المتتاليات

التعبير عن المتتالية

- إعطاء الحد العام u_n بدلالة n: $\boxed{u_n = f(n)}$
- إعطاء صيغة تدريجية: $\boxed{u_0 = \dots \quad u_{n+1} = f(u_n)}$
- سلسلة يعطى u_n بشكل مجموع: $\boxed{u_n = \dots + \dots + \dots}$

دراسة اطراد المتتالية

هنالك أربعة طرق

- **نوجد الفرق** $\boxed{u_{n+1} - u_n}$ ونقارنه مع الصفر
  - أكبر من الصفر ⟸ متزايدة
  - أصغر من الصفر ⟸ متناقصة
  - يساوي الصفر ⟸ ثابتة
- **نوجد النسبة** $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$ ونقارنها مع الواحد
  - أكبر من الواحد ⟸ متزايدة
  - أصغر من الواحد ⟸ متناقصة
  - تساوي الواحد ⟸ ثابتة
  - بشرط: جميع حدود المتتالية موجبة
- **إذا كانت معطاة بالحد العام** $u_n = f(n)$
  - $\boxed{\text{ندرس اطراد التابع } f(x)}$ على المجال $[0, \infty[$
  - فيكون اطراد المتتالية مثل اطراد التابع
- **إذا كانت معطاة بالصيغة التدريجية** $u_{n+1} = f(u_n)$
  - نوجد حدود أو نحسب منها فكرة عنها متزايدة أو متناقصة
  - ثم نثبت اطرادها $\boxed{\text{بالتدريج}}$
  - متزايدة نثبت $u_n \leq u_{n+1}$
  - متناقصة نثبت $u_n \geq u_{n+1}$

الإثبات بالتدريج

لإثبات علاقة من أجل $n \geq n_0$ نستخدم الإثبات بالتدريج وفق:

① العلاقة $E(n)$ هي // تكتب العلاقة المطلوب إثباتها //

② نثبت $E(n_0)$ // التعويض عن المعرفة n بـ n_0 تكون صحيحة //

③ نفرض $E(n)$ صحيحة ونثبت صحة $E(n+1)$ // ننطلق من $E(n)$ لنصل إلى $E(n+1)$ //

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

مواضيع	الحسابية	الهندسية
التعريف	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بإضافة عدد ثابت r نسميه أساس المتتالية $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بضربه بعدد ثابت q نسميه أساس المتتالية $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$
الشرط	$u_{n+1} - u_n = \boxed{r}$ عدد ثابت	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \boxed{q}$ عدد ثابت
الحد العام u_n بدلالة u_0	$\boxed{u_n = u_0 + nr}$	$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$
العلاقة بين حدين u_p , u_m	$\boxed{u_m - u_p = (m-p)r}$ $u_m = u_p + (m-p)r$	$\boxed{\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}}$ $u_m = u_p \cdot q^{m-p}$
مجموع n حد	$\boxed{S = n \cdot \frac{a+\ell}{2}}$ حيث: n عدد الحدود a الحد الأول ℓ الحد الأخير	$\boxed{S = a\frac{1-q^n}{1-q}}$ a: الحد الأول n: عدد الحدود q: الأساس
a,b,c حدود متتالية	$\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$	$\boxed{b = \sqrt{a.c}}$

البحث الثاني

النهايات والاستمرار

@bak 111 التجمع

حالات عدم التعيين

$0.(\infty)$	$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
غالباً اذا وجد $\frac{1}{x}$ نستعمل تغيير المتحول نفرض $\frac{1}{x}=t$	هناك طريقتان ط1: نضرب ونقسم بالمرافق ط2: نخرج عامل مشترك	• نخرج عامل مشترك • نختصر ثم نوجد النهاية	• نضرب البسط والمقام بالمرافق اذا وجد جذر • نحلل البسط والمقام • نختصر ثم نوجد النهاية

مبرهنات الاحاطات

المقارنة	الاحاطات 2	الاحاطات 1
اذا كان $f(x) \geq g(x)$ $\lim g(x) = \infty \Rightarrow \lim f(x) = \infty$ $\lim f(x) = -\infty$ فإن $\lim g(x) = -\infty$	اذا كان $\lvert f(x) - \ell \rvert \leq g(x)$ وكان $\lim g(x) = 0$ عندئذ $\lim f(x) = \ell$	اذا كان $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ وكان $\left.\begin{array}{l} \bullet \lim g(x) = \ell \\ \bullet \lim h(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x) = \ell$

المدرس: أنس [illegible]

$$\boxed{-1 \leq \begin{matrix}\sin x \\ \cos x\end{matrix} \leq 1}$$

$$\boxed{0 \leq \begin{matrix}\sin^2 x \\ \cos^2 x\end{matrix} \leq 1}$$

$$\boxed{x - 1 < E(x) \leq x}$$

نهاية مقدسة

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$$

تذكرة:

- $1 - \cos 2x = 2\cos^2 x$
- $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

