تابع ما لـ z :

$$\varphi'_z(y,z)=\psi'(z)$$

فاذن :

$$\psi'(z)=3,$$

ومنه :

$$\psi(z)=3z+C,$$

حيث c ثابت اختياري •

بهذه الصورة يكون :

$$U=x^3y^3-2xz+y+3z+C$$

حيث c ثابت اختياري ، هو التابع المطلوب •

من النظريتين (١) و (٢) نحصل على الحالتين الخاصتين التاليتين :

١ – حتى يكون التكامل المنحني :

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy$$

(حيث $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ توابع مستمرة) مستقلا عن شكل طريق المكاملة في منطقة مفروضة من المستوى XOY يلزم ويكفي ان تكون العبارة : $P\,dx+Q\,dy$

تفاضلا تاما لتابع ما $U(x,y)$ •

٢ – حتى تكون العبارة $P\,dx+Q\,dy$ (حيث $P(x,y)$ ، $Q(x,y)$ والمشتقات الجزئية لهما توابع مستمرة في المنطقة D) تفاضلا تاما يلزم ويكفي ان تتحقق في المنطقة D العلاقة :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ان النظريتين (١) و (٢) تسمحان وبكل سهولة بحل مسألة استقلال او عدم استقلال التكامل المنحني عن شكل طريق المكاملة •

فمثلا التكامل المنحني :

$$\int_{AB} e^y\,dx-z\,dy+xyz\,dz$$

في اى منطقة D يتعلق بشكل طريق المكاملة لان العبارة المستكاملة ليست تفاضلا تاما • وبالفعل لدينا هنا :

$$P(x,y,z)=e^y\ ,\quad Q(x,y,z)=-z\ ,\quad R(x,y,z)=xyz$$

ونلاحظ مثلا أن :

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

لكن التكامل المنحني :

$$\int_{AB}(yz+1)\,dx+(xz-2)\,dy+xy\,dz$$

لا يتعلق بشكل طريق المكاملة ويتعلق فقط بموضع النقطتين A و B وذلك لان

$$\frac{\partial (yz+1)}{\partial y} = z = \frac{\partial (xz-2)}{\partial x}, \quad \frac{\partial (yz+1)}{\partial z} = y = \frac{\partial (xy)}{\partial x}, \quad \frac{\partial (xz-2)}{\partial z} = x = \frac{\partial (xy)}{\partial y}$$

لحساب التكامل السابق من اجل نقطتين مفروضتين ومعينتين A و B يمكننا ان نختار طريقا ما للمكاملة (مثلا يمكن ان نأخذ القطعة المستقيمة AB او خط منكسر واصل بين A و B) ويمكن البحث اولا عن تابع $U(x,y,z)$ يكون من اجله :

$$dU = (yz+1)\,dx + (xz-2)\,dy + xy\,dz,$$

وبعد ذلك حساب التكامل باستخدام العلاقة :

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} dU = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A).$$

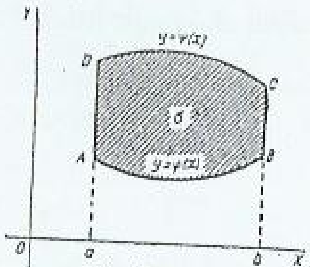
(وذلك لان التكامل مستقل عن شكل طريق المكاملة) .

6-5. العلاقة بين التكامل الثنائي والتكامل المنحني من النوع الثاني (علاقة غرين) :

لتكن σ ساحة في المستوى XOY محدودة بالمنحنيين $y=\varphi(x)$ ، $y=\psi(x)$ وبالمستقيمين $x=a$ ، $x=b$ حيث $\psi(x)$ و $\varphi(x)$ تابعين مستمرين وتتحقق من اجلهما المتراجحة :

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \qquad \text{من اجل} \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

(انظر الشكل ٩)



شكل (٩)

لنفرض ان التابع $P(x,y)$ ومشتقه الجزئي $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ مستمران في الساحة المغلقة σ . عند هذه الشروط فان التكامل الثنائي :

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy$$

موجود ونستطيع ان نكتب :

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy$$

عند ايجاد التكامل :

