د. برهان

اسم الطالب	
الرقم الجامعي	
رقم الشعبة	
أسم المدرس	

س١ : (أ) أثبت أن $(p \to q) \vee (p \to \neg r) \equiv p \to (r \to q)$. (درجتان)

طريقة الأولى :

$$p \to (r \to q) = \neg p \vee (r \to q)$$
$$= \neg p \vee (\neg r \vee q)$$
$$\equiv \neg p \vee q \vee \neg r$$
$$\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee q \vee \neg r$$
$$\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee \neg r)$$
$$\equiv (p \to q) \vee (p \to \neg r)$$

②

طريقة ثانية :

p	q	r	$\neg r$	$p \to q$	$p \to \neg r$	$r \to q$	$p \to (r \to q)$	$(p \to q) \vee (p \to \neg r)$
T	T	T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

إذاً $p \to (r \to q) \equiv (p \to q) \vee (p \to \neg r)$

(ب) باستخدام الإستقراء الرياضي، أثبت أن $n^2 - 3n \geq 10$ لكل عدد صحيح $n \geq 5$. (ثلاث درجات)

نضع $P(n): \text{"} n^2 - 3n \geq 10 \text{"}$

① * خطوة الأساسية : $n = 5$, $25 - 15 = 10 \geq 10$ إذن $P(5)$ صائب

* خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 5$. نفترض أن $P(k)$ صائب (أي يكون لدينا $k^2 - 3k \geq 10$) فلنثبت أن $P(k+1)$ يبقى صائب.

②

$$(k+1)^2 - 3(k+1) = k^2 + 2k + 1 - 3k - 3$$
$$= k^2 - 3k + 2(k-1)$$
$$\geq 10 + 2(k-1) \geq 10 \quad \text{لأن } k \geq 5$$

فنستنتج أن لكل $n \geq 5$, $n^2 - 3n \geq 10$,

س٢ : (أ) لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة كمايلي:

$$mRn \Leftrightarrow m+n \geq 2$$

بين فيما إذا كانت R انعاكسية، تناظرية، تخالفية، متعدية. (أربع درجات)

1 * R ليست انعكاسية على $\mathbb{Z}$ لأن $0 \not R 0$ (لا تحتوي على العلاقة القطرية)

1 * R تناظرية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $m,n \in \mathbb{Z}$ بحيث mRn فان $m+n \geq 2$ هذا يؤدي الى أن $n+m \geq 2$ إذن nRm،

1 * R ليست تخالفية لأن $3R2$ و $2R3$ لكن $2 \neq 3$.

1 * R ليست متعدية على $\mathbb{Z}$ لأن $0R3$ و $3R1$ لكن $0 \not R 1$.

(ب) لتكن S علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة $A=\{0,1,2,3,4\}$ كمايلي:

$$aSb \Leftrightarrow 3 \text{ يقسم } 2a+b$$

(i) أوجد فصلي التكافؤ [0] و [1]. (درجتان)

$[a] = \{b \in A \ / \ aSb\}$

$[0] = \{b \in A \ / \ 0Sb\} = \{b \in A \ / \ 3 | b\}$

1 $[0] = \{0,3\}$

$[1] = \{b \in A \ / \ 1Sb\} = \{b \in A \ / \ 3 | 2+b\}$

1 $[1] = \{1,4\}$

(ii) كم عدد فصول التكافؤ للعلاقة S؟ علّل إجابتك. (درجة)

عدد فصول التكافؤ للعلاقة S هو 3 .

$[0] = [3] = \{0,3\}$

1 $[1] = [4] = \{1,4\}$

$[2] = \{2\}$.

س٣ : لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	0	1	1
xy'	1	0	0	1
$x'y'$	0	0	0	0
$x'y$	1	1	0	0

(i) اكتب f على شكل CSP. (درجة)

(1)

$$CSP(f) = xyzw + xyz'w' + xyz'w + xy'zw + xy'z'w + x'yzw + x'yzw'.$$

(ii) اكتب f على شكل MSP. (درجتان)

