طبقاً للمنهج المطور

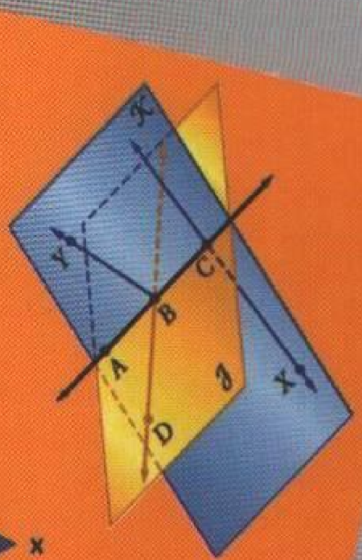
سلسلة سلاح الطالب

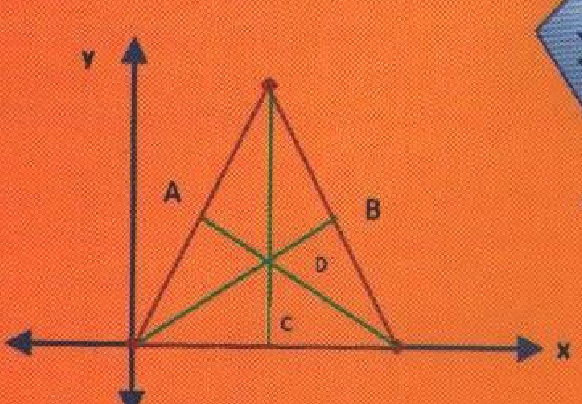
٣

# تبسيط الرياضيات

## للصف الثالث الثانوي
## الفصل الدراسي الأول

بنين - بنات




تأليف

أمجد نعيم

# الفهرس

# الفصل الأول

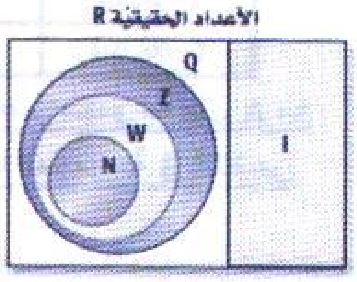
# تحليل الدوال

# (١-١) الدوال

تستعمل الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، الزمن، والمسافة وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

**مفهوم أساسي** **الأعداد الحقيقية**

| الرمز | المجموعة | أمثلة |
| --- | --- | --- |
| Q | الأعداد النسبية | $0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$ |
| I | الأعداد غير النسبية | $\pi, \sqrt{3} = 1.73205...$ |
| Z | الأعداد الصحيحة | $-5, 17, -23, 8$ |
| W | الأعداد الكلية | $0, 1, 2, 3...$ |
| N | الأعداد الطبيعية | $1, 2, 3, 4...$ |




لاحظ :

**يمكن وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، إذا تستعمل الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز "|" حيث ويقرأ الرمز "E" ينتمي إلى أي عنصر في**

$\{x | -3 \leq x \leq 16, x \in Z\}$

**مثال**

**اكتب كلاً من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:**

a) $\{8, 9, 10, 11, ....\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8

$\{x \mid x \geq 8, x \in W\}$

b) $X<7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2<x<7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد عن 2- وتقل عن 7

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

## الفترات المحدودة وغير المحدودة

| فترات محدودة | | فترات غير محدودة | |
|---|---|---|---|
| المتباينة | رمز الفترة | المتباينة | رمز الفترة |
| $a \le x \le b$ | $[a, b]$ | $x \ge a$ | $[a, \infty)$ |
| $a < x < b$ | $(a, b)$ | $x \le a$ | $(-\infty, a]$ |
| $a \le x < b$ | $[a, b)$ | $x > a$ | $(a, \infty)$ |
| $a < x \le b$ | $(a, b]$ | $x < a$ | $(-\infty, a)$ |
| | | $-\infty < x < \infty$ | $(-\infty, \infty)$ |

**تذكر: أن العلاقة هي قاعدة للربط بين كميتين، بحيث ترتبط عناصر مجموعة مثل A مع عناصر من مجموعة مثل B، حيث تسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها.**

### مفهوم أساسي — الدالة

**التعبير اللفظي:** الدالة $f$ من مجموعة $A$ إلى مجموعة $B$ هي علاقة تربط كل عنصر $x$ من المجموعة $A$ بعنصر واحد فقط $y$ من المجموعة $B$.

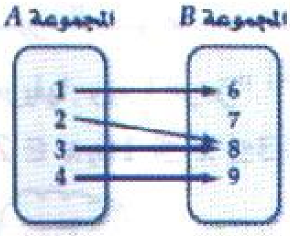
**مثال:** العلاقة من المجموعة $A$ إلى المجموعة $B$ الممثلة في المخطط المجاور تمثل دالة.

حيث تمثل المجموعة $A$ مجال الدالة.

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.

وتتضمن المجموعة $B$ مدى الدالة.

المدى $= \{6, 8, 9\}$.

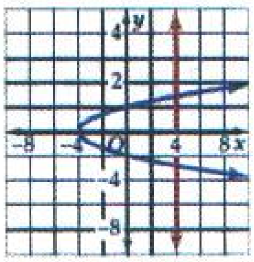



ملاحظة:

يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسياً لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي.

**مثال**

**حدد فيما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:-**




**بما أنه يوجد خط رأسي مثل: x=4 يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن y تمثل دالة في x**

# تدرب وحل المسائل

**اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة و باستعمال رمز الفترة إن أمكن:-**

1. $X > 50$

$(50, \infty)$ $\{x | x > 50, x \in R\}$

2. $X < -13$

$(-\infty, -13)$ أو $\{x | x < -3 , x \in R\}$

3. $X \leq -4$

$(-\infty, -4]$ أو $\{x | x < -4 , x \in R\}$

4. $\{-4, -3, -2, -1, .....)$

$\{x | x \geq -4, x \in Z\}$

5. $x < -19$ أو $X > 21$

$(21, \infty) \cup (-\infty , -19)$

6. $-31 < x < 64$

$(-31, 64)$ أو $\{x | -31 < x < 64, x \in R\}$

7. $x < 6$ أو $X < 67$

$(-\infty, 6) \cup (-\infty, 67)$

8. $x \leq -45$ أو $X > 86$

$(86, \infty) \cup (-\infty, -45]$

9. المضاعفات الموجبة للعدد 5 $\quad x \geq 5$

$\{x | 5x \geq 5 , x \in N\}$

10. $X \geq 32$

$\{x | x \geq 32, x \in R\}$

أو $[32, \infty)$

**في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:**

13. $\frac{1}{x} = y$

$y = \frac{1}{x}$ يمثل دالة $y$ في $x$ لأن $y$ لها قيمة واحدة.

14. $x^2 = y + z$

$Y = x^2 - 2$ ، $y$ تمثل دالة في $x$

15. $x = \sqrt{48 y}$

بتربيع الطرفين

$X^2 = 48 y$ ، $y = \frac{x^2}{48}$ ، $y$ تمثل دالة في $x$

$\frac{x}{y} = y - 6$ .16

$X = y\,(y-6) = y^2 - 6y$

$X = y^2 - 6y$

ليست $y$ دالة في $x$

حيث تأخذ $y$ أكثر من قيمة عند قيمة واحدة لـ $x$

**أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:-**

$g(x) = 2x^2 + 18x - 14$ .19

(a) $g(a)$

$g(a) = 2(9)^2 + 18(9) - 14$

$= 2(81) + 162 - 14$

$= \text{zero} - 14$

$= -14$

(b) $g(3x)$

$g(3x) = 2(3x)^2 + 18(3x) - 14$

$= 2(9x^2) - 18*3x - 14$

$= 18x^2 - 54x - 14$

(c) $g(1+5m)$

$g(1+5m) = 2(1+5m)^2 + 18(1+5m) - 14$

$= 2(1-10m + 25m^2) + 18(1+5m) - 14$

$= 2(1+10m+25m^2)+18+90m-14$

$= 2+ 20m+50m^2+18+90m-14$

$= 50m^2+110m+6$

$h(y) = -3y^3 - 6y + 9$ .20

(a) $h(4)$

$H(4) = -3(4)^3 - 6(4) + 9$

$= -3(64) - 6x4 + 9$

$= -192 - 24 + 9$

$= -216+9$

$= -207$

(b) $h(-2y)$

$h(-2y) = -3(-2y)^3 - 6(2y) + 9$

$= -3(-8y^3) + 12y + 9$

$= 24y^3 + 12y + 9$

(c) $h(5b+3)$

$h(5b+3) = -3(5b+3)^3 - 6(5b+3) + 9$

$= -3\,(5b+3)(25b^2 + 30b + 9) - 30b - 18 + 9$

$= -3(5b+3)(25b^2+30b+9)-30b-9$

$f(t) = \frac{4t+11}{3t^2+5t+1}$ .21

f(-6) (a)

$f(-6) = \frac{4(-6)+11}{3(-6)^2+5(-6)+1} = \frac{-24+11}{3(36)+(-30)+1}$

$= \frac{-13}{108-30+1} = -\frac{13}{79}$

f(4t) (b)

$f(4t) = \frac{4(4t)+11}{3(4t)^2+5(4t)+1} = \frac{16t+11}{3(16t^2)+20t+1}$

$= \frac{16t+11}{54t^2+20t+1}$

f(3-2a) (c)

$f(3\text{-}2a) = \frac{4(3-2a)+11}{3(3-2a)^2+5(3-2a)+11}$

$= \frac{12-8a+11}{3(9+12a+4a^2)+(15-10a)+1} = \frac{23-8a}{27-36a+12a^2+15-10a+1}$

$= \frac{23-8a}{12a^2-46a+43}$

$g(x) = \frac{3x^3}{x^2+x-4}$ .22

g(-2) (a)

$g(-2) = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2+(-2)-4} = \frac{3x-8}{4+8} = \frac{-24x2}{-2} = 12$

g(5x) (b)

$g(5x) = \frac{3(5x)^3}{(5x)^2+(5x)-4} = \frac{3x125x^3}{25x^2+5x-4} = \frac{375x^3}{25x^2+5x-4}$

g(8-4b) (c)

$g(8\text{-}4b) = \frac{3(8-4b)^3}{(8-4b)^2+(8-4b)-4}$

$g(m) = 3 + \sqrt{m^2-4}$ .23

*g(-2) (a)*

$g(-2) = +\,3\sqrt{(-2)^2-4} = 3 + \sqrt{4-4} = 3$

*g(3m) (b)*

$g(3m) = 3+\sqrt{(3m)^2-4} = 3+\sqrt{9m^2-4} = 3+)3m-2)$

*g(4m-2) (c)*

$g(m) = 3+\sqrt{m^2-4}$

$g(4m\text{-}2) = 3+\sqrt{(4m-2)^2-4}$

$= 3+\sqrt{16m^2+16m+4-4}$

$= 3\sqrt{16m^2 - 16m}$

بأخذ $16m$ عامل مشترك من تحت الجذر

$= 3+\sqrt{16m(m-1)}$

$= 3+\sqrt{16m} \times \sqrt{m-1}$

$= 3+ 4\sqrt{m} \times \sqrt{m-1}$

.24 $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$

(a) $t(-4)$

$= 5\sqrt{6(-4)^2} = 5\sqrt{6(36)} = 5\sqrt{216}$

(b) $t(2x)$

$t(2x) = 5\sqrt{6(2x)^2} = 5\sqrt{6(4x)^2} = 5\sqrt{24x^2}$

(c) $t(7+n)$

$t(7+n) = 5\sqrt{6(7+n)^2} = 5\sqrt{6} * 5\sqrt{(7+2)^2} = 5\sqrt{6} * 5(7+n)$

$= 5\sqrt{6} * (35+5n) = 85\sqrt{6} + 25n\sqrt{6}$

إذا مثلت مبيعات شركة للسيارات خلال خمس سنوات بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث $t$ الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول التالي:-

| السنة | المبيعات بملايين الريالات |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 14 |
| 4 | 74 |
| 5 | 219 |

a) أوجد $f(1)$

b) أوجد $f(5)$

c) هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنوات الأولى، أم في السنوات الأخيرة؟ برر إجابتك.

(a) $f(1)$

$f(1) = 24(1)^2 - 93(1) + 78 = 24 - 93 + 78 = 9$

(b) $f(5)$

$f(5) = 24(5)^2 - 93(5) + 78$

$= 24(25) - 93(5) + 78$

$= 600 - 465 + 79 = 213$

**حدد مجال كل دالة مما يأتي:-**

.26 حدد مجال كل دالة: $f(x) = \frac{8x+12}{x^2+5x+4}$

$\{(x \ 1 \ x \neq 1, x \neq -4), x \in R\}$

.27 $g(x) = \frac{x+1}{x^2-3x-40}$

$x^2 - 3x - 40 = (x-8)(x+5)$

$$\{x | x \neq 8, x \neq -5, x \in R\}$$

28. $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$

بما أن $1+a^2$ موجبة دائماً لجميع قيم $a$ فإن $a\in R$ أي المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

29. $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$

$$6 - x^2 \geq 0 \rightarrow -x^2 \geq -6 \rightarrow x^2 \leq 6$$

$$x \leq +\sqrt{6}, \qquad x > -\sqrt{6}$$

أي المجال $(-\infty, \sqrt{6}] \cup (-\sqrt{6}, \infty)$

30. $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a-1}}$

$$4a - 1 \geq 0 \rightarrow 4a > 1 \rightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

$$a \geq \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$$

31. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x+1}$

$$x = 0 \,, x = -1$$

$$\{x1x \neq 0 \,, x \neq -1 \,, x \in R\}$$

32. فيزياء: ويعطي الزمن الدوري $T$ لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9.8}}$ ، حيث $L$ طول البندول، فهل تمثل الدالة $T$ دالة في $L$، إذا كانت كذلك فحدد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبين السبب؟


نعم تمثل دالة

$$\frac{L}{9.8} \geq 0$$

$$L \geq 9.8$$

أي المجال $[9.8, \infty)$

**أوجد f(-5) و f(12)**

33. $$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 \,, & x < 3 \\ -x^3 \,, & 3 \leq x \leq 8 \\ 3x^2 + 1 \,, & x > 8 \end{cases}$$

$$f(-5) = -4x + 3 = -4(-5) + 3 = 20 + 3 = 23$$

$$f(12) = 3x^2 + 1 = 3(12)^2 + 1 = 3(144) + 1 = 433$$

$$f(x)=\begin{cases}-15 & ,x<-5\\ \sqrt{x+6} & ,-5\le x\le 10\\ \frac{2}{x}+8 & ,x>10\end{cases}$$ .34

$f(-5)=\sqrt{x+6}=\sqrt{-5+6}=\sqrt{1}=1$

$f(12)=\frac{2}{x}+8=\frac{12}{2}+8=\frac{1}{6}+\frac{8}{1}=\frac{1+46}{6}=\frac{49}{6}$

.35 تمثل الدالة $T(x)$ أدناه المبلغ (بالريال) الذي تتقاضاه شركة توزيع لأجهزة هاتف محمول:-
حيث تمثل $x$ عدد الأجهزة الموزعة، فاوجد : $T(7000)$ , $T(10000)$, $T(50000)$

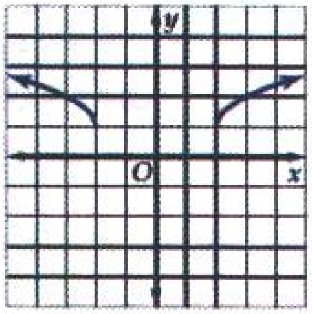
$$T(x)=\begin{cases}2.1x & ,0\le x\le 7000\\ 5000+2.4x & ,7000<x<20000\\ 8000+3x & ,20000<x<80000\end{cases}$$

$T(50000) =$

$$T(50000)=8000+3(50000)$$
$$=158000$$
$$T(10000)=5000+2.4(10000)=29000$$
$$T(7000)==2.1x=2.1(7000)=14700$$

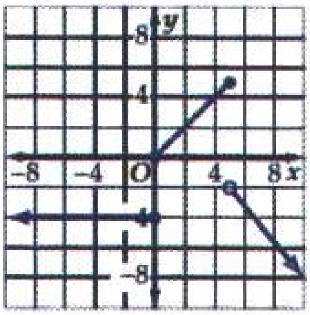
معتمدا على اختبار الخط الرأسي، حدد إذا كان كل من التمثيلين الآتيين يمثل دالة أم لا، وبرر إجابتك.

.36




الرسم البياني يمثل دالة لأن الخط الرأسي يقطع المنحنى في نقطة واحدة فقط.

.37




لا يمثل دالة لأن العنصر صفر في المجال يرتبط بعنصرين في المجال المقابل أي الخط الرأسي يقطع المنحنى في نقطتين عند $x=0$

40. حسابات: تتناقص قيمة بعض المعدات أو الآلات مع مرور الزمن. وتستعمل الدوال الخطية لتمثيل هذا التناقص. فإذا كانت $v(t) = 1800 - 30t$ تمثل قيمة حاسوب بالريال، بعد $t$ شهر من شراءه. فحددّ مجال هذه الدالة.

بما أن الدالة موجبة $v(6)$

$$1800 - 30t \geq 0$$

$$-30t \geq -1800$$

$$30t \leq 1800$$

$$t \leq \frac{1800}{30} = 60 \qquad t \leq 60$$

أي المجال $t \in (-\infty, 60]$

<u>حدد إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:-</u>

50. $x = |y|$

ليست دالة كل عنصر من $x$ يرتبط بعنصرين من $y$ .

مثال: عندما $x=a$ فإن $y=a$ أو $y = -a$

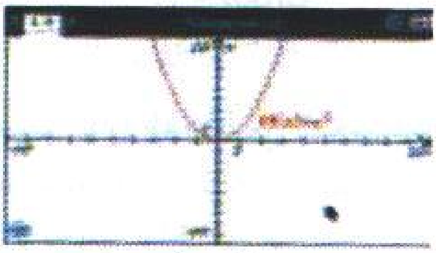
51. $x = y^3$

دالة كل عنصر $x$ يرتبط بعنصر واحد

$$Y = \sqrt[3]{x}$$

52. تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة مدى دالة $f(x) = x^n$, حيث $n \in N$

a) بيانياً: استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = x^n$ بياناياً لقيم $n$ الصحيحة من 1 إلى 6



مدى = $x^2, x^3, x^4$

$= \{x1x \geq 0 \ , x \in N\}$

(b) $f(1)$ ,$f(2)$ , $f(3)$ , $f(4)$

$n = 1, 2, 3, 4.$

| مجال $f(x)$ | مدى $x^n$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |

(c) لفظياً : خمن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون $n$ زوجياً

مدى $= f(x)$

$\{4, 16, 36, 64, \dots\dots\dots\dots\}$

(d) $f(x)$ عندما يكون $n$ فردياً.

$\{1, 9, 25, 49, \dots\dots\dots\dots\}$

53. اكتشف الخطأ: أراد كل من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ . فقال عبد الله أن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (1,1) \cup (2, \infty)$ . على حين قال سلمان أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$ فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

$$x^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

هي الاجابة الصحيحة $\{x \mid x \neq -2 \;, x \neq 2 \;, x \in R\}$ لأن الـ 1 ليس من أصفار المقام

54. اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟

نستخدم طريقة الفترة وذلك بسبب تعدد أصفار المقام

$$x = -3 , \qquad x = -1 \;, x = 5$$

$$\{x \mid x \neq -3 \;, x \neq -1 \;, x \neq 5 \;, x \in R\}$$

$$R - \{-1, -3, 5\}$$

55. تحد: إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(3) = 3$ ، $G(2) = 2$ ، $G(1) = 1$ و $G(x+1) = \frac{GG(x-1)}{G(x)}$ لكل $x>3$، فأوجد $G(6)$.

$$G(60) = ??$$

$$= \frac{(6-2)(6-1)+1}{6} = \frac{10}{6}$$

تبرير: أيُّ الجمل الآتية التي تصف الدالة المعرفة من المجموعة $X$ إلى المجموعة $Y$ بشكل صحيح، وأيها خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة فأعد كتابتها لتصبح صحيحة.

56. يرتبط كل من عنصر من $y$ بعنصر واحد من $x$ $\quad (x)$

57. لا يرتبط عنصران أو أكثر من $x$ بالعنصر نفسه من $y$ $\quad (x)$

58. لا يرتبط عنصران أو أكثر من $y$ بالعنصر نفسه من $x$ $\quad (\surd)$

**بسط كل عبارة مما يأتي:-**

64. $\frac{2r-4}{r-2}$ عامل مشترك الـ 2

$$= \frac{2(r-2)}{(r-2)} = 2$$

65. $\frac{r^2-7r-30}{r^2-5r-24}$

$$= \frac{(r-10)}{(r-8)} = \frac{(r-10)(r+3)}{(r-8)(r+3)}$$

$\frac{y}{4} - \frac{4y}{3x} + \frac{3y}{4x}$ .66

$$= \frac{3x(y)}{12x} - \frac{16y}{12x} + \frac{9y}{12x}$$

$$= \frac{3xy - 7y}{12x} = \frac{-4y}{12x}$$

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{16}}$ .67

نقوم بحل البسط ثم المقام لتسهيل الحل

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{16}}$$

البسط: $\frac{1}{a}+\frac{1}{4} = \frac{4+a^2}{4a}$

المقام: $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{16} = \frac{16-a^2}{16a^2}$

بتجميع البسط والمقام:

القسمة تقلب ضرب ثم نقلب الكسر الموجود في المقام: $\frac{\frac{4+9}{4a}}{\frac{16-a^2}{16a^2}}$

$$= \frac{4+9}{4a} x \frac{16a}{16-a^2}$$

$$= \frac{4+9}{1} x \frac{4a}{16-a^2} = \frac{16a+36a}{16-a^2} = \frac{529}{16-a^2}$$

$\frac{8}{x} = 1 + \frac{8}{x-2}$ .69

$$= 1 + \frac{8}{x-2} - \frac{8}{x} = 0$$

$$= \frac{(x)(x-2)+8x-8(x-2)}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-2x+8x-8x+16}{x(x-2)} = \frac{x^2-2x+16}{x(x-2)} = 0$$

$$x^2 - 2x + 16 = 0$$

معادلة تحل بالقانون العام:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4-4(16)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-15}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{15}$$

**حل المعادلة التالية:**

70. $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

**حل كل من المتباينتين الآتيتين:-**

71. $\frac{x+1}{x-3} - 1 \leq 2$

$$\frac{x+1}{x-3} - 1 - 2 \leq 0$$
$$\frac{x+1}{x-3} - 3 \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x+1}{x-3} \leq 3$$
$$X = 3$$
$$\{x \mid x \leq 3, x \in R\}$$

72. $\frac{6}{x} + 2 \geq 0$

$$\frac{6}{x} + \frac{2}{1} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{6+2x}{x} \geq 0$$
$$X = 0$$
$$\{x \mid x \geq 0 , x \in R\}$$

**73. أي الآتية صحيحة دائما:-**

A الدالة لا تمثل علاقة.

C كل دالة تمثل علاقة.

B كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

(c) كل دالة تمثل علاقة.

**74. أي مما يأتي يمثل مجال الدالة:-**

A $x \neq 5$

C $x \geq \frac{3}{5}, x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

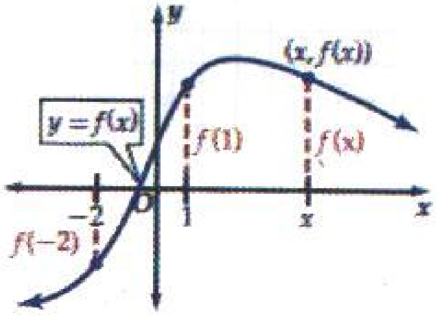
D $x \neq \frac{3}{2}$

(A) $x \neq 5$

# (٢-١) تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

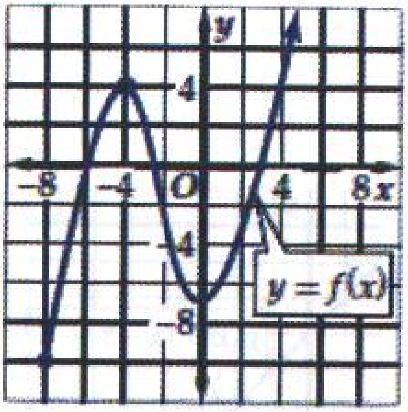
## تحليل التمثيل البياني للدالة

**التمثيل البياني للدالة $f$ هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$، حيث $x$ أحد عناصر مجال $f$.**





أوجد مجال الدالة $f$ ومداها باستعمال التمثيل البياني التالي:

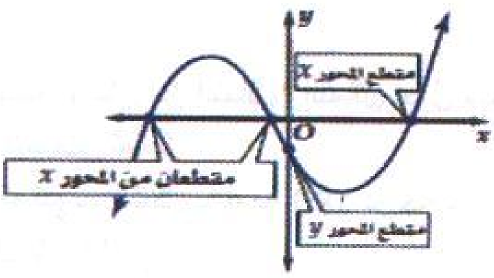



مجال الدالة $f$ هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$ وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو: $\{x \mid -8 \leq x, x \neq -4, x \in R\}$

المدى:

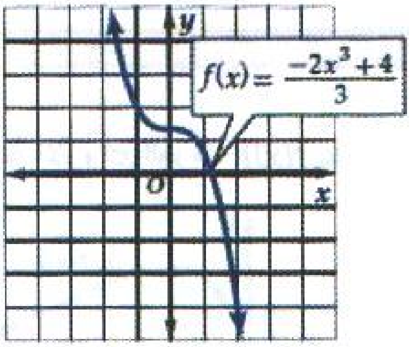
أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو $-10$ وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم $x$ لذا فإن مدى الدالة $f$ هو $[-10, \infty)$

**النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور $x$ أو المحور $y$ تسمى المقطع من ذلك المحور.**
**ويمكن الحصول على المقطع $x$ بتعويض $y=0$ وللحصول على المقطع $y$ فإننا نعوض $x=0$ وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع $x$، وقد يكون هناك مقطع $x$ واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع $y$ فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.**



مثال

**استعمل التمثيل البياني للدالة التالية، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع $y$ ثم أوجده جبرياً:-**




التقدير من التمثيل البياني:

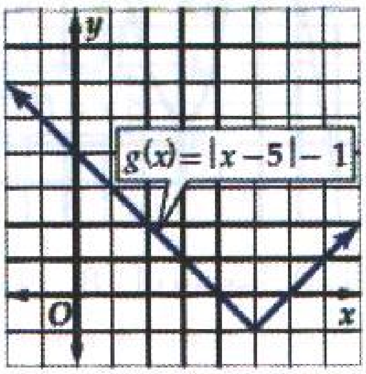
يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور $y$ عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريباً، وعليه فإن المقطع $y$ هو $1\frac{1}{3}$ تقريباً.

الحل جبريا:

أوجد قيمة f(0)

$$f(0) = \frac{-2(0)^3 + 4}{3} = \frac{4}{3}$$

أي أن المقطع y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$




التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور $y$ عند النقطة $(0,4)$ وعليه فإن المقطع $y$ هو $4$.

الحل جبرياً:

أوجد قيمة g(0)

$$g(0) = |0-5| - 1 = 4$$

أي أن المقطع y هو 4

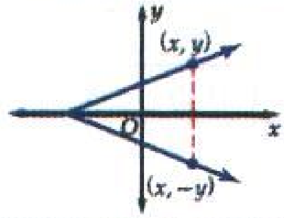
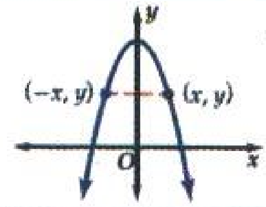
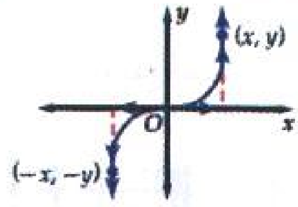
## التماثل:

**يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تماماً.**

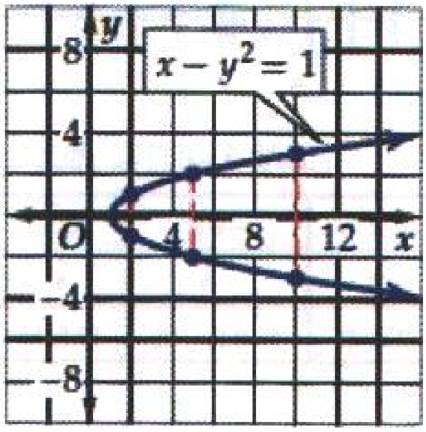
**والتماثل حول نقطة إي إذا تم تدوير الشكل بزاوية 180 درجة حول النقطة فإنه لا يتغير.**

**ويمكن تلخيص أهم أنواع التماثل كالتالي:-**

## مفهوم أساسي — اختبارات التماثل

| اختبار التمثيل البياني | النموذج | الاختبار الجبري |
|---|---|---|
| يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور $x$ ، إذا وفقط إذا كانت النقطة $(x, y)$ واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضاً. |  | إذا كان تعويض $-y$ مكان $y$ يعطي معادلة مكافئة . |
| يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور $y$ ، إذا وفقط إذا كانت النقطة $(x, y)$ واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضاً. |  | إذا كان تعويض $-x$ مكان $x$ يعطي معادلة مكافئة . |
| يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل ، إذا وفقط إذا كانت النقطة $(x, y)$ واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضاً. |  | إذا كان تعويض $-x$ مكان $x$ و $-y$ مكان $y$ يعطي معادلة مكافئة. |

استعمل التمثيل البياني للمعادلة التالية لاختبار التماثل حول المحور x و المحور y و نقطة الأصل. عزز إجابتك عددياً، ثم تحقق منها جبرياً:




$x - y^2 = 1$ (a

التحليل بيانياً:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x، لأنه لكل نقطة (x,y) على المنحنى، فإن النقطة (x, -y) تقع أيضاً على المنحنى.

التعزيز عدديا:

يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x:-

| $x$ | 2 | 2 | 5 | 5 | 10 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | −1 | 2 | −2 | 3 | −3 |
| $(x, y)$ | (2, 1) | (2, −1) | (5, 2) | (5, −2) | (10, 3) | (10, −3) |

التحقق جبريا:

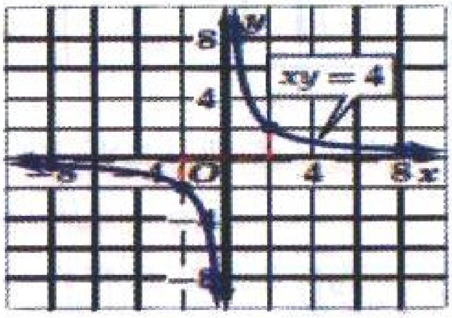
بما أن المعادلة $x - y2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$ فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

$x-(-y)^2 = 1$

b) $xy = 4$

التحليل بيانيا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل، لأنه لكل نقطة (x,y) على المنحنى، فإن النقطة (-x,-y) تقع أيضاً على المنحنى.




التعزيز عدديا:

يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول نقطة الأصل:

| $x$ | −8 | −2 | −0.5 | 0.5 | 2 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −0.5 | −2 | −8 | 8 | 2 | 0.5 |
| $(x, y)$ | (−8, −0.5) | (−2, −2) | (−0.5, −8) | (0.5, 8) | (2, 2) | (8, 0.5) |

التحقق جبريا:

بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$ فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

## أنواع الدوال:

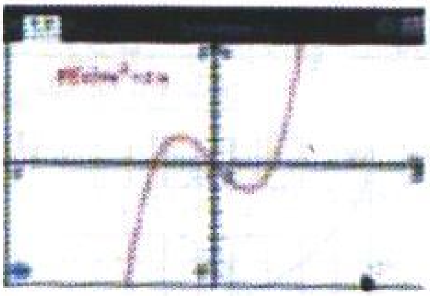
**مفهوم أساسي** — **الدوال الزوجية والدوال الفردية**

| نوع الدالة | الاختبار الجبري |
|---|---|
| تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور $y$ الدوال الزوجية. | لكل $x$ في مجال $f$، فإن $f(-x) = f(x)$. |
| تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية. | لكل $x$ في مجال $f$، فإن $f(-x) = -f(x)$. |

مثال

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانيا: ثم حل منحناها لتحدد ان كانت الدالة زوجية أم فردية ثم تحقق من إجابتك جبريا. وان كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها:-

$f(x) = x^3 - 2x$ (a



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(x)$

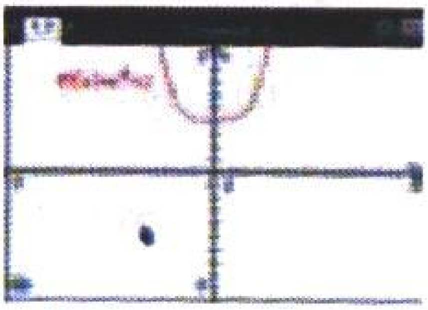
$= -x^3 + 2x$

$-(x^3 - 2x) =$

$= -f(x)$

أي أن الدالة فردية لأن $f(-x) = -f(x)$

$g(x) = x^4 + 2$ (b



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y وللتحقق من ذلك جبريا نجد:-

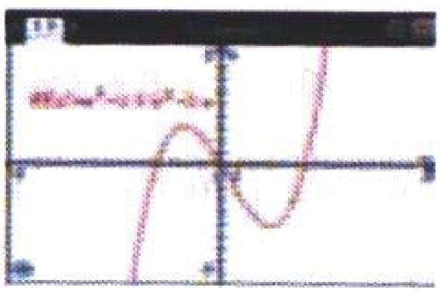
$g(-x) = (-x)^4 + 2$

$= x^4 + 2$

$= g(x)$

أي أن الدالة زوجية، لأن $g(-x) = g(x)$

$h(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$ (c



يظهر التمثيل البياني أن الدالة قد تكون متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبرياً نجد:

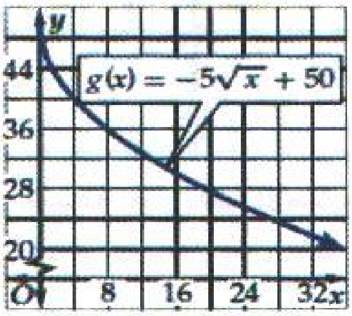
بما أن $h(-x) = (-x)^3 - 0.5\left(-x\right)^2 - 3(-x)$ فإن $-h(x) = -x^3+0.5x^2+3x$

$h(-x) \neq h(x)$ وكذلك $h(-x) \neq h(x)$ لذلك هي ليست دالة فردية ولا زوجية.

## تدرب وحل مسائلك

**استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقق من إجابتك جبرياً، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:**

(1




a) $g(6)$ b) $g(12)$ c) $g(19)$

.1 $g(x) = -5\sqrt{x} + 50$

(a) $g(6)$

$$g(6) = -5\sqrt{6} + 50$$

(b) $G(12)$

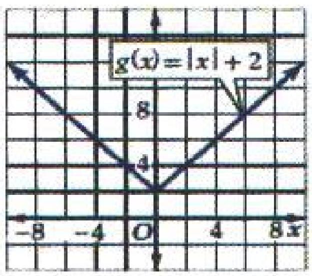
$$G(12) = -5\sqrt{12} + 50$$

(c) $g(19)$

$$g(19) = -5\sqrt{19} + 50$$

.2 $g(x) = |x| + 2$

(2




a) $g(-8)$ b) $g(-3)$ c) $g(0)$

(a) $g(-8)$

$$|-8| + 2 = 8 + 2 = 10$$

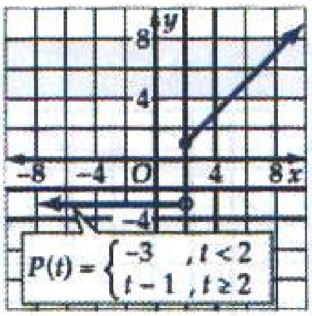
(b) $g(-3)$

$$g(-3) = |-3| + 2 = 3 + 2 = 5$$

g(0) (c)

$$g(0) = |0| + 2 = 2$$

(3




P(9) (c P(2) (b P(−6) (a

$$P(t) = \begin{cases} -3 & ,t < 2 \\ t - 1 & ,t \geq 2 \end{cases}$$ .3

P(-6) (a)

$$P(-6) = -3$$

P(2) (b)

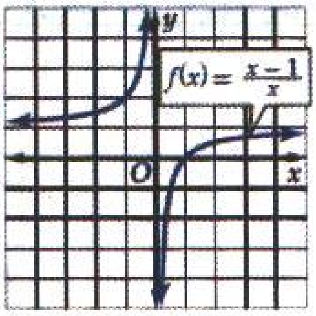
$$t - 1 = 2 - 1 = 1$$

P(9) (c)

$$t - 1 = 9 - 1 = 8$$

$f(x) = \frac{x-1}{x}$ .4

(4




f(0) (c f(0.5) (b f(−3) (a

f(-3) (a)

$$f(-3) = \frac{-3-1}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

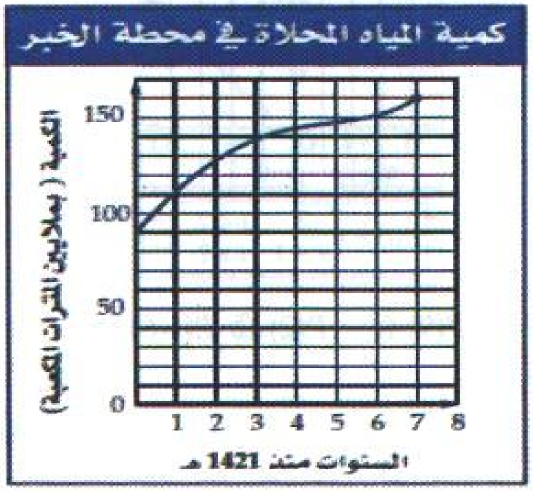
f(0.5) (b)

$$f(0.5) = \frac{0.5-1}{0.5} = \frac{-0.5}{0.5} = -1$$

f(0) (c)

$$f(0) = \frac{0-1}{0} = -\frac{1}{0} \notin R$$

5. إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة ( 1421 هـ إلى 1428هـ) معطاة بالدالة $f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 25.35x + 88.27$ حيث $x$ رقم السنة منذ 1421 هـ.