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy$$

فان x تكون ثابتة اثناء المكاملة ($a \leqslant x \leqslant b$) اذن :

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy = P(x,y)\Big|_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} = P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))$$

ومنه :

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b P(x,\psi(x))\,dx - \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx$$

ان التكامل $\int_a^b P(x,\psi(x))\,dx$ يمكن استبداله بتكامل منحني يساويه :

$$\int_a^b P(x,\psi(x))\,dx = \int_{DC} P(x,y)\,dx.$$

بشكل مماثل :

$$\int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx = \int_{AB} P(x,y)\,dx.$$

بهذه الصورة فان :

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{DC} P(x,y)\,dx - \int_{AB} P(x,y)\,dx.$$

بما ان القطعتين المستقيمتين BC و DA تعامدان المحور OX فان :

$$\int_{BC} P(x,y)\,dx = 0 \qquad \int_{DA} P(x,y)\,dx = 0$$

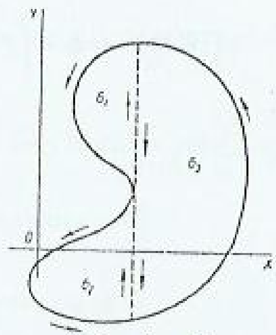
اذن نستطيع ان نكتب :

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{DC} P(x,y)\,dx - \int_{AB} P(x,y)\,dx - \int_{BC} P(x,y)\,dx - \int_{DA} P(x,y)\,dx = -\left[\int_{AB} P(x,y)\,dx + \int_{BC} P(x,y)\,dx + \int_{CD} P(x,y)\,dx + \int_{DA} P(x,y)\,dx\right]$$

ان مجموع التكاملات الاربعة الموجودة ضمن قوسين في الطرف الايمن من المساواة السابقة هو تكامل منحني على المحيط L الذي يمثل حدود الساحة σ وذلك بالاتجاه الموجب :

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_L P(x,y)\,dx \qquad (1)$$

يمكننا التحقق من ان العلاقة الاخيرة (1) تبقى ايضا صحيحة من اجل اية ساحة σ يمكن تجزئتها بواسطة مستقيمات موازية للمحور OY الى عدد منته من الاجزاء من شكل الساحة المعتبرة عند استخراج العلاقة (1) (انظر الشكل ١٠) :



شكل (١٠)

بشكل مماثل يمكن اثبات صحة العلاقة :

$$\iint_\sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_L Q(x,y)\,dy \qquad (2)$$

وذلك من اجل الحالة عندما يكون التابع $Q(x,y)$ ومشتقه الجزئي $\frac{\partial Q}{\partial x}$ مستمرين في الساحة المغلقة σ المحدودة بالمنحنيين $x = \phi_1(y)$ ، $x = \phi_2(y)$ وبالمستقيمين $y=c$ ، $y=d$ (حيث : $\phi_1(y)$ ، $\phi_2(y)$ تابعين مستمرين من اجل $c \leqslant y \leqslant d$ و $\phi_1(y) \leqslant \phi_2(y)$) .

لتكن الان σ هي ساحة تحقق بآن واحد الشروط التي تصح من اجلها العلاقتين (1) و(2) ولتكن التوابع : $P(x,y)$ ، $\frac{\partial P}{\partial y}$ ، $Q(x,y)$ ، $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ، مستمرة في الساحة المغلقة σ . عندئذ تتحقق العلاقتان (1) و (2) . بطرح (1) من (2) طرفا من طرف نحصل على العلاقة :

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy \qquad (3)$$

تعرف هذه العلاقة الهامة باسم علاقة غرين وهي تعين الارتباط بين التكامل الثنائي على ساحة σ ، وبين التكامل المنحني على محيط هذه الساحة L .

ملاحظة : يمكن البرهان على ان علاقة غرين تبقى صحيحة من اجل اية ساحة σ محدودة بمنحني L املس ـ جزئيا .