(2)

$$MSP(f) = xw + xyz' + x'yz$$

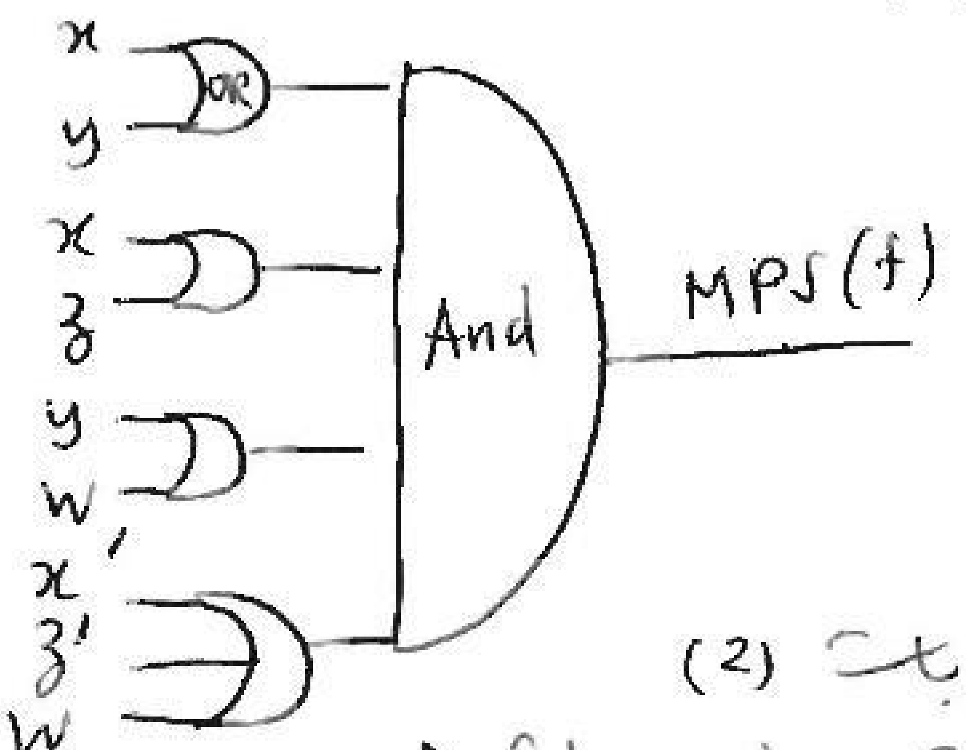
(iii) اكتب f على شكل MPS. (درجتان)

$$MPS(f) = (MSP(f'))'$$

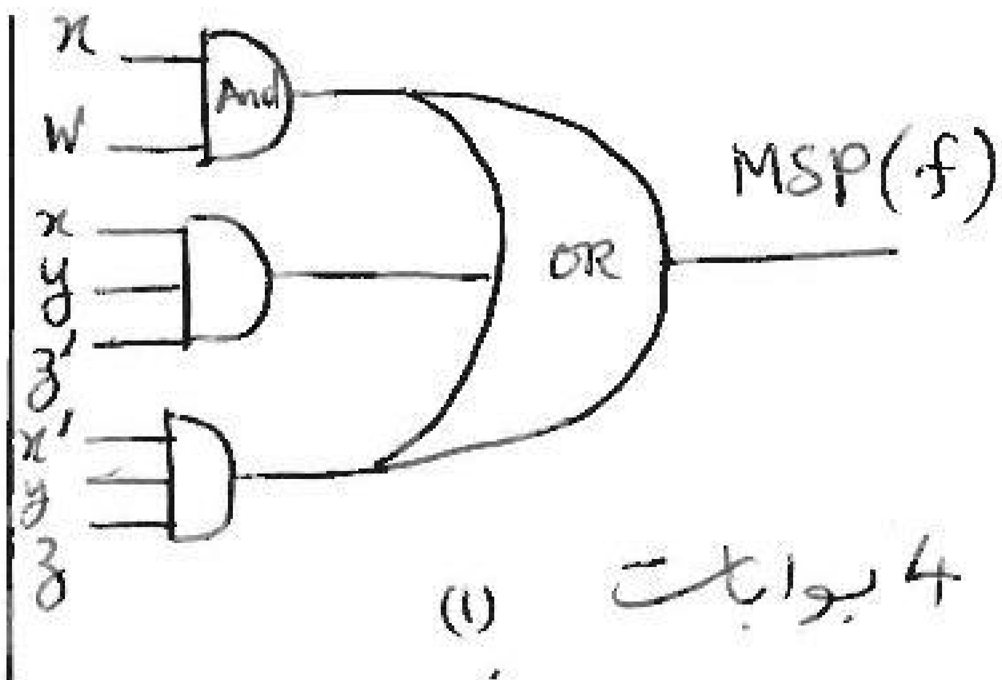
$$MSP(f') = x'y' + x'z' + y'w' + xzw'$$

$$MPS(f) = (x+y)(x+z)(y+w)(x'+z'+w)$$

(iv) صمم شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها الدالة f. (درجة)