قدر كمية المياه المحلاة في سنة 1425 باستعمال التمثيل البياني:-

$$0.0509(5)^4 - 0.3395(5)^3 - 25.35(5) + 88.27$$

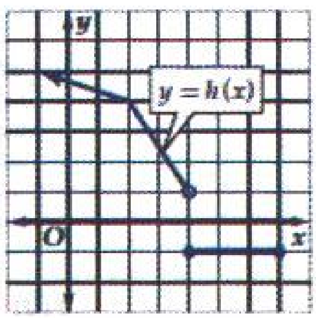
(c) قدر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون لتر مكعب باستعمال التمثيل البياني:- من الرسم البياني تصدر أن في سنة 1422 كانت كمية المياه المحلاة 30 مليون لتر وللتأكد جبرياً:

$$f(2) = 0.0509(2)^4 - 0.3395(2)^3 - 25.35(2) + 88.27$$

$$= 131.4 = 130$$

**استعمل التمثيل البياني للدالة h في كل مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها.**

(9




(70 , 7)

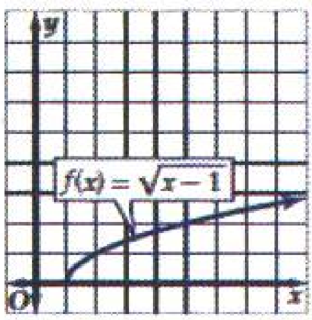
(25 , 1.7)

مجال = (25, 70)

المدى = (1.7, 7)

**استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، لإيجاد مقطع المحور y وأصفار الدالة، ثم أوجد هذه القيم جبرياً:**

(11




يتضح من الشكل البيانية أن $f(x)$ لا يقطع المحور الصادي عند أي نقطة ولكن يمكن إيجادها جبرياً عبر حساب $f(0)$ للدالة:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$f(0) = \sqrt{0-1} = \sqrt{-1} \notin R$$

لأنه لا يوجد عدد سالب له جذر بالتالي المقطع الصادي غير موجود.
لإيجاد أصفار الدالة نلاحظ من التمثيل البياني أن مقطع محور x هو 1
والحل جبريا إيجاد f(x)=0

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

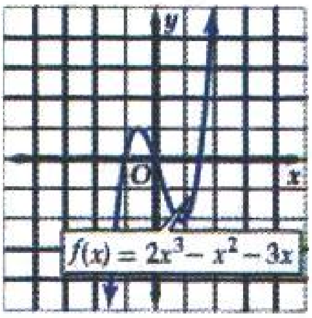
$$F(x) = 0$$

بتربيع الطرفين $F(x) = \sqrt{x-1} = 0$

$$x-1 = 0$$

وهذا صفر الدالة $x = +1$

(12




لإيجاد مقطع المحور y جبريا نجد قيمة
f(0)

$$F(x) = 2x^3 - x^2 - 3x$$

$$F(0) = 2 * (0)^3 - (0)^2 - 3 * 0$$

$$F(0) = 0$$

نلاحظ من التمثيل البياني أن الدالة تقطع المحور الصادي عند النقطة صفر

- لإيجاد أصفار الدالة = f(x)

$$2x^3 - x^2 - 3x = 0$$

نأخذ x عامل مشترك $x(2x^2 - x - 3) = 0$

$$X = 0 \quad \text{or} \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

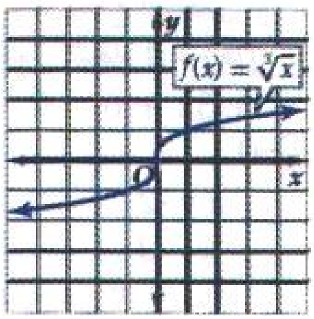
$$(2x-3)(x+1)$$

$$X = 0 \qquad 2x-3=0 \qquad x = \frac{3}{2}$$

$$X+1 = 0 \qquad x = -1$$

أصفار الدالة $0, \frac{3}{2}, -1$

(13




لإيجاد مقطع المحور y نجد جبريا f(0)

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

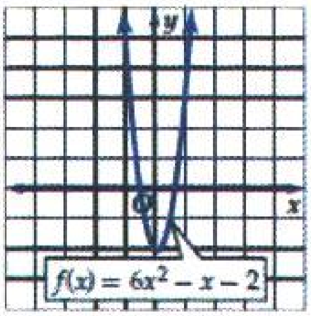
$$f(0) = \sqrt[3]{0} = 0$$

لإيجاد أصفار الدالة نجد $f(x) = 0$

$$X = 0$$

أصفار الدالة صفر.

(14




مقطع $y$ جبريا هو 2- وذلك عبر إيجاد $f(0)$

أصفار الدالة $f(x) = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

$$(3x - 2)(2x + 1) = 0$$

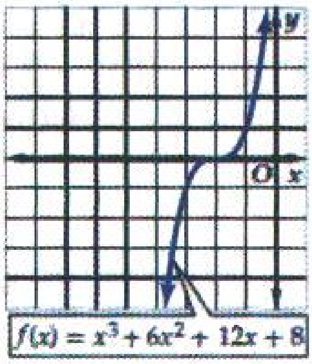
$$2x + 1 = 0 \qquad x = \frac{2}{3}$$

$$2x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$$

إذن أصفار الدالة هي $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$

بيانيا نلاحظ أن الدالة تقطع المحور الصادي عند نقطة 2- من خلال الرسم البياني.

(15




المقطع $y$ للدالة

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

نجدها جبريا عبر إيجاد f(0)

$$f(0) = (0)^3 + 6x(0)^2 + 12x0 + 8$$

إذن المقطع y هو 8 $\qquad$ f(0) =8

أصفار الدالة جبريا عبر إيجاد f(x) = 0

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$

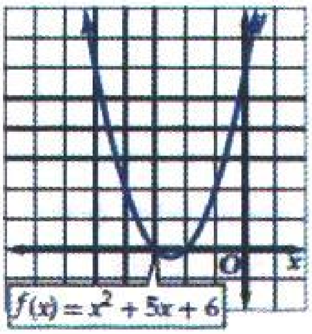
$$x^3 + 6x^2 + 12x = -8$$

$$x(x^2 + 6x + 12) = -8$$

X= -8 $\qquad$ or $\qquad$ $x^2+6x+12=-8$

نحلها عبر إكمال المربع.

(16




لإيجاد مقطع $y$ جبريا $f(0)$

$F(x) = x^2+5x+6$

$F(0) = (0)^2+5x0+6$

$F(0) = 6$

إذن الدالة تقطع المنحنى $y$ عند النقطة 6

لإيجاد أصفار المقام $f(x) = 0$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$(x+2)(x+3)=0$

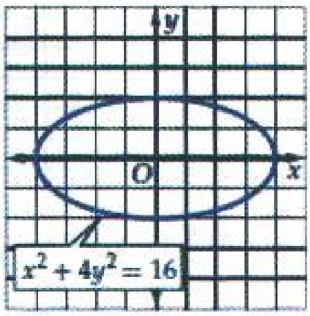
$X+2 = 0 \qquad x = -2$

$X+3 =0 \qquad x= -3$

أصفار الدالة هي 3- ,2-

أي أن الدالة تقطع المحور السيني عند النقطتين 2-، 3-

**استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزز إجابتك عددياً، ثم تحقق منها جبرياً:**

17) 


يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول محورين $y, x$ لأنه كل نقطة $(x, y)$ على المنحنى تقع أيضاً $(x, -y)$ وكذلك متماثل حول $y$ لأن كل نقطة $(x, y)$ أيضاً هي $(-x, y)$ تقع على المنحنى.

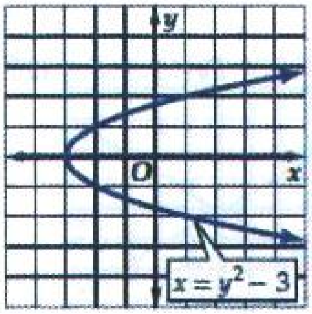
- التعزيز عددياً:

| x | 0 | 1 | 2 | -1 | -2 | 3 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1.9 | 1.7 | 1.9 | 1.7 | 1.3 | 1.3 |
| (x,y) | (0,2) | (1, 1.9) | (2, 1.7) | (-1, 1.9) | (-2, 1.7) | (3, 1.3) | (-3, 1.3) |

- التحقق جبرياً:

بما أن المعادلة $x^2+4y^2=16$ تكافئ $x^2-(-)4y^2=16$ إذن متماثل حول المحور x.

وبما أن المعادلة $x^2+4y^2=16$ تكافئ $(-x)^2+4y^2=16$ إذن متماثل حول المحور y.

18) 


يتضح من الشكل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x وذلك لأن كل نقطة $(x, y)$ وكذلك النقطة $(x, -y)$ واقعة على نفس المنحنى

التعزيز عددياً:

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | -1 | -2 | -3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 2 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 | 3 | 1.4 | 1 | 0 |
| (x,y) | (1,2) | (2, 2.2) | (3, 2.4) | (4, 2.6) | (5,2.8) | (6,3) | (-1,1.4) | (-2,1) | (-3,0) |

التحقق جبرياً:

بما أن المعادلة $x= y^2-3$ تكافئ المعادلة $x= (-y)^2-3$ إذن المنحنى متماثل حول المحور x

(19


يتضح بيانياً أن المنحنى حول نقطة الأصل وذلك لأن كلاً من النقطة $(-x,y)$ وكذلك $(x,-y)$ تقعان على نفس المنحنى.

التعزيز عدديا عبر فرض قيم لـ $x$ وإيجادها في $y$:-

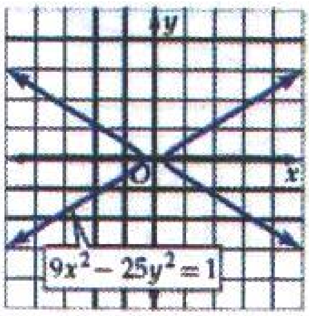
| x | 1 | 2 | 3 | -1 | -2 | -3 | 0 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -1 | -2 | -3 | 1 | 2 | 3 | 0 | -4 |
| (x,y) | (1,-1) | (2,-2) | (3,-3) | (-1,1) | (-2,2) | (-3,3) | (0,0) | (4,-4) |

نلاحظ عند القيمة مثلا $x=3$ كانت قيمة $y$ تساوي $3$- إذن التماثل يكون حول نقطة الأصل.

التحقق جبريا:

بما أن $f(-x)$ يكافئ $-f(x)$ إذن التماثل حول نقطة الاصل.

(20




نلاحظ من التمثيل بيانياً أن المنحنى متماثل حول المحور $x$.

- التعزيز عدديا:

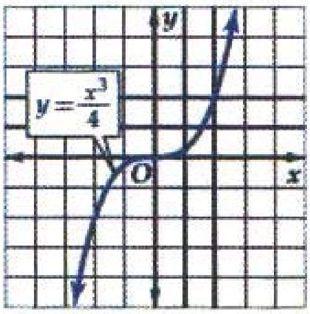
| x | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 1.1 | 2.3 | 2.9 | 4.1 | 5.3 |
| (x,y) | (2,1.1) | (4,2.3) | (5,2.9) | (7,4.1) | (9,5.3) |

- التحقق جبريا:

المعادلة $9x^2 - 25y^2 = 1$ تكافئ المعادلة $9x^2 - 25(-y)^2 = 1$

إذن المنحنى متماثل حول المحور $x$.

(21




$X= 1, 2, 3, 4$

$X= 1 \rightarrow y=\frac{1}{4} \quad ,\left(1,\frac{1}{4}\right)$

$X= 2 \rightarrow y=\frac{8}{4}=2 \quad ,(2,2)$

$X= 3 \rightarrow y=\frac{27}{4} \quad \left(3,\frac{27}{4}\right)$

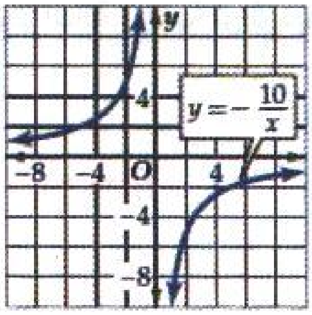
$X= 4 \rightarrow y=\frac{64}{4}=16 \rightarrow (4,16)$

تماثل حول نقطة الأصل

التعزيز عدديا:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1/4 | 2 | 27/4 | 16 |
| (x,y) | $(1,\frac{1}{4})$ | (2,2) | $(3,\frac{27}{4})$ | (4,16) |

(22




$X= 0, 1, 2, 3, 4$

$Y=\frac{-10}{0}=0$

$X= 1$

$\rightarrow y=-\frac{10}{1}=$

$-10 \quad ,(1,-10)$

$X=2$

$\rightarrow y=-\frac{10}{2}=-5 \quad ,(2,-5)$

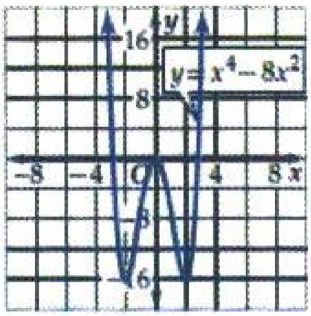
$X=3$

$\rightarrow y=-\frac{10}{3}=-3\frac{1}{3} \quad ,\left(3,-3\frac{1}{3}\right)$

$X= 4 \rightarrow y=-\frac{10}{4} \rightarrow \left(4,-2\frac{2}{4}\right)$

تماثل حول نقطة الأصل.

(23




*X= 1, 2, 3, 4*

$y = 1 - 8(1) = -7 \qquad (1, -7)$

$y = 1 - 8(4) = 64 - 32$

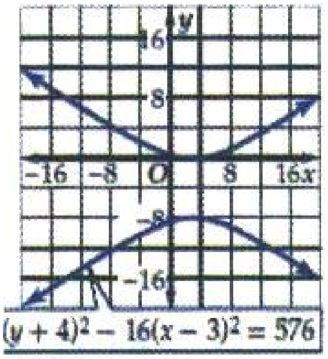
$= 32 \qquad (2,32)$

$y = 1 - 8(9) = 27 - 72$

$= -45 \qquad (3, -45)$

تماثل حول محور y

(24




*X= 1, 2, 3, 4*

*X= 1* $\rightarrow (y + 4)^2 - 16(1 - 3)^2 =$

$576$

$(y + 4)^2 - 16(4) = 576$

$(y + 4)^2 = 65 + 576 = 640$

$(y + 4)^2 = 640 \qquad \rightarrow y + 4 = \sqrt{640}$

$y + 4 \approx 25 \rightarrow y = 25 - 4 = 21$

*(1, 21)*

تماثل حول محور السينات x

**استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيا، ثم حلل منحناها لتحدد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريا. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها:**

*f(x)* = $x^2 + 6x + 10$ .25

*f(-x)* = $(-x)^2 + 6(-x) + 10 = x^2 - 6x + 10$

*f(x)* فردية لأن *-f(x) = f(-x)*

*f(x)* = $-2x^3 + 5x - 4$ .26

*f(-x)* = $-2(x)^3 + 5(-x) - 4$

$= -2(-x)^3 - 5(x) - 4 = 2x - 5x - 4$

$-3x - 4 = -(3x + 4) = -f(x)$

دالة غير زوجية ولا فردية

*g(x)* = $\sqrt{x + 6}$ .27

$g(-x) = \sqrt{-x + 6} - (\sqrt{x} - 6) \neq -f(x)$

الدالة لا زوجية ولا فردية.

*h(x)* = $|8 + 2x|$ .28

$h(-x) = |8 - 2(-x)| = |8 + 2x| = 8 + 2x = h(x)$ زوجية

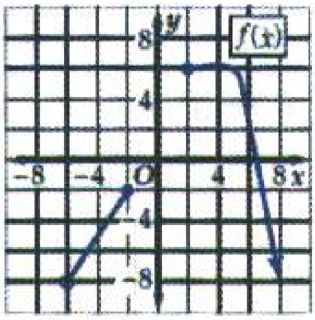
$f(x) = |x^3|$ .29

$f(-x) = |-x^3| = -|x^3| = +x^3$ زوجية

$g(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .30

$g(-x) = \frac{(-x)^2}{-x+1} = \frac{x^2}{-x+1} = -\frac{x^2}{x+1}$ فردية

**استعمل التمثيل البياني f لتقدير قيمها المطلوبة:**




f(-2) (a) .31

= صورة (-2)f = 2+(-2,2)

F(-6) (a)

= صورة (-6)f = 8- ، (-6, -8)

f(0) (b)

= صورة f(0) = 0 ، f(0, 0)

**.33 دوال إذا كانت $f(x) = x^n$ ، حيث $n \in N$ :-**

(a) مثّل f(n) بيانياً لكل قيمة من قيم ن في الفترة $1 \leq n \leq 6$

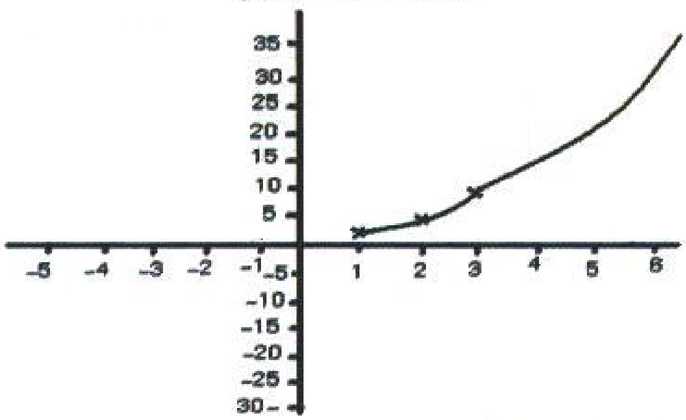
X= 1, 2, 3, 4, 5

1 = f(x) = 1 , 1

$f(x) = 2^2 = 4$

$f(x) = 3^3 = 9$

$f(x) = 4^4 = 256$




(b) اكتب المجال والمدى لكل دالة:-

المجال $x=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

المدى = $\{1^1, 2^2, 3^3, 4^4, 5^5, 6^6\}$

(c) صف التماثل حول كل دالة:-

تماثل حول محور الصادات y.

**مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً، وحدد أصفارها ثم تحقق من أصفار الدالة جبرياً:**

.35 $f(x) = \frac{4x-1}{x}$

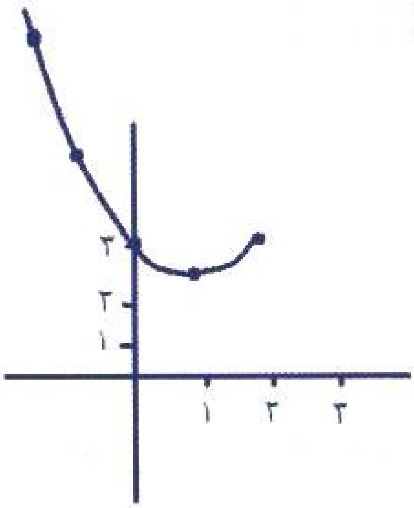
$X=0$ أصفار الدالة

$f(x) = \frac{x^2+9}{x+3}$ $= \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3} = 0$

$x-3=0$ $x=3$

.36 $f(x) = \frac{x^2+9}{x+3}$

| 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | x |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.6 | 2.5 | 3 | 5 | 13 | F(x) |




الحل جبرياً:

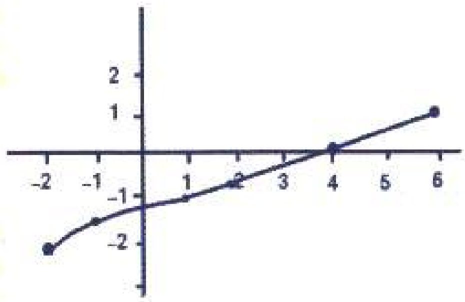
$f(x) = 0$

$\frac{x^2+9}{x+3} = 0$ نحلل المقدار (البسط)

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)} = 0 \quad \rightarrow \quad x-3=0 \quad , \quad x=3$$

.37 $h(x) = 2\sqrt{x+12}-8$

| 6 | 4 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0 | -0.5 | -0.8 | -1.1 | -1.4 | -1.7 | f(x) |




أصفار المقام 4

الحل جبريا:

$h(x) = 0$

$$2 - \sqrt{x+12} - 8 = 0$$

$$2\sqrt{x+12} = 8$$

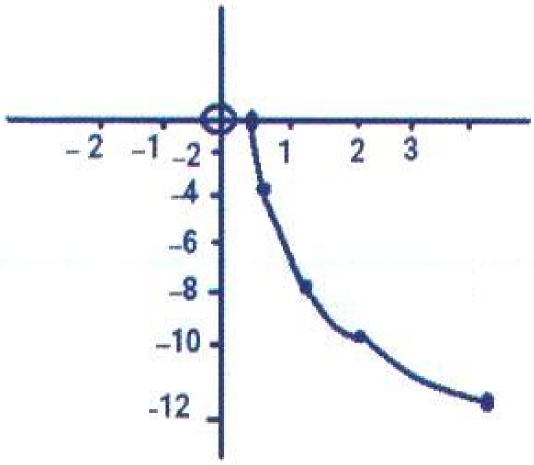
$$\sqrt{x+12} = 4$$

$X+12 = 16$

$X = 16- 12 = 4$

$g(x) = -12 + \frac{4}{x}$ .38

| $x$ | 0.5 | 4 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | -4 | -12 | -10 | -8 | غير معرف | -16 | -14 |




الحل جبريا:

$g(x) = 0$

$$-12 + \frac{4}{x} = 0$$

$$\frac{4}{x} = 12$$

$12x = 4$

$$x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

39. استعمل التمثيل البياني للدالة $f$ لتحدد مجالها ومداها:

المجال =$(-8, -4] \cup (-2, \infty)$

المدى = $(-6, \infty)$

40. المجال = $(-\infty, -6] \cup [0,5) \cup (8,10)$

المدى = $(-\infty, 8] \cup \{10\}$

41. إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يعطى بالعلاقة: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{10}=1$

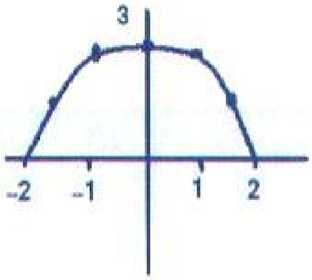
(a) صف تماثل منحنى مسار المذنب

بما أن المعادلة $\frac{(-x^2)}{8}+\frac{(-y^2)}{10}=1$

تكافئ المعادلة $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{10}=1$

فإن المنحنى متماثل حول المحور $y$.

(b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة:




(c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2,\sqrt{5})$ فعين ثلاث نقط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

$$(-1,2.9),(1,2.9),(2,\sqrt{5})$$

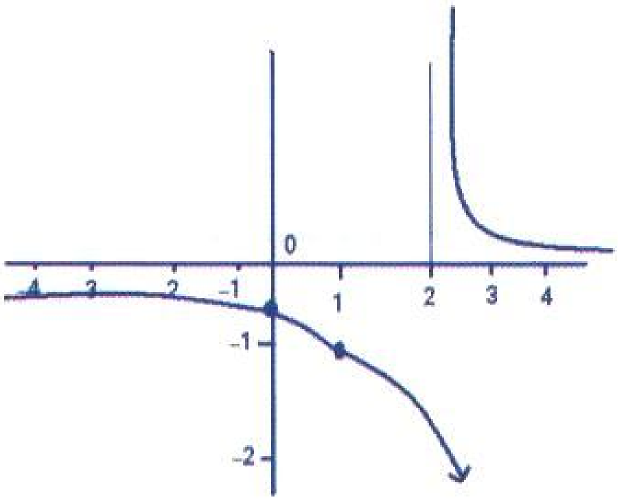
43. $f(x)=\frac{1}{x-2}$

| X | 1.99 | 1.999 | 2 | 2.001 | 2.01 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -100 | -1000 | غير معرف | 1000 | 100 |

b. قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب $x$ من 2 من اليسار وتتزايد بلا حدود عندما تقترب $x$ من 2 من اليمين.

c. مثل الدالة بيانيا:

| x | -6 | -4 | -2 | 0 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -0.125 | -1.066 | -0.25 | -0.5 | -1 | -2 | غير معرف | 2 | 1 | 0.333 | 0.166 |



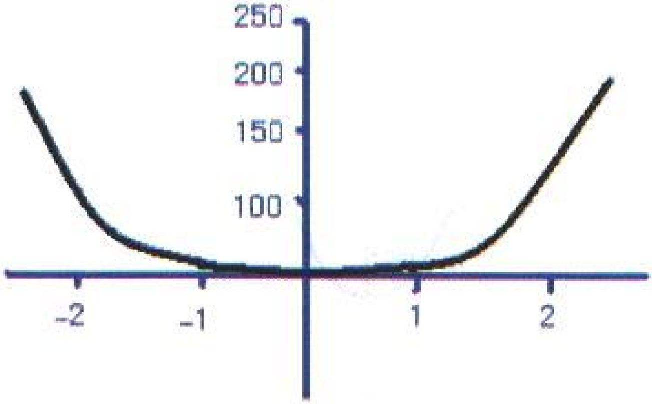
مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً وحدد فيما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك:-

$h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$ .44

$$h(-x) = (-x)^5 - 17(-x)^3 + 16(-x)$$
$$= -x^5 + 17x^3 - 16x$$
$$= -(x^5 - 17x^3 + 16x)$$
$$= -h(x)$$

الدالة فردية.

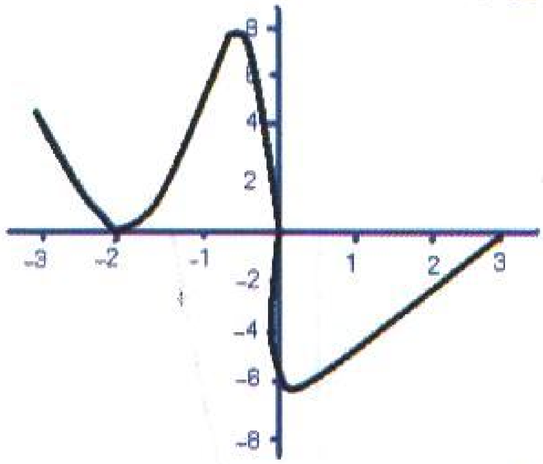
| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| y | 0 | 0 | 136 |
| (x,y) | (0,0) | (1,0) | (2,136) |




$f(x) = x^2 - x - 6$ .45

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) - 6$$
$$= x^2 + x - 6$$

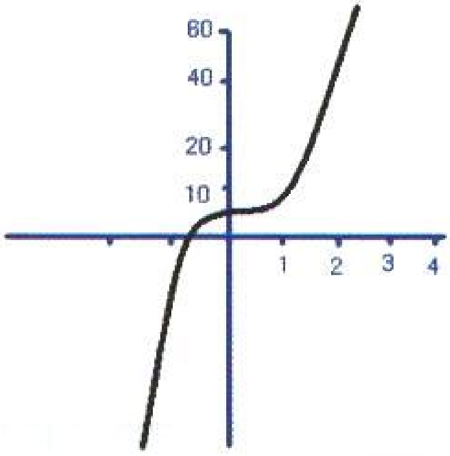
الدالة ليست فردية وليست زوجية.




$h(x) = x^6 + 4$ .46

$$h(-x) = (-x)^6 + 4$$
$$= x^6 + 4$$
$$= h(x)$$

الدالة زوجية.



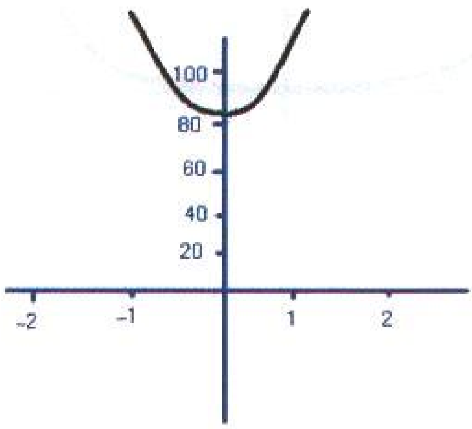

$g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$ .48

$g(-x) = (-x)^4 + 8(-x)^2 + 81$

$= x^4 + 8x^2 + 81$

$= g(x)$

الدالة زوجية.

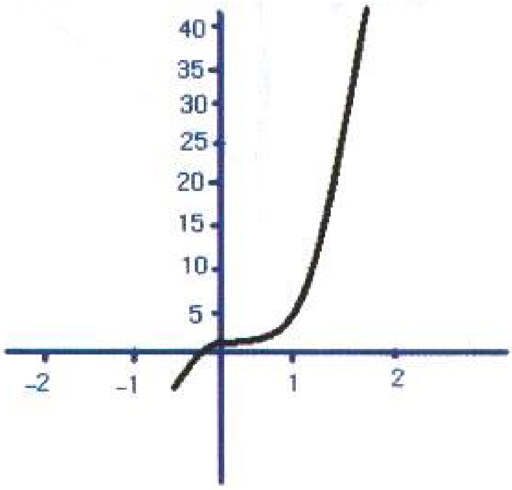



$f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$ .49

$f(-z) = (-z)^3 - 4(-z)^2 + 4(-z)$

$= -z^3 - 4z^2 - 4z$

الدالة ليست فردية وليست زوجية.



56. $f(x) = n\,x^2$

العبارة صحيحة هي المدى هو $\{y1y \geq 0 \ , y \in R\}$

57. $f(x) = \sqrt{n\,x}$

العبارة صحيحة المدى هو $\{y/y \geq 0 \ , y \in R\}$

58. العبارة صحيحة.

59. العبارة صحيحة.

69. $g(x) = x^2 - 10x + 3$

a. $g(2)$

$$g(2) = (2)^2 - 10(2)+3$$
$$= 4 - 20 + 3 = -13$$

b. $g(-4x)$

$$g(-4x) = (-4x)^2 - 10(-4x) + 3$$
$$= 16x^2 + 40x + 3$$

c. $g(1+3n)$

$$g(1+3n) = (1+3n)^2 - 10(1+3n) + 3$$
$$= 1 + 6n + 9n^2 - 10 - 3n + 3$$
$$= 9n^2 + 3n - 6$$

70. $p(x) = \frac{2x^3+2}{x^2-2}$

a. $p(3)$

$$p(3) = \frac{2(3)^3+2}{(3)^2-2} = 8$$

b. $p(x^2)$

$$p(x^2) = \frac{2(x^2)^2+2}{(x^2)^2-2}$$
$$= \frac{2x^5+2}{x^4-2}$$

c. $P(x+1)$

$$p(x+1) = \frac{2(x+1)^3+2}{(x+1)^2-2}$$

71. $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$

a. $h(-9)$

$$h(-9) = 2(-9)^2 + 4(-9) - 7$$
$$= 162 - 36 - 7 = 119$$

b. $h(3x)$

$$h(3x) = 2(3x)^2 + 4(3x) - 7$$
$$= 18x^2 + 12x - 7$$

*h(2+m) c.*

$$h(2+m) = 2(2+m)^2 + 4(2+m) - 7$$

$= 2\,(4+4m+m^2)+8+4m-7$

$= 8 +8m+2m^2+8+4m-7$

$= 8m^2+12m+9$

72. المجال = $R$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

73. المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا $x=4$ ، $x=-4$

أو المجال = $R - \{4, -4\}$

74. لا يوجد جذر حقيقي للعدد السالب.

$3x+18 \geq 0$

$3x \geq -18$

$X \geq -6$

المجال = $(\infty, -6]$

75. $3 = \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$

76. $32 = 2^5 = 2^{\frac{6\times5}{6}} = (2^6)^{\frac{5}{6}} = 64^{\frac{5}{6}}$

77. $\frac{1}{7} = \frac{1}{\sqrt{49}} = 49^{-\frac{1}{2}}$

78. $\frac{1}{8} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{-3} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 16^{-\frac{3}{4}}$

79. $125 = 5^3 = 5^{\frac{2\times3}{2}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 25^{\frac{3}{2}}$

80. $\frac{1}{126} = \frac{1}{6^3} = 6^{-3} = (6^2)^{-\frac{3}{2}} = 36^{-\frac{3}{2}}$

81. الإجابة $B$ هي الصحيحة

$x^2 = (\sqrt{n})^2 - 1^2$

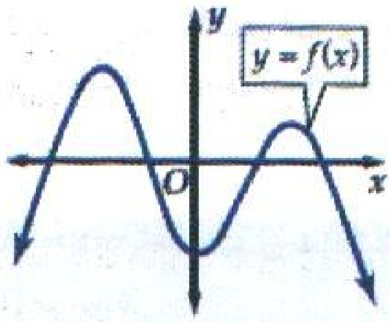
$x^2 = n - 1$

$X = \sqrt{n-1}$

82. الإجابة $D$ هي الصحيحة $1<f(x)<10$

# (٣-١) الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة، وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.
إن أحد شروط اتصال دالة مثل f(x) عند x = c هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار.

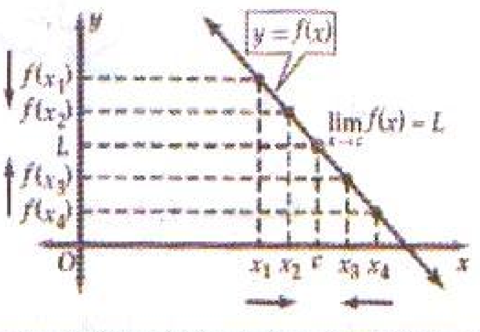



$f(x)$ متصلة لجميع قيم $x$.

**مفهوم أساسي** النهايات

**التعبير اللفظي:** إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة $L$ عندما تقترب $x$ من $c$ من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ هي $L$.

**الرموز:** نقول إن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $c$ هي $L$.

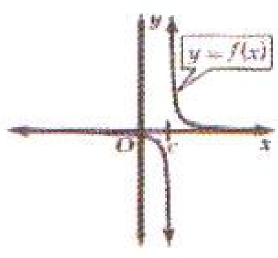



## حالات عدم اتصال الدالة

**مفهوم أساسي** أنواع عدم الاتصال

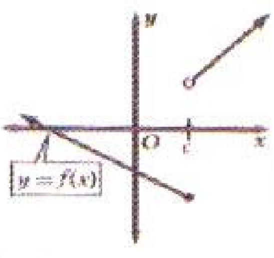
للدالة عدم اتصال لانهائي عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب $x$ من $c$ من اليمين أو اليسار.

**مثال:**



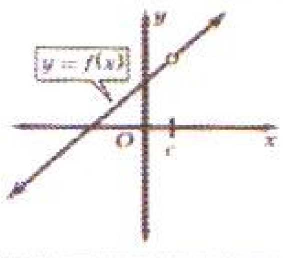

للدالة عدم اتصال قفزي عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب $x$ من $c$ من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.