لنستخدم الان علاقة غرين لحساب مساحة ساحة σ من الشكل السابق . لنأخذ :

$$P(x,y) = -y \quad , \quad Q(x,y) = 0$$

عندئذ :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

بحسب علاقة غرين فان :

$$\iint_{D} (0+1)\,dx\,dy = \oint_{L} -y\,dx + 0\,dy$$

ان التكامل $\iint_{D} dx\,dy$ يساوى مساحة الساحة σ اذن :

$$\sigma = -\oint_{L} y\,dx$$

لنأخذ الان :

$$P(x,y) = 0 \quad , \quad Q(x,y) = x$$

بشكل مماثل نجد ان :

$$\sigma = \oint_{L} x\,dy$$

اخيرا اذا اخذنا :

$$P(x,y) = -\frac{1}{2}y$$

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}x$$

فاننا نحصل على العلاقة :

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint_{L} x\,dy - y\,dx$$

اذن حساب مساحة ساحة مستوية σ بواسطة تكامل منحني على محيط هذه الساحة يمكن اجراوءه باستخدام احدى العلاقات :

$$\sigma = -\oint_{L} y\,dx = \oint_{L} x\,dy = \frac{1}{2}\oint_{L} x\,dy - y\,dx$$

لنحسب مثلا مساحة الساحة المحدودة بالقطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

بواسطة العلاقة :

$$\sigma = \oint_{L} x\,dy$$

باستخدام المعادلات الوسيطية للقطع الناقص :

$$X = a\cos t \quad , \quad y = b\sin t$$

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

نجد ان :

$$\sigma = \oint_{L} x\,dy = \int_{0}^{2\pi} a\cos t\, b\cos t\,dt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt = \pi ab$$

تمارين :

١ ـ احسب التكامل المنحني :

$$\int_{AB} (x^4 - y^3)\,dx$$

حيث AB هو القوس من القطع المكافئ $y=x^2$ من النقطة $(0,0)$ الى النقطة $(2,4)$

٢ ـ احسب التكامل المنحني :

$$\int_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$$

على طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,0)$ و $(\pi,2\pi)$

٣ ـ احسب التكامل المنحني :

$$\int_{AB} \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$$

حيث AB هو القوس من الدائرة :

$$x = a\cos t \quad , \quad y = a\sin t$$

حيث النقطة A توافق $t_1=0$ و B توافق $t_2=$.

٤ ـ احسب التكامل المنحني :

$$\int yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$$

حيث AB هو قوس من منحني اللولب : AB

$$x = R\cos t\ ,\quad y = R\sin t\ ,\quad z = \frac{at}{2\pi}$$

حيث A هي نقطة تقاطع هذا المنحني مع المستوى $z=0$ و B هي نقطة تقاطع المنحني مع المستوى $z=a$.

٥ ـ في التكاملين المنحنيين التاليين L هو منحني مغلق بالاتجاه الموجب والمطلوب تحويل كل من هذين التكاملين الى تكامل ثنائي على الساحة المحصورة بالمنحني L :

$$\int_L (1-x^2)\,y\,dx + x(1+y^2)\,dy$$

$$\int_L (e^{xy} + 2x\cos y)\,dx + (e^{xy} - x^2\sin y)\,dy$$

٦ ـ برهن على ان قيمة التكامل :

$$\int_L (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$$

حيث L منحني مغلق ، تساوي مساحة الساحة المحصورة بهذا المنحني .

الفصل السابع

التكامـلات السطحية

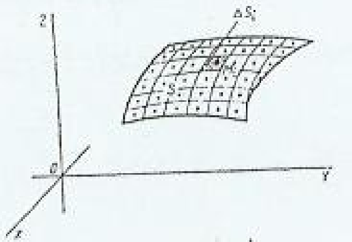
٧-١ . التكاملات السطحية من النوع الاول :

ان التكامل السطحي من النوع الاول يمثل تعميما للتكامل الثنائي . فيما يلي سنفترض ان السطح S يتمتع بكونه يمتلك مساحة محددة .