المقاربات

المقارب الأفقي

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \boxed{\ell}$$

عدد

$y=\ell$ مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$

المقارب الشاقولي

$$\lim_{x\xrightarrow[<]{>}a} f(x) = \mp\infty$$

$x=a$ مقارب شاقولي

المقارب المائل

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

نحتمل وجود مقارب مائل

• لإثبات أن $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل للخط C نثبت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - y_\Delta\right] = 0$$

إيجاد معادلة المقارب المائل

هنالك ثلاث طرق

تابع كسري $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

• نقسم قسمة اقليدية فيكون

$$f(x) = \underbrace{ax+b}_{y_\Delta} + \frac{c}{h(x)}$$

• فيكون $\Delta: y=ax+b$ مقارب للخط C بجوار $\pm\infty$

لأنه:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{c}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right) = 0$$

تابع جذري $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$

• نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية

$$f(x) = \sqrt{(ax+b)^2 \pm c}$$

• فيكون $\Delta: y = ax+b$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

$\Delta': y = -(ax+b)$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

• نثبت ذلك ....

شكل عام $f(x)$

• نوجد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$

• للتابع f مقارب مائل معادلته من الشكل $y=ax+b$ حيث

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - ax\right]$$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$

الاستمرار

اذا كان f يكتب بشكل فرع واحد

$f(x) = ...$

فهو مستمر على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفه D_f

اذا كان f يكتب بشكل فرعين او أكثر

$$f(x) = \begin{cases} ... & x < a \\ ... & x \geq a \end{cases}$$

ندرس استمرار التابع f عند النقطة a اذا تحقق الشرط

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

حل المعادلات

$f(x) = m$

يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $[a,b]$ اذا تحقق

- f مستمر ومطرد على المجال $[a,b]$
- $m \in f([a,b])$

- يكون الجذر α يقع بين $a < \alpha < b$ اذا كان m يقع بين $f(b), f(a)$

$f(x) = 0$

يكون للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[a,b]$ اذا تحقق

- f مستمر ومطرد على المجال $[a,b]$
- $0 \in f([a,b])$

أو $f(a) . f(b) =$ مقدار سالب

- يكون الجذر α يقع بين $a < \alpha < b$ اذا كان $f(b), f(a)$ من إشارتين مختلفتين

نهاية البحث الثاني

المدرس: أنس درغام

المبحث الثالث :

الاشتقاق

قابلية الاشتقاق عند عدد a

- يكون التابع f قابل للاشتقاق عند العدد a (من مجموعة التعريف) اذا تحقق الشرط

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \underset{\text{عدد}}{\boxed{\ell}}}$$

- نسمي العدد ℓ العدد المشتق ونكتب $f'(a) = \ell$
((المشتق في النقطة a))

تطبيقات الاشتقاق

معادلة المماس

لايجاد معادلة المماس للخط البياني في نقطة منه فاصلتها a

نوجد نقطة التماس $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = f(a) \end{cases}$

نوجد ميل المماس $\boxed{m = f'(a)}$

نعوض في معادلة المماس

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

حيث

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) - f(a)}$$

التقريب الخطي

القيمة التقريبية لـ $f(a+h)$

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \cdot h$$

ايجاد نهاية تابع

اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{0}$

يمكن ازالة حالة عدم التعيين باستخدام العدد المشتق

- نكتب $f(x)$ بالشكل

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

- نوجد $g(x)$ ، $g(a)$ ، $g'(a)$

- نعوض

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \underset{\text{نعوض}}{g'(a)}$$

اطراد تابع

$f'(x) > 0 \Leftarrow$ f متزايد تماماً

$f'(x) < 0 \Leftarrow$ f متناقص تماماً

$f'(x) = 0 \Leftarrow$ قيمة حدية

القيم الحدية

القيم الحدية الصغرى

$f(c)$ قيمة حدية صغرى
يوجد جوار لـ c وهو I يحقق
ومنه $f(c) \leq f(x) \;\; \forall x \in I \cap D_f$

$f'(c) = 0$

القيم الحدية الكبرى

$f(c)$ قيمة حدية كبرى
يوجد جوار لـ c وهو I يحقق
ومنه $f(c) \geq f(x) \;\; \forall x \in I \cap D_f$

$f'(c) = 0$

مناقشة هامة جداً لقابلية الاشتقاق

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

- f قابل للاشتقاق عند a ويقبل مماساً ميله $(m = \ell)$
- اذا كانت $\ell = 0$ يقبل مماساً أفقياً معادلته $y =$

مماس افقي

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$

- f غير قابل للاشتقاق عند a ويقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = a$

مماس شاقولي

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_1$$

f قابل للاشتقاق عند a من اليسار ويقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = \ell_1$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_2$$

f قابل للاشتقاق عند a من اليمين ويقبل نصف مماس من اليمين ميله $m = \ell_2$

نصفي مماس من اليمين ومن اليسار

!!!! تذكر تابع القيمة المطلقة $|x|$ يقبل نقطة زاوية

إثبات متراجحة

مهم جداً

لإثبات صحة متراجحة مثلاً

$$f(x) < g(x)$$

نتبع الخطوات

① ننقل الطرف الصغير إلى الكبير

$$\underbrace{g(x) - f(x)}_{h(x)} > 0$$

② ندرس اطراد التابع $h(x) = g(x) - f(x)$

x		a	
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$h(a)$	$\nearrow$

③ $h(a) = \dots$ قيمة صغرى صفر

$$\therefore\ h(x) \geq h(a)$$

$$h(x) > 0$$

$$g(x) - f(x) > 0$$

$$g(x) > f(x)$$

نتائج هامة جداً

مهمة جداً

① التابع f يبلغ قيمة حدية عند a قيمتها b هذا يعني

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a) = b \quad \text{--- ①} \\ f'(a) = 0 \quad \text{--- ②} \end{array}}$$