**مثال:**

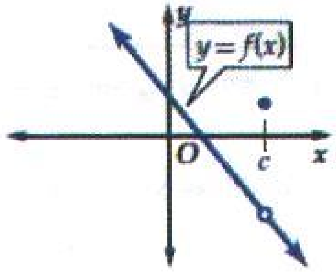



للدالة عدم اتصال نُقطي عند $x = c$ إذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة في مجالها باستثناء النقطة $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○).

**مثال:**



يسمى عدم الاتصال النقطي عدم اتصال قابل للإزالة لأنه يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، وفي هذه الحالة تكون النهاية x=c موجودة ولكن الدالة غير معرفة عن x=c أو أن f(c) لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند x= c كما في الشكل التالي:-




يصنف كلاً من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما عدم اتصال غير قابل للإزالة لأن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها.

## اختبار الاتصال:

يقال إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرفة عند $c$، أي إن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب $x$ من $c$ من الجهتين. أي ان $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

مثال

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ الدالة متصلة عند x= 2 برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

١. هل f(2) موجودة؟

f(2) = 1 ، أي أن الدالة معرفة عن x= 2

٢. هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

كون جدولاً يبين قيم f(x) عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

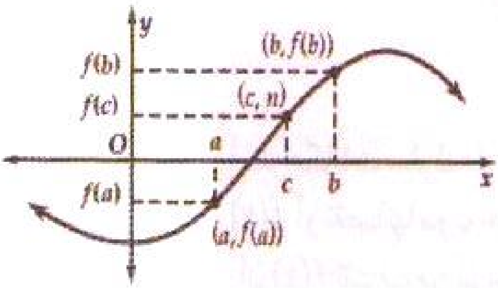
| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2.0 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.52 | 0.95 | 0.995 | | 1.005 | 1.05 | 1.52 |

يبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين فإن قيمة f(x) تقترب من 1

## نظرية

**نظرية القيمة المتوسطة**

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة $n$ بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد $c$ بين $a$ و $b$، بحيث $f(c) = n$.




**نتيجة (موقع صفر الدالة):** إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل $c$ بين $a$ و $b$، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين $a$ و $b$.

**مثال**

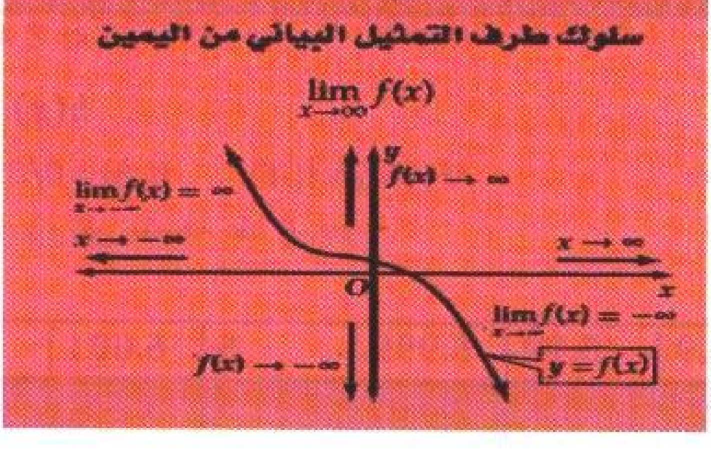
حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة [-4,4]

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-46$ | $-13$ | $2$ | $5$ | $2$ | $-1$ | $2$ | $17$ | $50$ |

بما أن f(-3) سالبة، و f(-2) موجبة وحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة f(x) بين -2,-3 أي يوجد صفر للدالة في الفترة -3<x<-2 ، لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشارتها أيضاً في الفترة 0<x<1 وفي الفترة 1<x<2 وهذا يدل على وجود أصفار حقيقية للدالة في هاتين الفترتين.

## سلوك طرفي التمثيل البياني:

**يصف سلوك التمثيل البياني شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم f(x) وعندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود أي عندما تقترب x من ∞ ، ∞ - ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.**



**سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

**أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.**

## تدرب وحل مسائلك

(١) حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند x وبرر إجابتك:-

1. $f(-5) = \sqrt{21}$ ، أي أن الدالة معرفة عند 5 =x $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ ،

$\sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

2. هل lim f(x) موجودة؟؟

| x | -5.1 | -5.01 | -5.001 | -5 | -4.999 | -4.99 | -4.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 4.691 | 4.593 | 4.584 | 4.583 | 4.581 | 4.572 | 4.473 |

3. $\lim_{x\to-5} \sqrt{x^2-4} = \sqrt{(-5)^2-4} = \sqrt{21} = f(-5)$

F(x) متصلة عند x= -5

(٢) $F(x) = \sqrt{x+5}$

1. $f(8) = \sqrt{13}$ ، أي أن الدالة معرفة عند x= 8

2.

| x | 7.9 | 7.99 | 7.999 | 8 | 8.001 | 8.01 | 8.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 3.59 | 3.604 | 3.605 | 3.605 | 3.605 | 3.606 | 3.619 |

3. الدالة متصلة عند x= 8

(٣) $h(x) = \frac{x^2-36}{x+6}$

1. f(6) = 0 ، f(-6) = 0/0 f(-6) غير معرفة.

F(x) متصلة عند x=6 وغير متصلة عند x= -6

2.

| x | 5.9 | 5.99 | 5.999 | 6 | 6.001 | 6.01 | 6.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | -0.1 | -0.01 | -0.001 | 0 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |

يظهر الجدول أن قيم f(x) تقترب من الصفر من الجهتين عندما تقترب x من 6 .

عندما تقترب x من 6-

| x | -6.1 | -6.01 | -6.001 | -6 | -5.999 | -5.99 | -5.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | -12.1 | -12.01 | -12.001 | | -11.999 | -11.99 | -11.9 |

قيم f(x) تقترب من 12- من الجهتين عندما تقترب x من 6-

3. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-36}{x+6}=\frac{0}{12}=0=f(x)$

F(x) متصلة عند x=6

أما عندما x=-6 فإن f(x) غير متصلة ، وبما أن $\lim_{x\to -6} f(x)$ فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند x= -6

(٤) $g(x)=\frac{x}{x-1}$ ، عند x= 1

1. $f(1)=\frac{1}{0}$ ، f(x) غير معرفة عند x= 1

2.

| x | -0.9 | -0.99 | -0.999 | 1 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 0.47 | 0.49 | 0.499 | | 1001 | 101 | 11 |

قيم f(x) تتناقص عندما تقترب x من 1 من اليسار، وتتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 1 من اليمين.

$\lim_{x\to 1} f(x)$

3. الدالة f(x) عدم اتصال لا نهائي عند x= 1

(٥) $h(x)=\frac{x-4}{x^2-5x+4}$ ، عند x=1 ، x= 4

1. $f(1)=-\frac{3}{0}$ , $f(4)=\frac{0}{0}$ ، f(1) ، f(4) غير موجودة.

F(x) غير متصلة عند كل من x=1 ، x= 4

2. عندما تقترب x من 1

| x | -0.9 | -0.99 | -0.999 | 1 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | -4.79 | -0.502 | -0.5 | | 1000 | 100 | 10 |

قيم f(x) تتناقص عندما تقترب x من 1 من اليسار، وتتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 1 من اليمين.

$\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة.

عندما تقترب x من 4

| x | 3.999 | 3.99 | 3.9 | 4 | 4.001 | 4.01 | 4.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 0.333 | 0.334 | 0.344 | | 0.333 | 0.332 | 0.322 |

قيم f(x) تقترب من 1/3 من الجهتين عندما تقترب x من 4

$\lim_{x\to 4} f(x)$ موجودة.

3. للدالة f(x) عدم اتصال لا نهائي عند x=1 وعدم اتصال قابل للإزالة عند x= 4

(7) $f(x)=\begin{cases}4x-1 & ,x\le -6\\ -x+2 & ,\ x>-6\end{cases}$ ، عند x= -6

1. f(-6) = -25      f(-6) موجودة.

2.

| x | -6.001 | -6.01 | -6.1 | -6 | -5.999 | -5.99 | -5.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | -25.004 | -25.04 | -25.4 | | 7.999 | 7.99 | 7.9 |

قيم f(x) تقترب من 25- عندما تقترب x من 6- من اليسار، وتقترب من 8 عندما تقترب x من 6- من اليمين.

3. للدالة عدم اتصال لا قفزي عند x= -6

(9) $[-2,4]$ ,      $f(x)=x^3-x^2-3$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | -15 | -5 | -3 | -3 | 1 | 15 | 45 |

يوجد صفر للدالة f(x) في الفترة 1<x<2

(10) $[-4,4]$ ,      $g(x)=-x^3+6x+2$

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 42 | 11 | -2 | -3 | 2 | 7 | 6 | -7 | -38 |

يوجد صفر للدالة g(x) في الفترة -3<x<-2

يوجد صفر للدالة في الفترة -1<x>0

يوجد صفر للدالة في الفترة 2<x<3

(11) $[-3,3]$ ,      $f(x)=2x^4-3x^2+x^2-3$

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 249 | 57 | 3 | -3 | -3 | 41 | 87 |

يوجد صفر للدالة f(x) في الفترة -1<x<0

يوجد صفر للدالة في الفترة 1<x<2

(12) $[-2,4]$ ,      $h(x)=\frac{x^2+4}{x-5}$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h(x) | | | | | | $-\frac{13}{2}$ | -20 |

لا يوجد أصفار حقيقية للدالة في الفترة [-2,4]

(13) $[0,5]$ ,      $g(x)=\sqrt{x^3+1}-5$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | -4 | -3.6 | -2 | 0.3 | 3.1 | 6.2 |

يوجد صفر للدالة g(x) في الفترة 2<x<3

$f(x) = 4x^4 - 6x^3 + 3x$ (14)

يتضح من التمثيل أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ & $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to \infty$

وعندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to \infty$

(21) عند $x \to \infty$ فإن: $\lim_{x\to\infty} q(x) = 0$

(22) عند $x \to \infty$ فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(23) عند $x \to \infty$ فإن: $\lim_{x\to\infty} m(x) = 0.5$

(24) عند $x \to \infty$ فإن: $\lim_{x\to\infty} c(x) = 0$

(25) عند $x \to \infty$ فإن: $\lim_{x\to\infty} k(x) = \infty$

(26) عند $x \to \infty$ فإن: $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

(28) عندما $m \to \infty$ فإن: $\lim_{x\to\infty} E(x) = 0$

إذا استمرت m في الازدياد فإن طاقة الحركة للجسم تقترب من الصفر.

$f(x) = \frac{x^5+x^6}{x^5}$ (40)

$f(0) = 0/0$ غير معرفة.

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{x^5+x^6}{x^5} = \lim_{x\to0}\frac{x^5(1+x)}{x^5} = \lim_{x\to0}(1+x)1$$

بما أن $\lim_{x\to0} f(x)$ موجودة.

للدالة عدم اتصال قابل للإزالة.

$f(x) = \frac{x^4}{x^5}$ (41)

$f(0) = 0/0$ غير معرفة.

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^5} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0}$$

بما أن $\lim_{x\to0} f(x)$ موجودة.

للدالة عدم اتصال لا نهائي.

(43) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة زوجية.

الدالة زوجية

$F(x) = f(-x)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

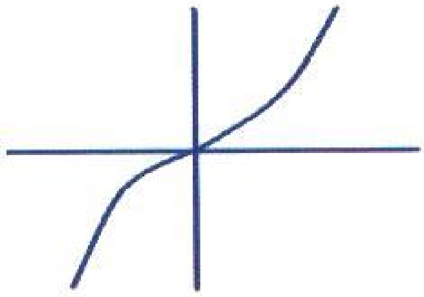
بما أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

(45) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول نقطة الأصل.

**باستخدام التمثيل البياني**

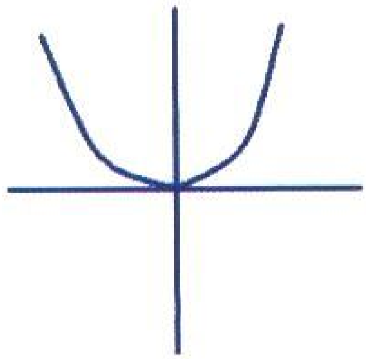
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$



(46) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ ، حيث f دالة متماثلة حول المحور y

باستخدام التمثيل البياني

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



(51) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا x=1، x=-2

أو R – {-1, -2}

(52) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا $x= 1+\sqrt{11}$ ، و $x=1-\sqrt{11}$

(54) $f(a) = \frac{2(9)-5}{(9^2)-3(9)+1} = \frac{13}{55}$

(55) $f(3b) = \frac{2(3b)-5}{(3b)^2-3(3b)+1} = \frac{6b-5}{9b^2-9b+1}$

(56) $f(2a-3) = \frac{2(2a-3)-5}{(2a-3)^2-3(2a-3)+1}$

$= \frac{4a-11}{4a^2-18a+19}$

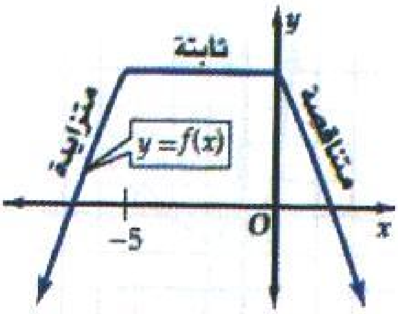
(60) الإجابة D 4

(61) الإجابة A [6,7]

# (٤-١) القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

## التزايد والتناقص:

خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة حيث تحدد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.



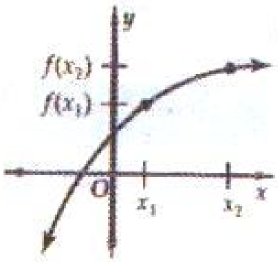

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

**مفهوم أساسي** — **الدوال المتزايدة، المتناقصة، الثابتة**

**التعبير اللفظي:** تكون الدالة $f$ متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم $x$ في الفترة.

**الرموز:** لكل $x_1$ و $x_2$ في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

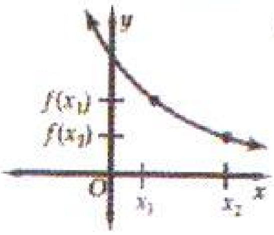
**النموذج**




**التعبير اللفظي:** تكون الدالة $f$ متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم $x$ في الفترة.

**الرموز:** لكل $x_1$ و $x_2$ في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

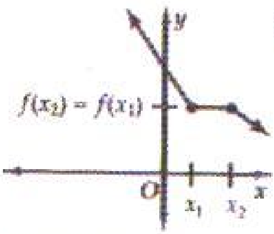
**النموذج**




**التعبير اللفظي:** تكون الدالة $f$ ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم $x$ في الفترة.

**الرموز:** لكل $x_1$ و $x_2$ في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

**النموذج**

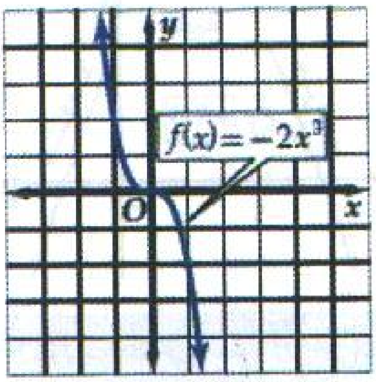


استعمل التمثيل البياني لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم عزز إجابتك عدديا.

$f(x) = -2x^3$ (a

التحليل بيانيا:

يبين التمثيل البياني أن قيم f(x) تتناقص كلما ازدادت قيم x لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$




التعزيز عدديا:

نكون جدولاً يتضمن قيماً للمتغير x في الفترة.

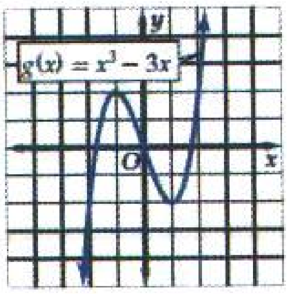
| $x$ | $-8$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1024 | 432 | 128 | 16 | 0 | $-16$ | $-128$ | $-432$ | $-1024$ |

يوضح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x ، تتناقص قيم f(x).

$g(x) = x^3 - 3x$ (b

التحليل بيانيا:

يبين التمثيل البياني أن f متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$ ومتناقصة في الفترة $(-1,1)$ ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$




التعزيز عدديا:

كون جدولاً يتضمن قيماً للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

| $x$ | $-11$ | $-9$ | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1298$ | $-702$ | $-322$ | $-110$ | $-18$ | $2$ |

$(-1, 1)$:

| $x$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $0.5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $1.375$ | $0$ | $-1.375$ | $-2$ |

$(1, \infty)$:

| $x$ | $1$ | $3$ | $5$ | $7$ | $9$ | $11$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $18$ | $110$ | $322$ | $702$ | $1298$ |

توضح الجداول السابقة، أنه عندما تزداد x إلى 1-، فإن f(x) تزداد، وعندما تزداد x من 1- إلى 1 فإن f(x) تتناقص أما عندما تزداد x ابتداءً من 1 فإن f(x) تزداد.

لاحظ:

**النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكون قمة أو قاعاً في منحنى الدالة وتسمى نقاطاً حرجة.**

**يكون المماس المرسوم لمنحنى الدالة عند هذه النقاط إما أفقياً أو عمودياً (أي أن ميله صفر أو غير معرف) ويدل على وجود قيمة عظمى أو صغرى للدالة.**

**مفهوم أساسي** **القيم القصوى المحلية والمطلقة**

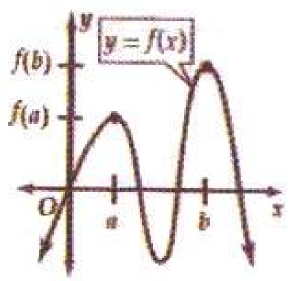
**التعبير اللفظي:** إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيت قيمة عظمى محلية.

**الرموز:** تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة $f$ إذا وجدت فترة $(x_1, x_2)$ تحتوي $a$ على أن يكون لكل قيم $x$ في الفترة $(x_1, x_2)$، $f(a) \geq f(x)$.

**التعبير اللفظي:** إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها سُمّيت قيمة عظمى مطلقة.

**الرموز:** تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة $f$ إذا كان لكل قيم $x$ في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

**النموذج**




$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة $f$
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة $f$

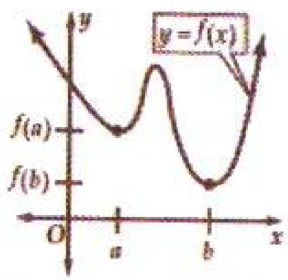
**التعبير اللفظي:** إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيت قيمة صغرى محلية.

**الرموز:** تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة $f$ إذا وجدت فترة $(x_1, x_2)$ تحتوي $a$ على أن يكون لكل قيم $x$ في الفترة $(x_1, x_2)$، $f(a) \leq f(x)$.

**التعبير اللفظي:** إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمّيت قيمة صغرى مطلقة.

**بالرموز:** تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة $f$ إذا كان لكل قيم $x$ في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

**النموذج**




$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة $f$
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة $f$

تذكر:

تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثل مقداراً ثابتاً. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط. لذا فإننا نتحدث عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

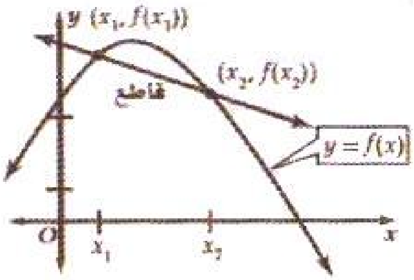
**مفهوم أساسي** متوسط معدل التغير

**التعبير اللفظي:** متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة $f$ هو ميل المستقيم المار بين هاتين النقطتين.

**هندسيًا:** يُسمى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز $m_{sec}$.

**الرموز:** متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$




**مثال**

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$

**a)** $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة [-2,-1]

$$\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)}$$

$$\frac{[-1(-1)^3+3(-1)]-[-(-2)^3+3(-2)]}{-1-(-2)}$$

$$= \frac{-2-2}{-1-2} = -4$$

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة [-2,-1] هو -4

**b)** $[0, 1]$

$$\frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$= \frac{2-0}{1-0} = 2$$

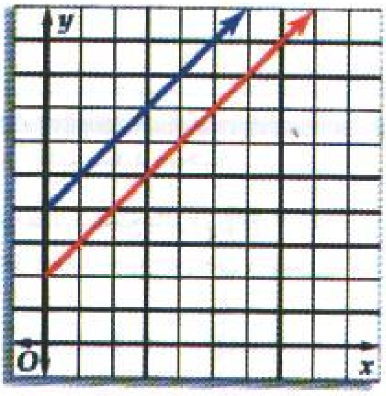
أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة [0,1] هو 2

# (٥-١) الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الدوال الرئيسة (الأم):

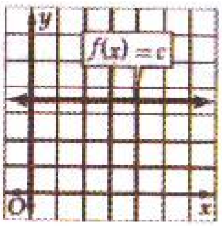
عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها بصفة أو أكثر.

وهي أبسط دالة في العائلة إذا يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

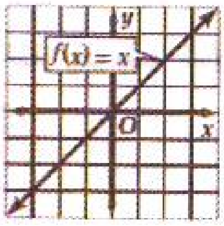



**مفهوم أساسي** — الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية و دوال كثيرات الحدود

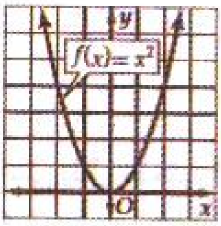
تكتب الدالة الثابتة على الصورة $f(x) = c$ حيث $c$ عدد حقيقي وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



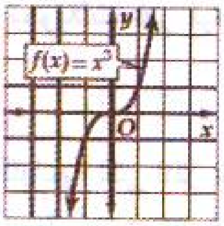

تمر الدالة المحايدة $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها $(a, a)$.




يأخذ منحنى الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.

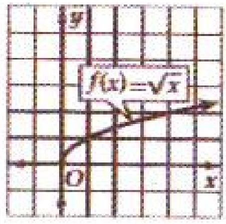



الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

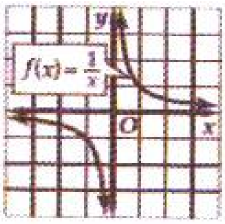



**مفهوم أساسي** — الدالة الرئيسة (الأم) لكل من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب دالة الجذر التربيعي على الصورة $f(x) = \sqrt{x}$.




تكتب دالة المقلوب على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}$.



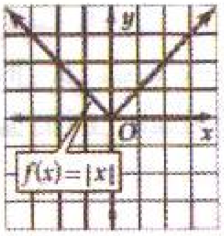
**مفهوم أساسي**   دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

**التعبير اللفظي:** يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \ x < 0 \\ x & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

**أمثلة:** $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$

**النموذج**

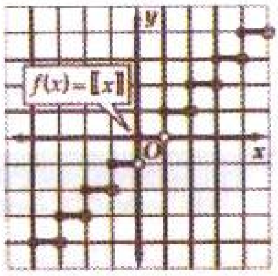



**مفهوم أساسي**   دالة أكبر عدد صحيح

**التعبير اللفظي:** يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [\![x]\!]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي $x$ .

**أمثلة:** $[\![-4]\!] = -4, [\![-1.5]\!] = -2, \left[\!\!\left[\frac{1}{3}\right]\!\!\right] = 0$

**النموذج**




### الدالة الدرجية:

هي دالة متعددة التعريف يشبه تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

### التحويلات الهندسية:

تؤثر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) فبعض التحويلات تغير موقع المنحنى فقط ولا تغير أبعاده أو شكله وتسمى تحويلات قياسية، وبعضها الأخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية.

### الإزاحة (الانسحاب)

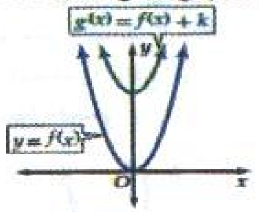
أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى الأعلى أو الأسفل على حين ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار.

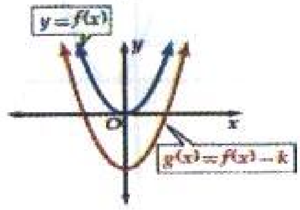
**مفهوم أساسي** الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

### الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- $k$ وحدة إلى الأعلى عندما $k > 0$ .
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$ .

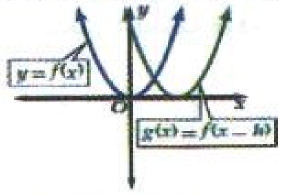


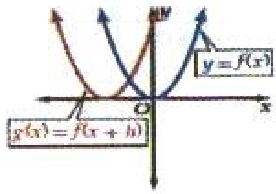




### الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- $h$ من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$ .
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$ .




التمدد:

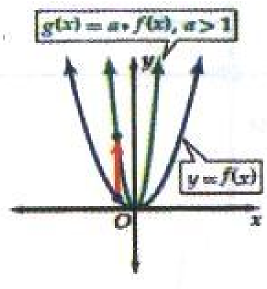
هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسعة (مط) منحنى الدالة رأسياً أو أفقياً.

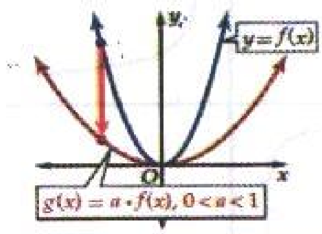
**مفهوم أساسي** التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

### التمدد الرأسي

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ ، هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$ .
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$

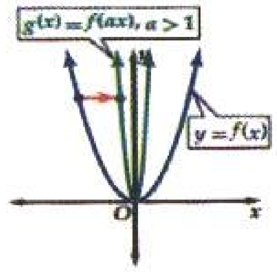


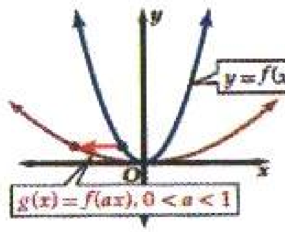




### التمدد الأفقي

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ ، هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$ .
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$

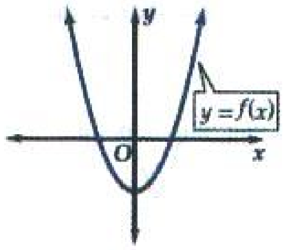


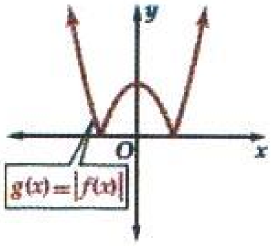



## مفهوم أساسي — التحويلات الهندسية على دوال القيمة المطلقة

**$g(x) = |f(x)|$**

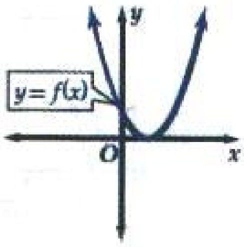
يعكس هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور $x$ ليصبح فوقه.

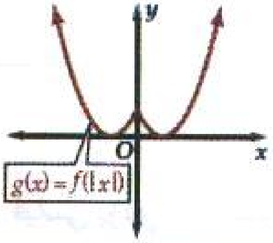



**$g(x) = f(|x|)$**

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور $y$ ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور $y$ بالانعكاس حول المحور $y$ .



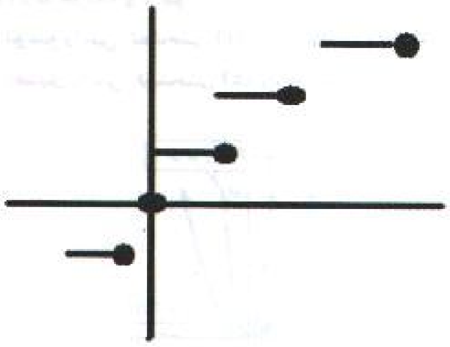




## تدرب وحل المسائل:

١. المدى $(-\infty , \infty)$

متناقص $(-\infty , 0)$

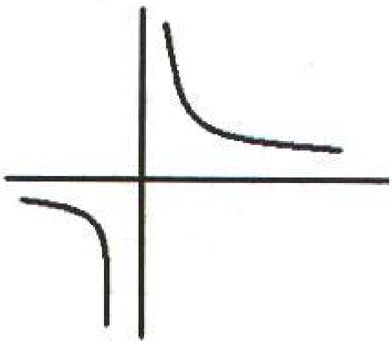
متزايد $(0 , \infty)$



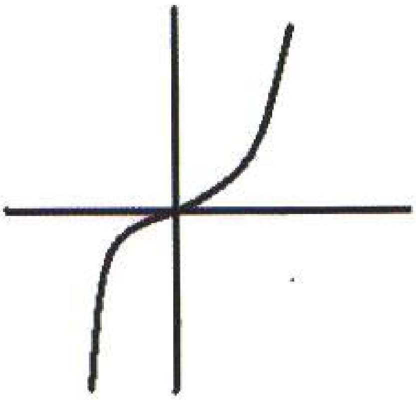
٢. المدى $(-\infty, 0) - [0]$

متناقص $(-\infty, 0)$

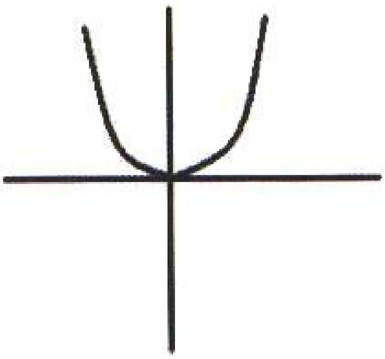
متزايد $(0 , \infty)$



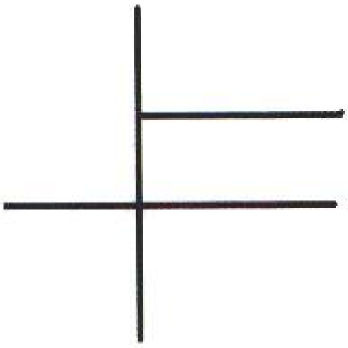
٣. المدى $(-\infty , \infty)$
متزايد $(0 , \infty)$
متناقص $(-\infty , 0)$



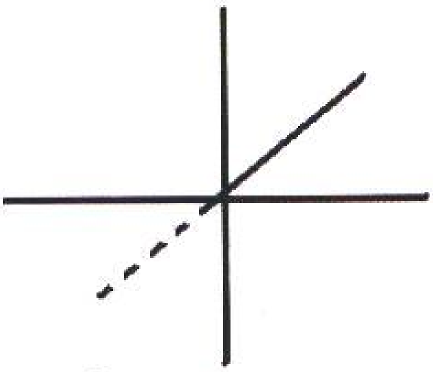
٤. المدى $(0, \infty)$
متزايد $(-\infty, \infty)$



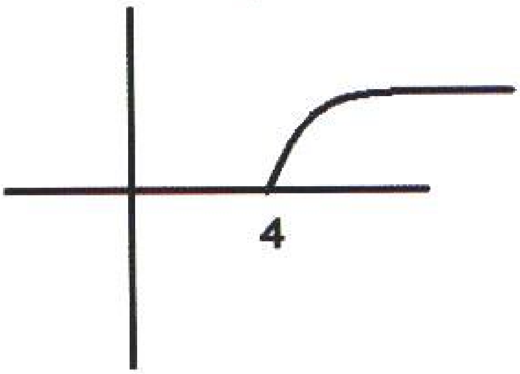
٥. المدى $(0, \infty)$
غير متناقص ومتزايد



٦. المدى $(-\infty , \infty)$
متناقص $(-\infty , 0)$
متزايد $(0, \infty)$



٧. $\sqrt{x-4}$
المدى $(4,\infty)$
متزايد $(4,\infty)$

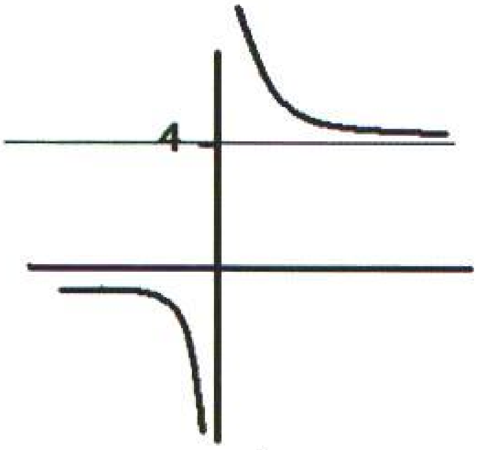


٨. $f(x) = \frac{1}{x} + 4$

المدى $(-\infty, \infty)$

متناقص $(-\infty, \infty) \cup (\infty, 4)$

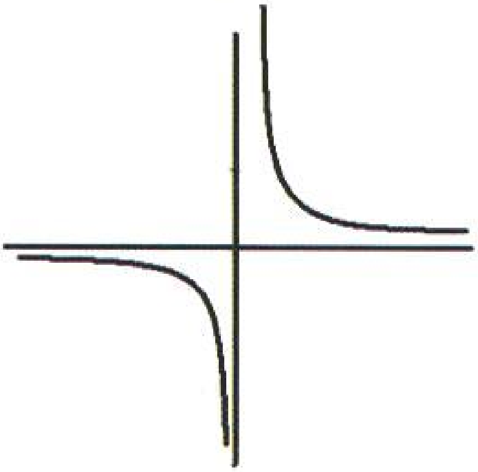
ماعدا الصفر.




٩. $f(x) = \frac{1}{x+7}$

المدى $(-\infty, \infty)$

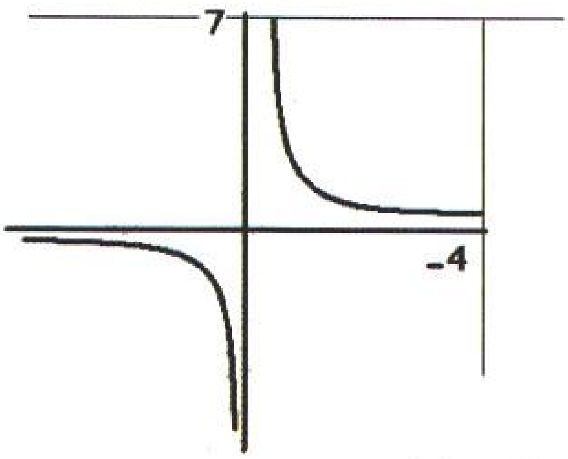
متناقص $(-\infty, \infty)$ ماعدا الصفر.