ليكن S سطحا في الفضاء الثلاثي الابعاد XYZ وليكن $F(x, y, z)$ تابعا معرّفا في نقاط هذا السطح . لنجزىء السطح S وبشكل اختياري الى n جزءا :

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n.$$

بحيث لا تمتلك هذه السطوح الجزئية نقاط داخلية مشتركة . لنختار الان على كل سطح جزئي ΔS_i نقطة ما $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ (انظر الشكل ١)



(الشكل ١)

ولنشكل المجموع التالي الذى نعتبر فيه الرمز ΔS_i ممثلا لمساحة السطح

الجزئي ΔS_i :

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta S_i \qquad (1)$$

نطلق على هذا المجموع اسم مجموع تكاملي من اجل التابع $F(x,y,z)$ بالنسبة للسطح S .

من اجل التابع $F(x,y,z)$ يمكننا تشكيل عدد غير منته من المجاميع التكاملية بالنسبة للسطح S .

سنطلق على اكبر بعد من الابعاد بين نقاط سطح معين اسم قطر هذا السطح . لنرمز ب λ لاكبر الاقطار للسطوح الجزئية في التجزئة المأخوذة .

اذا وجدت الان عندما $\lambda \to 0$ نهاية محدودة للمجاميع التكاملية (1) فاننا نطلق على هذه النهاية اسم التكامل السطحي من النوع الاول للتابع $F(x,y,z)$ بالنسبة للسطح S ونرمز له ب :

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS$$

بهذه الصورة فان :

$$\iint_S F(x,y,z)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta S_i$$

اذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة .

من تعريف النهاية ينتج أن التكامل $\iint_S F(x, y, z)\, dS$ لا يتعلق بطريقة التجزئة للسطح S ولا بطريقة اختيار النقاط M_i على السطوح الجزئية .

من السهل التحقق من ان التكاملات السطحية من النوع الاول تتمتع بالخواص التالية :

١ ـ $\iint_S dS = S$ حيث S مساحة السطح S

٢ ـ $$\iint_S kF(x, y, z)\, dS = k \iint_S F(x, y, z)\, dS$$

حيث k عدد ثابت .

٣ ـ

$$\iint_S [F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z)]\, dS = \iint_S F_1(x, y, z)\, dS + \iint_S F_2(x, y, z)\, dS$$

٤ ـ اذا جزئ السطح S الى جزأين S_1 و S_2 فان :

$$\iint_S F(x,y,z)\, dS = \iint_{S_1} F(x, y, z)\, dS + \iint_{S_2} F(x, y, z)\, dS$$

٥ ـ اذا كان :

$$F_1(x, y, z) \leqslant F_2(x, y, z)$$

فان :

$$\iint_S F_1(x, y, z)\, dS \leqslant \iint_S F_2(x, y, z)\, dS$$

٦ ـ

$$\left|\iint_S F(x, y, z)\, dS\right| \leqslant \iint_S |F(x, y, z)|\, dS.$$

٧ ـ اذا كان التابع $F(x,y,z)$ مستمرا على السطح S فانه توجد على هذا السطح نقطة (ξ, η, ζ) بحيث :

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS = F(\xi, \eta, \zeta)\, S$$

حيث S في الطرف الايمن يمثل مساحة السطح S .

2-7. شروط وجود وحساب التكاملات السطحية من النوع الاول :

سنورد الان من خلال النظرية التالية شروطا كافية (بسيطة) من اجل

وجود التكامل السطحي من النوع الاول :

نظرية (١) : اذا كان السطح S يمكن اعطاؤه بالمعادلة :

$$z = f(x,y)$$

حيث التابع $f(x,y)$ ومشتقاته الجزئية $f'_x(x,y)$ و $f'_y(x,y)$ مستمرة في الساحة المغلقة σ التي تمثل مسقط السطح S على المستوى XOY واذا كان التابع $F(x,y,z)$ مستمرا على السطح S فان التكامل :

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS$$

يكون موجودا .

سنقبل هذه النظرية بدون برهان .

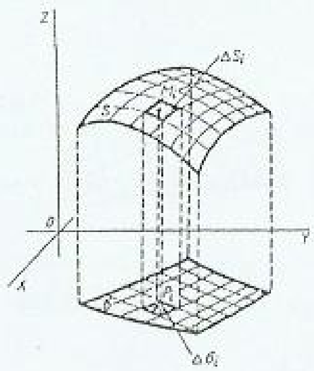
لننتقل الان الى حساب التكاملات السطحية من النوع الاول :

ان حساب التكاملات السطحية من النوع الاول تجرى عادة عن طريق تحويلها الى تكاملات ثنائية .