② المماس يوازي ox في النقطة (a,b) أفقي هذا يعني

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a) = b \quad \text{--- ①} \\ f'(a) = 0 \quad \text{--- ②} \end{array}}$$

③ المماس للخط c في النقطة (a,b) ميله (m) هذا يعني

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a) = b \quad \text{--- ①} \\ f'(a) = m \quad \text{--- ②} \end{array}}$$

مشتق تركيب تابعين

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال ①

$$(f(\sqrt{x}))' = f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'$$

مثال ②

$$(f(\sin x))' = f'(\sin x) \cdot (\sin x)'$$

«نهاية الاشتقاقات»

المدرس: أنس درغام

البحث الرابع

نهاية متتالية

المتتاليات المحدودة

* نقول أن المتتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الأدنى بالعدد m اذا تحقق الشرط

$$\boxed{U_n \geq m} \rightarrow \text{الحد القاصر}$$

* نقول أن المتتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الأعلى بالعدد M اذا تحقق الشرط

$$\boxed{U_n \leq M} \rightarrow \text{الحد الراجح}$$

* نقول أن المتتالية محدودة اذا كان: $m \leq U_n \leq M$

تقارب المتتاليات

من الشكل $U_n = f(n)$

نوجد نهايتها كما تعلمنا سابقاً إيجاد نهاية تابع $f(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n =$

ونميز حالتين:

- $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \ell$ ← متقاربة نحو العدد ℓ
- $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \pm\infty$ ← متباعدة نحو $\mp\infty$

هندسية أساسها q

نميز ثلاث حالات حسب قيمة الأساس q

- $-1 < q < 1$ ← $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$
- $q > 1$ ← $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \infty$
- $q < -1$ ← ليس لها نهاية

من الشكل $U_{n+1} = f(U_n)$

نثبت أنها متقاربة بإحدى الطريقتين

* إما نثبت انها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة
* أو نثبت انها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة
* وفي الحالتين نهايتها هو الحد ℓ حل المعادلة

$$f(\ell) = \ell$$

ملاحظات !!!

اذا كانت متزايدة وغير محدودة من الأعلى فهي متباعدة نحو $+\infty$

وكذلك اذا كانت متناقصة وغير محدودة من الأدنى فهي متباعدة نحو $-\infty$

المدرس: أنس درغام

منشور ذو الحدين

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

a^n ، t_r الحد ذو الدليل r ، b^n

نتائج

- عدد الحدود $n+1$ والحد الأول a^n والأخير b^n
- الحد ذو الدليل r يعطى بالعلاقة: $t_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

وفي حالة $(a-b)^n$ عندئذ: $t_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r (-1)^r$

نقاط هامة

- إذا طلب الحد الذي يحوي x^9 نوجد t_r ثم نفرض الحد الذي يحوي x^9 يحقق الأس يساوي 9 نحل المعادلة نوجد r ثم نحسب الحد t_r
- إذا طلب الحد الثابت (المستقل عن x) نحل بنفس الطريقة ونفرض الأس يساوي الصفر نوجد r ثم t_r

((n و r أعداد طبيعية))

قوى النسب المثلثية $\cos^n x$, $\sin^n x$

أولر

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$$

لإيجاد $\cos^n x$ أو $\sin^n x$ نستخدم دستورا أولر لـ sin أو cos ثم نوجد $\cos^n x$ أو $\sin^n x$

التابع اللوغاريتمي

مجموعة التعريف

$f(x) = \ln g(x)$

معرف بشرط ما داخل اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر

$\boxed{g(x) > 0}$

ملاحظة:

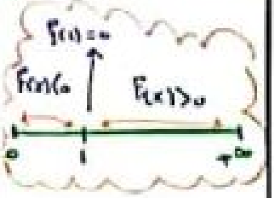
$f(x) = \ln |g(x)|$

معرف على R ماعدا القيم التي تعدم القيمة المطلقة

مجموعة القيم

$f(x) = \ln g(x)$

- $g(x) < 1 \Rightarrow f(x) < 0$ سالب
- $g(x) > 1 \Rightarrow f(x) > 0$ موجب
- $g(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 0$



خواص اللوغاريتم

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln a \lesseqgtr \ln b \Leftrightarrow a \lesseqgtr b$
3. $\ln x = m \Leftrightarrow x = e^m$
4. $\ln a + \ln b = \ln a.b$
5. $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$
6. $\ln a^n = n \ln a$
7. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
8. $\ln \sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$

حل المعادلات والمتراجحات

نميز ثلاث حالات:

$\ln f(x) \gtreqless \ln g(x)$

1. نوجد شرط الحل

$D_1: f(x) > 0$, $D_2: g(x) > 0$

$D = D_1 \cap D_2$

2. نحذف اللوغاريتمات فنحصل على معادلات أو متراجحات نحلها ...
3. نناقش الحل
   - معادلات (مرفوض) (مقبول)
   - متراجحة بالتقاطع مع شرط الحل D

$\ln f(x) \gtreqless m$

1. نوجد شرط الحل D
2. $\ln f(x) \gtreqless m$

$\Rightarrow f(x) \gtreqless e^m$

نحل المعادلات أو المتراجحات ...