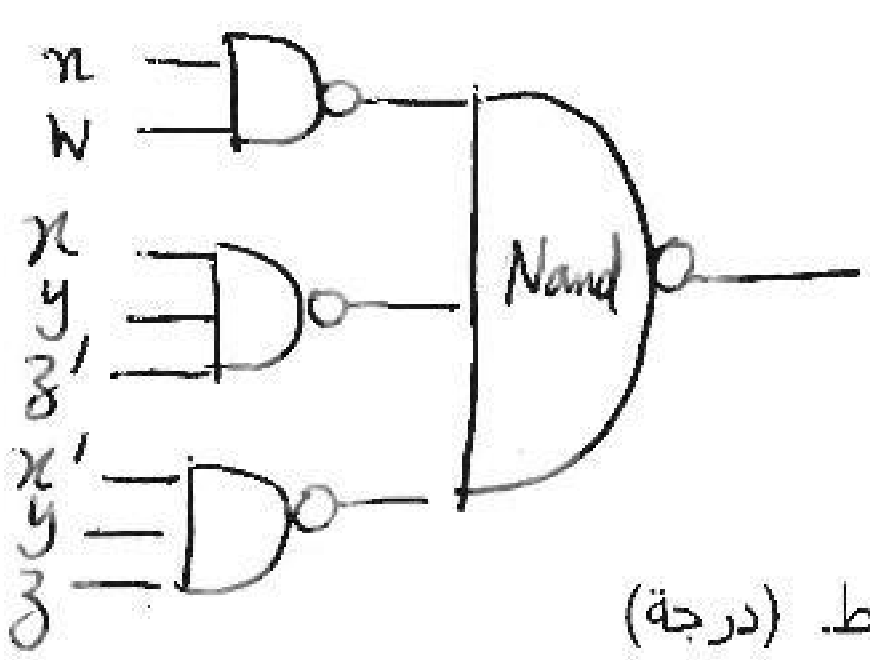
5 بوابات (2)



4 بوابات (1)

الرسم (1) هو شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها f (تحتوي على أقل عدد بوابات)

(v) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة)