10. $f(x) = \frac{1}{x+7} - 4$

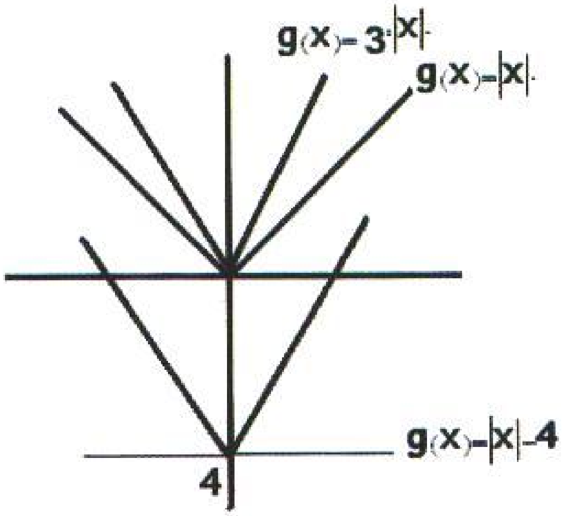
متناقص $(\infty, 7)$

المدى $(-\infty, \infty) \cup (-\infty, 7)$

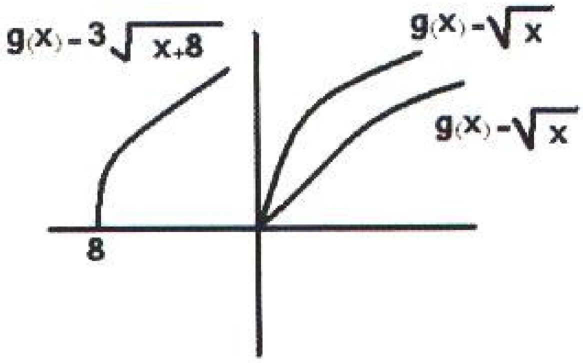



| | | |
|---|---|---|
| .11 | g(x) = [ x +2 ] | g(x) = f (x + 2) |
| .12 | g(x) = - [x] | g(x) = - f (x) |
| .13 | *g(x) = \|x − 8 \|* | *g(x) = f (x-8)* |
| .14 | *g(x) = \|x\| − 1* | *g(x) = f (x) -1* |

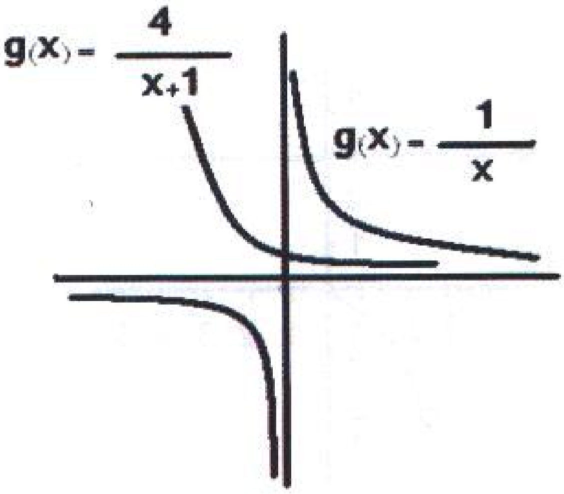
$g(x) = |x|$ .15



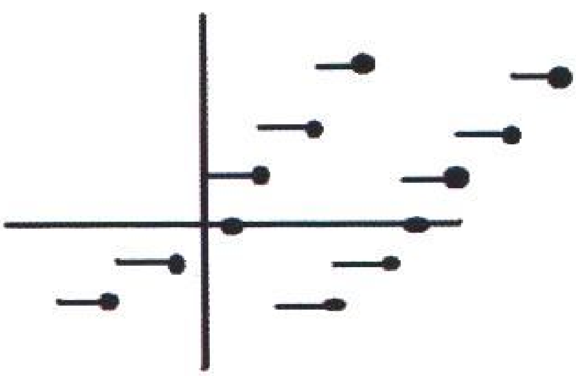

$g(x) = \sqrt{x}$ .16



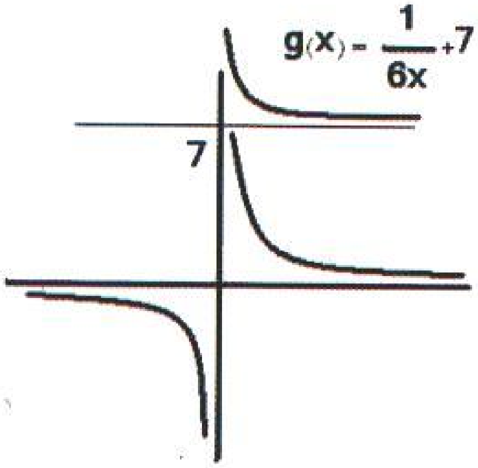

$g(x) = \frac{1}{x}$ .17



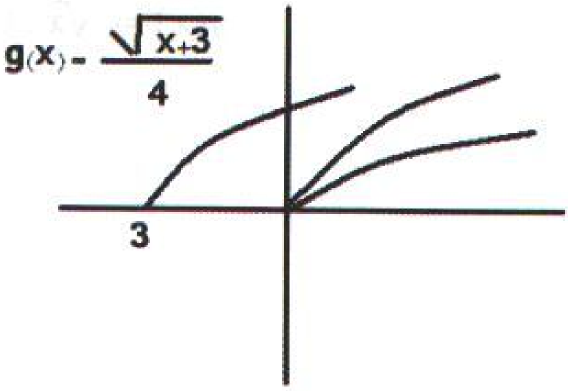

$g(x) = [x]$ .18



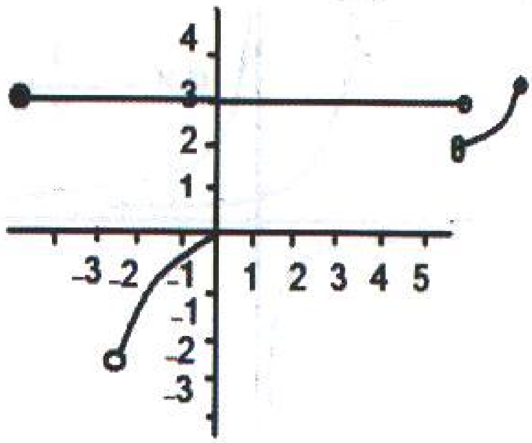
$g(x) = \frac{1}{x}$ .19



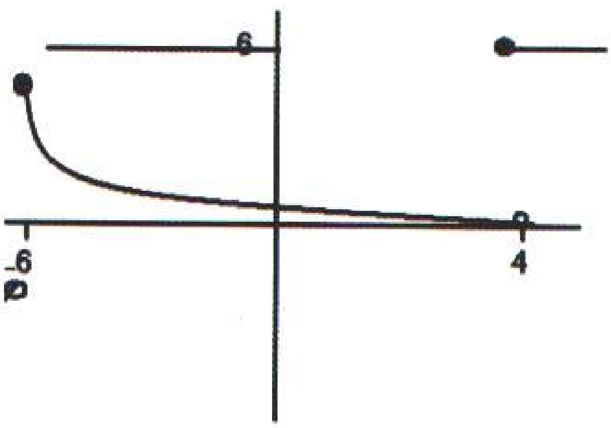

$g(x) = \sqrt{x}$ .20




.21

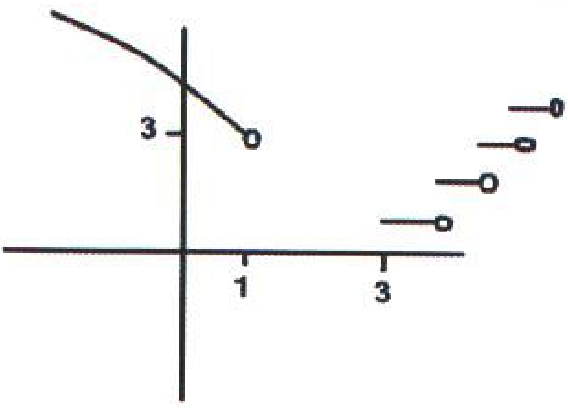


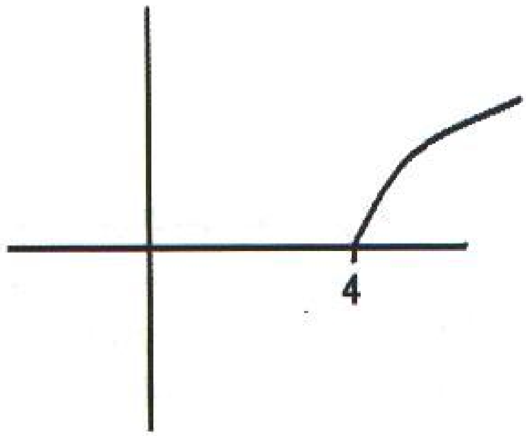

.22



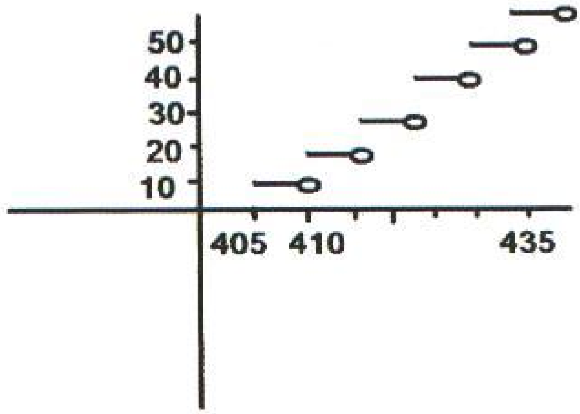

.23

.24






25.

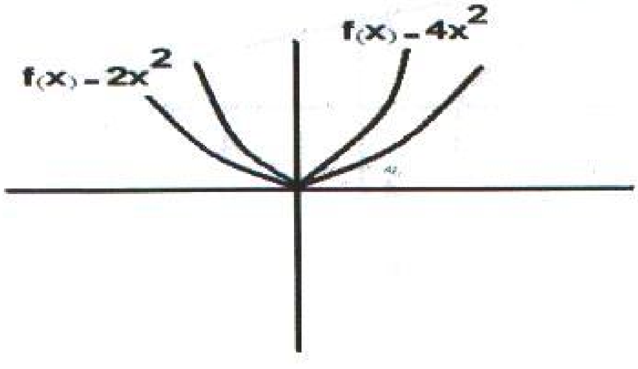



26. a . حدث للدالة f(x) انسحاب لأعلى بمقدار 20 حركة ومصغرة بمقدار 0.2

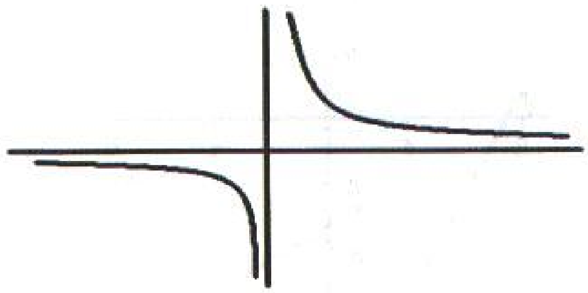
b. $c(x) = 30 + 0.1\ [x]$

c. نعم يمكن أن تتساوى ويكون عدد دقائق الاتصال 10

27. حدث للدالة f(x) تكبير بمقدار 4 حركات:




28.



$f(x) = 2\frac{1}{x-7} + 5$ .32

$f(x) = -3\,[x] - 4$ .33

$t^2 + 2t + 1 - 1 =$)ف + 1($^2 - 1$ .34

حدث إزاحة لمنحنى $t^2$ إلى اليسار وبمقدار حركة واحدة وإلى الأسفل بمقدار حركة واحدة.

$g(x) = 10 + t^2$ .35 حدث انتقال لمنحى $t^2$ إلى الأعلى بمقدار 10 حركات.

$g(t) = 2t^2 + 8t + 1 = 2t^2 + 8t + 16 - 15$ .36 حدث انتقال لمنحنى $t^2$ إلى $2(t+4)^2 - 15$ إلى اليسار بمقدار 4 حركات وحدث له تكبير بمقدار حركتين وانتقال لأسفل بمقدار 15 حركة.

$g(t) = 3t^2 + 10t + 25 - 19 \ldots 3(t+5)^2 - 19$ .37 حدث انتقال لمنحنى $t^2$ إلى اليسار بمقدار 5 حركات وحدث له تكبير بمقدار 3 حركات وإلى الأسفل بمقدار 19 حركة.

$g(x) = (-x^2 - 5)$ .38

$g(x) = [0.2x]$ .39

.40 a. $g(x) = f(x) + 20$

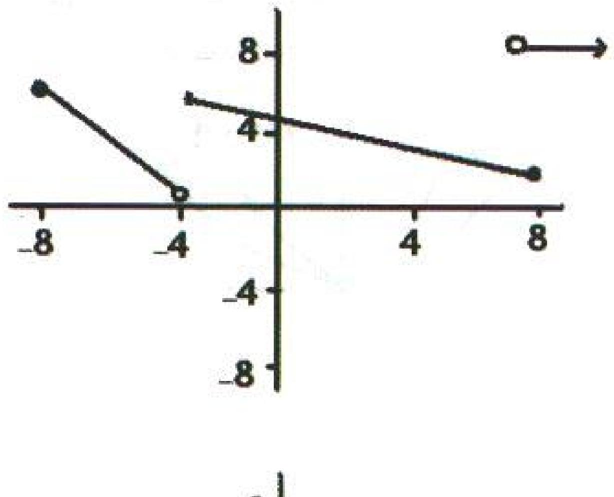
b. $g(x) = \sqrt{7(x-30)}$

c. $g(x) = f(x) - 450$

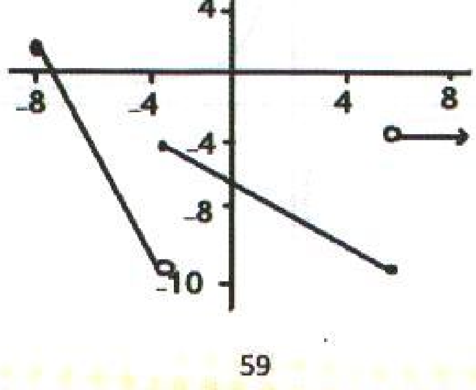
$g(x) = (-x^3 - 6) + 1$ .41

$g(x) = \left(-\frac{1}{x+4}\right) + 6$ .42

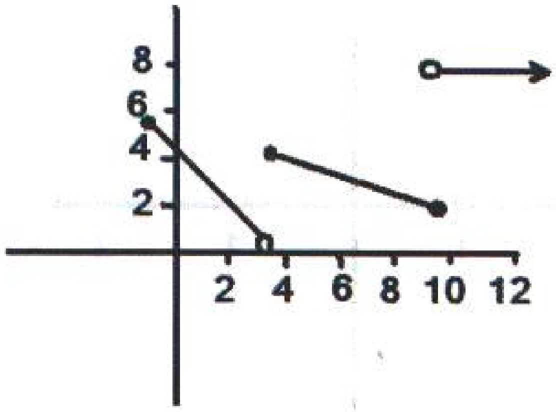
.43



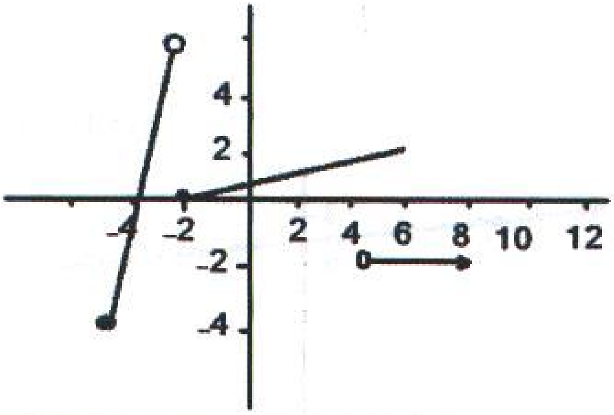

.44



.45

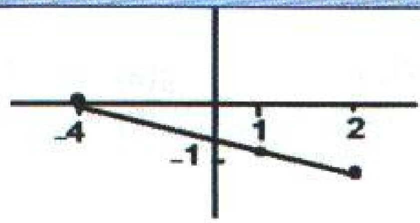



.46

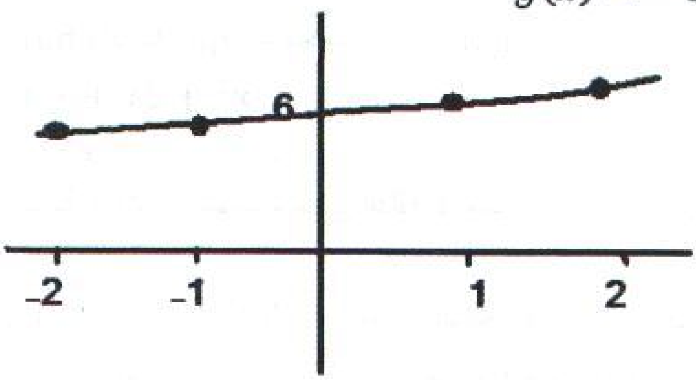



.47

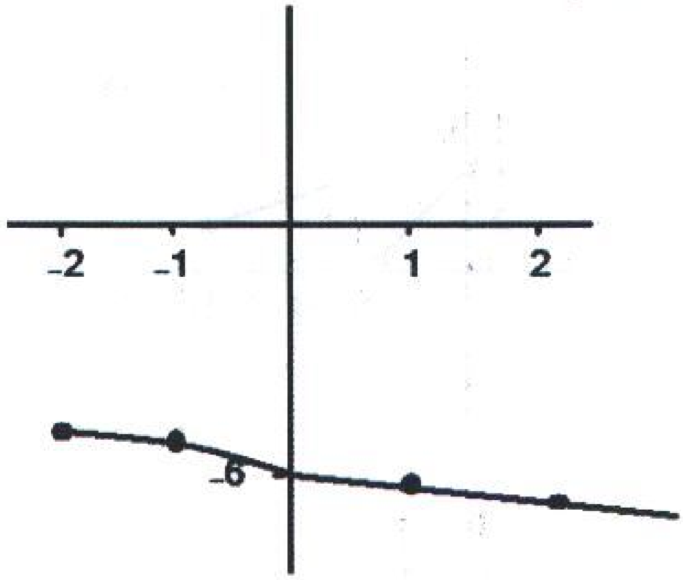
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 0 | -0.4 | -0.7 | -1 | -1.2 |



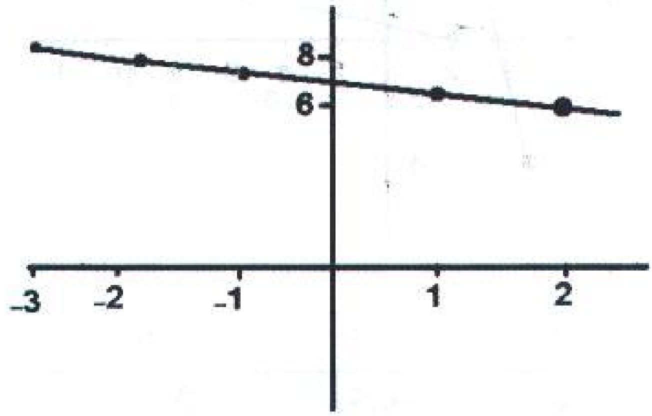

$g(x) = -3f(x) + 6$ .48



$g(x) = f(4x) - 5$ .49




$g(x) = f\ (2x + 1) + 8$ .50




.51

| a | F(a) | g(a) | F(a)+g(a) | h(a) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 3 | 10 | **10** |
| 1 | 10 | 7 | 17 | **17** |
| 2 | 15 | 11 | 26 | **26** |

a. مجموع الدالة f(a) والدالة g(a) = مجموع الدالة h(a)

$x^2 + 2x + 7 + 4x + 3$ .c

$= x^2 + 6x + 10 = h(x)$

52. إجابة محمد الصحيحة حيث تم سحب منحنى الدالة 4 وحدات لليسار لأنها داخل حدود الدالة f(x+4)

53. العلاقة بين f(x), h(x) هي أن الدالة h(x) انعكاسا للدالة f(x) حول محور y .

54. إذا كان في داخل الدالة فإنها تحدث فيها إزاحة لليمين أو اليسار f(x+a) أما إذا كانت منفصلة عن الدالة فإنها تنفصل إلى أعلى أو أسفر f(x) $\pm a$

$a.\ f(-x) = f(x)$ .55

$f(x) = |f(-x)| = |f(x)|$

$b. f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = |-f(x)|$

$f(-x) = -|f(x)|$

57. $f(x) = \sqrt{x+2} - 6$

58. التوسع الرأسي يحدث انكماش في الدالة والأفقي يحدث له تمدد.

60. $g(3) - g(-1) = -6$

61. $\frac{g(8)-g(4)}{4} = \frac{10}{4}$

62. $\frac{f(3)-f(-2)}{5} = -\frac{32}{5}$

63. $g(x) = 0$

64. $f(x) = 0$

65. $f(x) = 1$

66. $y = x^2 - 8x - 13 = 0$

$= x^2 - 8x + 16 = 29$

$= (x-4)^2 - 29 = 0$

$(x-4)^2 = 29$

$x^2 - 8x + 16 = 29$

$(x-4)(x-4) = 29$

$x - 4 = 29 \ldots\ldots\ldots\ldots . x = 33$

67. $y = x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$x = -1 \quad , x = 2$

68. $y = \sqrt{x-2} - 1$

$\sqrt{x-2} - 1 = 0$

$(x-2)^{\frac{1}{2}} = 1$

$x - 2 = 1 \quad x = 3$

69. $(1, \infty)$ D

$[y/y\pm \ \pm 2\sqrt{2}]$ A

# (٦-١) العمليات على الدوال وتركيب دالتين

يمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الأعداد الحقيقية.

**مفهوم أساسي** **العمليات على الدوال**

إذا كانت $f, g$ دالتين بتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم $x$ الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

**الجمع:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

**الطرح:** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = \sqrt{x+2}, h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2 + 4x) + (\sqrt{x+2})$$
$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال الدالة $f$ هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة $g$ هو $[-2, \infty)$؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي $f, g$ وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f-h)(x)$

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (x^2 + 4x) - (3x - 5)$$
$$= x^2 + 4x - 3x + 5$$
$$= x^2 + x + 5$$

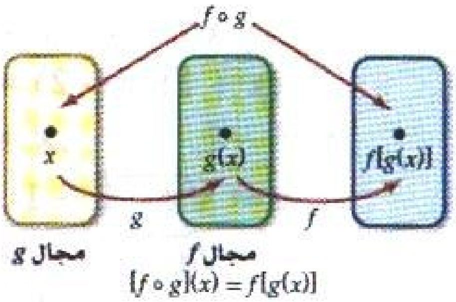
مجال كل من $f, h$ هو $(-\infty, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

**مفهوم أساسي** **تركيب دالتين**

يعرف تركيب الدالة $f$ مع الدالة $g$ على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم $x$ في مجال الدالة $g$ على أن تكون $g(x)$ في مجال $f$.




إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f(x-4)$$
$$= (x-4)^2 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 16 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 17$$

b) $[g \circ f](x)$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1) - 4$$
$$= x^2 - 3$$

# تدريب ومسائل

1. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+4}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x^2+4}$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x})$ $R-[0]$

$= x+4$ $R-[-4]$ المجال

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 4 - \sqrt{x}$

$= x^2 + 4 - x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + 4$ $R-[-4]$المجال

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + s + x^{\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{5}{2}} + 4$ $R-[-4]$ المجال

2. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{8-x^3}{x-3}$ $R-[3]$ المجال

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x-3) - 8 - (x-3)^3$

$R-[3]$ المجال

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$= 8 - x^3 - x + 3 = 11 - x^4$ $R-[11]$ المجال

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= 8 - x^3 + x - 3 = 5 - x^2$ $R-[\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ المجال

3. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+5x+6}{x+2} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)}$

$= (x+3)$ $R-[-3]$ المجال

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+2)$

$= (x+2)^2 + 5(x+2) + 6$ $R-[-4, -5]$ المجال

$= x^2 + 4x + 4 + 5x + 10 + 6 = x^2 + 9x + 20$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x2 + 5x + 6 - x - 2$

$= x^2 + 4x + 4$ $R-[-2]$ المجال

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 5x + 6 + x + 2$

$= x^2 + 6x + 8$ $R-[-2, -4]$ المجال

4. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+x}{9x} = \frac{x(x+1)}{x(9)}$

$= \frac{x+1}{9}$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(9x)$ $R-[0, -\frac{1}{9}]$

$(9x)^2 + 9x = 81x^2 + 9x$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x - 9x$

$= x^2 - 8x = x(x-8)$ $R-[0,8]$ المجال

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x + 9x$

$= x^2 + 10x = x(x + 10)$ $R - [0, -10]$المجال

5. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-7}{x+7}$ $R - [7, -7]$ المجال

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+7)$

$= x + 7 - 7 = x$ $R$ المجال

$(f-g) = f(x) - g(x) = x - 7 - x - 7 = -14$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - 7 + x + 7 = 2x$ $R$

6. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{6}{x}}{x^4+x^2}$

$= \frac{6}{x^2(x^2+1)}$ $R - [0]$ المجال

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3 + x)$

$= \frac{6}{x^3+x} = \frac{6}{x\,(X^2+1)}$ $R - [0]$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$= \frac{6}{x} - x^3 - x$ $R - [0]$المجال

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= \frac{6}{x} + x^3 + x$ $R - [0]$

7. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{4}}{\frac{3}{x}} = \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^2}{12}$ $R$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\frac{3}{x}) = \frac{\frac{3}{x}}{4x} =$ $R - [0]$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{x^2+12}{4x}$

$R - [0]$

8. $\frac{f}{g}(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} = \left|\frac{1}{4x}\right|$ $R-[0]$

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(4\sqrt{x}) = 1/\sqrt{4\sqrt{x}} = 1/2x\,(1/4)$ $R-[0]$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$

$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4x}{\sqrt{x}} = \frac{1-4x}{\sqrt{x}}$ $R-[0, \frac{1}{4}]$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= \frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} = \frac{1+4x}{\sqrt{x}}$

$R - [0, -\frac{1}{4}]$

9. $\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5}-3}$ $R$- [2, -8] المجال

(fog)(x) = f(g(x)) = f( $\sqrt{x+5}-3$)

$= \sqrt{\sqrt{x+5}-3+8} = \sqrt{(x+5)^{\frac{1}{2}}+5}$

R – [-30]

(f-g)(x) = f(x) –g(x) = $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+5} - 3$

R - [-3, -5]

(f+g)(x) = f(x) + g(x)

$= \sqrt{x+8} + \sqrt{x+5} - 3$

R – [-8, -5]

10. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{\frac{x+6}{x-4}}$ R-[4]

(fog) (x) = f(g(x) = f ($\sqrt{x+4}$) = $\sqrt{(x-4)^{\frac{1}{2}}+6}$ R – [-40]

(f-g) (x) = $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-4}$ $= \sqrt{x+6} - \sqrt{x-4}$ $R - [-6,4]$

(f+g)(x) = f(x) + g(x)

$= \sqrt{x+6} + \sqrt{x-4}$ $R - [-6,4]$

11. (fog)(x) = f(4x-8)

= 2(4x-8)-3 = 8x-19

(fog)(6) = 48-19 = 29

(gof)(x) = g(2x-3)

= 4(2x-3) -8 = 8x-20

12. (fog)(x) = f(g(x)) = f(-5x+6)

= $-2(-5+6)^2 -5(-5x+6) +1$

= $-2 (25x^2-60x+36)+25x-30 +1$

= $-50x^2+120x-72+25x-30+1$

= $-50x^2+145x-101$

= $x^2-3x+2.02$

(fog)(6) = g(f(x)) = $g(-2x^2-5x+1)$

= $-5 (-2x^2-5x+1)+6$

= $10x^2+25x+1$

13. (fog)= f(g(x)) = $f(x^2+7x+11)$

$(x^2+7x+11)^2 - 16 = x^4 + 49x^2 + 121 - 16$

$= x^4 + 49x^2 + 105$

(fog)(6) = $(6)^4 + 49(6)^2 + 105 = 3165$

$(gof)(x) = g(x^2-16)$
$= (x^2 - 16)^2 + 7(x^2 - 16) + 11$
$= x^4 - 32x + 256 + 7x^2 - 112 + 11$
$x^4 + 7x^2 - 32x + 155$

14. $(fog)(x) = f(-x^2) = 2 + (-x^2)^4$
$= 2 + x^6$
$(fog)(6) = 2 + (6)^6 = 46658$
$(gof) = g(2 + x^4) = -(2 + x^4)^2$
$= -(4 + 4x + x^8)$

15. $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2-4)$
$$= \frac{1}{x^2 - 4 + 1} = \frac{1}{x^2 - 3}$$
$R - [\sqrt{3}, -\sqrt{3}]$ المجال

16. $(fog)(x) = f(x^2+6) = \frac{2}{x^2+6-3} = \frac{2}{x^2+3}$ $R$ المجال

17. $(fog)(x) = f(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4 + 4} = \sqrt{x^2} = x$ R المجال

18. $(fog)(x) = f\left(\sqrt{6 - x}\right) = \frac{5}{\sqrt{6-x}}$ $R - [6]$ المجال

19. $(fog)(x) = f\left(\sqrt{x + 8}\right) = -\frac{4}{\sqrt{x+8}}$ $R - 8$ المجال

20. $(fog)(x) = f(x^2 + 4x - 1) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ R-[-2] المجال

21. a. $\frac{v^2}{c^2} \neq 1$

b. $m(1000000) = \frac{100}{\sqrt{1 - \frac{100^2}{(3\times10^8)^2}}} \approx 100$

$m(10) = \frac{100}{(3 \times 10^8)^2} \approx 100$

c. الدالة ذات حركة ثابتة

F(x) = C

d. $m(v) = \frac{100}{f(v)}$

22. $f(x) = \sqrt{x} + 7$ , $g(x) = 4x + 2$

23. $f(x) = x - 8$ , $g(x) = \frac{6}{x+5}$

24. $f(x) = |x| - 9$ , $g(x) = 4x + 8$

25. $f(x) = [-3x]$ , $g(x) = x - 9$

26. $f(x) = \sqrt{x}$ , $g(x) = \frac{5-x}{x+2}$

27. $f(x) = x^3$ , $g(x) = \sqrt{x} + 4$

$28. f(x) = \frac{8}{x^2} \qquad , g(x) = x - 5$

$29. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \quad , g(x) = \frac{4+x}{x}$

$30. a. \qquad \gamma = \frac{h}{mv} \qquad\qquad \gamma(v) = \frac{h}{10v}$

b. $mv \neq 0$ مقام الدالة

c. $\gamma(8) = \frac{h}{m(8)} = \frac{6.626\times 10^{-34}}{10(8)} = 8.2825\times 10^{-36}$

d. $f(\gamma) = \frac{h}{mv} \qquad , g(x) = m$

31. a. $f[h(x)]$

$f(h(x)) = f(0.04x)$

$= 0.04x - 300\,000$

$h(f(x)) = h\,(x - 300000) - h[f(x)]$ تمثل الدالة بالدالة

b. $0.04(450000 - 300000) = \frac{600000}{100} = 60\%$

32. F(x) = g(x)

36. $f(x) = x - 4 = x^2 + x - 6$

$f(x) = x^2 + 2x - 2$

$f(x+1) = (x+1)^2 + 2(x+1) - 2$

$f(-6) = 36 - 12 - 2 = 22$

$f(0.5) = 0.25 + 1 - 2 = -0.75$

37. $f(x) + 2x = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$

$f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$

$f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2x^2}{x} - \frac{1}{3}$

$f(x) = \frac{2}{x^2} - 2x - \frac{1}{3}$

$f(x+1) = \frac{2}{(x+1)} - 2(x+1) - \frac{1}{3}$

$f(-6) = \frac{2}{25} + 10 - \frac{1}{3} = 9.75$

$f(0.5) = \frac{2}{2.25} - 3 - \frac{1}{3}$

$= -2.4$

38. $\sqrt{1-x} = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x}$

$f(x) = \sqrt{1-x} + 18x^2 - \frac{\sqrt{2}}{x}$

$f(x+1) = \sqrt{x} + 18(x+1) - \frac{\sqrt{2}}{x+1}$

$f(-6) = \sqrt{7} - 648 - \frac{\sqrt{2}}{-6} = 650.9$

$f(0.5) = \sqrt{0.5} + 4.5 - \frac{\sqrt{2}}{0.5} = 2.4$

39. $f(g(h))$

$f\left(g(\sqrt{x}+3)\right) = f\left((\sqrt{x}+3)^2 - 6\right)$

$f\left(x + 6\sqrt{x} + 9 - 6\right) = f(x + 6\sqrt{x} + 3)$

$= x + 6\sqrt{3} + 3 + 8 = x + 6\sqrt{x} + 11$

40. $f(g(h) = f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$= f\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3\right) = f(\frac{1}{x^2} - 3)$

$= \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2}$

41. a. $f(x) + g(x) = x^2 + x + 6$

$x + 2 + g(x) = x^2 + x + 6$

$g(x) = x^2 + 4$

b. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4}$

$g(x) = 4(x + 2)$

$g(x) = 4x + 8$

42. a. $f(g(x)) = |6x|$

$\sqrt{4g(x)} = |6x| \quad x > 0$

$4g(x) = 36x^2$

$g(x) = 9x^2$

b. $g(f(x)) = 200x + 25$

$g(\sqrt{4x}) = 200x + 25$

$g(x) = 200\sqrt{4x} + 25$

$g(x) = 200\,\frac{x^2}{4} + 25$

43. a. $f(x).g(x) = x$

$g(x) = \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x}$

b. $f(x).g(x) = 4x$

$g(x) = \frac{4x}{4x^2} = \frac{1}{x}$

44. $(f+g)(2) = 3$

45. $(f-g)(-6) = 5$

46. $(f-g)(4) = -3$

47. $\left(\frac{f}{g}\right)(-2) = 4$

48. $(fog)(-4) = -3$

49. $(gof)(6) = 9$

50. $m \neq 0$

حتى لا تصبح القسمة غير معرفة.

b. $v(145) = \frac{\sqrt{(24.9435)(303)}}{145} = 0.6$

c. $v(200) = 0.4$

عندما تزداد كتلته المولية فإن سرعته تنخفض بارتفاع كتلته المولية والعكس صحيح.

d. $f(x) = \frac{(\sqrt{24.9435)(303)}}{m} + g(m) = m$

51. $f(x) = x^2 \quad , g(x) = \sqrt{x} + 4$

$h(x) = x - 7$

52. $f(x) = \sqrt{x} \quad , g(x) = x^2 + 8$

$h(x) = x - 5$

53. $f(x) = \frac{3}{x} \quad , g(x) = x^2 + 4$

$h(x) = x - 3$

54. $f(x) = \frac{4}{x+1} \quad , g(x) = x^2$

$h(x) = \sqrt{x} + 3$

55. $(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(\sqrt{x+4} + 3)$

$= (\sqrt{x+4} + 3)^2 - 6(\sqrt{x+4} + 3) + 5$

$= x + 4 + 6\sqrt{x+4} + 9 - \sqrt{x+4} -18+5$

$= x + 4 - 4 = x$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 6x + 5)$

$= \sqrt{x^2 - 6x - 9} + 3 = \sqrt{(x-3)^2} + 3$

$= (x-3)^{\frac{5}{2}} + 3$

56. $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{16 + x^2})$

$= \sqrt{16 + x^2} + 6 = x^2 + 18.45$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x} + 6)$

$= \sqrt{16 + x + 6} = \sqrt{x + 22}$

57. $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{9-x^2})$

$= \sqrt{\sqrt{9-x^2}} = ((9-x^2)^{\frac{1}{2}}) = 9 - x^2$

$(gof)(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{9-x}$

58. $(fog)(x) = f\left(\frac{4}{4-x}\right)$

$= \frac{6}{2\left(\frac{4}{4-x}\right)+1} = \frac{6}{\frac{8+4-x}{4-x}} = \frac{6}{\frac{12-x}{4-x}}$

$= \frac{6(4-x)}{12-x} = \frac{24-x}{12-x}$

$(gof)(x) = g\left(\frac{6}{2x+1}\right) = \frac{4}{4-\frac{6}{2x+1}}$

$= \frac{\frac{4}{8x+4-6}}{2x+1} = \frac{8x+4}{8x-2} = \frac{4x+2}{4x-1}$

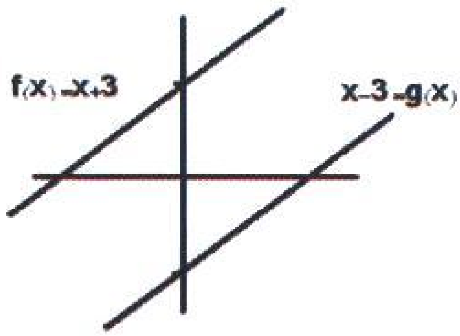
59. *a.* $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x-3)$

$= x - 3 + 3 = x$

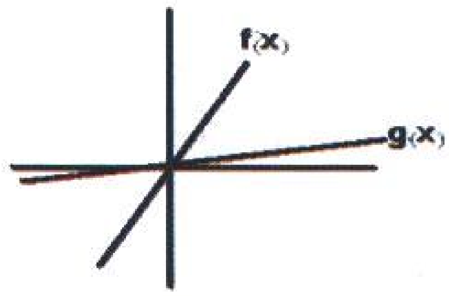
$f\left(\frac{x}{4}\right) = 4\frac{x}{4} = x$

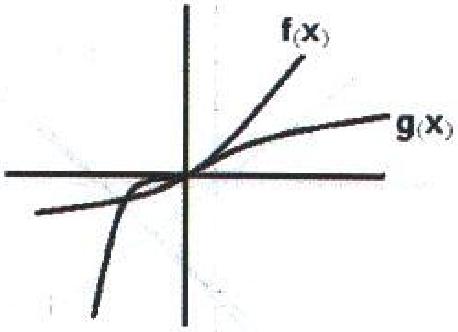
$f(\sqrt[3]{x}) = x^{\frac{1}{3}} = x$

*b.* كل زوج من الأزواج هو المكان الأخر




*c.*






d. $f(x) = -f(x)$

e. $f(x) = x$

$f.$ $\quad a. f\big(g(x)\big) = x$

$g(x) - 6 = x \ldots\ldots g(x) = x + 6$

$b.\ f\big(g(x)\big) = x$

$\frac{g(x)}{3}$ =x ..... g(x) = 3x

$c.\ f(g(x) = x$

$g(x)^5 = x \ldots \ldots \ldots g(x) = \sqrt[5]{x}$

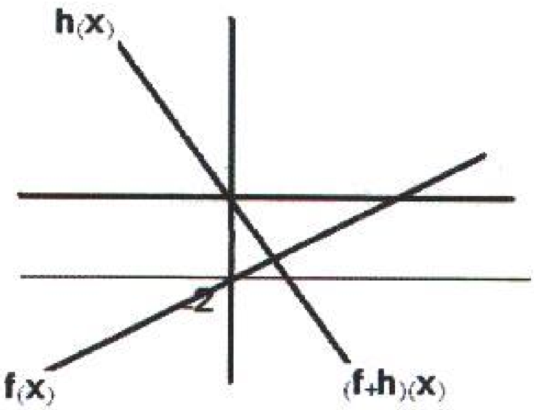
$d. f\big(g(x)\big) = x$

$2g(x) - 3 = x$

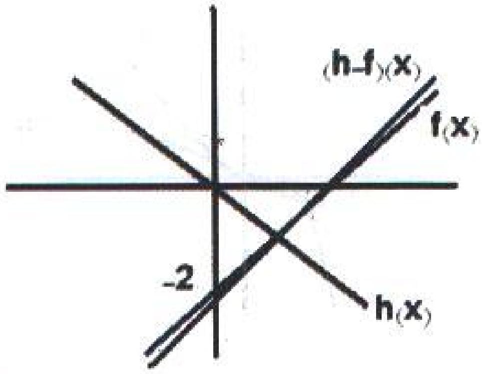
$2g(x) = x + 3$

$g(x) = \frac{x+3}{2}$

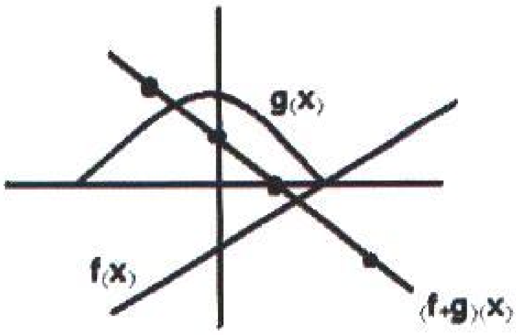
60.