ليكن $F(x,y,z)$ تابعا مستمرا على السطح S المحقق لشروط النظرية (١) ، عندئذ من اجل اى تجزئة للسطح S ومن اجل اى اختيار للنقاط M_i على السطوح الجزئية يكون :

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i = \iint_S F(x,y,z)\,dS$$

لننشئ الان مجاميع تكاملية من نوع خاص . وبالضبط لنجزئ السطح S الى اجزاء : $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ لا تمتلك نقاط داخلية مشتركة . نرمز بـ $\Delta\sigma_i$ لمسقط ΔS_i على المستوى XOY .



(شكل ٢) :

ان الساحة σ تظهر الان مجزأة الى n جزء :

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n.$$

ان مساحة كل جزء ΔS_i يمكن ايجاده بالعلاقة :

$$\Delta S_i = \iint_{\Delta\sigma_i} \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\; dx\,dy.$$

اذا طبقنا نظرية القيمة الوسطى على التكامل الثنائي نجد :

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i,\eta_i) + f_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\;\Delta\sigma_i$$

حيث $P_i(\xi_i,\eta_i)$ نقطة ما من الساحة $\Delta\sigma_i$.

لنرمز بـ M_i للنقطة من السطح S_i التي احداثياتها (ξ_i,η_i,ζ_i) حيث $\zeta_i = f(\xi_i,\eta_i)$ ولنشكل المجموع التكاملي ، من اجل تكامل التابع $F(x,y,z)$ بالنسبة للسطح S ، والموافق للتجزئة المأخوذة واختيار النقاط M_i ، $i=1,\dots,n$. عندئذ يكون لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i,f(\xi_i,\eta_i))\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i,\eta_i) + f_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\;\Delta\sigma_i.$$

لدينا في الطرف الايمن من هذه المساواة مجموع تكاملي من اجل التكامل

...اني للتابع :

$$F(x,\ y,\ f(x,\ y)).\ \sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2\ (x,\ y)}$$

المستمر على الساحة σ •

عندما نجعل $\lambda \to 0$ فاننا نحصل على العلاقة :

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS = \iint_\sigma F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dx\,dy, \quad (1)$$

التي تعبر عن التكامل على السطح S من خلال تكامل ثنائي على مسقط السطح S على المستوى XOY •

مثال : احسب التكامل :

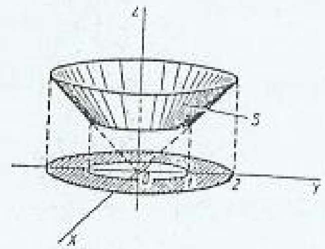
$$\iint_S z\,dS$$

حيث S يمثل الجزء من السطح المخروطي :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

حيث : $1 \leqslant z \leqslant 2$

(انظر الشكل ٣)



(الشكل ٣)

عند اسقاط السطح S على المستوى XOY نحصل على الساحة

σ التي تمثل الحلقة :

$$1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$$

في هذه الحلقة التوابع :

$$f(x,\ y) = \sqrt{x^2+y^2},\ f_x'(x,\ y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y'(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

مستمرة • اذن :

$$\iint_S z\,dS = \iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho^2\,d\rho = 2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{7}{3}$$

3-7- وجود وحساب التكاملات السطحية من النوع الثاني :

ليكن S سطحا ثنائي الجانب معطى بالمعادلة :

$$z = f(x,y)$$

حيث $f(x,y)$ هو تابع مستمر على الساحة المغلقة σ التي تمثل مسقط السطح S على المستوى XOY • وليكن $R(x,y,z)$ تابعا مستمرا على السطح S • لنختار الجانب العلوي من السطح S • عندئذ تتحقق العلاقة الاتية :

$$\iint_S R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy = \iint_\sigma R(x,\ y,\ f(x,\ y))\,dx\,dy \qquad (1)$$

ان هذه العلاقة تعبر عن التكامل السطحي من النوع الثاني على الجانب العلوي من السطح S (وبالنسبة للمتحولين x و y) بوساطة التكامل الثنائي على مسقط السطح S على المستوى XOY •

ملاحظة : ان الكاملة على الجانب السفلي من السطح S تؤول الى الكاملة على الجانب العلوي من السطح بعد تغيير الاشارة امام التكامل •

بشكل مماثل تتحقق العلاقة :

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma} P(f(y,z),y,z)\,dy\,dz \qquad (2)$$

حيث $F(x,y,z)$ تابع مستمر على السطح ثنائي الجانب S المعطى بالمعادلة $x=f(y,z)$ ، وحيث σ تمثل مسقط السطح S على المستوى YOZ .