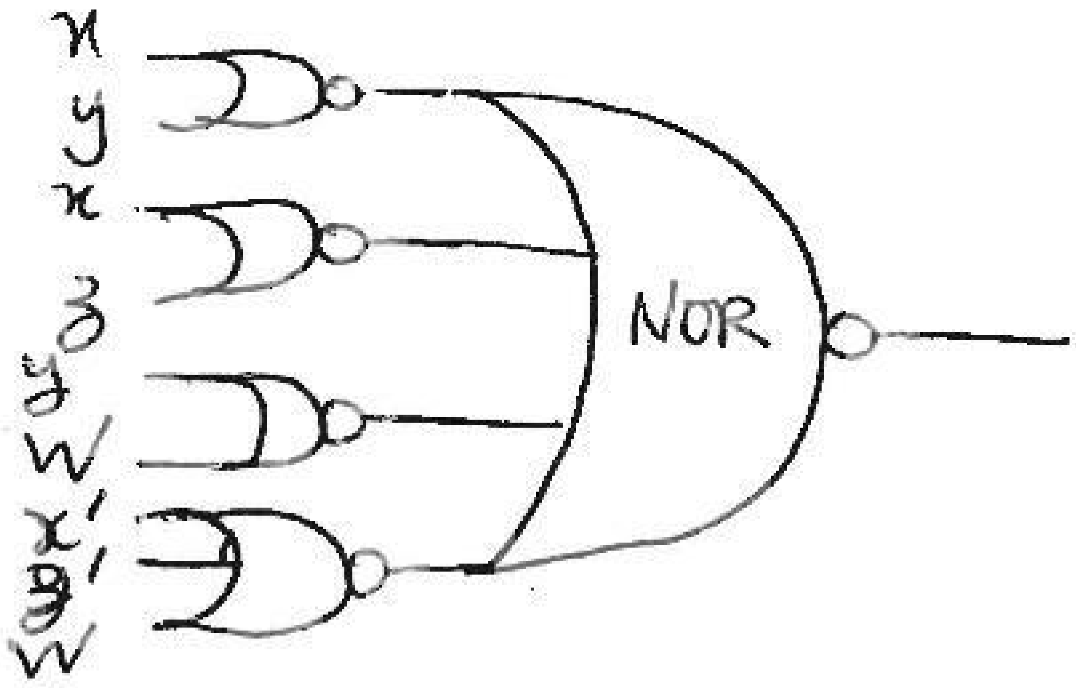


$$MSP(f) = xw + xyz' + x'yz$$

$$= [(xw + xyz' + x'yz)']'$$

$$= [(xw)' \cdot (xyz')' \cdot (x'yz)']'$$

(vi) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة)



$$MPS(f) = (x+y)(x+z)(y+w)(x'+z'+w)$$

$$= [[(x+y)(x+z)(y+w)(x'+z'+w)]']'$$

$$= [(x+y)' + (x+z)' + (y+w)' + (x'+z'+w)']'$$

س٤ : (أ) كم عدد رؤوس الرسم التام الذي عدد أضلاعه 45؟ علل إجابتك. (درجتان)

K_n رسم تام ذات n رأس و عدد أضلاعه هو

$n^2-n-90=0 \Leftrightarrow n(n-1)=90 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}=45$

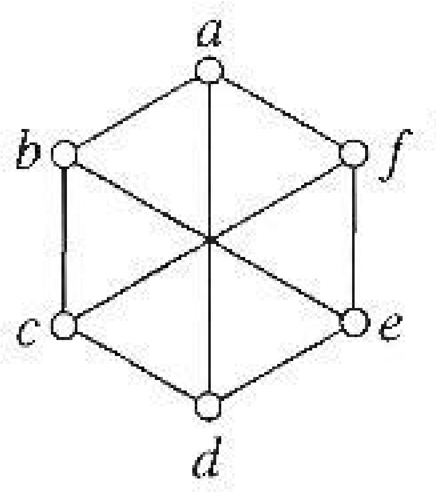
(المميز) $\Delta = 1+4\times 90 = (19)^2$

$n_1=\frac{1-19}{2}$ ↯

$n_2=\frac{1+19}{2}=10$

إذن عدد رؤوس K_n هو 10.

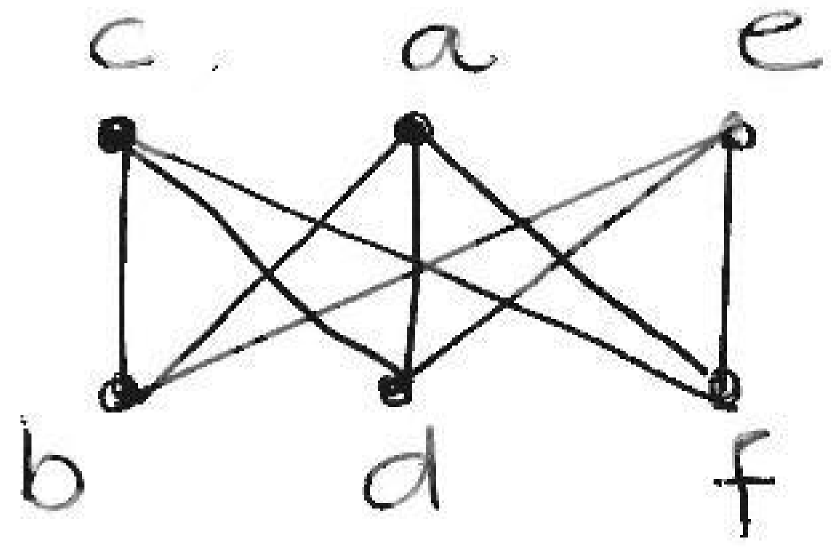
(ب) بين فيما إذا كان الرسم G أدناه ثنائي التجزئة أم لا، وإذا كان ثنائي التجزئة فأوجد تمثيلاً ثنائي التجزئة له. (درجتان)



G

* G لا يحتوي على دورات فردية فهو ثنائي التجزئة.