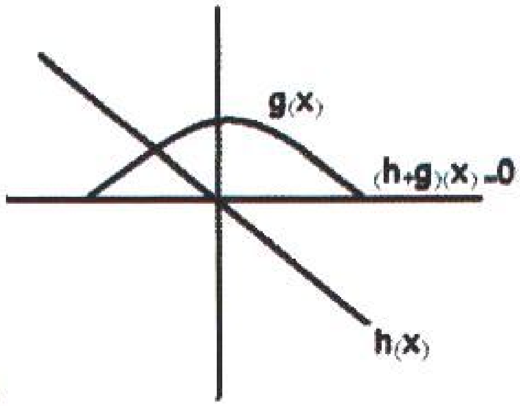
61.




62.




63.




64. R-[-6,6]

65. R-[8]

66. f(x) = -g(x) , f(g(x)) = f(-g(x))-(-g(x)) = g(x)

(fog)(x) تكون زوجية

67. f(-x) = g(x)

F(g(x) = -g(x) تكون فردية

68. f(x) = g(-x)

(fog)(x) = f(g(-x)) = g(-x)

(fog)(x) تكون زوجية

69. f(-x) =g(x)

F(g(x) = -g(x)

(fog)(x) تكون فردية

70. $f(x) = \sqrt{x}$

71. $f(x) = \frac{1}{2}x$

72. $f(x) = 1 - x$

74. $f = \sqrt{x}\ ,\ g = x^2$

$(fog)(x) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

هذه العبارة صحيحة دائماً دالة خطية.

75. $g(x) = 0\ \dots \frac{1}{x-3} = 0$

X=3 غير معرفة عند

$f(x) = 0 \dots.\ \sqrt{x-1} = 0$ ,x=1

$R - [1,3]$ المجال

76. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

$f(x) = 6x^2 - 6x = 0$

$6x(x-1) = 0$

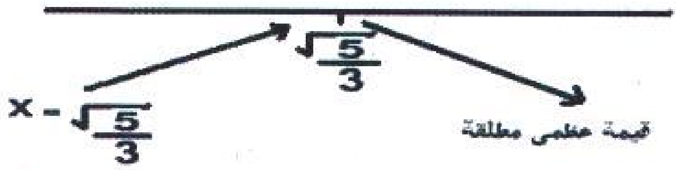
$x = 0\quad ,x = 1$


77. $g(x) = -x^3 + 5x - 3$

$g(x) = -3x^2 + 5 = 0$

$3x^2 = 5 \dots x^2 = \frac{5}{3}$

$x = \sqrt{\frac{5}{3}}$




78. $f(x) = x^4 + x^3 - 2$

$f(x) = 4x^2 + 3x^2 = 0$

$x^2(4x+3) = 0$

$x = 0\quad ,4x = -3\qquad x = -\frac{3}{4}$


x=0 قيمة عظمى مطلقة

$x = -\frac{3}{4}$ قيمة صغرى مطلقة

79. $f(x) = \frac{x^2-3}{x-4} = 0$

$x^2 - 3 = 0$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{3}$

غير معرفة $x = 4$ مرفوض

$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

80. $g(x) = \frac{x^2-2x-1}{x^2+3x} = 0$

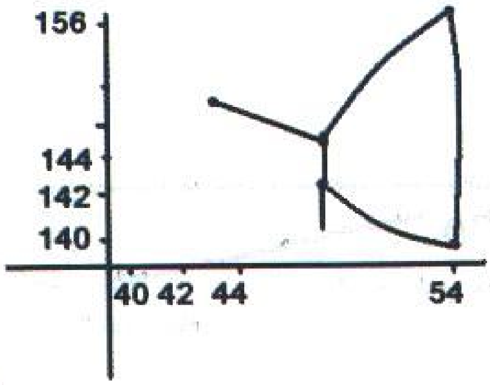
$x^2 - 2x - 1 = 0$

$x^2 + 3x = 0$ $\quad$ $x(x+3) = 0$

$x = 0\, , x = -3$

مرفوض لأنه لا تنتمي إلى $\quad$ [1,5]

81.




a.

$b. [137, 156]$ المدى

[43, 54] المجال

c. المجال دالة كثيرة حدود

82. $h(x^2 + 9x + 21)$

$2(x^2 - 10x + 25)$

$2x^2 - 20x + 50$ $\quad$ $h(x)$

$2(x^2 + 9x + 21)^2 - 20(x^2 + 9x + 21) + 50 =$

$2(x^2 + 9x + 25)^2 - 20x^2 - 180x - 370$

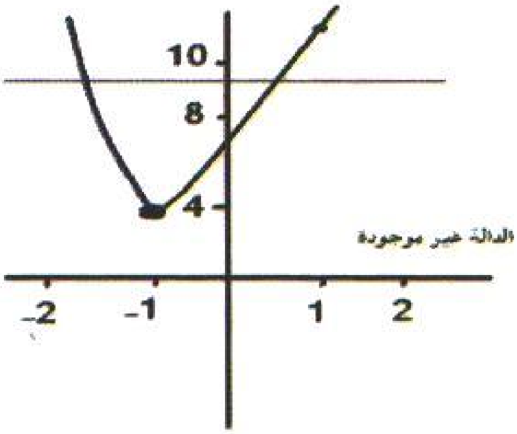
الإجابة B

83. f(g(3)) = f(2) = 3

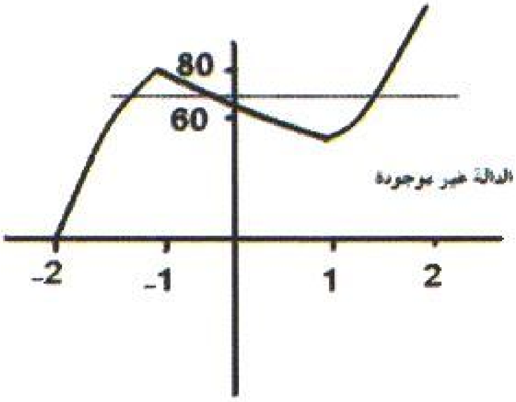
الإجابة B

# تدرب حل المسائل ص 69

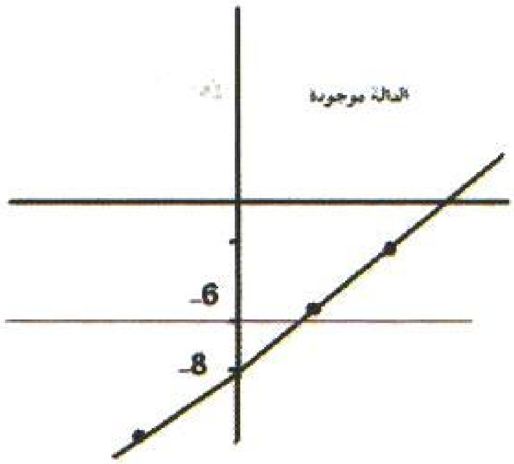
1.



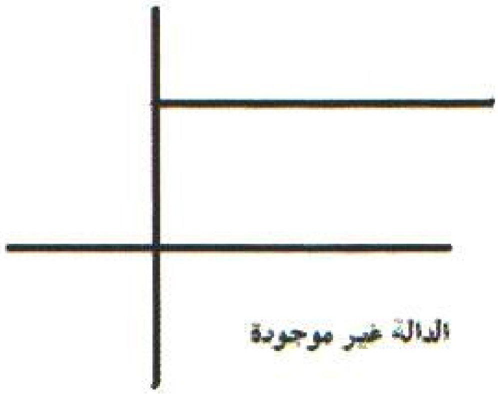

2.



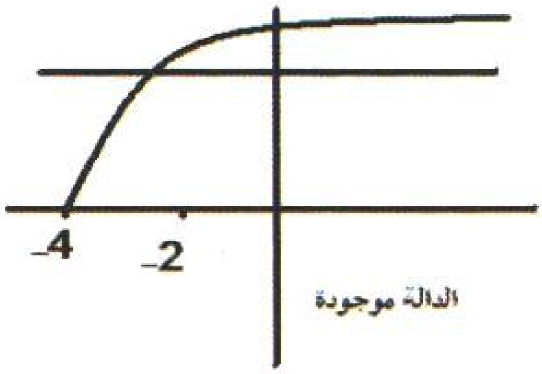

3.



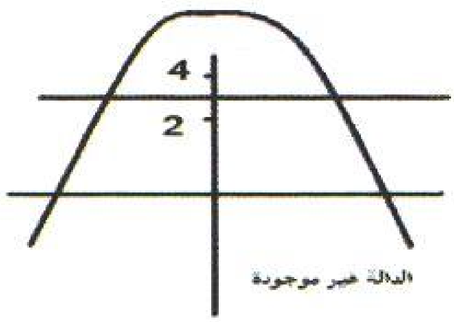

4.



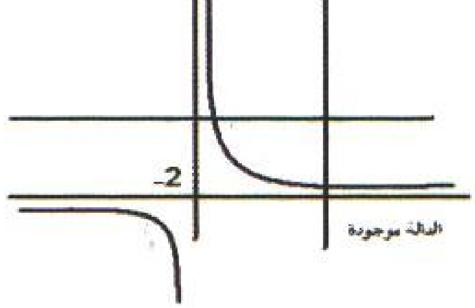

5.



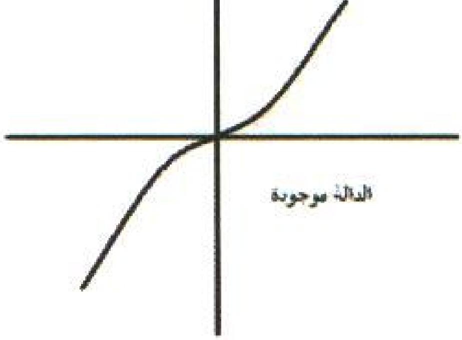

6.




7.




8.



9. $y = -3x^4 + 6x^2 - x$

$x = -3y^4 + 6y^2 - y$

$x = y^2 - 2 + \frac{1}{3y}$

$x = \frac{3y^3 - 6y + 1}{3y} = \frac{3xy}{3y} = y^2 - 2$

$x = y^2 - 3$

$y = \sqrt{x+2} \qquad R - [-2]$

10. $y = 4x^5 - 8x^4$

$x = 4y^5 - 8y^4$

$x = y - 2 \qquad y = x + 2$

11. $y = \sqrt{x+8}$

$x = \sqrt{y+8} \qquad x^2 = y + 8$

$y = x^2 - 8$

12. $y = \sqrt{6 - x^2}$

$x = \sqrt{6 - y^2}$

$x^2 = 6 - y^2$

$y^2 = 6 - x \qquad y = \sqrt{6 - x}$

13. $y = |x - 6|$

$x = |y - 6| \qquad , y > 0$

$y = x + 6 \qquad (0, \infty)$

14. $y = \frac{x-6}{x}$

$x = \frac{y-6}{y} \qquad xy = y - 6$

$xy - y = -6 \qquad y(x-1) = -6$

$y = -\frac{6}{x-1}$

15. $y = \frac{6}{\sqrt{8-x}}$

$x = \frac{6}{\sqrt{8-y}} \qquad x^2 = \frac{36}{8-y}$

$8 - y = \frac{36}{x^2}$

$y = 8 - \frac{36}{x^2} \qquad$ R-[0]

16. $y = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$

$x = \frac{7}{\sqrt{y+3}}$

$x^2 = \frac{49}{y+3}$

$y + 3 = \frac{49}{x^2}$

$y = \frac{49}{x^2} - 3 \qquad R - [0]$

17. $y = \frac{x+4}{3x-5}$

$x = \frac{y+4}{3y-5}$

$x(3y - 5) = y + 4$

$3y = \frac{y+4}{x} - 5$

$3y = \frac{y+4-5x}{x}$

18. $y = |x+1| + |x-4|$

$x = |y+1| + |y-4| \quad y > 0$

$x = y + 1 + y - 4$

X = 2y -3

$y = \frac{x+3}{2}$

$3xy - y = 4 - 5x \qquad R - [1]$

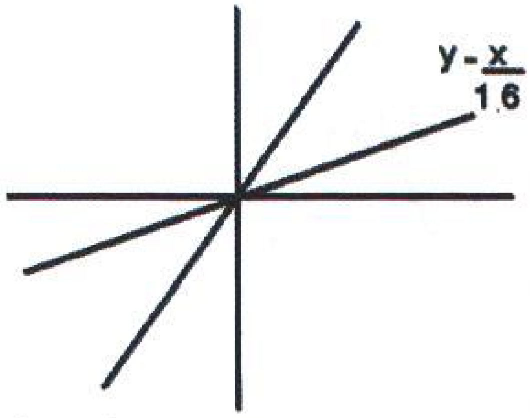
$3y(x - 1) = 4 - 5x$

$y = \frac{4-5x}{x-1}$

19. y=1.6 x

X = 1.6y

$y = \frac{x}{1.6} \qquad\qquad a.$




b.

20. $f(g(x)) = x$

$f\left(\frac{x-9}{4}\right) = 4\left(\frac{x-9}{x}\right) + 9$

x-9+9 = x

21. $f\left(\frac{\sqrt{5-x}}{3}\right) = x$

$= -3\left(\frac{\sqrt{5-x}}{3}\right) + 5 = -3 + \frac{5-x}{3} + 5$

= -5 +x+5 = x

22. $f\left(\sqrt{4x - 32}\right)$

$= \frac{4x-32}{4} + 8 = x - 8 + 8 = x$

23. $f(x^{\frac{2}{3}} - 8)$

$= \left(x^{\frac{2}{3}} - 8 + 8\right)^{\frac{2}{3}} = x$

24. $f(\sqrt[3]{\frac{x+6}{3}})$

$= 2\,\frac{x+6}{2} - 6 = x$

25. $f\left(\frac{2x+6}{1-x}\right) = \frac{\frac{2x+6}{1-x} - 6}{\frac{2x+6}{1-x} + 2}$

$= \frac{2x+6-6+6x}{2x+6+2-2x} = \frac{8x}{8} = x$

26. $y = 0.5\,m\,x^2$

$x = 0.5\,my^2$

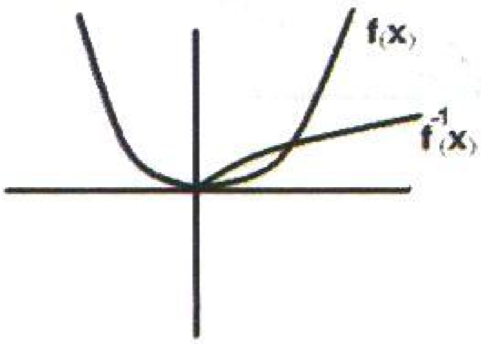
$a.\ y = \sqrt{\frac{x}{0.5m}}$

$b.\quad f(g(x)) = x$

$f(\sqrt{\frac{x}{0.5m}}$ $\qquad 0.5m + \frac{x}{0.5m} = x$

$c.\quad f(1) = 0.5x^2$

$f^{-1}(1) = \sqrt{\frac{x}{0.5}}$




42. $f(x) = |x+5| - 4 \qquad x > 0$

$y = x + 5 - 4 = 0 \qquad x = 1 \qquad R - [-1]$

y = x+1

X=y+1 $\qquad$ y= x-1

43. $a.\quad f(x) = 3x + 5x$

$b.\quad y = 3x + 5x$

$x = 3y + 5y \qquad x = 8y$

$y = \frac{x}{8}$

$c.\quad [3,5]$

$d.\quad 305 = 3x + 375$

X= 23 $\qquad$ 23 زهرة

44. $f(x) = \sqrt{x-6}$

المدى من $[0,\infty)$ والمجال من $[6,\infty)$

45. $f(x) = x^2 + 9$

المدى من $[9,\infty)$ , المجال $[R]$

46. $f(x) = \frac{3x+1}{x-4}$

المدى$R - \frac{1}{3}, 4$ $\qquad$ المجال $4$ ,$R - \frac{1}{3}$

$47. f(x) = \frac{3x+3}{2x-6}$

$R - \frac{3}{8}, 3 =$ المدى = المجال

$48. y = x^2$ $x = y^2$

$y = \sqrt{x}$

$y = -2x + 5$ $x = -2y + 5$

$x - 5 = -2y$ $y = \frac{-x+5}{2}$

49. $y = -4x + 6$

$x = -4y + 6$

$x - 6 = -4y$ $y = \frac{-x + 6}{4}$

$y = 2x - 8$

$x = 2y - 8$ $x + 8 = 2y$

$y = \frac{x + 8}{2}$

50. $r = x+50$

b. $d = \frac{x}{10}$

c. $T = rod = r(d)$

$= r\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{x}{10} - 50$

$T = \frac{x-500}{10}$

d. $T^{-1}$ $y = \frac{x-500}{10}$

$x = \frac{y - 500}{10}$

$10x = y - 500$ $y = 10x + 500$

e. $y = 7600 - 500$ $y = 7100$

51. $f^{-1}$ $y = 8x - 4$

$X = 8y-4$

$X+4 = 8y$

$Y = \frac{x+4}{8}$

$Y = 2x+6$

$X = 2y+6$

$x-6 = 2y$ $y = \frac{x-6}{2}$

$(f^{-1} \; og^{-1}) = f^{-1} \; (g^{-1})$

$$f^{-1}\left(\frac{x-6}{2}\right) \qquad \frac{\frac{x-6}{2}+4}{}$$

$$= \frac{x-6+8}{16} = \frac{x+2}{16}$$

52. $(g^{-1}\ o\ f^{-1}) = g^{-1}\,(f^{-1})$

$$g^{-1}\left(\frac{x+4}{5}\right) = \frac{\frac{x+4}{8}-6}{2} = \frac{x+4-48}{16} = \frac{x-44}{16}$$

53. $(fog)^{-1}(x) = \frac{x+2}{16}$

54. $(gof)^{-1} = \frac{x-44}{16}$

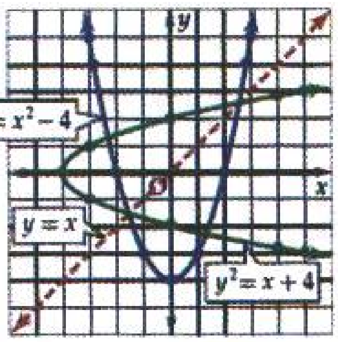
# (٧-١) العلاقات والدوال العكسية

__الدالة العكسية:__ العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B ويقال إن العلاقة A علاقة عكسية للعلاقة B إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (b,a) موجود في إحدى العلاقتين فإن (a,b) يكون موجوداً في الأخرى.

**العلاقة**

$y = x^2 - 4$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −3 | 5 |
| −2 | 0 |
| −1 | −3 |
| 0 | −4 |
| 1 | −3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 5 |




**العلاقة العكسية**

$y^2 = x + 4$ أو $x = y^2 - 4$

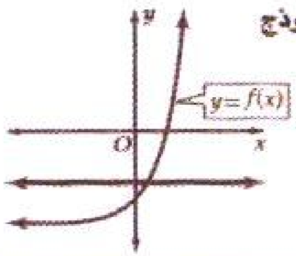
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 5 | −3 |
| 0 | −2 |
| −3 | −1 |
| −4 | 0 |
| −3 | 1 |
| 0 | 2 |
| 5 | 3 |

**مفهوم أساسي** — **اختبار الخط الأفقي**

**التعبير اللفظي:** يوجد للدالة $f$ دالة عكسية $f^{-1}$ إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

**مثال:** بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $f$ بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية $f^{-1}$ موجودة.

**نموذج**




**مفهوم أساسي** — **تركيب الدالة ودالتها العكسية**

تكون كل من الدالتين $f$ و $f^{-1}$، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f\,[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم $x$ في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم $x$ في مجال $f(x)$.

**أثبت جبريًا أن كلًا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.**

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وَ $g[f(x)] = x$ .

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4} = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 = x - 4 + 4 = x$$

## حلول أسئلة اختبار الفصل الأول

1. $x = y^2 - 5$

   $y = \sqrt{x+5}$

2. $x = -y^3$

   $y = -\sqrt[3]{3}$

3. $y = \sqrt{x^2 + 3}$

   $x = \sqrt{y^2 + 3}$

   $x^2 = y^2 + 3$ $\qquad$ $y = \sqrt{x^2 - 3}$

4. a. $c(x) = 3x$

   b. $c(2.5) = 3 * 2.5 = 7.5$

   c. $R - [0]$

5. R- [-3]

6. (-∞, 4]

7. $y = 4x^2 - 8x - 12$

   $x^2 - 2x - 3 = 0$

   $(x-3)(x+1) = 0$

   $x = 3 \quad , x = -1$

8. $y = x^3 + 4x62 + 3x$

   $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

   $x^2 + 4x + 3 = 0$

   $(x+3)(x+1) = 0$

   $x = -3 \qquad x = -1$

9. $-x^2 - 2 = yx$

   $y = \frac{-x^2-2}{x} = -(x + \frac{2}{x})$

   الاجابة $A$

10. $f(3) = f(3^-) = f(3^+)$

$9 - 3 = 2(3) = 9 - 3$

$6 = 6 = 6$

متصلة عند X=3

لا نهائي

11. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

$f(x) = \frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

$f(3) = \frac{1}{6}$

متصلة قابل للإزالة.

12. $\frac{f(6)-f(-2)}{8} = -157$

13. $\frac{f(6)-f(-2)}{8} = \frac{5}{8} = 0.25$

14. (-∞, 6) متزايد

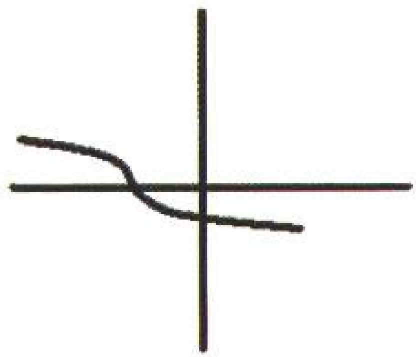
(6, ∞) متناقص

15. $(3,6) \cup (+3, \infty)$ متزايد

$(-\infty, -3) \cup (6,3)$ متناقص

16. $f(x) = |x + 4| - 3$ الاجابة $C$

17. $x^3$ الدالة الأم



18. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-6}{x^2-36} = \frac{(x-6)}{(x-6)(x+6)} = \frac{1}{x+6}$

19. $(gof)(x) = g(f(x))$

$g(x-6) = (x-6)^2 - 36$

$= x^2 - 12x + 36 - 36 = x^2 - 12x$

20. a. $c = \frac{5}{9}(F - 32)$

b. $(fog)(F) = C$

$f(F) = \frac{5}{9}F$

$g(F) = F - 32$

21. $f(x) = (x-2)^3$
$y = (x-2)^3$
$x = (y-2)^3$
$\sqrt[3]{x} = y - 2$ $\qquad y = \sqrt[3]{x} + 2$
R- [-8] المجال
22. $y = \frac{x+3}{x-8}$
$x = \frac{y+3}{y-8}$
$x(y-8) = y+3$
$xy - 8x = y + 3$
$xy - y = 3 + 8x$
Y(x-1)=3+8x
$y = \frac{3+8x}{x-1}$
$R - \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$ المجال
23. $y = \sqrt{4-x}$
$x = \sqrt{4-y}$
$x^2 = 4 - y$ $\qquad y = 4 - x^2$
$R - [2]$المجال
24. $y = x^2 - 16$
$x = y^2 - 16$
$y^2 = x + 16$
$y = \sqrt{x+16}$
$R - 16$المجال

# الفصل الثاني
# العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

# (١-٢) تمثيل الدوال الأسية بيانياً

تسمى الدالة التي على الصورة $y = 5^x$ ، حيث الأساس عدد ثابت، والأس هو المتغير المستقل بالدالة الأسية، وأحد أنواع الدوال الأسية هو دالة النمو الأسي التي تكتب على الصورة $f(x) = b^x$ حيث $b>1$

**مفهوم أساسي** الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسي

**الدالة الرئيسة (الأم):** $f(x) = b^x, b > 1$

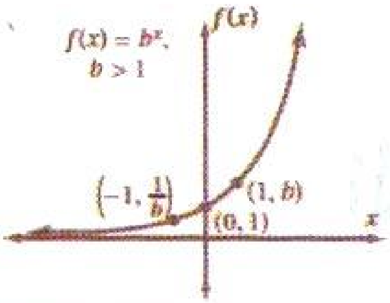
**خصائص منحنى الدالة:** متصل، متباين، متزايد

**المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية

**المدى:** مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

**خط التقارب:** المحور $x$

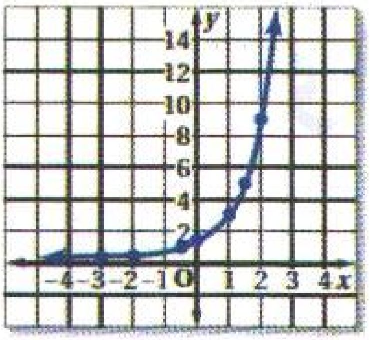
**مقطع المحور $y$:** $(0, 1)$




**مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.**

أنشئ جدول قيم، وعين النقاط ثم مثل الدالة بيانياً:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $y = 3^x$ | $3^{-3} = \frac{1}{27}$ | $3^{-2} = \frac{1}{9}$ | $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $3^0 = 1$ |
| $x$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $2$ | |
| $y = 3^x$ | $3^1 = 3$ | $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$ | $3^2 = 9$ | |




المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(R^+)$

**تنبيه!**

**النسبة المئوية** تذكّر أن جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية.

فمثلاً: $12.5\% = 0.125$

# تدرب وحل المسائل

**مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:-**

.1 $f(x) = 2^x$

X= -1, 1, 2, 3, 4, -2

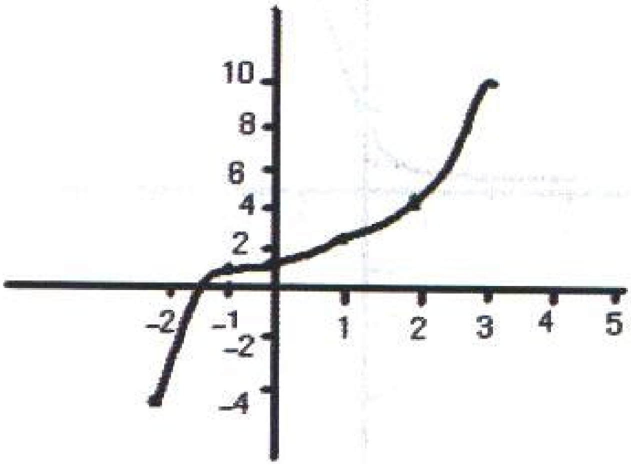
$f(x) = f(1) = 2^1 = 2$

$f(2) = 2^2 = 4$ $\quad , f(3) = 2^3 = 8$

$f(4) = 16$

$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\quad , f(-2) = 2^{-2} = -4$

مجال = R ، المدى = +R $\quad$ 2, 4, 8, 16



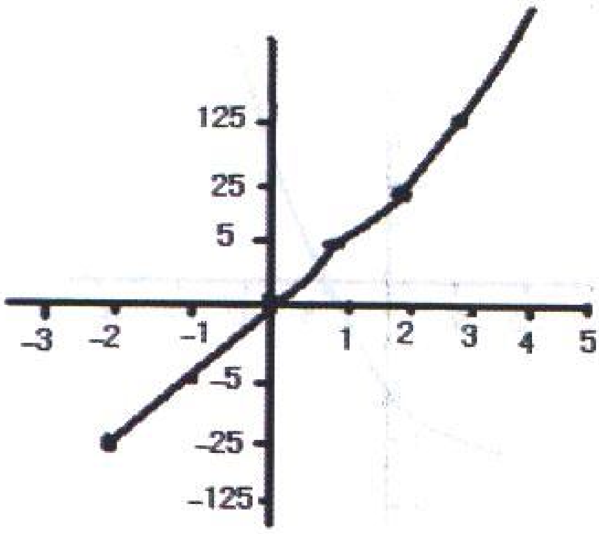

.2 $f(x) = 5^x$

المجال = R ، المدى = $R \pm$

$f(1) = 5^1 = 5$ $\quad , f(-1) = 5^{-1} = -5$

$f(2) = 5^2 = 25$ $\quad , f(-2) = 5^{-2} = -25$

$f(0) = 5^0 = 0$ $\quad , f(-3) = 5^{-3} = -125$



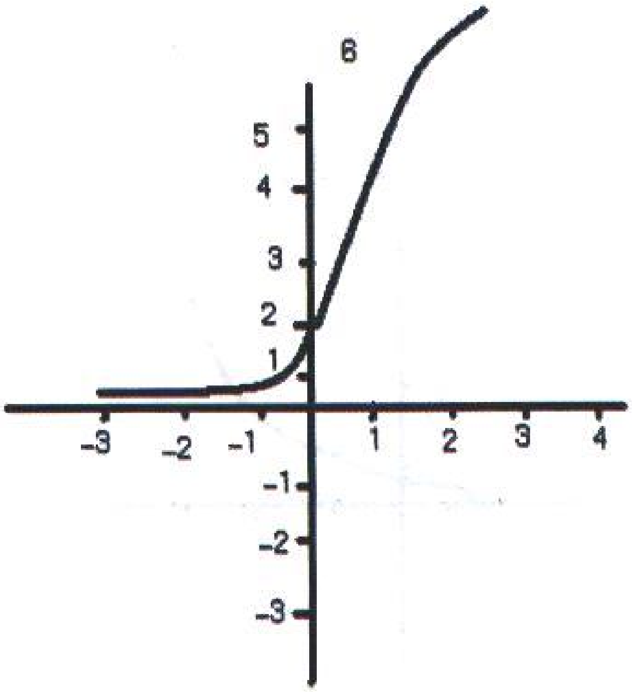
$f(x) = 2(3)^x$ .3

$$f(1) = 2(3)^1 = 6 \quad , f(2) = 2(3)^2 = 18$$

$$f(-1) = 2(3)^{-1} = \frac{2}{3} \quad , f(-2) = 2(3)^{-2} = \frac{2}{9}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = 2(3)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} \quad , f(-\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{3}$$

$$f(0) = 2(3)^0 = 2$$



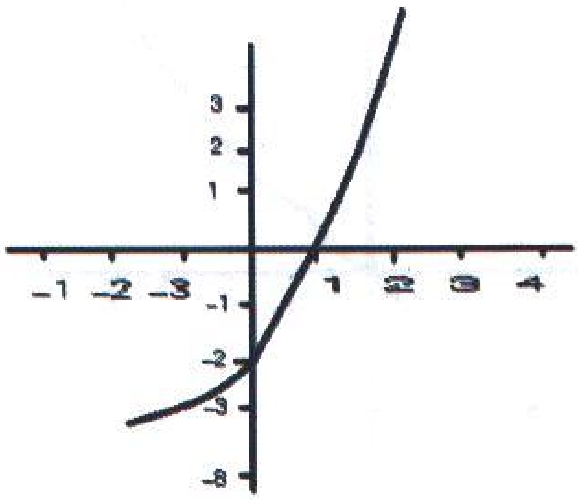

$f(x) = -2(4)^x$ .4

$$f(1) = -2(4)^1 = -8$$

$$f(-1) = -2(4)^{-1} = 8 \quad , f(0) = -2$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = -2\,(4)^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{4} = -4 \quad , f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 4$$

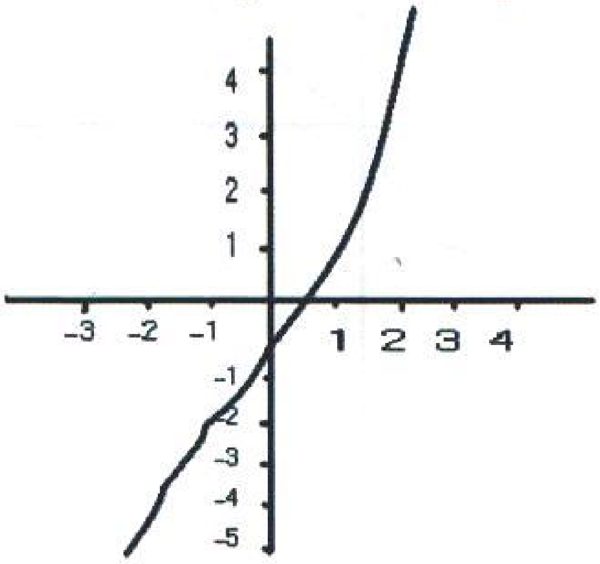
$$f(2) = -2(4)^2 = -32 \quad , f(-2) = 32$$



5. $f(x) = 4^{x+1}$

$f(1) = 11 \quad , f(-1) = -5$

$f(0) = -1 \quad , f(\frac{1}{2}) = -3 \quad , f(-\frac{1}{2}) = -3$

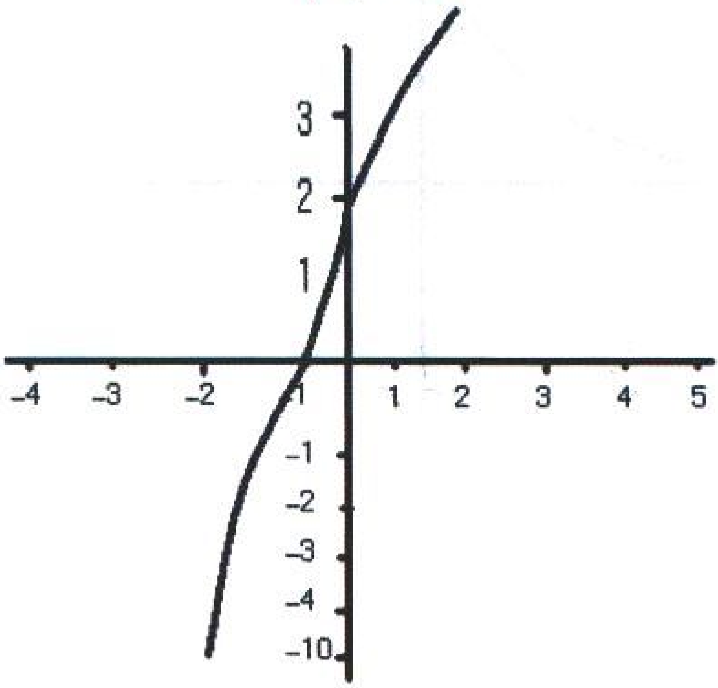



6. $f(x) = 3^{2x} + 1$

$f(0) = 2 \quad , f(1) = 3^2 + 1 = 10 \quad , f(-1) = -10$

$f(\frac{1}{2}) = 4 \quad , f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \quad , f\left(\frac{1}{6}\right) = 3^3 + 1 = 10$