كذلك تتحقق العلاقة :

$$\iint\limits_{S} Q(x,y,z)\,dz\,dx = \iint\limits_{\sigma} Q(x,f(x,z),z)\,dz\,dx \qquad (3)$$

حيث $Q(x,y,z)$ تابع مستمر على السطح ثنائي الجانب S المعطى بالمعادلة $y=f(x,z)$ ، وحيث σ تمثل مسقط S على المستوى ZOX .

تستخدم العلاقات (1) و (2) و (3) عند حساب التكاملات السطحية الموافقة من النوع الثاني .

مثال (١) : احسب التكامل :

$$\iint\limits_{S} (z-R)^2\,dx\,dy$$

على الجانب العلوي من سطح نصف الكرة :

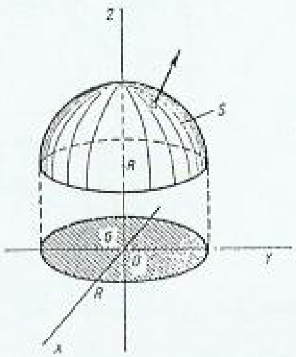
$$x^2+y^2+z^2 = 2Rz$$

$$R \leqslant z \leqslant 2R$$

(انظر الشكل ٤)

ان السطح المفروض S يمكن اعطاؤه بالمعادلة :

$$z = R + \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$



(شكل ٤)

فاذن بحسب العلاقة (١) يكون :

$$\iint\limits_{S} (z-R)^2\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} (R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

حيث σ هي الدائرة : $x^2+y^2 \leqslant R^2$ في المستوى XOY والتي تمثل مسقط السطح S . بحساب التكامل الثنائي في الطرف الايمن نجد :

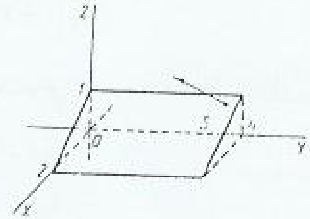
$$\iint\limits_{S} (z-R)^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} (R^2-\rho^2)\,\rho\,d\rho = \frac{\pi R^4}{2}$$

مثال (٢) : احسب التكامل :

$$\iint\limits_{S} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

على الجانب العلوي من جزء المستوى $x+2z=2$ الموجود في الثمن الاول والمقطع بالمستوى $Y=4$.

(انظر الشكل ٥)



(شكل ٥)

لدينا بالتعريف :

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy =$$

$$= \iint_S x\,dy\,dz + \iint_S y\,dz\,dx + \iint_S z\,dx\,dy$$

من جهة اخرى لدينا :

$$\iint_S x\,dy\,dz = \iint_{\sigma_1} (2-2z)\,dy\,dz = 2\int_0^4 dy \int_0^1 (1-z)\,dz = 4$$

$$\iint_S y\,dz\,dx = 0$$

لان المستوى S موازي للمحور oy .

$$\iint_S z\,dx\,dy = \iint_{\sigma_2} \left(1-\frac{x}{2}\right) dx\,dy = \int_0^4 dy \int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right) dx = 4$$

حيث هنا σ_1 و σ_2 مسقطي S على المستويين YOZ و XOY . اذن :

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 4+0+4 = 8$$

ملاحظة : في الحالة التي يكون فيها السطح S معطى بالمعادلة $z=f(x,y)$ حيث $f(x,y)$ ومشتقاته الجزئية $f'_x(x,y)$ و $f'_y(x,y)$ توابع مستمرة في الساحة المغلقة σ (التي تمثل مسقط S على المستوى XOY) واذا كانت التوابع $P(x,y,z)$ ، $Q(x,y,z)$ ، $R(x,y,z)$ مستمرة على السطح S ، فعند ئذ تتحقق العلاقة التالية :