1



1

$G \cong K_{3,3}$

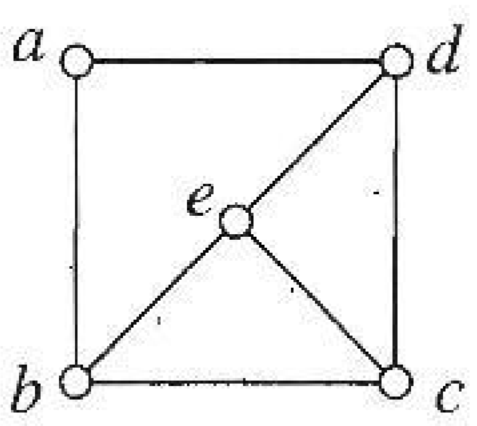
(ج) جد مع التعليل عدد أضلاع الرسم المتمم للرسم $K_{10,14}$. (درجتان)

$(K_{10,14} \cup \overline{K_{10,14}})$ هو رسم تام ذات 24 رأس فإن عدد أضلاعه يساوي $\frac{24\times 23}{2} = 12\times 23 = 276$

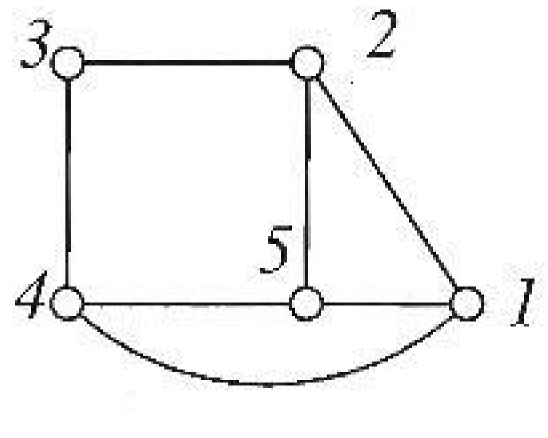
2

و بما أن $K_{10,14}$ له $10\times 14 = 140$ ضلع فإن متمم $K_{10,14}$ له 136 ضلع

(د) بين فيما إذا كان الرسمان H , K أدناه متماثلين. (درجتان)



H



K

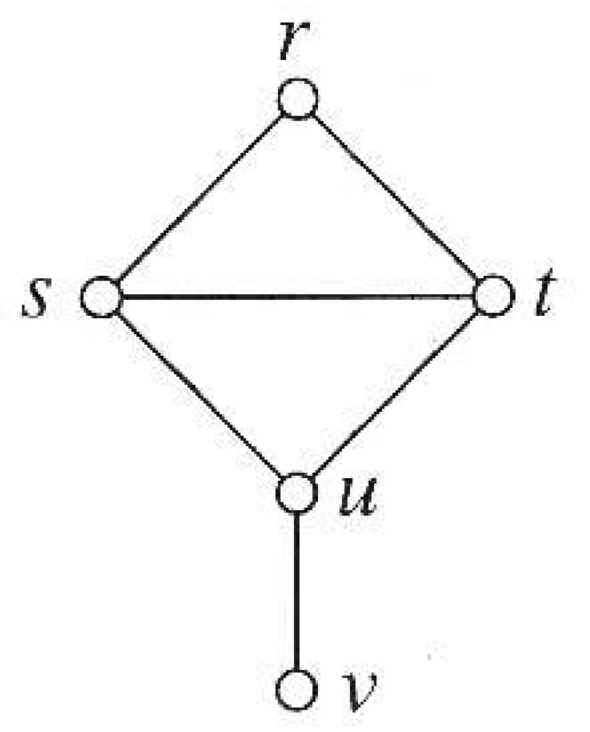
$H \cong K$

لأنه يوجد تطبيق تماثلي f :