3. نناقش الحل ...

غير الشكلين السابقين

1. نوجد شرط الحل ...
2. نستخدم خواص اللوغاريتم لتحويل المعادلات أو المتراجحات إلى أحد الشكلين السابقين
3. نحل ...

المدرس، أنس دغيم

البحث السادس — التحليل التوافقي

التبديل $n!$

- $n! = n(n-2)\cdots\times 1$
- $n! = n(n-1)!$
  $= n(n-1)(n-2)!$
  $= \cdots$
- $0! = 1$
  $1! = 1$

عدد تبديل مجموعة مؤلفة من n عنصراً هو $n!$

الترتيب P_n^r ، $n \geq r$

- $P_n^r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}_{r \text{ مرة}}$
- $P_n^n = n!$
- $P_n^1 = n$

★ لاختيار r عنصراً مختلفاً من مجموعة تحوي n عنصراً (يوجد أهمية للترتيب) العناصر متمايزة نستخدم P_n^r الترتيب

★ لتوزيع أو (ترتيب) r عنصراً مختلفاً على n مكاناً نستخدم P_n^r

التوافيق $\binom{n}{r}$ ، $n \geq r$

- $\binom{n}{r} = \dfrac{P_n^r}{r!}$
- $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2} \Rightarrow$ إما $r_1 = r_2$ أو $r_1 + r_2 = n$

لاختيار r عنصراً من مجموعة تحوي n عنصراً (لا يوجد أهمية للترتيب) العناصر متمايزة نستخدم التوافيق: $\binom{n}{r}$

المدرس: أنس دغيم

المتغير العشوائي

قيم المتغير X

$$X = \{x_1, x_2, x_3 \dots x_i\}$$

قانون الاحتمالي

- $P(X=x_1) = \dots$
- $P(X=x_2) = \dots$
- $\vdots$
- $P(X=x_i) = \dots$

x_i	x_1	x_2	$\dots$ x_i
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\dots$ $P(x_i)$
$x_i P(x_i)$	$x_1 P(x_1)$	$x_2 P(x_2)$	$\dots$ $x_i P(x_i)$

التوقع الرياضي

$$\boxed{E(x) = \sum x_i \cdot P(x_i)}$$

التباين

$$\boxed{V(x) = E(x^2) - (E(x))^2}$$

الانحراف المعياري

$$\boxed{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}$$

المتغيرات العشوائية المستقلة

اذا كان المتغير X والمتغير Y عندئذ جدول القانون الاحتمالي لزوج المتغيرين (X,Y) هو:

X \ Y	y_1	y_2	$\dots$	y_j	قانون X
x_1	$P(x_1 \cap y_1)$	$P(x_1 \cap y_2)$	$\dots$	$P(x_1 \cap y_j)$	$P(x_1)$
x_2	$P(x_2 \cap y_1)$	$P(x_2 \cap y_2)$	$\dots$	$P(x_2 \cap y_j)$	$P(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	$P(x_i \cap y_1)$	$P(x_i \cap y_2)$	$\dots$	$P(x_i \cap y_j)$	$P(x_i)$
قانون Y	$P(y_1)$	$P(y_2)$	$\dots$	$P(y_j)$	1

يكون المتغيران X و Y مستقلان احتمالية اذا تحقق الشرط

$$P(x_i) \cdot P(y_i) = P(x_i \cap y_i)$$

التجارب البرنولية

وإذا كانت التجربة تتكرر n مرة ونريد إيجاد وقوع حدث ما k مرة فالتجربة برنولية

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

حيث

- n عدد مرات تكرار التجربة
- k عدد المرات المطلوبة
- p احتمال وقوع الحدث في المرة الواحدة
- q متمم لـ p $q = 1-p$

التوقع الرياضي

$$\boxed{E(x) = n \cdot p}$$

التباين

$$\boxed{V(x) = n \cdot p \cdot q}$$

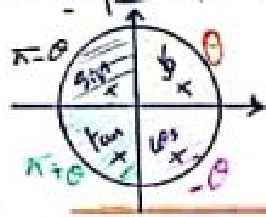
الانحراف المعياري

$$\boxed{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}$$

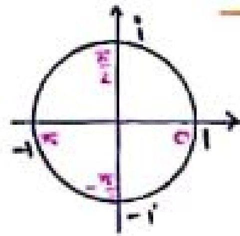
الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي الأسي