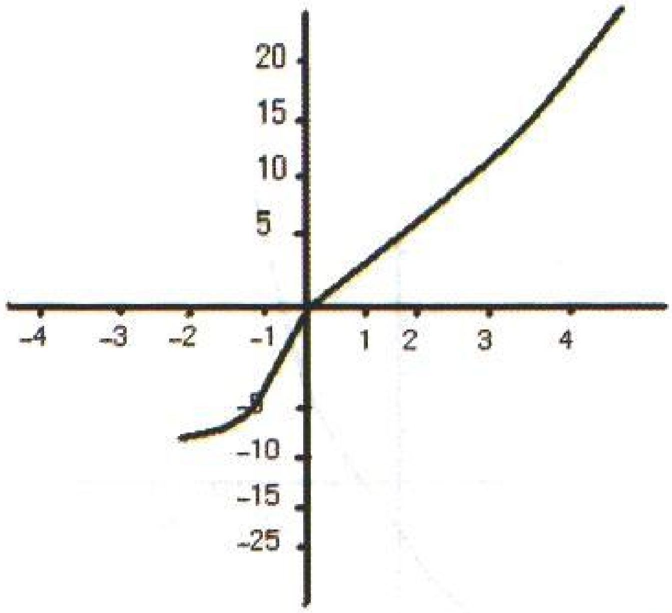
$f(-3) = -10$




7. $f(x) = 3^{x-2} + 4$

$f(0) = -9+4 = -5 \quad , f(1) = 1 \quad , f(-1) = -5$

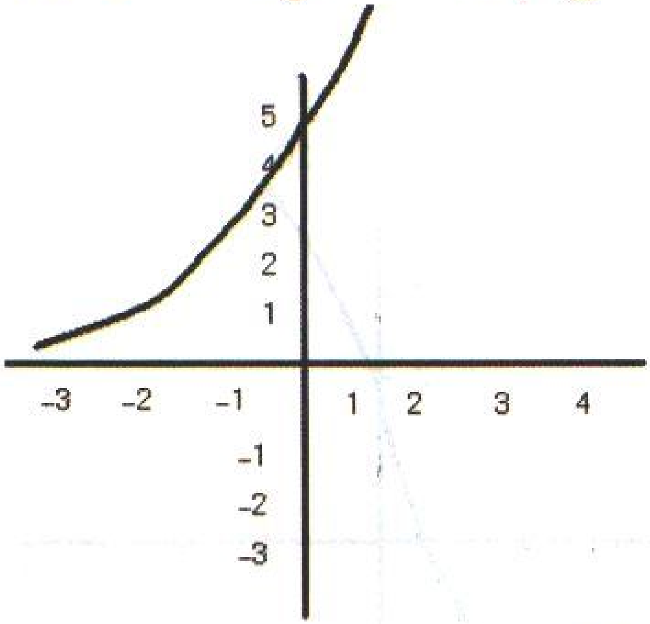
$f(\frac{1}{2}) = 3^{\frac{1}{2}} + 4 = 3^{\frac{3}{2}} + 4 \quad , f(+2) = 4 \quad , f(-2) = -7$




$f(x) = 2^{x+1} + 3$ .8

$f(1) = 16+3 = 19$ , $f(-1) = 3$

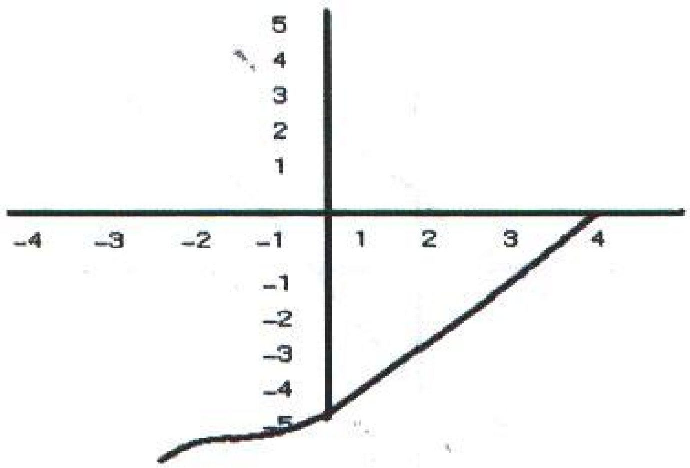
$f(0) = 5$ , $f(\frac{1}{2}) = 4$ , $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$




$f(x) = .25 \quad 4^x - 6$ .9

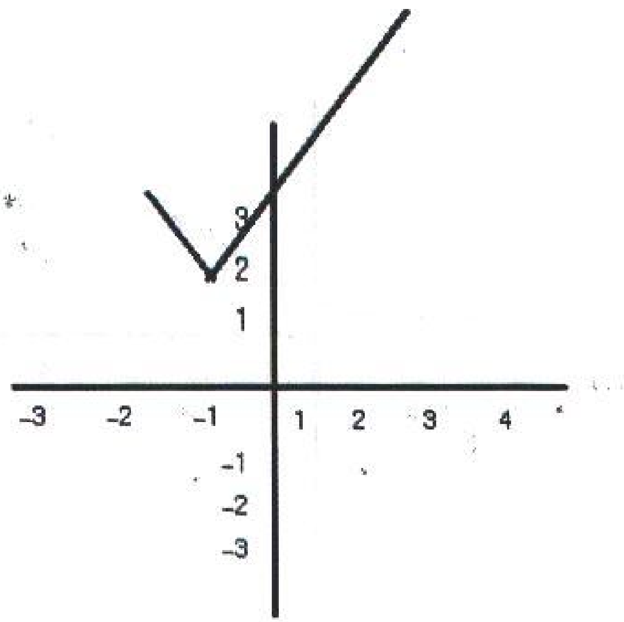
$f(0) = -5.75$ , $f(\frac{1}{2}) = .25\,(4^{\frac{1}{2}} - 6) = -5.5$

$f(-\frac{1}{2}) = -5.8$ , $f(1) = -5$ , $f(-1) = -6.25$




$f(x) = 3\,(2)^x + 8$ .10

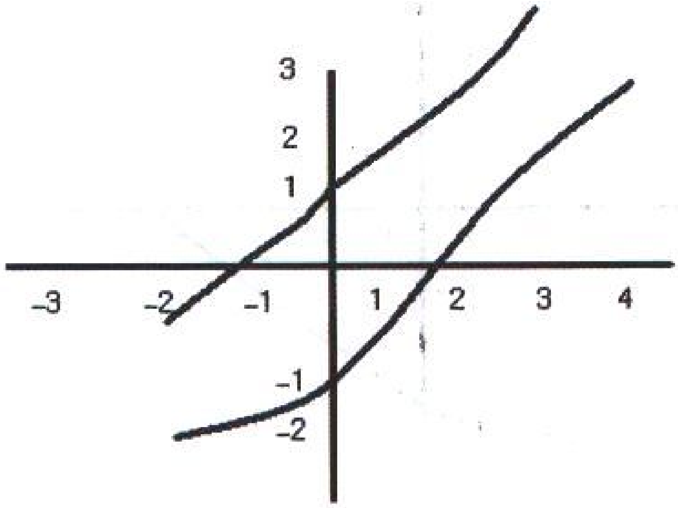
$f(1) = 3(2)^1 + 8 = 14 \quad ,f(-1) = 2 \quad ,f\left(\frac{1}{2}\right) = 11$




$f(x) = 2\,\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$ .12

$$f\left(\frac{2}{3}\right)^x = f(-1) = \frac{2}{3} \quad ,f(0) = 1 \quad ,f(2) = \frac{4}{9}$$

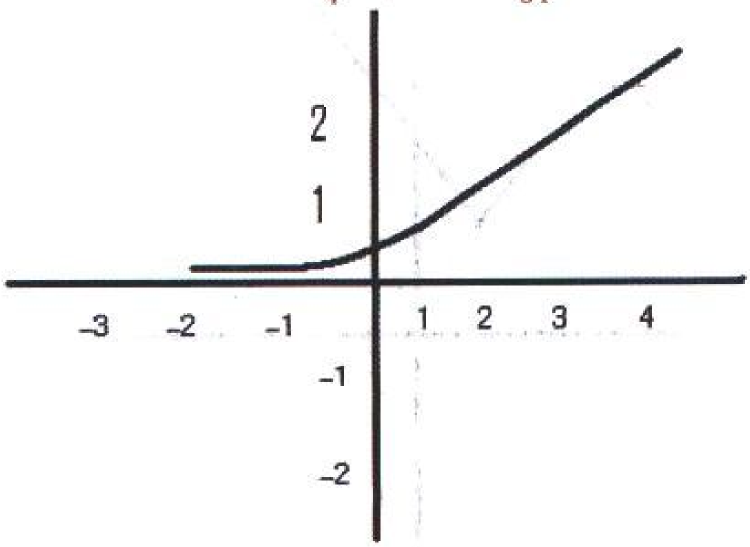
$$f(-1) = -\frac{2}{3} \quad ,f(-2) = -\frac{4}{9}$$




$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$ .13

$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \quad f(1) = \frac{3}{4} \quad , f(0) = 1$

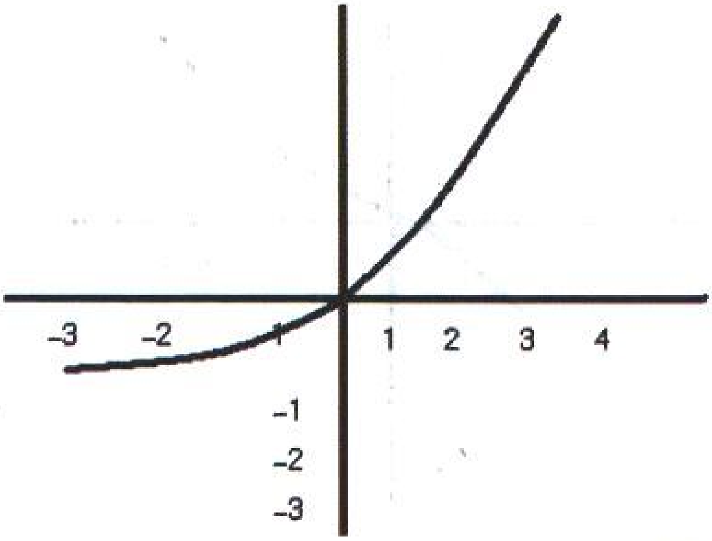
$f(-1) = \frac{3}{4} \quad , f(2) = \frac{9}{64}$




$f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{6}\right)^{x-4} + 3$ .14

$$f\left(\frac{4}{6}\right)^{x} = f(0) = 1 \quad , f(1) = \frac{4}{6} \quad , f(-1) = -\frac{4}{6}$$

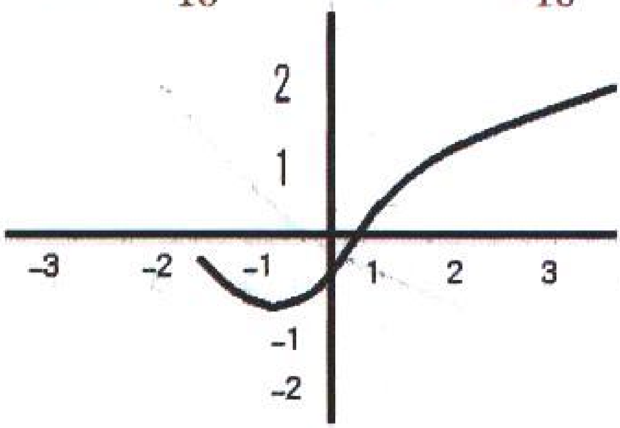
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad , \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$




$f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$ .15

$$f\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = f(0) = 1 \quad , \quad f(1) = \frac{1}{4} \quad , \quad f(-1) = -\frac{1}{4}$$

$$f(2) = \frac{1}{16} \quad , \quad f(-2) = \frac{1}{-16}$$

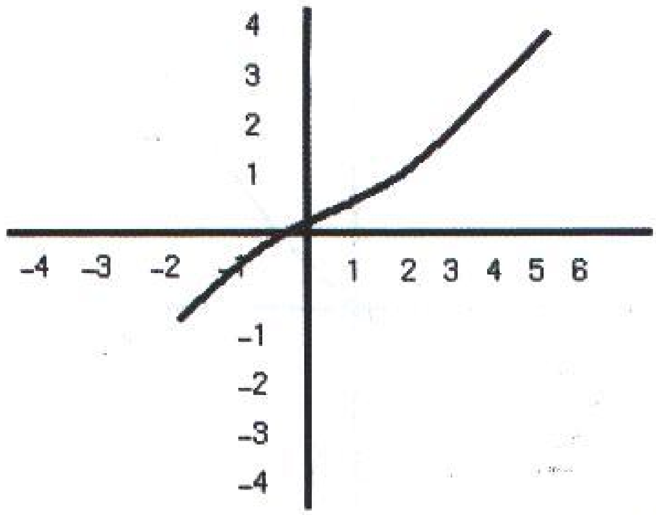



$f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$ .16

$$f\left(\frac{3}{5}\right)^{x} = f(0) = 1 \quad , f(1) = \frac{3}{5} \ , f(-1) = -\frac{3}{5}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \quad , f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \quad , f92) = \frac{9}{25}$$

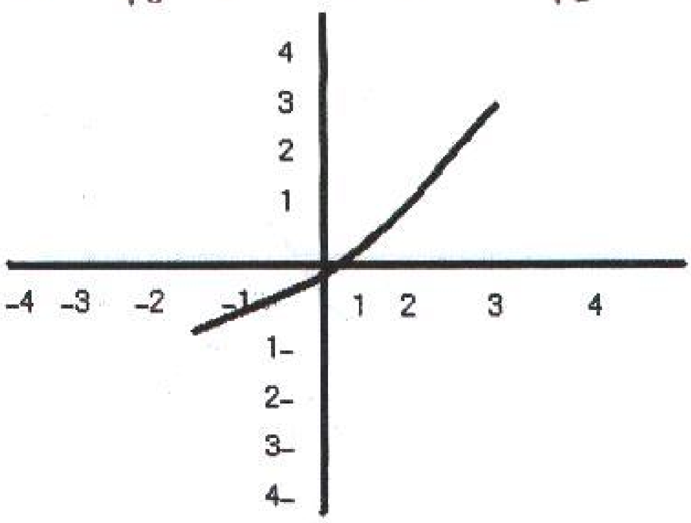
$$f(-2) = -\frac{9}{25}$$




$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$ .17

$$f\left(\frac{3}{8}\right)^{x} = f(0) = 1 \quad , f(1) = \frac{3}{8} \quad , f(-1) = -\frac{3}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} \ , \ f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{8}} = -\frac{1}{2}$$

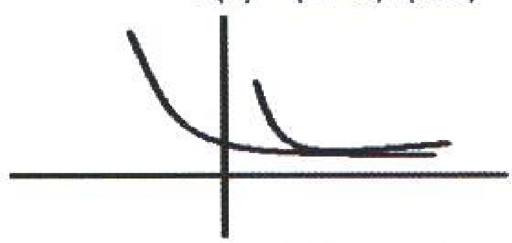



$r = 0.15$ .18

$y = a(1-r)^t = 80000(1-0.15)^t = 0.85^t$

$y(20) = 80\,000$

$P(x) = (2.28)\ (0.9)^x$ .21



$r = 0.1 \ , a = 1$ .22

$y(t) = (1-r)^t$

$= (1-0.1)^t$

$y(t) = 0.5$

$L_n\ 0.5 = L_n\,(0.9)_t$

$y = (0.9)^t$

$t = 6.6$

$y(a) = (0.9)^9 = 0.39 = 39\%$

.23 $a = 18 \ , \ b = \frac{125}{100} \times 18 = 22.5$

$a=1 \quad , b = (a + 0.25)$

$y(t) = a\,(1+r)^t$

$= 18\,(1.25)^1$

$a \to t = 0 \qquad = 18\,(1.25)^1$

$= 22.5$

$r = 0.25$

المعدل

$b = \left(\frac{100}{100} + 0.25\right)$

$b = a + 0.25\,a$

$b = a(1 + 0.25)$

$y = a\,(1+0.25)^t$

$y(10) = 18\,(1.25)^9 \quad , t = 9$

$= 134.11$

$\approx 134$

.24 $f(x) = 2^x$

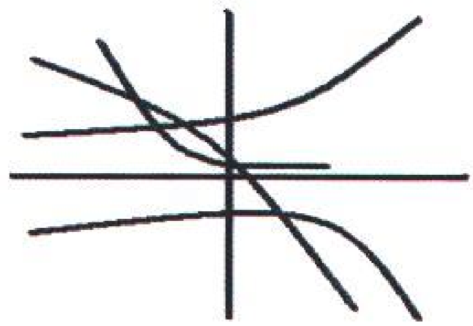
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| F(X) | | | 1 | 2 | 4 |

$g(x) = 2^{x-1}$

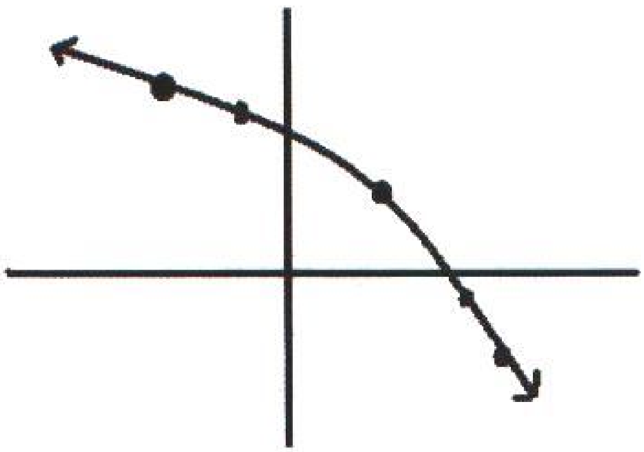
.25 $f(x) = 4^{-2}$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| F(X) | | | 1 | 4 | 16 |

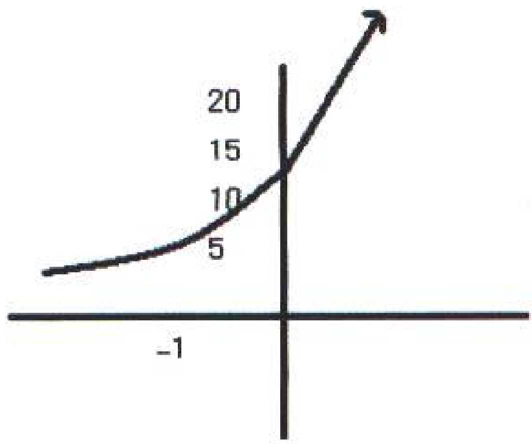
$g(x) = -4\,(4)^{x+2}$



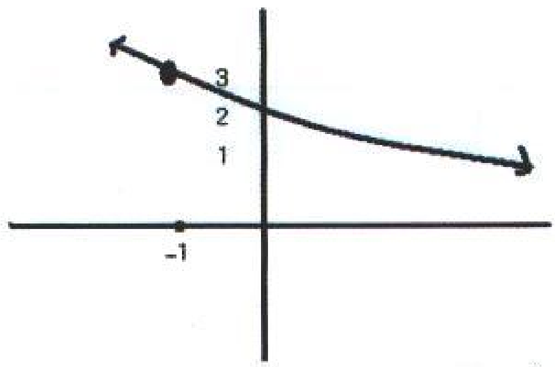
(a) .26



F(x) → $a$ (a)
سالبة



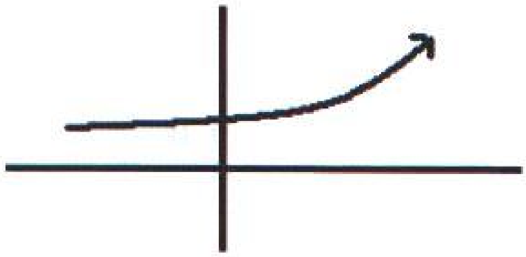

g(x) (c)




(d) F(x) نمو أسي
g(x) نمو أسي
h(x) اضمحلال أسي.

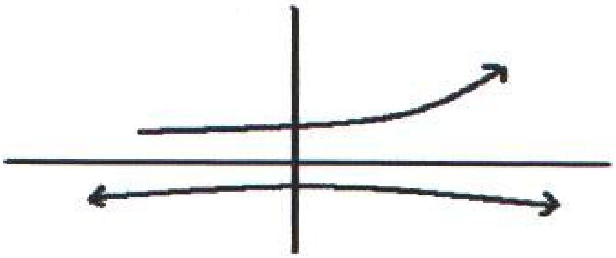
27. (a) $y = a\,b^{x-h} + k$

صحيحة دائما



(b) $y = a\,b^{x-h} + k$

صحيحة أحيانا

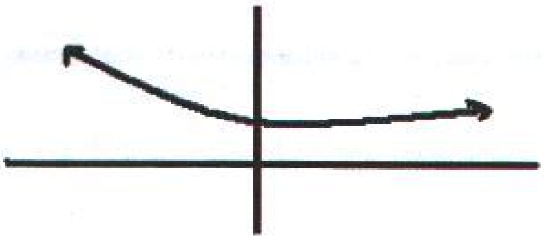


(c) $f(x) = |b|^x$

صحيحة دائما.

28. $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$

ماجد



29. $y = a\,(1-r)^t$ , $r = 0.35$

$L_n 8 = a\,(1 - 0.35)^8$

$a = \frac{8}{(1-0.35)^8} \approx 251$

30. $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$

$f(x) = \left(\frac{8}{16}\right)^x$

b= 16, 24, 32

31. $f(x) = b^x$

$= a\,b^{(x-h)} + k$

## تدريب على اختبار :-

38) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ ؟

A 3     C 1

B 2     D 0

A= 3

39) إذا كانت $g(x) = 4x$ , $f(x) = \sqrt{x+1}$ فما قيمة $(f o g)\ (2)$ ؟

A $\sqrt{3}$     B 3

B $4\sqrt{3}$     D 8

g(x) = 4 x

$f(x) = \sqrt{4x+1}$

$f(og)(2) = \sqrt{4 \times 2 + 1}$

$= \sqrt{9} = 3$

B = 3

# (٢-٢) حل المعادلات والمتباينات الأسية

**مفهوم أساسي**   **خاصية المساواة للدوال الأسية**

**التعبير اللفظي:** إذا كان $b > 0 , b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

**مثال:** إذا كان $3^5 = 3^x$ ، فإن $x = 5$ . و إذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$ .

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$

$2^x = (2^3)^3$

$2^x = 2^9$

$x = 9$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$ (b

$$9^{2x-1} = 3^{6x}$$
$$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$$
$$3^{4x-2} = 3^{6x}$$
$$4x - 2 = 6x$$
$$-2 = 2x$$
$$-1 = x$$

# تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي:-

1. $8^{4x+2} = 64$

$(2^3)^{4x+2} = 2^6 \rightarrow 2^{3(4x+2)} = 2^6$

3(4x+2) = 6

4x+2 = 2

2x+2 = 2

2x= 0

X = 0

2. $5^{x-6} = 125 \rightarrow 5^{x-6} = 5^3$

x-6 = 3 $\rightarrow x = 9$

3. $3^{5x} = 27^{2x-4} \rightarrow 3^{5x} = 3^{3(2x-4)}$

5x = 3 (2x – 4)

5x = 6x – 12

12 = 1 x

X = 12

4. $16^{2y-3} = 4^{y+1}$

4y -6 = y + 1

3y = 7

Y = $\frac{7}{3}$

5. $2^{6x} = 32^{x-2}$

$2^{6x} = 2^{5(x-2)}$

6x = 5x -10

X = -10

6. $19^{x+5} = 7^{8x-6}$

$7^{2(x+5)} = 7^{8x-6}$

2(x+5) = 8x – 6

2x +10 = 8x -6

16 = 6x

X= $\frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ , $x = \frac{8}{3}$

7. $81^{a+2} = 3^{3a+1}$

$3^{4\,(a+2)} = 3^{3a+1}$

4(a+2) = 3a+1

4a+8 = 3a+1

a= -7

8. $256^{b+2}$ = $4^{2-2b}$

$4^{4(b+2)} = 4^{2-2b}$

4b+8 = 2-2b

6b = -6

b = -1

9. $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$

$3^{2(3c+1)} = 3^{3(3c-1)}$

6c + 2 = 9c – 3

5 = 3c

c= $\frac{5}{3}$

10. $8^{2y+y} = 16^{y+1}$

$2^{3(2y+4)} = 2^{4(y+1)}$

6y + 12 = 4y + 4

2y = -8

y= -4

11. علوم: الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين تماماً للخلية الأصلية، وتنقسم إحدى أنواع الخلايا البكتيرية كل 15 دقيقة.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $c= ab^t$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق.

في الزمن 0 يوجد 1 خلية

a= 1

c= $1 \times b^{c}$

2 = 1 $b^{15}$

$$b = \sqrt[15]{2}$$

$$b= 1.047$$

$$\text{(a) } C= 1 \times (1.047)^t$$

$$\text{(b) } C = 1 \times (1.047)^{60} = 15.7$$

$$C= 15.7$$

12. مال: ورث خالد مبلغ 100000 ريال عن والده عام 1430هـ، واستثمره في مشروع تجاري، وقدر خالد أن المبلغ المستثمر سيصبح 168588 ريال بحلول 1442هـ.

**a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 1430هـ.**

$$a = 10^5 \quad , \quad c = 169588 \quad , \quad t = 12$$

$$168588 = 10^5 \times b^{12}$$

$$b^{12} = \frac{169588}{10^5} = 1.69588$$

$$b= \sqrt[12]{1.69588}$$

$$b = 1.045$$

$$\text{(a) } C= 10^5 \ (1.045)^t$$

$$\text{(b) } C = 10^5 \ (1.045)^{20}$$

$$= 10^5 \ (2.41)$$

$$C = 241171.06$$

13. استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعاً ربحاً نسبته 4.3% بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين.

$$P = 7 \times 10^4 \quad , \quad r = 0.043 \quad , \quad n = 12 \ , t = 7$$

$$A = 7 \times 10^4 \left(1 + \frac{0.043}{12}\right)^{12\times7}$$

$$= 7 \times 10^4(1.35) = 9.453378 \times 10^4$$

$$A = 94533.78$$

*14.* استثمر ماجد مبلغ *50000* ريال متوقعاً ربحاً سنوياً نسبته *2.25%* بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهرياً. كم المبلغ الكلي المتوقع بعد *6* سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

$$P = 5 \times 10^4 \quad , \quad r = 0.0225 \quad , \quad n = 24 \quad ,t = 6$$

$$A = 5 \times 10^4 \left(1 + \frac{0.0255}{24}\right)^{24\times6}$$

$$= 5 \times 10^4 \ (1.14446)$$

$$A = 57223.22$$

حل كل متباينة مما يأتي:-

15. $2^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$

$4^{2x+6} \leq 4^{3(2x-4)}$

$2x+6 \leq 3(2x-4)$

$2x+6 \leq 6x-12$

$18 \leq 4x$

$\frac{18}{4} \leq x$

$X \geq \frac{18}{4}$

16. $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$

$5^{2(y-3)} \leq \left(\frac{1}{5^3}\right)^{y+3}$

$5^{2y-6} \leq 5^{-3(y+3)}$

$2y-6 \leq -3y-9$

$5y \leq -3$

$y \leq -\frac{3}{5}$

17. $625 \geq 5^{a+8}$

$5^4 \geq 5^{a+8}$

$4 \geq a+8$

$-4 \geq a$

$a \leq -4$

18. $10^{5b+2} > 1000$

$10^{5b+2} > 10^3$

$5b+2>3$

$5b>1$

$b>\frac{1}{5}$

19. $\left(\frac{1}{2^6}\right)^{c-2} < 2^{5(2c)}$

$2^{-6(c-2)} < 2^{10c}$

$-6c+12 < 10c$

$12 < 16c$

$\frac{12}{16} < c$

$c > \frac{12}{16}$

$\left(\frac{1}{3^2}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{3^5}\right)^{t-6}$ .20

$3^{-2(3t+5)} \geq 3^{-5(t-6)}$

$-6t-10 \geq -5t + 30$

$-40 \geq 6t - 5t$

$-40 \geq t \rightarrow \quad t \leq -40$

**اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:-**

$a = (0, 6.4) \ , b(3, 100)$ .21

$$a = 6.4$$

$$100 = 6.4 \times b^3$$

$$\frac{100}{6.4} = b^3 \rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{100}{6.4}} = 2.5$$

$$c = 6.4\,(2.5)^x$$

$a = 256 \ , c = 81 \ , x = 4$ .22

$$81 = 256\, b^4$$

$$b^4 = \frac{81}{256} \rightarrow b = 0.75$$

$$c = 256\,(0.75)^x$$

.23 $a = 128 \ , c = 371293 \ , x = 5$

$$371293 = 128\, b^5$$

$$b = \sqrt[5]{\frac{371293}{128}} = 4.9$$

$$c = 128\,(4.9)^x$$

$a = 144 \ , c = 21609 \ , x = 4$ .24

$$c = ab^x$$

$$21609 = 144 \times b^4$$

$$b^4 = \frac{21609}{144} \rightarrow b = \sqrt[4]{\frac{21609}{144}}$$

$$b = 3.5$$

$$c = 144\,(3.5)^x$$

25. وضع كوب من الشاي درجة حرارته $90c$ في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي $20c$ فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد $t$ دقيقة بالدالة

$$y(t) = 20 + 70\,(1.071)^{-t}$$

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة.

$$y(15) = 20 + 70\,(1.071)^{-15}$$
$$= 20 + 25.02$$
$$y = 45.02$$

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة.

$$= 20 + 8.442$$
$$y(30) = 28.94$$

c) $y(10) = 20 + 70(1.071)^{-10}$

$$= 20 + 35.25$$
$$y(10) = 55.25$$

درجة الحرارة أقل من 60

26. أشجار: يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طردياً مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعاً للأس 2/3 إذا بلغ ارتفاع شجرة 6m وقطر قاعدة جذعها 19.1cm اكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة إذا كان ارتفاعها h متر.

$$y_{cm} \propto X_{m}^{\frac{2}{3}}$$
$$x = 6m \quad , \quad y = 19.1$$
$$y = 6 \times b^{\frac{3}{2}}$$
$$19.1 = 6 \times b^{\frac{3}{2}}$$
$$b = \sqrt[3]{\left(\frac{19.1}{6}\right)^2}$$
$$b = 2.164$$

نستبدل الرموز $d \to y$ و $h \to b$

$$d = h\,(2.164)^{\frac{3}{2}}$$

**حل كل معادلة فيما يأتي:-**

27. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

$$2^{-1(4x+1)} = (2)^{3(2x+1)}$$
$$-4x - 1 = 6x + 3$$
$$-4 = 10x$$

$$x = -\frac{4}{10}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2} \quad .28$$

$$5^{-1(x-5)} = 5^{2(3x+2)}$$

$$-x + 5 = 6x + 4$$

$$1 = 7x$$

$$x = \frac{1}{7}$$

$$216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3} \quad .29$$

$$6^3 = 6^{-(x+3)}$$

$$3 = -x - 3$$

$$X = -6$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4} \quad .30$$

$$2^{-3(3x+4)} = 2^{-2(-2x+4)}$$

$$-9x - 12 = 4x - 8$$

$$-4 = 5x$$

$$X = \frac{-4}{5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4} \quad .31$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right)^{x-4}$$

$$5x+1 = -3(x-4)$$

$$5x+1 = -3x + 12$$

$$8x = 11$$

$$X = \frac{11}{8}$$

$$\left(\frac{25}{91}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1} \quad .32$$

$$\left(\left(\frac{5}{9}\right)^{2}\right)^{2x+1} = \left(\left(\frac{9}{5}\right)^{3}\right)^{-3x+1}$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)^{2(2x+1)} = \left(\left(\frac{5}{9}\right)\right)^{-3(-3x+1)}$$

$$2(2x+1) = -3(-3x+1)$$

$$4x+2 = 9x-3$$

$$5 = 5x$$

$$X = 1$$

33) سكان: بلغ عدد سكان العالم عام 1950م ، 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار. اكتب المعادلة بدلالة $x$ ، حيث $x$ عدد السنوات منذ عام 1950م (قرّب قيمة $b$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف)

b) افرض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدّر عدد سكان العالم عام 2000 .

c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان.

d) استعمل المعادلة التي توصلت إليها في فرع a لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضح إجابتك.