2

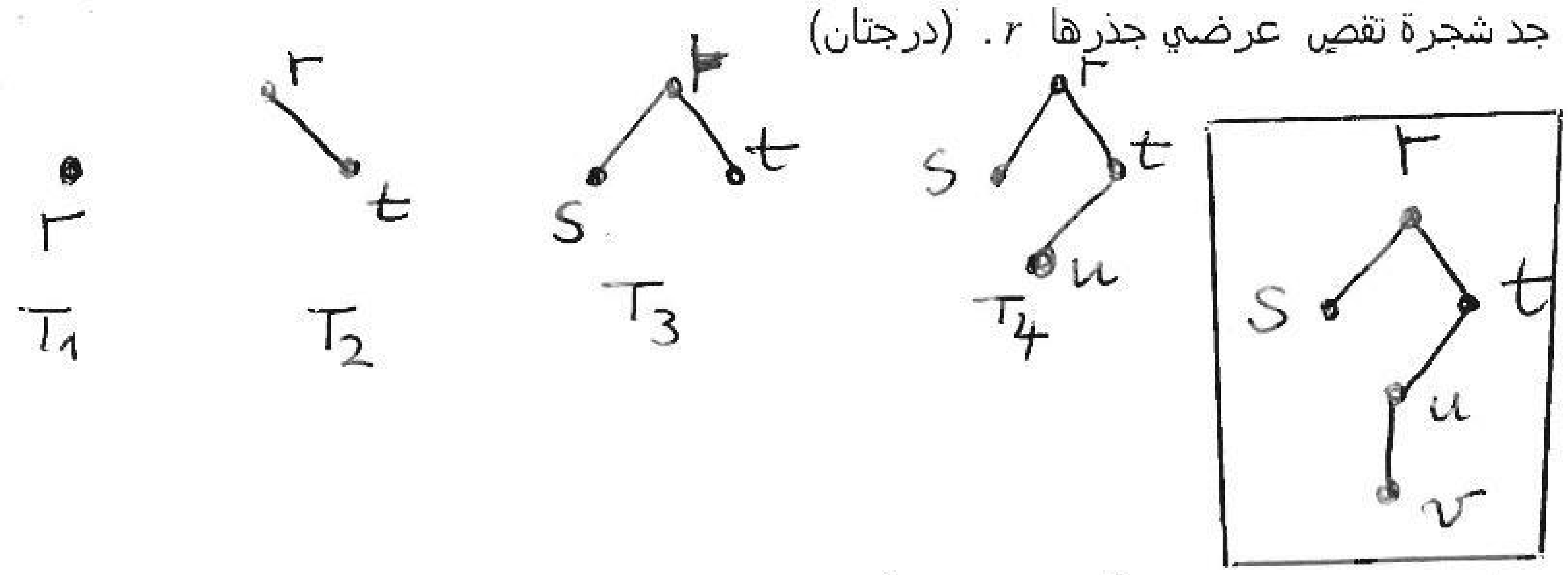
$x \in V(H)$	a	b	c	d	e
$f(x) \in V(K)$	3	4	5	2	1

س٥ : (أ) للرسم L أدناه



L

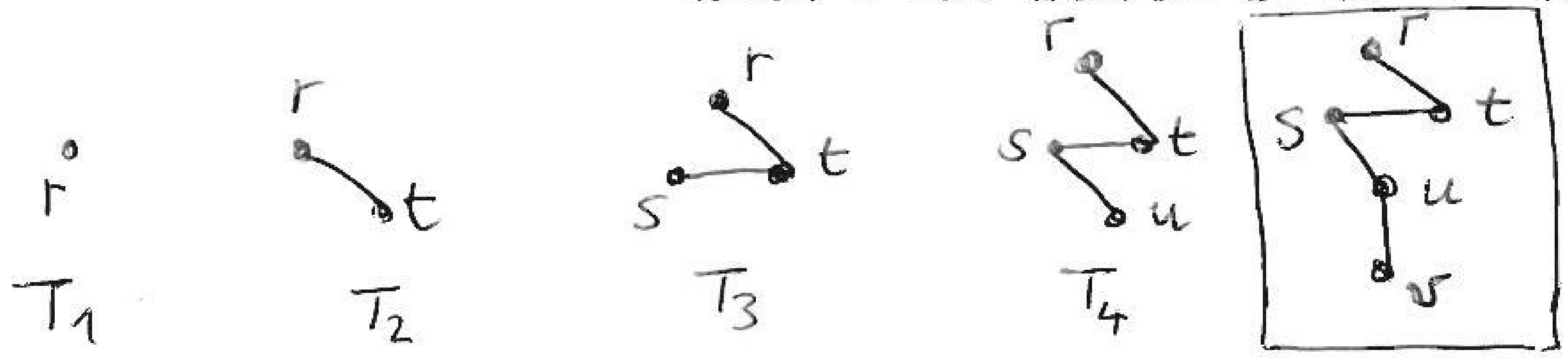
(i) جد شجرة تقص عرضي جذرها r . (درجتان)