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_\sigma [-pP(x,y,f(x,y)) - qQ(x,y,f(x,y)) + R(x,y,f(x,y))]\,dx\,dy, \qquad (4)$$

حيث :

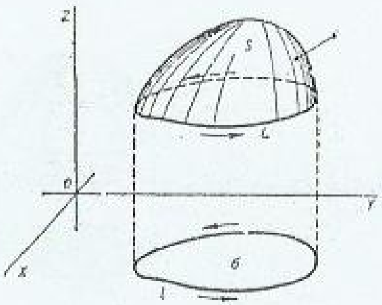
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

4-7. علاقة ستوكس :

ان علاقة ستوكس تعين الارتباط بين التكاملات المنحنية والتكاملات السطحية (من النوع الثاني) .

ليكن S سطحا معطى بالمعادلة $z=f(x,y)$ حيث التوابع $f(x,y)$ ، $f'_x(x,y)$ ، $f'_y(x,y)$ مستمرة على الساحة المغلقة σ (مسقط S على المستوى XOY) . وليكن L هو محيط السطح S (نفرض ان L املس جزئيا)

(انظر الشكل ٦)



(شكل ٦)

لنختار على السطح S جانبا معينا مثلا الجانب العلوي ولنعين بالمقابل الاتجاه الموجب على المحيط L .

لنفرض اخيرا ان التوابع $P(x,y,z)$ ، $Q(x,y,z)$ ، $R(x,y,z)$ مستمرة على السطح S مع مشتقاتها الجزئية من المرتبة الاولى عند ئذ تتحقق

العلاقة التالية :

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

وهي علاقة ستوكس .

مثال : لنحسب بواسطة علاقة ستوكس التكامل :

$$\oint_L xy\,dx + y^2\,dy + z\,dz$$

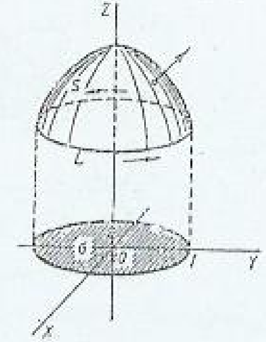
حيث L هو محيط الدائرة المعطاة بالمعادلة :

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad z=1$$

وبمثابة السطح S نأخذ السطح :

$$2 - z = x^2 + y^2$$

المشدود على المحيط L (انظر الشكل ٧) :



(الشكل ٧)

اذا اخترنا على S الجانب العلوي عند ئذ بحسب علاقة ستوكس يكون :

$$\oint_L xy\,dx + y^2\,dy + z\,dz = \iint_S -x\,dx\,dy = -\iint_G x\,dx\,dy = 0$$

تمارين :

١ ــ احسب التكامل :

$$\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$$

حيث S هو الجزء من المستوى :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

الموافق لـ : $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $z \geq 0$

٢ ــ احسب التكامل :

$$\iint_S xyz\,dS$$

حيث S هو الجزء من المستوى :

$$x + y + z = 1$$

الموافق لـ : $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $z \geq 0$

٣ ــ احسب التكامل :

$$\iint_S x^2y^2\,dS$$

حيث S هو نصف الكرة :

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

دليل المصطلحات العلمية

- A -

Absolute value	قيمة مطلقة
Accumulation	تراكم (تجمع)
Accumulation point	نقطة تراكم
Arbitrary constant	ثابت كيفي
Analysis	تحليل
Approximate value	قيمة مقربة
Area	مساحة
Assumption	فرض

- B -

Ball	كرة
Bound	حد
Bounded function	تابع محدود
Bounded interval	مجال محدود
Bounded set	مجموعة محدودة
Boumdary conditions	شروط حدودية

- C -

Center	مركز

Center of aball	مركز كرة
Change of Variable	تغيير المتحول
Classecal Analysis	تحليل كلاسيكي
Closure	غلاقة
Closed interval	مجال مغلق
Cluster point	نقطة لاصقة
Complement of aset	متممة مجموعة
Connected	مترابط (متصل)
Continuous	مستمر
Conjugate roots	جذران مترافقان
Complex roots	جذران عقديان
Cosine	تجب
Curve	منحني