.33 $a = 2.556 \quad , c = 4.458$

$$X = 30$$

$$c = ab^x$$

$$4.458 = 2.556 \ b^{30}$$

$$b = \sqrt[30]{\frac{4.458}{2.556}} \qquad b = 1.0187$$

$$C = 2.556\ (1.0187)^x$$

b) $c = 2.556\ (1.0187)^{50}$

$C = 6.455$

c) العدد الحقيقي > العدد التقديري

العدد الحقيقي – العدد التقديري = الفرق بينهم

$$X = 6.455 - 6.08 = 0.375$$

$$\text{نسبة الخطأ} = \frac{\text{العدد التقديري}}{\text{العدد الحقيقي}} = \frac{6.08}{6.455}$$

$$= 0.94$$

d) $C = 2.556\ (1.0187)^{70}$

$$C = 9.35$$

العدد التقديري : العدد الحقيقي

في العام 2000 $6.455 \ : \ 6.08$

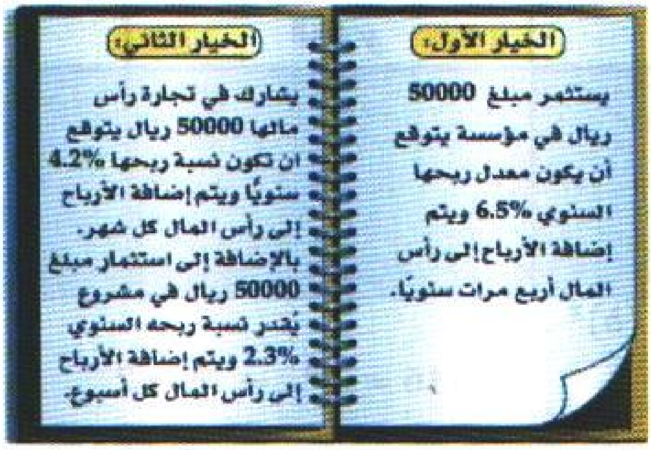
$$Y: \ 9.35$$

$$y = \frac{9.35 \times 6.08}{6.455}$$

$$Y = 8.80$$

يوجد زيادة في التقدير طبقاً لنسبة الخطأ في تقدير السكان عام 2000

34. ثقافة مالية: يفاضل سعيد بين خيارين للاستثمار طويل الأمد ويريد أن يختار أحدهما.




a. $P = 5x10^4$

$R = 0.065$

$N=4$

$(t)$

$P= 5x10^4$

$R= 0.042$

$N = 12$

$P= 5x10^4$

$R = 0.023$

$N = 48$

$$A = 5 \times 10^4 \left(1 + \frac{0.065}{4}\right)^{4t}$$

$$A = 5 \times 10^4 \left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12t} + 5\times 10^4 \left(1 + \frac{0.021}{48}\right)^{48t}$$

a) التمثيل البياني

b) $5 \times 10^4 \left(1 + \frac{0.065}{4}\right)^{4t} = 5 \times 10^4 \left[\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12t} + \left(1 + \right.\right.$

$0.0234848t$

$$\left(1 + \frac{0.065}{4}\right)^{4t} = \left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12t} + \left(1 + \frac{0.023}{48}\right)^{48t}$$

$$(1.01625)^{4t} = (1.0035)^{12t} + (1.00047)^{48t}$$

$$4t\ \ln(1.01625) = 12t \ln(1.0035) + 48t\ \ln(1.0047)$$

$$0.016119 = 0.00349 + 0.000464$$

$$0.016119 \neq 0.0039$$

لا يمكن أن يتساوى المبلغان.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

*b)*

| القص$X$ | العدد $y$ | السمك |
|---|---|---|
| 1 | 2 | $2 \times 3 \times 10^{-3}$ |
| 2 | 4 | $4 \times 3 \times 10^{-5}$ |
| 3 | 8 | $8 \times 3 \times 10^{-3}$ |
| 4 | 16 | $16 \times 3 \times 10^{-3}$ |

*c)* $y = 1\,(b)^x$

$$16 = b^4 \;\rightarrow\; b = 2$$
$$y = 2^x$$

*c)* $3 \times 10^{-3}$ سمك الورقة الواحدة

السمك الكلي $k = 3 \times 10^{-3}(2)^x$

*d)* $K = 3 \times 10^{-3} \times 2^{30}$

$= 3221225.472$ in

**حل المعادلة الأسية التالية:-**

.37 $4 \times 16^{18} = 4^x - 16^{18}$

$$4 \times 16^{18} = 4^x - 4^{36}$$
$$4 \times 4^{36} = 4^x - 4^{36}$$
$$4^{37} = 4^x - 4^{36}$$
$$4^{37} + 4^{36} = 4^x$$

.38 اكتب معادلة أسية يكون حلها

$X = 2$

$$25^x = 5^4$$
$$5^{2x} = 5^4 \rightarrow x = 2$$

.39 أثبت أن $27^{2x} . 8^{x+1} = 3^{2x+2} . 9^{4x+1}$

$$3^{3(2x)} . (3)^{4(x+1)} = 3^{2x+2} . 3^{2(4x+1)}$$
$$6x + 4x + 4 = 2x + 2 + 6x + 2$$
$$10x + 4 = 8x + 4$$
$$2x = 0$$
$$X = 0$$

عندما $x = 0$

**.40 حدد إذا كانت العبارات الآتية صحيحة دائما أو صحيحة أحيانا أو غير صحيحة أبدا. وضح إجابتك.**

$$2^x > -(8^{20x})$$

a) $2^x > -((3)^3)^{20x}$

$2^x > -(2)^{60x}$

$2^x > -2^{60x}$

$2^x > -(2)^{x\,60}$

$a =$ سالبة , $k = 0$

تنعكس عند محور x

صحيحة دائما

b) $a<0$ صحيحة أحيانا عندما تصبح متناقصة

c) صحيحة أحيانا عندما $a<0$ تصبح متزايدة

**حل كل معادلة مما يأتي:-**

.44 $a\ \sqrt{x+5} - 3 = 0$

$\sqrt{x+5} = 3$

$\left((x+5)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (3)^2$

X +5 = 9

X = 4

.45 $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$

$\sqrt{3t-5} = 7$

$(3t-5)^{\frac{1}{2}} = 7$

3t – 5 = 49

3 t = 54

t = 18

.46 $\left(\sqrt[4]{2x-1}\right)^4 = (2)^4$

2x- 1 = 16

2x = 17

$X = \frac{17}{2}$

.47 $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$

$\left((5x+7)^{\frac{1}{5}}\right)^5 = (2)^5$

5x + 7 = 32

5x = 25

X = 5

.48 $(3x-2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$

$\left((3x-2)^{\frac{1}{5}}\right)^5 = (-1)^5$

3x – 2 = -1

3x = 1

$X = \frac{1}{3}$

.49 $(7x-1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$

$\left((7x-1)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (-2)^3$

7x-1 = -8

7x = -7

X = -1

.50 $h(x) = 2x - 1$

g(x) = 3x+4

[ hog ] (x) = 2 (3x+4)-1

= 6 x + 8 -1

= 6x +7

$[goh](x) = 3\ (2x-1) +4$

$= 6x -3 +4$

$= 6x + 1$

**أوجد $[g \circ h](x)$ , $[h \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية:**

.51 $h(x) = x + 4$

$g(x) = |x|$

$$g(x) = \begin{cases} x & ,x \geq 0 \\ -x & ,x < 0 \end{cases}$$

$$(hog)\ (x) = \begin{cases} x+4 & ,x \geq 0 \\ -x+4 & ,x < 0 \end{cases}$$

$$(goh)\ (x) = \begin{cases} x+4 & ,x \geq 0 \\ -x-4 & ,x < 0 \end{cases}$$

**أوجد معكوس كل دالة مما يأتي:**

.52 $f(x) = 2x + 1$

$y = 2x + 1$

$y - 1 = 2x$

$x = \frac{y-1}{2}$

.53 $g(x) = -2\,x^2$

$g= -2x^2$

$$-2x^2 = g \rightarrow x^2 = \frac{g}{-2} \rightarrow x = \sqrt{-\frac{g}{2}}$$

$g<0$

.54 $7^{x-1} + 7 = 8$

$7^{x-1} = 1$

$7^{x-1} = 7^0$

$X - 1 = 0$

$X = 1$

.55 $f(x) = 5x$

$f[f(-1)]$

$f(f(x)) = 5\ (5x) = 25x$

$f(f(-1)) = (25x -1\ ) = - 25$

الإجابة هي A

$P_5 = \log_{10} R$

$f(x) = 2^x$

$x = 2^y$

$y= \log_b{}^x$

$b^y = x \quad , \quad y = \log_b x$

$\log_3 27 = y \qquad , 3^y = 27$

$\log 8 = 3 \qquad x = 2^3$

$X = b^y \qquad x = 2^3$

$log_4 16 = 2 \qquad log_4 \frac{1}{256} = -4$

$16 = 4^2 \qquad \frac{1}{256} = 4^{-4}$

$\text{Log}_3 729 = 6$

$729 = 3^6$

## (٣-٢) اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

**يمكنك تمثيل معكوس الدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانياً من خلال تبديل قيم x، y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.**

### مفهوم أساسي — اللوغاريتم للأساس $b$

**التعبير اللفظي:** إذا كان $x, b$ عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم $x$ للأساس $b$ بالرمز $\log_b x$، ويُعرف على أنه الأس $y$ الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

**الرموز:** افرض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن لكل $x > 0$ يوجد عدد $y$ بحيث

$$b^y = x \quad \longleftrightarrow \quad \log_b x = y$$

**مثال:** $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$

## الخصائص الأساسية للوغاريتمات

### مفهوم أساسي — الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، $x$ عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

| الخاصية | التبرير |
|---|---|
| $\log_b 1 = 0$ | $b^0 = 1$ |
| $\log_b b = 1$ | $b^1 = 1$ |
| $\log_b b^x = x$ | $b^x = b^x$ |
| $b^{\log_b x} = x, x > 0$ | $\log_b x = \log_b x$ |

أوجد قيمة كل مما يأتي:

**a)** $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $\qquad 5^3 = 125$

$= 3$ $\qquad \log_b b^x = x$

**b)** $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $\qquad 0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ $\qquad \log_{10} 10^x = x$

**مفهوم أساسي** — **الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية**

**الدالة الرئيسة (الأم):** $f(x) = \log_b x$

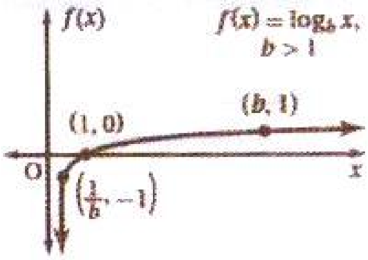
**المجال:** مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(R^+)$

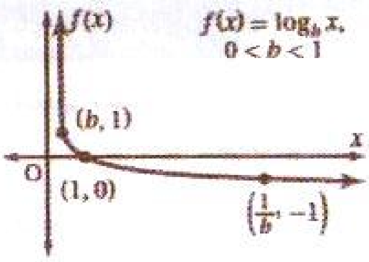
**خط التقارب:** المحور $y$

**خصائص منحنى الدالة:** متصل، متباين

**المدى:** مجموعة الأعداد الحقيقية $(R)$

**مقطع المحور $x$:** النقطة $(1, 0)$




## تدرب وحل المسائل

1) $\text{Log}_8 512 = 3$

$X = b^y$

$512 = 8^3$

2) $\text{Log}_5 625 = 4$

$625 = 5^4$

3) $\text{Log}_2 16 = 4$

$16 = 2^4$

4) $\text{Log}_7 343 = 3$

$343 = 7^3$

5) $\text{Log}_9 \frac{1}{81} = -2$

$\frac{1}{81} = 9^{-2}$

6) $\text{Log}_3 \frac{1}{27} = -3$

$\frac{1}{27} = 3^{-3}$

7) $Log_{12}\ 144 = 2$

$144 = 12^2$

8) $Log_9\ 1 = 0$

$1 = 9^0$

9) $11^3 = 1331$

$3 = \log_{11}\ 1331$

10) $16^{\frac{3}{4}} = 8$

$\frac{3}{4} = log_6 8$

11) $9^{-1} = \frac{1}{9}$

$-1 = log_9 \frac{1}{9}$

12) $6^{-3} = \frac{1}{216}$

$-3 = log_6 \frac{1}{216}$

13) $2^8 = 256$

$8 = \log_2 259$

14) $4^6 = 4096$

$6 = \log_4\ 4096$

15) $27^{\frac{2}{3}} = 9$

$\frac{2}{3} = log_{27}\ 9$

16) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

$\frac{3}{2} = log_{25}\ 125$

17) $Log_{13}\ 169 = \log_{13} (13)^2 = 2$

18) $Log_2 \frac{1}{128} = log_2 \frac{1}{2^7} = log_2 2^{-7} = -7$

19) $Log_6\ 1 = \log_6\ 6^0 = 0$

20) $Log_4\ 1 = \log_4\ 4^0 = 0$

21) $Log_{10}\ 10 = 1$

22) $Log_{10}\ 0.01 = \log_{10}\ 10^{-2} = -2$

23) $Log3 \frac{1}{9} = log_3 3^{-2} = -2$

24) $Log4 \frac{1}{64} = log_4 4^{-3} = -3$

25) $Log_6\ 216 = \log_6\ 6^3 = 3$

26) $Log_{27}\ 3 = \log_{27} (27)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

27) $\text{Log}_{32}\ 2 = \log_{32} (32)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

28) $\text{Log}_{121}\ 11 = \log_{121} (121)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

29) $log_{\frac{1}{5}} 2125$

$X = \left(\frac{1}{5}\right)^{y}$

$= 5^{-y}$

$5^5 = 5^{-y} \rightarrow y = -5$

30) $log_{\frac{1}{8}} 512 = y$

$512 = \left(\frac{1}{8}\right)^{y}$

$8^3 = 8^{-y} \rightarrow y = -3$

31) $log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

$\frac{1}{216} = \left(\frac{1}{6}\right)^{y}$

$\left(\frac{1}{6}\right)^{3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{y}$

$y = 3$

42) $P.S = \log_{10}\ R$

$PS = 10^{x}$

43) $n = \log_2 \frac{1}{P}$

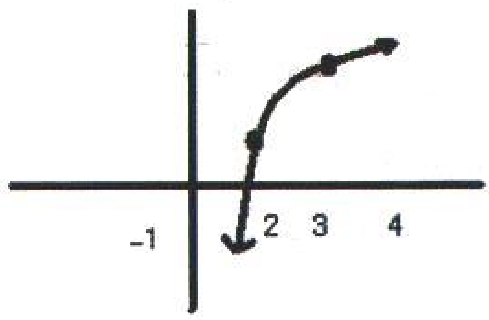
a) $P = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{P} = 4$

$n = \log_2 \frac{1}{P} = \log_2\ 4 = \log_2\ 2^2$

$n = 2$

b)




c) تتناقص الإضاءة

44) $y(t) = 85 - 6 \log_2 (1)$

a) $y(0) = 85 - 6 \log_2 2^0$

$= 85 - 6 \times 0$

$y(0) = 85$

b) $y(t) = 85 - 6 \log 2 \; 4$

$y(3) = 85 - 6 \log 2 \; 22$

$= 85 - 6 \times 2$

$= 85 - 12 = 73$

c) $y(t) =$

$y(15) = 85 - 6 \log_0 16$

$= 85 - 6 \log_0 2^4$

$= 85 - 6 \times 4$

$= 85 - 24 = 61$

48) $S(a) = 10 + 20 \log 4 \; (a+1) \quad , a \geq 0$

a) $S(0) \approx 10$

$S(3) = 10 + 20 \log_4 (4)$

$= 10 + 20 = 30$ ألف ريال

$= 30\,000$ ريال

$S(15) = 10 + 20 \log_4 (16)$

$= 10 + 20 \log_4 4^2$

$= 10 + 20 \times 2 = 50$

$= 50\,000$ ريال

$S(63) = 10 + 20 \log_4 (64)$

$= 10 + 20 \log_4 (4^3)$

$= 10 + 20 \times 3$

$S(63) = 70$

$= 70\,000$ ريال

d) من شكل المنحنى بعد زيادة النفقات لا يزداد التأثير على المبيعات تبعا للنفقات حيث يكون الأثر محدود.

49) $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$

a) $16 = \frac{t}{3.3 \log_4 1024}$

$t = 16 \times (3.3 \log_4 1024)$

$= 15 \times (3.3 \log_4 4^5)$

$= 16 \times 3.3 \times 5$

t = 264

b) $5 = \frac{t}{3.3\, log_{20}\ 160000}$

t= 5 x 3.3 $\log_{20}$ 160 000

= 5 x 3.3 x 4

t= 66

c) $G = \frac{4.4}{3.3\, log_6\, 1296}$

$G = \frac{4.4}{3.3\, log_6 6^4} = \frac{4.4}{3.3 \times 4}$

$= \frac{4.4}{13.2} = 0.333$

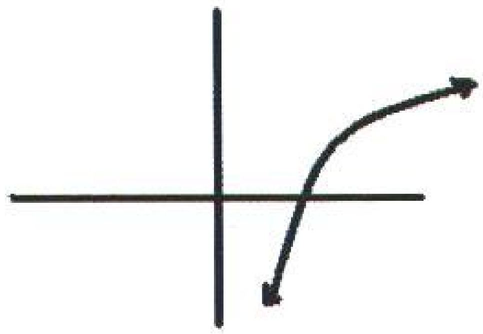
50) $\log_4 16 = \log_4 4^2$

$\text{Log}_2\ 16 = \log_2\ 2^4 = 4$ $\log_2\ 16$ المختلف هو

$\log_2\ 4 = \log_2\ 2^2 = 2$

$\log_2 9 = \log_2\ 3^2 = 2$

51) $y = \log_b\ x$



لا تنتمي أبدا.

52) x الخطأ / يقطع المحور

في (1,0)

53) $log_{\frac{1}{7}}\ 49 = y$

$49 = \left(\frac{1}{7}\right)^y$

$7^2 = 7^{-y} \rightarrow y = -2$

كلهما إجابتهما خطأ لأن :

Y= -2

54) $\log_7 51$ , $\log_8 61$ , $\log_9 71$

$\log_7 (7^2 + 2)$ , $log_8 (8^2 - 3)$ , $log_9 (9^2 - 10)$

| | | |
|---|---|---|
| $51 = 7^y$ | $61 = 8^y$ | $71 = 9^y$ |
| $49 + 2 = 7^y$ | $64- 3 = 8^y$ | $81 - 10 = 9^y$ |
| $y>2 \leftarrow 7^2 + 2 = 7^y > 7^3$ | $8^2 - 3 = 8^y \quad y < 2$ | $9^2 - 10 = 9^y \quad y < 2$ |
| | | أكبر قيمة هي أول قيمة |

54) أكبر قيمة هي الأولى حيث:-

$y>2 \rightarrow log_7 51$

$\log_9 71$ , $\log_8 61$ أما في

$y< 2$ فإن:

55) $y = \log_b x$

a) $25 = \log_5 5^{25}$

b) $-1 = \log_7 \frac{1}{7}$

c) $\frac{1}{2} = log_2 \sqrt{2}$

d) $0 = \log_{10} 1$

56) $g(x) = a \log10 (x-h) + k \rightarrow k^{+}_{-} \uparrow\downarrow$

تنعكس $0 = k$ عندما $a<0$

تتسع رأسيا $(a) > 0$ $+h$ إذا $(h)$ لأعلى إذا كانت موجبة

$-h$ إذا $(h)$ لأسفل إذا كانت سالبة

تنحني رأسيا $0 < |a| < 1$

61) $3^{n-2} > 27$

$3^{n-2} > 3^3$

$n -2 > 3$

$n> 5$

62) $2^{2n} \leq \frac{1}{16}$

$2^{2n} \leq 2^{-4}$

$2n \leq -4$

$n \leq -2$

63) $16^n < 8^{n+1}$

$2^{4n} < 2^{3n+3}$

$4n < 3n + 3$

$n < 3$

64) $32^{sp+2} \geq 16^{sp}$

$2^{5(sp+2)} \geq 2^{4(sp)}$

$2sp + 10 \geq 20p$

$sp \geq -10$

$p \geq -2$

65) $4^{x+2} = 48$

$4^x x 4^2 = 48$

$4^x = \frac{48}{4^2} = \frac{48}{16} = 3 \quad 4^x = 3$

$4^x = 3$

66) $9^x = \frac{1}{81}$

$9^x = 9^{-2} \rightarrow x = -2$

67) $2^{6x} = 4^{5x+2}$

$2^{6x} = 2^{2(5x+25)}$

$6x = 10x + 4$

$-4 = 4x$

$x = -1$

68) $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$

$7^{2(3p+1)} = 7^{2p-5}$

$6p + 2 = 2p - 5$

$4p = -7$

$p = -\frac{7}{4}$

69) $9^{x^2} = 27^{x^2-2}$

$3^{2x^2} = 3^{3x^2-6}$

$2x^2 = 3x^2 - 6$

$6 = x^2$

$x = \sqrt{6}$

70) $x = \log_8 16$

$16 = 8^x$

$2^4 = 2^{3x}$

$3x = 4$

$X = \frac{4}{3}$ $C$ الاجابة

71) $log_2 \frac{1}{32} = log_2 2^{-5}$

$= -5$

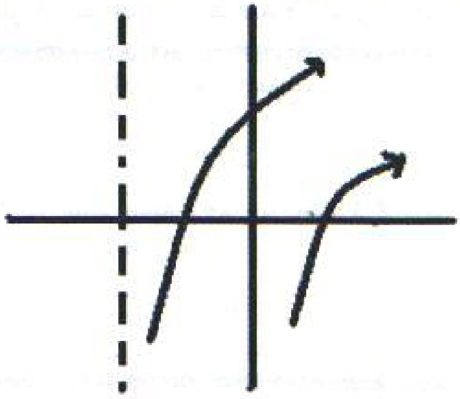
الاجابة هي $D$

72) $y = 4^x - 1$

D هو y مقطع

A الإجابة

لأن المنحنى تتم إزاحة خطوة للأسفل فيبقى المقطع الصادي كما هو



$x^2 - 15 = 2x$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$(x-5)(x+3) = 0$

$x = 5 \rightarrow x = -3$

$log_3 (25 - 15) = log_3 10$

$log_3(10) = log_3 10$

$log_3 9 - 15 = log_3 - 6$

-6 لا ينتمي للمجال

لذلك فإن $x = -3$ مرفوض وليس $x=5$

$Log_6\ x + log_6\ (x-9) = 2$

$log6\ x(x-9) = 2$

$X = b^y$

للتحويل لزاوية أسية

$Y = b^x$

$x^2 - 9x = 6^2$

$x^2 - 9x - 36 = 0$

$(x-12)(x+3) = 0$

$x = 12$ مقبول

$x = -3$ مرفوض

$2log_7\ x = log_7\ 27 + log_7\ 3$

$0 = log_7\ 27 + log_7\ 3 - 2\ log_7\ x$

$O = log_7\ (27+3- x^2)$

$0 = log_7\ (30 - x^2)$

$30 - x^2 = 70 \rightarrow\ 30 - x^2 = 1$

$x^2 = 29$

$x = \sqrt{29}$

# (٤-٢) خصائص اللوغاريتمات

بما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكن اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

**مفهوم أساسي** خاصية الضرب في اللوغاريتمات

**التعبير اللفظي:** لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

**الرموز:** إذا كانت $a, b, x$ أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $x \neq 1$ فإن $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.

**مثال:** $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

**مفهوم أساسي** خاصية القسمة في اللوغاريتمات

**التعبير اللفظي:** لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

**الرموز:** إذا كانت $a, b, x$ أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $x \neq 1$ فإن

$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$

**مثال:** $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

**مفهوم أساسي** خاصية لوغاريتم القوة

**التعبير اللفظي:** لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

**الرموز:** لأي عدد حقيقي $p$، وأي عددين موجبين $m, b$، حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b m^p = p \log_b m$

**مثال:** $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

## تدرب وحل المسائل

1) Log4 18 = $log_4^{3x6} = log_4^3 + log_4^6$

$= log_4^3 + log_4^6$

$= 2.08$

2) $log_4^{15} = log_4^{5\times3}$

$= log_4^5 + log_4^3 = 1.953$

3) $log_4^{\frac{5}{3}} = log_4^5 - log_4^3 = 0.3684$

4) $log_4^{\frac{3}{4}} = log_4^3 - log_4^4 = log_4^3 - 1 = -0.2075$

5) $log_4^{30} = log_4^{(5\times2\times3)} = log_4^5 + log_4^2 + log_4^3$

6) $log_4^{20} = log_4^{5\times4} = log_4^5 + log_4^4 = log_4^5 + 1$

7) $log_4^{\frac{2}{3}} = log_4^2 - log_4^3$

8) $log_4^{\frac{4}{3}} = log_4^4 - log_4^3 = 1 - log_4^3$

9) $log_4^9 = log_4^{3\times3} = log_4^3 + log_4^3$

10) $log_4^8 = log_4^{(2\times4)} = log_4^2 + log_4^4 = log_4^2 + 1$

11) $a = 15500\ (5 - log_{10} P)$

a) 15500(5-$log_{10} P$) = 8850

b) 7074 = 15500 ( 5- $log_{10} P$)

c) 6872 = 15500 (5- $log_{10} P$)

12) a) 8.3 – 5.9 = 2.2

13) $log_3^5 + log_3^5 =$

14) $log_5^7 + log_5^7 =$

15) $log_6^6 + log_6^8 = 1 + log_6^8 =$

16) $log_7^{81} = log_7^9 + log_7^9 =$

17) $log_6^{512} = log_6^{64\times8} = log_6^8 + log_6^8 + log_6^8 =$

18) $log_7^{729} = log_7^{81x\ 9} = log_7^9 + log_7^9 + log_7^9 =$

19) $log_5(25)^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{4}\ log_5 5 = \frac{1}{2}$

20) $log_2\ (32)^{\frac{1}{2}} = log_2\ (2^5)^{\frac{1}{5}} = log_2\ (2) = 1$

21) $3\ log_7\ (49)^{\frac{1}{6}} = 3\ log_7\ (7)^{\frac{2}{6}} = log_7\ (7) = 1$

22) $4\ log_2 \sqrt{8} = 4\ log_2\ (2)^{\frac{3}{2}} = 6\ log_2^2 = 6$

23) $50\ log_5\ (125)^{\frac{1}{2}} = 50\ log_5\ \left((5)^{\frac{1}{2}}\ (25)^{\frac{1}{2}}\right) = 25\ \left(log_5^5 +\right.$

$log55 = 25 \times 2 = 50$

24) $log_3\ (243)^{\frac{1}{6}} = log_3\ (3 \times 9 \times 9)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}\ (log_3^3 + 2\ log_3^3 +$

$2\ log33 = 16\ 1+2+2 = 56$

25) $log_9^6 + 3log_9^x + 5log_9^y + log_9^z$

26) $log_{11}^a + (-4)log_{11}^b + 12log_{11}^c + 7log_{11}^d$

27) $2log_7^h + 11log_7^j + (-5)log_7^k$

28) $log_4^{10} + 2log_4^t + log_4^u + (-3)log_4^{-3}$

29) $6log_5^a + (-3)log_3^b + 4log_5^c$

30) $log_2^{(3x+2)} - \frac{1}{7}log_2^{(1-5x)}$

31) $log_5\, x^3 + log_5\, (6-x)^{-\frac{1}{2}} = log_5\, x^3 + log_5\, (\frac{1}{\sqrt{6-x}} =$

$log_5\, \frac{x^3}{\sqrt{6-x}}$

32) $5\, log_7\, (2x)^5 + log_7 \frac{1}{\sqrt[3]{5x+1}}$

$= log_7\, \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}}$

33) $log_3\, a^7 + log_3\, b + log_3\, \frac{1}{\sqrt{8c}}$

$= log_3\, \frac{a^7 b}{\sqrt{8C}}$

34) $log_8\, 81x^2 - log_8(2x-5) = log_8 \frac{81x^2}{2x-5}$

35) $log_6^{(5a)^2} + log_6^{b} + log_6^{c^7} = log_6^{(25a^2 \times bc^7)}$

36) $log_2\, x - log_2 y - log_2\, z^3 = log_2\, \frac{x}{y} - log_2\, z^3 = log_2\, \frac{x}{y\, z^3}$

37) a) $log\ km = log\, [H^+]\, [oH^-] = log\ [H^+] + log\ [oH^-]$

b) $\log_a$ km = x

x $(\, 1\times 10^{-14})$^$x = a$

c) km = $[H^+]\, [OH^-] \rightarrow 1 \times 10^{-14} = 1 \times 10^{-4} \times [OH^{-1}]\, 1 \times 10^{-5} = [OH^-]$

38) x , 39) √ , 40) √ , 41) √ , 42) √

43) x , 44) x , 45) √

64) y = log10 (x) + 1

47) $log_7\, \left(\frac{x^2}{5y}\right) = 2\, log_7\, x - log_7\, 5y$

$log_7\, (x^3 5y) = 3\, log_7\, x + log_7\, 5y$

a) $log_7^{\frac{3}{5}} = log_7^{3} - log_7^{5}$

$log_7\, (3 \times 5) = log_7^{3} + log_7^{5}$

c) $log_7\, (\frac{x^3\, 5y}{z}) = log_7^{x^3} + log_7^{5y} - log_7^{z}$

48) $log_b\, m^p = x$

$b^x = m^p$

$log_5^{bx} = log_b^{m^p}$

$x = log_b^{m^p}$

49) $(\sqrt{a})^x = a^2$

$\frac{x}{2} = 2 \rightarrow x = 4$

50) $log_a^1 - log_a x = log_a^{a^0} - log_a x = -log_a^x$

51) 1. $log_b 24 = log_b^2 + log_b^{12}$

2. $log_b^{24} = log_b 8 + log_b 3$

## (٢-٥) حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

تحتوي المعادلات اللوغاريتمية على لوغاريتم واحد أو أكثر، ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

**مفهوم أساسي** خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

**الرموز:** إذا كان $b$ عدداً موجبا حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا و فقط إذا كان $x = y$ .

**مثال:** إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$ . وإذا كان $x = 8$ ، فإن $\log_5 x = \log_5 8$ .

المتباينة اللوغاريتمية هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر ويمكن استعمال الخاصية التالية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

**مفهوم أساسي** خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$ , $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

إذا كان $b > 1$ , $x > 0$ و $\log_b x < y$ ، فإن $0 < x < b^y$

يمكن استعمال الخاصية التالية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

**مفهوم أساسي** خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

**الرموز** إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
و $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$ .

**مثال** إذا كان $\log_b x > \log_b 35$ ، فإن $x > 35$ .

## تدرب وحل المسائل

1) $log_8 x = \frac{4}{3}$

$x = 8^{\frac{4}{3}} = (8^4)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^{3\times\frac{4}{3}} = 2^4$

$x = 16$

2) $log_{16} x = \frac{3}{4}$

$x = \left(16^{\frac{3}{4}}\right)$

$= \sqrt[4]{(16)^3}$

$x = 8$

$x = 2^{4\times\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

3) $log_{81}\ x = \frac{3}{4}$

$x = (81)^{\frac{3}{4}}$

$= 3^{4\times\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$

$x = 27$

4) $log_{25}\ x = \frac{5}{2}$

$x = (25)^{\frac{5}{2}}$

$= 5^{2\times\frac{5}{2}}$

$= 5^5$

$x = 3125$

5) $log_8 \frac{1}{2} = x$

$\frac{1}{2}\ 8^x$

$2^{-1} = 2^{3x}$

$3x = -1$

$x = \frac{-1}{3}$

6) $log_6 \frac{1}{36} = x$

$\frac{1}{36} = 6^x$

$6^{-2} = 6^x$

$x = -2$

7) $log_x\ 32 = \frac{5}{2}$

$(32)^2 = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^2$

$x = \sqrt[5]{(32)^2}$

$x = 4$

8) $log_x\ 27 = \frac{3}{2}$

$27 = x^{\frac{3}{2}}$

$\left((x)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 27$

$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 3^3$

$x^{\frac{1}{2}} = 3$

X = 9

9) $5\ log_2\ x = log_2\ 32$

$log_2\ x^5 = log_2\ 2^5$

$x = 5$

10) $3\ log_2\ x = log_2\ 8$

$log_2\ x^3 = log_2\ 2^3$

$x = 2$

11) $log_4\ 48 - log_4\ n = log_4\ 6$

$log_4 \frac{48}{n} = log_4\ 6$

$\frac{48}{n} = 6$

6n = 48

n = 8

12) $log_3\ 2x + log_3\ 7 = log_3\ 28$

$log_3\ (2x) = log_3\ 28$

$14x = 28$

X = 2

13) $log_2\ (4x) + log_2\ 5 = log_2\ 40$

$log_2\ (4x) = log_2\ 40$

$20x = 40$

X = 2

14) $log_4\ a + log_4\ 8 = log_4\ 24$

$log_4\ 8a = log_4\ 24$

$8a = 24$

$a = \frac{24}{8} = 3$

a= 3

15) $log_2\ n = \frac{1}{3} log_2\ 27 + log_2\ 36$

$log_2\ n = log_2\ (27)^{\frac{1}{2}} \times 36$

$n = 27^{\frac{1}{3}} \times 36 = 3 \times 36 = 108$

n= 108

16) $3\,log_{10}\,8 - \frac{1}{2}\,log_{10}\,36 = log_{10}\,x$

$$log_{10}\,8^3 - log_{10}\,36^{\frac{1}{2}} = log_{10}\,x$$

$$log_{10}\,8^3 - log_{10}\,36^{\frac{1}{2}} = log_{10}\,x$$

$$log_{10}\,\frac{8^3}{36^{\frac{1}{2}}} = log_{10}\,x$$

$$x = \frac{8^3}{36^{\frac{1}{2}}} = \frac{8^3}{6} = 85.3$$

17) $log_5\,x > 3$

$$x > 5^3$$

$$x > 125$$

18) $log_8\,x \le -2$

$$x \le 8^{-2}$$

$$x \le \frac{1}{8^2} \rightarrow x \le \frac{1}{64}$$

*19)* $log_6\,x < -3$

$$x < 6^{-3}$$

$$x < \frac{1}{6^3}$$

$$x < 216$$

*20)* $log_4\,x\ \ 4$

$$x \ge 4^4$$

$$x \ge 256$$

21) $log_3\,x \ge -4$

$$x \ge 3^{-4}$$

$$x \ge \frac{1}{3^4}$$

$$x \ge \frac{1}{81}$$

22) $log_2\,x \le -2$

$$x \le 2^{-2}$$

$$x \le \frac{1}{2^2}$$

$$x \le \frac{1}{4}$$

23) $\log_4 (2x+5) \le \log_4 (4x-3)$

$2x+5 \le 4x-3$

$8 \le 2x$

$4 \le x$

$X \ge 4$

$2x+5 \le 0$

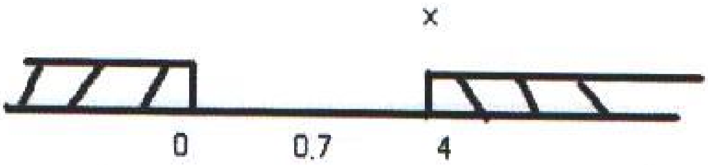
$x \le -\frac{5}{2}$

$X \le -2.5$

$4x-3 \le 0 \quad 4x \le 3$

$x \le \frac{3}{4}$

$x \le 0.75$




الحل فقط $x \ge 4$

24) $\log_8 (2x) > \log_8 (6x-8)$

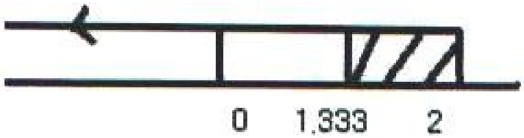
$2x > 6x-8$

$8 > 4x$

$2 > x$

$X < 2$

| | |
|---|---|
| $2x \le 0$ | $6x-8 \le 0$ |
| $X \le 0$ | $6x \le 8 \rightarrow x \le \frac{8}{6} \quad \rightarrow x \le 1.33$ |




25) $\log_2 (4x-6) > \log_2 (2x+8)$

$4x-6 > 2x+8$

$2x > 14$

$X > 7$

| | |
|---|---|
| $4x-6 \le 0$ | $2x+8 \le 0$ |
| $4x \le 6$ | $2x \le -8$ |
| $X \le \frac{6}{4}$ | $x \le -4$ |
| $X \le 1.5$ | |

الحل هو $\{x \; 1 \; x > 7\}$

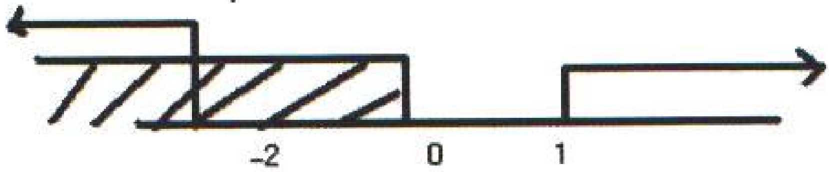
26) $log_7 (x+2) \geq log_7 (6x-3)$

$X+2 \geq 6x-3$

$5 \geq 5x$

$1 \geq x \rightarrow x \leq 1$

| | |
|---|---|
| $X+2 \leq 0$ | $6x-3 \leq 0$ |
| $X \leq -2$ | $6x \leq 3 \rightarrow x \leq \frac{3}{6} \rightarrow x \leq \frac{1}{2}$ |



## (٦-٢) اللوغاريتميات العشرية

يمكن استعمال صيغة تغيير الأساس لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

**مفهوم أساسي** صيغة تغيير الأساس

**الرموز،** لأي أعداد موجبة $n, b, a$، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

**مثال،** $\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$

## تدرب وحل المسائل

1) Log 5 =

4) log 3 =

2) Log 21 =

5) log 4=

3) Log 0.4 =

6) log 3.2 =

7) log 8.2 =

8) log 0.9 =

9) log 0.004 =

10) log E = 11.8 + 15.4

log E = 11.8 + 1.5 (8.5)

log E = 24.55

$E = 10^{24.55}$

11) 85 DB $\rightarrow$ $73\ DB$

$L = 10\ log\frac{I}{m}$

بعد إغلاق النوافذ $73 = 10 \log H \rightarrow 7.3 = \log I \rightarrow 10^{7.3} = I$

قبل إغلاق النوافذ $85 = 10\ \log I \rightarrow \quad 8.5 = \log I \rightarrow 10^{8.5} = I$