$Z = a + ib$

1. نوجد الطويلة r : $r = \sqrt{a^2+b^2}$
2. نخرج r عامل مشترك $Z = r\left[\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right]$ ($\cos\theta$, $\sin\theta$)
3. نستنتج الزاوية θ من الدائرة المثلثية بحسب الربع الواقعة فيه



ملاحظة



$1 = e^{0i}$
$-1 = e^{\pi i}$
$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$
$-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$

ملاحظة

- لإيجاد قسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الأسي أو المثلثي نوجد Z_1 ثم Z_2 ثم نوجد القسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$
- لإيجاد Z^n بالشكل الأسي أو المثلثي نوجد Z ثم نوجد Z^n (دوموافر)

الجذور التربيعية

بالشكل الجبري $\boxed{Z = a + ib}$

1. نفرض الجذر w من الشكل : $\boxed{w = x + iy}$

$w^2 = Z$

2. نكتب العلاقات

حفظ

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ ---- (1)
$x^2 - y^2 = a$ ------ (2)
$x \cdot y = \frac{b}{2}$ -- (3)

3. نحل (1) و (2) حلاً مشتركاً بالجمع نجد $x = \mp$, $y = \mp$
4. من (3) نناقش اشارة x, y فيكون

$x \cdot y > 0$ ⇐ x, y لهما نفس الإشارة
$x \cdot y < 0$ ⇐ x, y من إشارتين مختلفتين

بالشكل الأسي $\boxed{Z = re^{i\theta}}$

1. نفرض الجذر من الشكل $\boxed{w = Re^{i\alpha}}$

$w^2 = Z$

2. نكتب العلاقات

حفظ

$R = \sqrt{r}$
$\alpha = \frac{\theta}{2} + \pi k$

3. نفرض $k=0$ ⇐ $\alpha = \dots$ ⇐ $w_0 = \dots$ الجذر الأول
$k=1$ ⇐ $\alpha = \dots$ ⇐ $w_1 = \dots$ الجذر الثاني

المتحول العشوائي

قيم المتحول X

$$\boxed{X = \{X_1, X_2, X_3 \dots X_i\}}$$

قانون الاحتمالي

- $P(X = X_1) = \dots$
- $P(X = X_2) = \dots$
- $\vdots$
- $P(X = X_i) = \dots$

X_i	X_1	X_2	$\dots$	X_i
$P(X_i)$	$P(X_1)$	$P(X_2)$	$\dots$	$P(X_i)$
$X_i P(X_i)$	$X_1 P(X_1)$	$X_2 P(X_2)$	$\dots$	$X_i P(X_i)$

التوقع الرياضي

$$\boxed{E(x) = \sum X_i \cdot P(X_i)}$$

التباين

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

الانحراف المعياري

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

المتحولات العشوائيان المستقلان

اذا كان المتحول X والمتحول Y عندئذ جدول القانون الاحتمالي لزوج المتحولين (X,Y) هو:

X \ Y	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_i	قانون X
X_1	$P(X_1 \cap Y_1)$	$P(X_1 \cap Y_2)$	$\dots$	$P(X_1 \cap Y_i)$	$P(X_1)$
X_2	$P(X_2 \cap Y_1)$	$P(X_2 \cap Y_2)$	$\dots$	$P(X_2 \cap Y_i)$	$P(X_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
X_i	$P(X_i \cap Y_1)$	$P(X_i \cap Y_2)$	$\dots$	$P(X_i \cap Y_i)$	$P(X_i)$
قانون Y	$P(Y_1)$	$P(Y_2)$	$\dots$	$P(Y_i)$	①

يكون المتحولان X و Y مستقلان احتماليا اذا تحقق الشرط

$$P(X_i) \cdot P(Y_i) = P(X_i \cap Y_i)$$

التجارب البرنولية

واذا كانت التجربة تتكرر n مرة ونريد ايجاد توقع حدوث ما k مرة فالتجربة برنولية

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

حيث

- n عدد مرات تكرار التجربة
- k عدد الحالات المطلوبة
- p احتمال وقوع الحدث في المرة الواحدة
- q متمم p $q = 1 - p$

التوقع الرياضي

$$\boxed{E(x) = n \cdot p}$$

التباين

$$\boxed{V(x) = n \cdot p \cdot q}$$

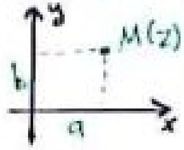
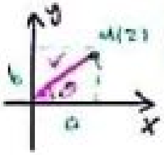
الانحراف المعياري