2

شجرة تقص عرضي جذرها r

(ii) جد شجرة تقص عمقي (طولي) جذرها r . (درجتان)



2

شجرة تقص عمقي جذرها r

(ب) جد ،مع التعليل، عدد رؤوس الشجرة التي فيها درجة أحد الرؤوس 31 ودرجة كل رأس آخر 1. (درجتان)

T_n شجرة ذات n رأس . فان عدد أضلاعها تساوي $(n-1)$.

بما أن $\sum_{x \in T_n} \deg x = 2|T_n|$

2

$$31 + (n-1)\times 1 = 2(n-1)$$

$$31 = n-1$$

فان $n = 32$

س٦ : بين صحة أو خطأ كل واحدة من العبارات التالية مع التعليل (درجة لكل عبارة)

(i) يوجد رسم ثنائي التجزئة عدد رؤوسه 6 وعدد أضلاعه 10.

لا يوجد رسم ثنائي التجزئة عدد رؤوسه 6 وعدد أضلاعه 10.

لأنه نعلم أن إذا كان $G=(V,E)$ رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n و $|E| > \frac{n^2}{4}$

فإن G لا يمكن أن يكون ثنائي التجزئة.

$10 > \frac{6^2}{4} = 9$

1

(ii) لا يوجد رسم (بسيط) متتالية درجات رؤوسه 1,1,1,2,2,3,5.

نعم.

$$\sum_{x \in V(G)} \deg x = 1+1+1+2+2+3+5 = 15$$

وهو عدد فردي لا يكون مضاعف لعدد صحيح.

1

(iii) يوجد رسم مترابط عدد رؤوسه 15 وعدد أضلاعه 12.

لا. ليكون رسم مترابط ذات 15 رأس لابد على الأقل 14 ضلع.

1

(iv) الرسم K_3 رسم ذاتي التتميم.

لا.

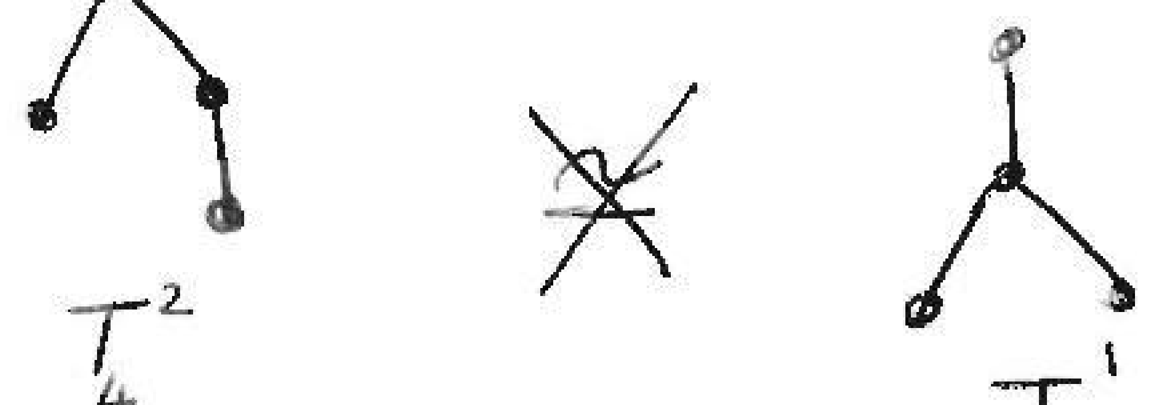
منتظم من نوع 0 $\overline{K_3}$ متممه K_3

$K_3 \not\cong \overline{K_3}$ ليس مشاكل لمتممه

1

(v) كل الأشجار التي عدد رؤوسها 4 متماثلة.

لا،



$T_4^2 \not\cong T_4^1$

شجرتين ذات 4 رؤوس لكن غير متماثلين

(vi) كل شجرة ذات رأسين أو أكثر هي رسم ثنائي التجزئة.

نعم، نعلم أن كل شجرة هي رسم مترابط لا تحتوي على دورات

إذن لا يوجد دورات فردية فهي إذن ثنائي التجزئة.

1