- D -

Decreasing	متناقص
Decreasing funtion	تابع متناقص
Definite integrals	تكاملات محددة
Definition	تعريف
Derivative	مشتق
Dependence	ارتباط
Diameter	قطر
Dimension	بعد
Distance	مسافه
Differential equation	معادلة تفاضلية

Domain of Definition	ساحة تعريف
Double integrals	تكاملات ثنائية

- E -

Element	عنصر
Euclidean distance	مسافة اقليدية
Exact di fferential	تفاضل تام
Equation with separable variables	معادلة قابلة لفصل المتحولات
Example	مثال
Existence	وجود
Exponential function	تابع اسي

- F -

Finite	منته
First order	مرتبة اولى
Formula	صيغة
Fractions	كسور
Function	تابع
Function of two variabbes	تابع لمتحولين

- G -

General solution	حل عام
Greatest lower bound	حد ادنى اعظمي

Green's theerem	نظرية غرين

- H -

Homogeneous Equation	معادلة متجانسة

- I -

Improper integrals	تكاملات معتلة
Independent	مستقل
indefinite integrals	تكاملات غير محددة
Inequality	متراجحة
Integral	تكامل
Integrable	قابل للمكاملة
Integration	مكاملة
Integrand	المقدار المستكمل
Integration by parts	التكامل بالتجزئة
Interval	مجال

- J -

Jacobian determinant	المعين اليعقوبي

- L -

Least upper bound	حد اعلى اصغري
Length of an interval	طول مجال

Line integrals	تكاملات منحنية
Linear equation	معادلة خطية

- M -

Mapping	تطبيق
Mean value theorem	نظرية القيمة الوسطى
Method	طريقة
Multiple integrals	تكاملات مضاعفة

- N -

Neighbourhood	مجاوره
Numerical integration	تكامل عددى
Necessary condition	شرط لازم

- O -

One-to-one mapping	تطبيق واحد ـ لواحد
Onto mapping	تطبيق على
Open ball	كرة مفتوحة
Open interval	مجال مفتوح
Open set	مجموعة مفتوحة
Order	مرتبة
Ordinary diff. Eq.	معادلة تفاضلية عادية

- P -

Parametr	وسيط
Point	نقطة
Polar form	شكل قطبي
Polar coordinates	احداثيات قطبية
Polonomial	كثير حدود
Product	جداء
Proof	برهان
Properties	صفات او خواص

- R -

Radius	نصف قطر
Radius of aball	نصف قطر كره
Rational function	تابع عادى
Rational numbers	الاعداد العادية
Reduction of order	تخفيض المرتبة
Real numbers	الاعداد الحقيقية
Result	نتيجة
Riemann integral	تكامل ريمان

- S -

Scalar	كمية عددية
Singular solution	حل شاذ
Space	فضاء

Sphere	سطح كره
Subset	مجموعة جزئية
Sufficient	كاف
Sum	مجموع
Surface	سطح
Surface integrals	تكاملات سطحية

- T -

Theorem	نظرية
Total differential	التفاضل الكلي
Transformation	تحويل
Triple integrals	تكاملات ثلاثية

- U -

Unbounded	غير محدود
Unbounded interval	مجال غير محدود
Uniformly continous	مستمر بانتظام

- V -

Value	قيمة
Variable	متحول
Vector	شعاع

- Z -

Zero	صفر
Zero element	عنصر صفري

المراجع

1. Apostol. M "Calculus V. I" Blaisdell, New York, 1962.

2. Banach. C "Rachunek Rozni-czkowyi Calkowy" Panstwowe wydawnictwo Naukowe, 1952

3. Esgolts. L "Differential Equation and the calculus of variation." Moscow. 1970

4. Friedman. A "Advanced Calculus" Holt, Rinehart and Winston Inc, 1971

5. Piskunov . N "Differential and Integral Calculus" Moscow Mir . 1969

الفهرس

الفصل السادس

الفصل السابع