$$\boxed{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}$$

Scanned by CamScanner

البحث الرابع

الأعداد العقدية $\mathbb{C}$

	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
التمثيل	 $\boxed{Z = a + ib}$ (a الحقيقي $Re(Z)$، b التخيلي $Im(Z)$)	 $\boxed{Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]}$ $\arg(Z) = \theta + 2\pi k$	 $\boxed{Z = re^{i\theta}}$ $\arg(Z) = \theta + 2\pi k$
الطويلة	$\|Z\| = \sqrt{a^2+b^2}$	$\|Z\| = r$ (r حقيقي موجب)	$\|Z\| = r$
المرافق	$\bar{Z} = a - ib$	$\bar{Z} = r[\cos\theta - i\sin\theta]$	$\bar{Z} = re^{-i\theta}$
التساوي	$Z_1 = Z_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$	$Z_1 = Z_2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k \\ r_1 = r_2 \end{cases}$	$Z_1 = Z_2 \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k \\ r_1 = r_2 \end{cases}$
الجمع والطرح	$Z_1 \mp Z_2 = (a_1 \mp a_2) + i(b_1 \mp b_2)$	———	———
الضرب	$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)$ ننشر مع مراعاة $i^2 = -1$	$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ نضرب الطويلات ونجمع السعات	$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
القسمة	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ نقسم الطويلات ونطرح السعات	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
القوة	$Z^n = (a+ib)^n$ ننشر أو مثلث باسكال	$Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ "دستور دموافر"	$Z^n = r^n e^{in\theta}$ "دستور دموافر"

خواص المرافق $\bar{Z}$

1. $Z.\bar{Z} = |Z|^2$
2. اذا كانت $|Z| = 1$ فإن $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$ مهم
3. مهم
   - Z حقيقي $\Leftrightarrow \bar{Z} = Z$
   - Z تخيلي بحت $\Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$
4. $\bar{\bar{Z}} = Z$

$\bar{Z}$ نظير Z بالنسبة لمحور $x'x$

مجموعة النقاط M

لإيجاد مجموعة النقاط M التي تحقق علاقة معطاة

- نفرض $Z = x + iy$
- نعوض في العلاقة فنحصل على علاقة تحوي x و y
- اذا كانت من الدرجة الأولى (مستقيم)
  " " " الثانية ((دائرة))
  بالإتمام إلى مربع نوجد مركزها ونصف قطرها

حل المعادلات

@bak 11 التجمع التعليمي

تحوي $Z, \bar{Z}$

- نفرض $Z = a + ib$
  $\bar{Z} = a - ib$
- نعوض في المعادلة فنحصل على معادلتين بمجهولين a, b
- نحل جملة المعادلتين فنحصل على a, b
  فيكون $Z = a + ib$

من الشكل $aZ^2 + bZ + c = 0$

نوجد $\Delta = b^2 - 4ac$ ونميز ثلاث حالات

- $\boxed{\Delta > 0}$ لها حلان حقيقيان
  $$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
  $$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- $\boxed{\Delta = 0}$ لها حل واحد
  $$Z = \frac{-b}{2a}$$
- $\boxed{\Delta < 0}$ لها حلان عقديان مترافقان
  $$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a}$$
  $$Z_2 = \bar{Z_1}$$

من الشكل $Z^2 = a + ib$

حل المعادلة هو الجذر التربيعي للمقدار $a + ib$

نوجده كما رسمنا سابقاً

البحث الخامس

تطبيقات الأعداد العقدية

قوانين هامة

- كل نقطة $M(x,y)$ تمثل بعدد عقدي: $Z_M = x+iy$
- كل شعاع $\vec{u}(x,y)$ يمثل بعدد عقدي: $Z_{\vec{u}} = x+iy$
- العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A}$$

- طول قطعة مستقيمة AB

$$\boxed{AB = |\overrightarrow{AB}| = |Z_B - Z_A|}$$

- منتصف قطعة مستقيمة AB

$$\boxed{Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}}$$

- مركز ثقل مثلث ABC

$$\boxed{Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}}$$

- مركز الأبعاد المتناسبة (A,α) (B,β) (C,γ)

$$\boxed{Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

الزاوية الموجهة

- $(\vec{u},\vec{v}) = \arg \frac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}$
- $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg \frac{Z_{\overrightarrow{CD}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = \arg \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}$

نتيجة هامة جداً جداً

① لإثبات تعامد مستقيمين AB و CD نوجد الزاوية بين شعاعيهما

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} = \text{تخيلي}$$

$$\Rightarrow \arg \frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}} = \mp \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{AB \perp CD}$$

② لإثبات توازي مستقيمين CD و AB نوجد الزاوية بين شعاعيهما

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} = \text{حقيقي}$$

$$\Rightarrow \arg \frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}} = \begin{cases} 0 \\ \text{أو } \pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{AB \parallel CD}$$

التحويلات الهندسية

① الانسحاب T

M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}$ تمثيله لحقه العقدي b

$$\boxed{z' = z + b}$$

z': الصورة — b: شعاع الانسحاب

② التحاكي H

M' صورة M وفق تحاك مركزه w ونسبته K

$$\boxed{z' - w = K(z - w)}$$

z': الصورة — w: المركز — K: النسبة

③ التناظر المركزي S

M' صورة M وفق تناظر مركزه w

$$\boxed{z' - w = -(z - w)}$$

④ التناظر المحوري محوره oX

M' صورة M وفق تناظر محوره oX

$$\boxed{z' = \bar{z}}$$

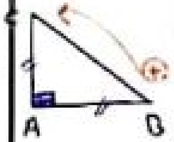
⑤ الدوران R

M' صورة M وفق دوران مركزه w وزاويته θ

$$\boxed{z' - w = e^{i\theta}(z - w)}$$

z': الصورة — w: المركز — θ: الزاوية

مثلثات خاصة بالدوران



① • إذا كان ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A

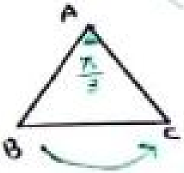
نستنتج:

C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c - a = i(b - a)$$

• أو B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b - a = -i(c - a)$$



② إذا كان ABC مثلث متساوي الأضلاع

C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$c - a = e^{\frac{\pi}{3}i}(b - a)$$

(الوكذلك بالنسبة لـ B و A)

مجموعات نقط

$$\boxed{|z - w| = r}$$

دائرة مركزها w تمثيله العدد العقدي w ونصف قطرها (R)

$$\boxed{|z - a| = |z - b|}$$

محور القطعة المستقيمة AB حيث A تمثيله a و B تمثيلها b

الجذور التكعيبية

لإيجاد الجذر التكعيبي للعدد $Z = re^{i\theta}$

• نفرض الجذر $w = Re^{i\alpha}$

$w^3 = Z$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \sqrt[3]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi k}{3} \end{array}}$$

نفرض $k=0$ نوجد الجذر الأول w_0

نفرض $k=1$ نوجد الجذر الثاني w_1

نفرض $k=2$ نوجد الجذر الثالث w_2

ملاحظات:

حل المعادلة $Z^3 = re^{i\theta}$ هو الجذر التكعيبي للعدد $re^{i\theta}$

نتيجة هامة

* لإثبات ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A نثبت:

طريقة أولى: نوجد النسبة

$$\frac{Z_{AB}}{Z_{AC}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \mp i$$ تخيلي بحت

نأخذ arg:

$\arg \frac{Z_{AB}}{Z_{AC}} = \mp \frac{\pi}{2} \Rightarrow ABC$ قائم في A

نأخذ الطويلة:

$\left|\frac{Z_{AB}}{Z_{AC}}\right| = |\mp i| \Rightarrow \frac{|Z_{AB}|}{|Z_{AC}|} = 1 \Rightarrow |Z_{AB}| = |Z_{AC}|$

$\Rightarrow AB = AC$

متساوي الساقين

طريقة ثانية

نثبت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\pm\frac{\pi}{2}$

فيكون ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A

المدرس: أنس ...

البحث السادس

التابع الأسي

مجموعات التعريف

$$f(x) = e^{g(x)}$$

مجموعة تعريفه هي مجموعة تعريف الأس $g(x)$

مجموعات القيم

$$\boxed{e^{g(x)} > 0}$$

التابع الأسي أكبر تماماً من الصفر دوماً

خواص التابع الأسي

① $e^x \gtrless e^y \Leftrightarrow x \gtrless y$

② $e^x \gtrless m \Leftrightarrow x \gtrless \ln m$

③ $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

④ $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

⑤ $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

⑥ $\left[e^a\right]^b = e^{a \cdot b}$

!!!

$e^x \cdot e^{-x} = 1$

$(e^x)^2 = e^{2x}$

⑦ $\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$ انتبه لها

المدرس: أنس دوخم

حل المعادلات والمتراجحات

الأساس e

① $e^{f(x)} \gtreqless e^{g(x)} \Rightarrow f(x) \gtreqless g(x)$

② $e^{f(x)} \gtrless m \Rightarrow f(x) \gtrless \ln m$

③ $a e^{2x} + b e^{x} + c \gtreqless 0$

• معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول e^x نحلها بالتحليل المباشر أو الـ Δ نوجد e^x ثم نستنتج x

• أو متراجحة بنفس الطريقة ثم نشكل جدول الإشارة ...

الأساس a

① $a^{f(x)} \gtreqless a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \gtreqless g(x)$

② $a^{f(x)} \gtreqless b^{g(x)} \Rightarrow e^{f(x)\ln a} \gtreqless e^{g(x)\ln b}$

$\Rightarrow f(x)\ln a \gtreqless g(x)\ln b$

③ $a a^{2x} + b a^{x} + c \gtreqless 0$

• معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول a^x نحلها ثم نوجد a^x ونستنتج x

• أو متراجحة بنفس الطريقة

دراسة التابع الأسي

النهايات

مصطلحات

$e^{-\infty} = 0$

$e^{\infty} = \infty$

مقدمات

$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

!!!

$e^x > x$

$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

نهاية مميزة

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

اذا كانت $\lim f(x) = 1^{\infty}$ نحن في حالة عدم تعيين نزيلها بالاستفادة من المقدمة

- نكتب f بالشكل $f(x) = \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^n$

نتكون $\lim f(x) = e^n$

الاشتقاق

$f(x) = e^{g(x)}$

$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

مشتقة الأس بالقوة نفسها

f اشتقاقية على كل مجال مستقر من مجموعة تعريفه

التابع الأصلي

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

$f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b}$

$f(x) = u' \cdot e^u \Rightarrow F(x) = e^u$

$f(x) = g(x)\, e^{ax}$

نستخدم التكامل بالتجزئة

$F(x) = \int \underbrace{g(x)}_{u} \underbrace{e^{ax}}_{v'} \, dx$

المعادلات التفاضلية

من الشكل $y' = ay$

الحل العام هو

$y = f_k(x) = k e^{ax}$

من الشكل $y' = ay + b$

الحل العام هو

$y = f_k(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

- اذا طلب منا الحل الذي يحقق شرط المعطى
- نوجد الحل العام ثم نعوض في شرط المعطى لإيجاد (k)
- نوجد k ثم نعوضها في الحل العام

- اذا طلب منا هل إثبات f حلاً للمعادلة
- نوجد $f'(x)$ ثم نعوض $y = f(x)$ و $y' = f'(x)$ في المعادلة التفاضلية اذا كانت محققة فهو حل وغير ذلك فهو ليس حلاً .

14

المدرس: أنس دعاج

البحث السابع

التكامل والتوابع الأصلية

- F تابع أصلي للتابع f $\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
- F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه $\Leftrightarrow F'(x) = G'(x)$ أو $\boxed{[F(x) - G(x)]' = 0}$
- نسمي الخط البياني للتابع الأصلي F ((المنحني المكامل))
- إذا كان $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع f عندئذ $\boxed{F(x) + c}$ تابعاً أصلياً أيضاً لـ f

قواعد التابع الأصلي

التابع الأصلي F	التابع f
$F(x) = ax$	$f(x) = a$
$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$f(x) = x^n$ $n \neq -1$
$F(x) = \ln\lvert x \rvert$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$F(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$F(x) = -\cos x$	$f(x) = \sin x$
$F(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$
$F(x) = \tan x$	$f(x) = 1 + \tan^2 x$
$F(x) = \cot x$	$f(x) = 1 + \cot^2 x$

التابع من الشكل $f(ax+b)$

التابع الأصلي F	التابع f
$F(x) = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$f(x) = (ax+b)^n$ $n \neq -1$
$F(x) = \frac{1}{a} \ln\lvert ax+b \rvert$	$f(x) = \frac{1}{ax+b}$
$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b}$	$f(x) = e^{ax+b}$
$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$f(x) = \sin(ax+b)$
$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$f(x) = \cos(ax+b)$

((الضرب بـ $\frac{1}{a}$))

المدرس: أنس رغبان

التابع الأصلي لتركيب تابعين

$u'_x \cdot f(u_x)$

$f(x) = u' \cdot e^{u} \Rightarrow$ $F(x) = e^{u}$	$f(x) = \frac{u'}{u} \Rightarrow$ البسط مشتق المقام $F(x) = \ln\lvert u \rvert$	$f(x) = u' \cdot u^{n} \Rightarrow$ $F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$f(x) = u' \cdot \sin u \Rightarrow F(x) = -\cos u$

$f(x) = u' \cdot \cos u \Rightarrow F(x) = \sin u$

التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

التكامل بالتجزئة

$$\int_a^b u \cdot v' dx = \left[u \cdot v\right]_a^b - \int_a^b v u'$$

$$\begin{pmatrix} u & \cdots & u' \\ v' & \cdots & v \end{pmatrix}$$

$\int \underset{u}{g(x)} \underset{v'}{\sin x}\, dx$!!!

$\int \underset{u}{g(x)} \underset{v'}{\cos x}\, dx$

$\int \underset{u}{g(x)} \underset{v'}{e^{x}}\, dx$

$\int \underset{v'}{g(x)} \underset{u}{\ln x}\, dx$

تفريق الكسر

اذا f كسر ومقامه من الدرجة الثانية

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

ودرجة البسط أصغر من درجة المقام

نفرق الكسر

① نحلل المقام ونفرق

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{\alpha}{ax+b} + \frac{\beta}{cx+d}$$

② نوحد المقامات ونختزل

$$g(x) = \alpha(cx+d) + \beta(ax+b)$$

③ لإيجاد α نعوض $x = -\frac{a}{b}$

لإيجاد β نعوض $x = -\frac{d}{c}$

نتيجة هامة (تكامل كسر)

البسط مشتق المقام	درجة البسط أكبر أو تساوي المقام	درجة البسط أصغر من المقام
لوغاريتم المقام بالقيمة المطلقة	نجري القسمة الإقليدية ونحول إلى تجزئة	نفرض التفكيك

حساب المساحة والحجم

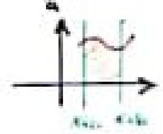
الأستاذ أنس درهم

مساحة الحيز المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|\,dx}$$

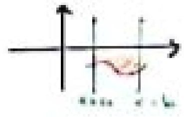
C فوق محور الفواصل

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



C تحت محور الفواصل

$$S=\int_a^b -f(x)\,dx$$



مساحة الحيز المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

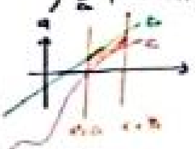
$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)-y|\,dx}$$

C فوق Δ

$$S=\int_a^b f(x)-y\,dx$$

C تحت Δ

$$S=\int_a^b y-f(x)\,dx$$



حجم المجسم الناتج عن دوران الحيز S حول $x'x$ دورة كاملة

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dX}$$

((لأن مقطع المجسم بمستوي عمودي على $x'x$ هو دائرة نصف قطرها $R=f(x)$))