$I_A = \frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{7.3}}{10^{8.5}}$

12) log 6x = log 40

X log 6 = log 40

$X = \frac{log\ \ 40}{log\ \ 6} = 2.05$

13) $2.1^{a+1} = 8.25$

$a = \frac{\log 8.25}{log\ \ 2.1} - 1$

a = 1.8441

14) $x^2 = \frac{log\ 20.43}{log\ \ 7} = 1.556$

X = 1.2450

15) $\frac{11^b}{11^3} = 5^b \rightarrow \ b\ \log 11 - \log 11^3 = b\ log5$

$b\ (log11 - log5) - \ log3$

$b = \frac{log3}{(log11 - log5)} = 1.393$

16) $8^x = 40 \rightarrow x = \frac{log\ 40}{log\ 8} = 1.773$

17) $x = \frac{ln 55}{ln 5}$

18) $\frac{9^b}{9} = 7^b \rightarrow b\ \ log9 - b\ log7 = log9$

$b = \frac{log\ 9}{log\ 9 - log\ 7}$

19) $x^2 = \frac{log\ 110}{log\ 15}$

20) $(6y - 2)log9 = (3y + 1)log3$

$\frac{6y - 2}{3y + 1} = \frac{log3}{log9}$

$\frac{6y - 2}{3y + 1} = \frac{1}{2} \rightarrow 12 - 4 = 3y + 1$

9 y = 5

$y = \frac{5}{9}$

21) $8^{2x-4} = 4^{x+1} \rightarrow \frac{2x-4}{x+1} = \frac{log\ 8}{log\ 4}$

$\frac{2x - 4}{x + 1} = \frac{3}{2} \rightarrow 4x - 8 = 3x + 3$

X = 11

22) x log16 = $\frac{1}{2}$ $log4^{x+3}$

$$\frac{x}{x+3} = \frac{log4}{2\ log16}$$

4x = x +3

X = 1

23) y log 2 = $\frac{1}{2}$ $log3^{y-1}$

$$\frac{y}{y-1} = \frac{log3}{2\ log2}$$

24) $5^{4n} > 33$

4n log 5 > log 33

4n > $\frac{log\ 33}{log\ 5}$

n> $\frac{log\ 33}{4\ log\ 6}$

25) (P-1) log 6 = P log 4

$$\frac{(P-1)}{P} = \frac{log4}{log6}$$

26) (y-1) log 3 $\leq y\ log4$

$$\frac{(y-1)}{y} \leq \frac{log4}{log3}$$

27) $\frac{(P-2)}{P} \leq \frac{log\ 5}{log\ 2}$

28) $x \leq \frac{log\ 20}{4log\ 2}$

29) $n > \frac{log\ 36}{3\ log\ 6}$

30) $\frac{log\ \frac{7}{10}}{log\ \frac{3}{10}}$

31) $\frac{log\ \frac{16}{10}}{log\ \frac{2}{10}}$

32) $\frac{log\ \frac{9}{10}}{log\ \frac{4}{10}}$

33) $\frac{log\ \frac{21}{10}}{log\ \frac{3}{10}}$

34) $\frac{2\ log\ \frac{27}{10}}{log\ \frac{15}{10}}$

35) $\frac{log\ \frac{5}{10}}{2log\ \frac{7}{10}}$

36) a) t = log $_{(1-,\ 15)}$ $\frac{168000}{120000}$

b) $t = \log_{(1-,1)} \frac{168000}{102000}$

# حلول اختبار الفصل

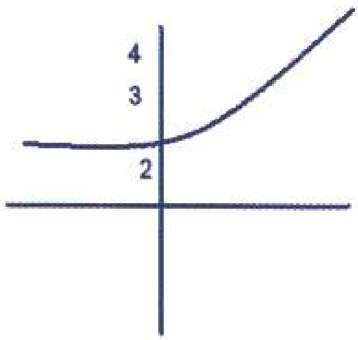
1. $f(x) = 3^{x-3} + 2$

h=3 إزاحة لليمين 3 وحدات

K=2 إزاحة للأعلى 2 وحدة

R = المجال

{y/y >2} = المدى




2. $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

a=2 المنحنى يستع رأسيا

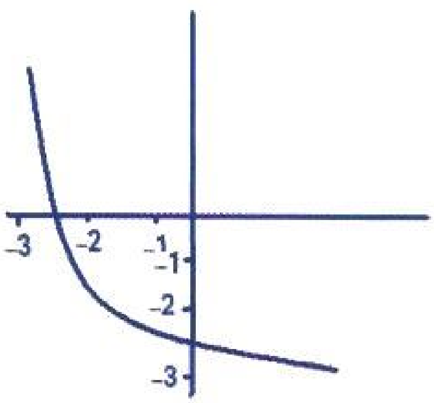
h=-1 إزاحة لليسار بمقدار وحدة

K= -3 إزاحة للأسفل بمقدار 3 وحدات

R= المدى

{y/y>-3}المدى

أو (-3, ∞)




3. $2^{3(c+1)} = 2^{4(2c+3)}$

3c+3 = 8c+12

--9= 5c

C = -1.8

4. $3^{2(x-2)} > 3^{-3(x)}$

2x-4> -3x

5x>4

x> 0.8

5. $\log 2^{a+3} = \log 3^{2a-1}$

(a+3) log 2 = (2a-1) log 3

a log 2 + 3log 2 = 2a log 3 – log 3

3 log 2 + log 3 = 2a log 3 – a log 2

3 log2 + log 3 = a (2log 3- log2)

$a = \frac{3\log 2+\log 3}{2\log 3-\log 2} \approx \frac{1.3802}{0.6532}$

$a \approx 2.1129$

6. $x^2 - 7 = 6x$

$x^2 - 6x - 7 = 0$

(x-7) (x+1) = 0

X= 7 or x= -1

للتحقق نعوض عن القيمتين في المعادلة الأصلية

$\log 2\ (49 - 7 = \log 2(42)$

$\log 2\ (42) = \log 2\ (42)$

X= 7 √

$\log 2\ (1 - 7) = log2\ (-6)$

$\log 2\ (-6) = log2\ (-6)$

Log (-6) غير معرف

X= -1 مرفوض

7. $x > 5^2$

x> 25

8. Log $_3$ x + log$_2$ (x-3) = log$_3$ 4

Log$_3$ (x(x-3)) = log$_3$ 4

$x^2 - 3x = 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

(x-4)(x+1)=0

X= 4 أو x = -1

للتحقق نعوض عن القيم في المعادلة الأصلية

Log$_3$ (4) + log$_3$(1) = log$_3$ 4

Log$_3$ (4) = log$_3$ 4

X = 4

$Log_3(-1) + log_3(-4) = log_3 4$

$Log_3(4) = log_3 4$

X= -1

9. $\log 6^{n-1} \leq \log 11^n$

(n-1)log 6 $\leq n$ log 11

n log 6 – log 6 $\leq n \log 11$

n log 6 – n log 11 $\leq$ log 6

n (log – 6 log 11) $\leq$ log 6

n $\geq \frac{\log 6}{\log 6 - log\, 11}$

n $\geq -2.956$

10. $Log_5$ 44

$Log_5$ 44 = $log_5$ (4x11) = $log_5 2^2 + log_5 11$

= 2 $log_5$ 2 + $log_5$ 11 $\approx 2(0.4307) + (1.4899)$

$\approx 2.3513$

11. $\log 5 \left(\frac{11}{2}\right) = log5\ 11 - log5\ \ 2$

= 1.4899 – 0.4307 = 1.0592

12. a. 185000 = 150 000 x $(b)^{10}$

$1.233 \approx (b)^{10}$

b $\approx 1.02$

b. y$\approx (150000)(1.02)^{25}$

$y \approx 246091$

$13.9^{\frac{3}{2}} = 27$

$14. Log_4 (\frac{1}{64}) = log4\ \ (4^{-3}) = -3$

الإجابة هي $A$

$16.\ a.\ \ A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 75000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{(12x5)}$

$\approx 117426.1$ ريال

$b. A = 2\ x\ 75000 = 150000 \qquad ,t = ??$

$150000 = 75000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t}$

$2 = \left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t}$

$\log 2 = 12\, t\, \log(1.0075)$

12t = $\frac{log\, 2}{\log(1.0075)}$

t $\approx 8$ سنوات

C. A = 100000 , t= ??

$100000 = 750000\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{12t}$

$\frac{4}{3} = (1.0075)^{12t}$

$\log\frac{4}{3} = 12t\log(1.0075)$

$12t = \frac{\log\left(\frac{4}{3}\right)}{\log(1.0075)}$

$t \approx 3$ سنوات

17. $\log_4$ 16 - $\log_4$ 8 = $\log_4$ x

Log4 $\left(\frac{16}{8}\right) = log4\ \ x$

X= 16/8 = 2

G الإجابة هي

18. h= -5

C الإجابة

Y= $\log_{10}$ (x+5)

19. $-2\,log3\ \ x^2 + log3\ \ (z-2)^6 + log3\ \ t^2$

= - $log3\ \ x^2 + log3\ \ (z-2)^2 + log3\ \ t^2$

= $log3\ \ \left(\frac{(z-2)^6(t^2)}{x^2}\right)$

# الفصل الثالث

# المتطابقات والمعادلات المثلثية

# (١-٣) المتطابقات المثلثية

تكون المعادلة متطابقة إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها.

**مفهوم أساسي** — المتطابقات المثلثية الأساسية

**المتطابقات النسبية:**

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$

**متطابقات المقلوب:**

$\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta},\ \csc\theta \neq 0$ $\qquad$ $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta},\ \sec\theta \neq 0$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$

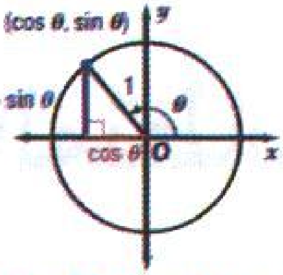
$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta},\ \cot\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta},\ \tan\theta \neq 0$

**متطابقات فيثاغورس:**

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$



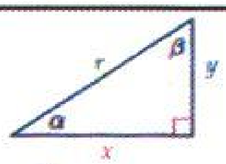

حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

**متطابقات الزاويتين المتتامتين:**

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$




$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha)$

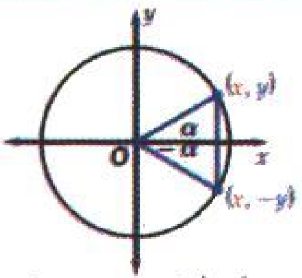
$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \cot\beta = \cot(90^\circ - \alpha)$

**متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:**

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$




$\sin\alpha = y$ $\qquad$ $\sin(-\alpha) = -y$

$\cos\alpha = x$ $\qquad$ $\cos(-\alpha) = x$

## تدرب وحل المسائل

1) $\dfrac{1}{\cot\ \theta} = 2$

$tan\theta = \dfrac{1}{2}$

$\theta = 26.5$

2) $cos\theta = \frac{2}{3} \quad , csc\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$\sin\theta \quad \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\theta = 48 \rightarrow csc\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$

3) $\sin\theta = \frac{1}{2} \quad , \tan\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

$csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = 2 \qquad , \csc^2\theta = 4$

$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1 = 3$

$\cot\theta = \mp\sqrt{3}$

$\frac{1}{\tan\theta} = \mp\sqrt{3} \qquad , \tan\theta = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad 0° < \theta < 90°$

4) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$\sin^2\theta = \frac{144}{169}$

$\sin\theta = \mp\frac{12}{13}$

بما أن $\theta$ تقع في الربع الرابع ......... $\sin\theta$ سالبة.

5) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\sec^2\theta = (-1)^2 + 1 = 2$

$\sec\theta = \mp\sqrt{2}$

بما أن $\theta$ تقع في الربع الرابع $\sec\theta$ موجبة

$\sec\theta = \sqrt{2}$

6) $\csc\theta = -\frac{5}{3} \qquad \sin\theta = -\frac{3}{5}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos\theta = \mp\frac{4}{5}$$

بما أن $\theta$ تقع في الربع الرابع $\cos\theta$ موجبة

$$\cos\theta = \frac{4}{3}$$

7) $\tan\theta \ \cos^2\theta$

$$\frac{sin}{cos\theta} \times \cos^2\theta = sin\theta\cos\theta$$

8) $\csc^2\theta - \cos^2\theta$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

9) $\frac{cos\theta \ csc\theta}{tan\theta}$

$$= (\cos\theta \, . \frac{1}{sin\theta}).\frac{sin\theta}{cos\theta} = 1$$

10) $sec\theta \ \tan^2\theta + sec\theta$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{\cos^3\theta}$$

11) $sin\theta\ (1 + \cos^2\theta)$

$$\sin\theta(1 + \cot^2\theta) = \sin\theta.\csc^2\theta$$

$$= sin\theta \, .\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$$

12) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) sec\theta$

13) $-\ cot\theta = \frac{cos\theta}{-sin\theta} = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

14) $\cos^2\theta = (1 + \sin^2\theta)$

15) $2\cos^2\theta$

16) $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ..................... (1) $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$

$$= I_0 - I_0\left(\frac{1}{\csc^2 I_0}\right)$$

$$= I_0 - I_0\sin^2\theta \qquad = I_0\cos^2\theta$$

$$I = I_0 - \frac{I_0}{\sin^2\theta}$$

$I = I_0 - \frac{I_0}{\frac{1}{5}}$ .................... (2)

$$= I_0 - 4\,I_0 = -3\,I_0$$

17) $e = \frac{W\ sec\theta}{A\,s}$

$e = \frac{\frac{w}{cos\theta}}{As} \rightarrow w = e\ AS\ \cos\theta$...............(1)

$w = 0.80\ (0.75)\ (1000)\ (\cos\theta)$

$W = 459.627$ ............... (2)

19) $Fn - mg\cos\theta = mg\ \sin\theta - Mk\ Fn$

$\frac{-Fn+mg\ (\cos\theta+\sin\theta)}{Fn} = Mk$

18) a.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 45 | 30 | 0 | $\theta$ |
| 9/4 | 1/2 | 1/12 | 0 | $\tan^2\theta - \sin^2\theta$ |
| 9/4 | 1/2 | 1/12 | 0 | $\tan^2\theta \sin^2\theta$ |

b. $\sin^2 x \sec^2 x = \sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \tan^2 x = \sec^2 x - 1$ الطرف الثاني

المعادلة تمثل متطابقة

19)

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 1}{1 + \sin(-\theta)}$$

$= \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$

$= \sin\frac{\pi}{2}\ \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

20) $= \frac{\sin\theta - 1}{1-\sin\theta} = \frac{-(1-\sin\theta)}{1-\sin\theta} = -1$

21) $\frac{\frac{1}{\cos\theta}.\sin\theta + \sin\theta}{1+\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\sin\theta + \sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta}}$

$= \frac{\sin\theta\ (1+\cos\theta)}{\cos\theta + 1} = \sin\theta$

22) إجابة أحمد صحيحة في الأصل في الدول أن تأتي بمثال يبين خطأ المعادلة فالمطابقة لجميع القيم.

23) $-\sin 30 \neq \cos 30$

$-\frac{1}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$

24) $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ $\qquad \frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{ER^2}$

$I\cos\theta = ER^2$ $\qquad \cos\theta = \frac{ER^2}{I}$

25) أولا الدائرة تسمى دائرة الوحدة أي أن طول نصف قطرها = 1 وحدة ومنها طول الوتر = 1 وحدة ، حسب نظرية فيثاغورس

$(1)^2 + \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

26) $\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

$= \frac{-\sin(\theta)}{\cos\theta} = -\tan\theta$

27) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$

$\tan\theta \ sin\theta$

1. $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ , 2. $\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$

28) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$1 + \cos^2\theta = \csc^2\theta$

29) إجابة علا خاطئة لأنه لا يجوز فصل الجمع

مراجعة تراكمية

30) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = 120 + 2n\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$

Or $\theta = 240 + 2n\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$

31) $= \tan(31) = 0.601$

32) $= \sin(30) = 0.5$

33) $= \cos(36.89) = 0.8$

34) $k + x^2 = 3x + 2$

$k + 25 = 17$

$K = -7$

35) $2^x = 32^{x-2} \rightarrow (2^5)^{x-2}$

$x \log 2 = 5 \log 2^{x-2}$

$\frac{x}{x-2} = \frac{2 \log 2}{\text{lig} 2} = 5$

$5x - 10 = x$

$X = 2.5 = \frac{5}{2}$

36) A

37) D

# (٢-٣) الدوال

يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحة المتطابقات.

**مفهوم أساسي** **إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

خطوة 1 : بسّط أحد طرفي المعادلة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيداً.

خطوة 2 : حوّل العبارة في هذا الطرف إلى صورة العبارة في الطرف الأسهل.

**مفهوم أساسي** **اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات**

- قم بتعويض واحدة أو أكثر من المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط العبارة.
- حلّل أو اضرب عند الضرورة، وربما تحتاج إلى ضرب كل من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا يتم تطبيق خصائص المساواة على المتطابقات بنفس طريقة تطبيقها على المعادلات. لا تُنفذ أي عمليات المساواة على كلا طرفي المعادلة المعطاة قبل أن يتم إثبات أنها متطابقة.

## تدرب وحل المسائل

1) $\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} . \cos^2\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

2) $cot\theta\,(cot\theta + tan\theta) = \csc^2\theta$

$cot\theta\left(\frac{cos\theta}{sin\theta} + \frac{sin\theta}{cos\theta}\right) =$

$= cot\theta\,(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{sin\theta\;cos\theta})$

$= \frac{1}{sin\theta} = \csc^2\theta$

3) $1 + cec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

$= 1 + \frac{1}{\cos^2\theta} . \sin^2\theta$

$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$

4) $sin\theta\; sec\theta\; cot\theta = 1$

$\frac{sin\theta}{cos\theta} . \frac{cos\theta}{sin\theta} = 1$

5) $\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta} = (csc\theta - cot\theta)^2$

$(csc\theta - cot\theta)^2 = \csc^2\theta - 2csc\theta\ cot\theta + \cot^2\theta$

$= \frac{1}{\sin^2\theta} - 2.\frac{1}{sin\theta}.\frac{cos\theta}{sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{2cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{1-2cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{(1-cos\theta)^2}{1+\cos^2\theta} = \frac{(1-cos\theta)(1+cos\theta)}{(1+cos\theta)^2} = \frac{1-cos\theta}{1-sin\theta}$

6) $tan\theta - cot\theta$

$= \frac{sin\theta}{cos\theta} - \frac{cos\theta}{sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{cos\theta\ sin\theta}$

$= \frac{(1-\cos^2\theta) - \cos^2\theta}{cos\theta\ sin\theta}$

$= \frac{1-2\cos^2\theta}{cos\theta\ sin\theta}$

7) $\frac{sec\theta}{csc\theta}$

$= \frac{\frac{1}{cos\theta}}{\frac{1}{sin\theta}} = \frac{sin\theta}{cos\theta} = \tan\theta$

8) $cos\theta = sin\theta\ cot\theta$

$= sin\theta\ cot\theta = sin\theta . \frac{cos\theta}{sin\theta}$

$= \cos\theta$

9) $(sin\theta - 1)(tan\theta + sec\theta) = -cos\theta$

$(sin\theta - 1)\left(\frac{sin\theta}{cos\theta} + \frac{1}{cos\theta}\right) = \frac{(sin\theta + 1)}{cos\theta}(sin\theta - 1)$

$= \frac{(\sin^2\theta - 1)}{cos\theta} = \frac{\sin^2\theta - 2\,sin\theta + 1}{cos\theta}$

$= \frac{-\sin^2\theta}{cos\theta}$

$= -cos\theta$

10) $cos\theta\ \cos(-\theta) - sin\theta \sin(-\theta) = 1$

$\cos^2\theta + \sin^{2\theta} = 1$

11) $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta} = \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1}{\tan^2\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$

الجواب D

12) $sec\theta - tan\theta = \frac{1-sin\theta}{cos\theta}$

$\frac{1}{cos\theta} - \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{1-sin\theta}{cos\theta}$

13) $\frac{1+tan\theta}{sin\theta + cos\theta} = \frac{\frac{cos\theta + sin\theta}{cos\theta}}{cos\theta + sin\theta} = \frac{1}{cos\theta} = sec\theta$

14) $sec\theta\ csc\theta = tan\theta + cot\theta$

$tan\theta + cot\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} + \frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{1}{sin\theta\ cos\theta} = sec\theta\ csc\theta$

15) $\frac{2\sin^2\theta - 1}{sin\theta - cos\theta} = \frac{-(1-2\sin^2\theta)}{sin\theta - cos\theta}$

$\frac{(sin\theta + cos\theta)}{sin\theta - cos\theta} \times (sin\theta - cos\theta) = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{sin\theta - cos\theta} = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{sin\theta - cos\theta}$

$= \frac{2\sin^2\theta - 1}{sin\theta - cos\theta}$

16) $\sin^2\theta + 2sin\theta\ cos\theta + \cos^2\theta$

$\frac{2 + sec\theta\ csc\theta}{sec\theta\ csc\theta}$

$= \left(2 + \frac{1}{cos\theta\ sin\theta}\right).cos\theta\ sin\theta$

$= \left(\frac{2\ cos\theta\ sin\theta + 1}{cos\theta\ sin\theta}\right).\cos\theta\ sin\theta$

$= 2\cos\theta\ sin\theta + 1$

$= 1 + \sin 2\theta$

17) $\frac{\cos^2\theta}{(1-sin\theta)^2} = 1$

$\frac{\cos^2\theta}{1-2sin\theta + \sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$

18) $\frac{\cot^2\theta}{csc\theta + 1} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta + sin\theta}$ ........(1)

$\frac{1}{sin\theta} - 1 = \frac{1-sin\theta}{sin\theta}$ ..........(2)

$from\ (1)\ \frac{(1-\sin^2\theta)}{sin\theta\ (1+sin\theta)} = \frac{1-sin\theta}{sin\theta}$ ...........(3)

$(2) = (3)$

19) $csc\theta - sin\theta = \frac{1}{sin\theta} - sin\theta$

$= \frac{1-\sin^2\theta}{sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{sin\theta}$

$= cos\theta\ cot\theta$

20) $sin\theta\ .\ cos\theta\ .\frac{sin\theta}{cos\theta} + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

21) $\csc^2\theta - 2\,csc\theta\,cos\theta + \cot^2\theta$

$\frac{1}{\sin^2\theta} - 2\,csc\theta\,cot\theta + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$\frac{1-2cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{(1-cos\theta)^2}{(1-\cos^2\theta)}$

$= \frac{(1-cos\theta)^2}{(1-cos\theta)(1+cos\theta)}$

$= \frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}$

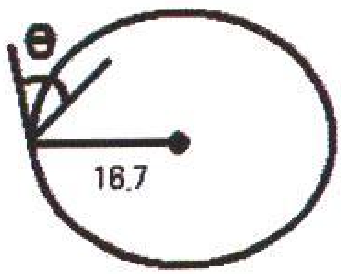
22) $\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{sin\theta}{sin\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$

23) $\frac{sin\theta - cos\theta}{cos\theta\ sin\theta} = \frac{sec\theta - csc\theta}{csc\theta\ sec\theta} = \frac{(\frac{1}{cos\theta} - \frac{1}{sin\theta})}{csc\theta\ sec\theta} =$

$\left(\frac{sin\theta - cos\theta}{cos\theta\ sin\theta}\right).sin\theta\ cos\theta \quad = sin\theta - cos\theta$

24) $L = \frac{g\,sec\theta}{w^2}$ $\quad , L = \frac{g\,tan\theta}{w^2\,sin\theta} = \frac{g\frac{sin\theta}{cos\theta}}{w^2\,sin\theta} = \frac{g\,sec\theta}{w^2}$

25) $R = 16.7m$ $\quad , sin\theta = \frac{1}{4}$




26) 1

27) 1

28) 1

29) 1

30) 1

31) 1

32) -1

33) 1

41) $y = \frac{-g\,x^2}{2\,v_0^2} . \frac{1}{\cos^2\theta} + x\,tan\theta$

$= \frac{-g\,x^2}{2\,v_0^2} .\sec^2\theta + x\,tan\theta$

$= \frac{-g\,x^2}{2\,v_0^2} .(\tan^2 + 1) + x\,tan\theta$

42) a) $P = I_0^2 R\ (1 - \cos^2 2\pi\, Lt)$

b) $P = I_0^2 R\ \left(\frac{1}{\csc^2 2\pi\, Lt}\right)$

43) $\sin x = \frac{1}{2}$

a) √

## (٣-٣) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

**مفهوم أساسي** متطابقات المجموع والفرق

| متطابقات المجموع | متطابقات الفرق |
|---|---|
| • $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ | • $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ |
| • $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ | • $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ |
| • $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ | • $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ |

## تدرب وحل المسائل

1) Cos(165) = cos (105 +60)

= cos (105) cos (60) – sin (105) sin (60)

* cos (105) = cos 60 . cos 45 - sin60 sin 45

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\text{Sin}(105) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{4}}{4}$

$\text{Cos}(165) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}\sqrt{4}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\times1-\sqrt{3}}{2\times4\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{4}).\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{8 \qquad \times\sqrt{2}}$

$= \frac{2(1-\sqrt{3})-(\sqrt{6}+\sqrt{4})\sqrt{3}\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}$

$= \frac{2-2\sqrt{3}-(\sqrt{6}+\sqrt{4})\sqrt{3}\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}$

$= \frac{2-\sqrt{3}(2+(\sqrt{6}+\sqrt{4})\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}$

2) $\cos 105 = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

4) $\cos(75) = (\cos(30+45) = \cos 30 \cos 45 - \sin 30 \sin 45$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

5) $\sin(-30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$

6) $\sin(135) = \sin(90 + 45) = \sin 90 \cos 45$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

7) $\sin(-210) = -\sin(210) = -\sin(180 + 30)$

$= -(\sin 180 \cos 30 + \cos 180 \sin 30)$

$= -\left(-1 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

8) $\cos(135) = \cos(90 + 45) = \cos 90 \cos 45 - sin90\ sin45$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

9) $\tan 195 = \tan(60 + 135) = \frac{\tan 60 + \tan 135}{1 - tan\,60 \times \tan 135}$

$tan60 = \sqrt{3}$ , $\tan 135 = -1$ , $= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

10) a)

$c = 2\sin(120t) = 2\sin(60t + 60t)$

b) $2.2\sin(60t + 60t) = 2\,(\sin 60 \cos 60 + \cos 60\ sin60)$

$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4}\right) = \sqrt{3}$

10) $\sin(90 + \theta) = cos\theta$

$\sin 90\ cos\theta + \cos 90\ sin\theta = \cos\theta$

11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -sin\theta$

$\cos\frac{3\pi}{2}\ cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\ sin\theta = -sin\theta$

12) $\frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{sin\theta\ \cos\frac{\pi}{2} + cos\theta\ \sin\frac{\pi}{2}}{cos\,\theta\ \cos\frac{\pi}{2} - sin\theta\ \sin\frac{\pi}{2}}$

$= -\cot\theta$

13) $(\sin\theta + \pi)) = -sin\theta$

$sin\theta\ cos\pi + cos\theta\ sin\pi = -\sin\theta$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{cos\pi}{2}\ cos\theta - \frac{sin\pi}{2}\ sin\theta$

$= -\sin\theta$

15) $\tan(\theta + 45) = \frac{tan\theta + tan\,45}{1 - tan\theta\ \tan(45)}$

$= \frac{tan\theta + 1}{1 - tan\theta}$

*16)* $y_1 = 10 \sin(2t + 210)$ , $y_2 = 10 \sin(2t + 30)$

$y_1 + y_2 = 10 (\sin(2t + 210) + \sin(2t + 30)$

$= 10 [ \sin 2t \ \cos 210 + \cos 2t \sin 210 + \sin 2t \cos 30 + \cos 2t \sin 30]$

$= 10 [-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t + \frac{\cos 2t}{2}]$

$= 10 \cos 2t$

*17)* $\tan(165) = \frac{\tan(60) + \tan(105)}{1 - \tan(60) \times \tan(105)}$

$= \frac{\sqrt{3} + (\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4}}{4}) / \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{3}\,(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4}}{4})}$

*18)* $\sec 1275°$

$= \frac{1}{\cos(1275)}$

$\cos(1275) = \cos(3\pi + 195)$

$= \cos(3\pi) \cos(195)$

$\cos(195) =$

$\cos 135 + 60 = \cos 135 \cos 60 - \sin 135 \sin 60$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\cos(1275) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sec 1275 = \frac{2\sqrt{2}}{-1+\sqrt{3}}$

*19)* $\sin 735 = \sin(2\pi + 15)$

$= \sin 2\pi \cos 15 + \cos 2\pi \ sin 15$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

*20)* $\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right) = \tan(345) = \tan(330 + 15)$

$= \frac{\tan(330) + \tan(15)}{1 - \tan 330 \ \tan 15}$

$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}}{1 - \frac{(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}}{\frac{(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}}$

$= -2 + \sqrt{3}$

*21)* $\csc\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \csc(75) = \csc(30 + 45) = \frac{1}{\sin(30+45)}$

$\sin(30 + 45) = \sin 30 \ \cos 45 + \cos 30 \sin 45$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\csc\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{\frac{2+\sqrt{3}\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}}=\frac{4\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}\sqrt{2}}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

*22)* $\cot\frac{113\pi}{12}=\cot(1695)=\cot(4\pi+255)$

$=\frac{1}{\tan(4\pi+255)}$

$\tan(4\pi+255)=\frac{\tan 4\pi+\tan 255}{1-\tan 4\pi\ \tan 255}=\tan 255=2+\sqrt{3}$

*23)* $F=\frac{w\ (\sin A+M\cos A)}{\cos A-M\sin A}$

$=\frac{w\ (\sin A+\tan\theta\ \cos A)}{\cos A-\tan\theta\sin A}$

$=\frac{w\ (\sin A+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\cos A)}{\cos A-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\sin A}$

$=\frac{w\ (\cos A\ \sin A+\sin\theta\ \cos A)}{\frac{(\cos A\ \cos\theta-\sin\theta\ \sin A)}{\cos\theta}}$

$=\frac{w\frac{(\sin(\theta+A))}{\cos\theta}}{\frac{\cos(\theta+A)}{\cos A}}=w\tan(\theta+A)$

*25)* $\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A\ \cos B}}=\frac{\sin A\ \cos B+\cos A\ \sin B}{.\cos A\ \cos B}=\sin(A+B)$

*26)* $\frac{1-\sin A\ \sin B}{\frac{1}{\cos A\ \cos B}}=\frac{1-\frac{\sin A\ \sin B}{\cos A\ \cos B}}{\frac{1}{\cos A\ \cos B}}$

$=\frac{\frac{\cos A\ \cos B-\sin A\ \sin B}{\cos A\ \cos B}}{\frac{1}{\cos A\ \cos B}}$

$=\cos(A+B)$

*27)* $\frac{\frac{1}{\cos A}.\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A\ \sin B}{\cos A\ \cos B}}=\frac{\frac{1}{\cos A\ \cos B}}{\frac{\cos A\ \cos B+\sin A\ \sin B}{\cos A\ \cos B}}$

$=\frac{1}{\cos A\ \cos B+\sin A\ \sin B}$

$=\frac{1}{\cos(A-B)}=\sec(A-B)$

*28)* $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

$==(\sin A\ \cos B+\cos A\ \sin B)(\sin A\ \cos B-\cos A\ \sin B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A\ (1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A\sin^2 B)$

$=\ \sin^2 A-\sin^2 B\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B)$

$=\sin^2 A-\sin^2 B$

$29)\ \sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)$

$[\ (\sin\frac{\pi}{3}cos\theta-\frac{cos\pi}{3}sin\theta\ )\ (\cos\frac{\pi}{3}\ cos\theta-\sin\frac{\pi}{3}\sin\theta)$

$-\ ((\cos\frac{\pi}{3}cos\theta+\sin\frac{\pi}{3}sin\theta)\ (\sin\frac{\pi}{3}\ cos\theta+\cos\frac{\pi}{3}sin\theta)$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ cos\theta-\frac{sin\theta}{2}\right)\left(\frac{cos\theta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ sin\theta\right)-\left(\frac{cos\theta}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta\right)(\frac{\sqrt{3}}{2}\ cos\theta+\frac{sin\theta}{2})$

$=(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\theta-\frac{3}{4}sin\theta\ cos\theta-\frac{sin\theta cos\theta}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\theta)-$

$((3\cos 2\theta 4+\ cos\theta sin\theta 4+34cos\theta\ sin\theta+34\sin 2\theta$

$=-2\ \frac{cos\theta\ sin\theta}{4}-\ 2\times\frac{3}{4}\ cos\theta\ sin\theta$

$=-5\ \frac{sin\theta\ cos\theta}{2}=\ -3\frac{\sin 2\theta}{2}$

$30)\ \cot(A+B)=\ \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\ \frac{cosA\ cosB-sinA\ sin}{sinA\ cosB+cosA\ sinB}$

$=\frac{cosA\ cosB}{sinA\ cosB+cosA\ sinB}-\ \frac{sinA\ sinB}{sinA}$

$=\frac{1}{\tan(A+B)}$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-tanA\ tanB}=\frac{\frac{sinA\ cosB\ +\ sinB\ cosA}{cosA\cos B}}{1-\frac{sinA\ sinB}{cosA\sin B}}$$

$=\frac{\sin(A+B)}{1-\sin A\ sinB}$

$31)\ d=\ \sqrt{(cosA-cosB)^2+(sinA-sinB)^2}$

$=\sqrt{\cos^2 A-2cosA\ cosB+\cos^2 B+\sin^2 A-2sinB\ sinA+\sin^2 B}$

$=\sqrt{1+16-2(cosAcosB+sinA\ sin}$

$d=\ \sqrt{2-2\cos(A-B)}$

$33)\ a)\ \ A=\ \pi\ \ ,B=2\pi\ \ \ ,c=3$

$34)\ sin\theta\ csc\theta-\cos^2\theta$

$44)\ cos\theta=\ -0.3\ \rightarrow\ \theta=107.5$ في الربع الثاني

$\cot\theta=\ -0.3\ \rightarrow\ \theta=287.5$ في الربع الثالث

# (٤-٣) المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

**مفهوم أساسي** المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم $\theta$ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

**مفهوم أساسي** المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم $\theta$ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

## تدرب وحل المسائل

1) $\sin\theta = \frac{1}{4}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$ لأنها تقع في الربع الأول

$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{14}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{14}}{8}} = \frac{\sqrt{4+14}}{\sqrt{8}}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{14}}{\sqrt{8}}}$ $,\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \ = 1 - \frac{2}{16} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \frac{1}{4} . \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{8}}$

2) $\sin\theta = \frac{4}{5}$ $,\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta + \frac{16}{25} = 1 \rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$

$\cos\theta = \pm\frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$ لأنه في الربع الثاني الجتا سالب

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = +\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2}{5}$ $,\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$= 1 - \frac{32}{25} = \frac{7}{25}$

$\sin^2\theta = 2\ sin\theta\ cos\theta$

$= 2 \times \frac{4}{5} \times -\frac{3}{5} = -\frac{36}{5}$

3) $cos\theta = \frac{3}{5}$ في الربع الرابع

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\theta = 1 - 2 . \frac{16}{25} = \frac{7}{\sqrt{25}} = \frac{7}{25}$

$\sin 2\theta = 2sin\theta\ cos\theta$

$= 2 . \frac{-4}{5} . \frac{3}{5} = \frac{-36}{5}$

4) $\tan\theta = -\frac{8}{15}$ في الربع الثاني

7) $\tan\theta = -2\ \ : \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

8) $\sin\frac{\pi}{8} = \sin\left(\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

9) $cos\ 15 =$

10) $\sin 75 = \sqrt{\frac{1-\cos(15)}{2}} = \sin\left(\frac{150}{2}\right)$

$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

11) $\tan 165 = \tan\left(\frac{330}{2}\right)$

$= -\sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}} = -\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

12) $\tan\frac{\left(\frac{5\pi}{6}\right)1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}} = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$

13) $\theta = 37°$

a) $d = \frac{v^2 \sin(2\theta)}{L}$

$d = \frac{(52)^2 .\sin(2.(37))}{(32)} = 80.0$

14) $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\ \cos\theta} = + \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\ \cos\theta}$

$= \tan\theta$

15) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta} = \frac{2}{\frac{1}{\tan\theta} - \tan\theta}$

$= \frac{2}{\frac{1-\tan^2\theta}{\tan\theta}}$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

17) $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}.\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{4}} = \frac{\sin\theta}{2}$

18) $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$

a) $M = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}$

b) $M = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\frac{17}{18}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{1}{18}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36}}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

19) $P = I_0^2 R(1 - \cos 2t\theta)$

$= I_0^2 R(1 - \frac{\cos 2t\theta}{2} + 1$

$= I_0^2\ R(\frac{1-\cos 2t\theta}{2})$

20) $v = 95\frac{ft}{s}$ $\quad ,\theta = 45 - A$

$\theta = 45 + A$

$d = \frac{2v^2\sin\theta\ \cos\theta}{g}$

$\frac{2v^2\sin(45-\theta)\cos(45-\theta)}{g} = \frac{2v^2\sin(45+\theta)\cos(45+\theta)}{g}$

$\sin(45-\theta)\cos(45-\theta)$

$\sin(45-\theta) = \sin 45\, cos\theta - \cos 45 \sin\theta = \left(\frac{cos\theta}{\sqrt{2}} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)$

$\cos(45-\theta) = \left(\frac{cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{sin\theta}{\sqrt{2}}\right)$

$\sin(45+\theta)\cos(45+\theta)$

$\left(\frac{cos\theta + sin\theta}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{cos\theta}{\sqrt{2}} - \frac{sin\theta}{\sqrt{2}}\right)$ $\therefore$ متساويان

***21)*** $\cos\theta = \frac{4}{5}$ $,\sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow sin\theta = \frac{3}{5}$

$sin2\theta = \sqrt{\frac{1-cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$cos2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$

$\tan 2\theta = \frac{2\,tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{12}{7}$

***22)*** $sin\theta = \frac{1}{3}$ $,\cos^2 = 1 - \sin^2\theta$

$sin2\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{8}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{6}}$

$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{8}}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{3}}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{8}} \rightarrow \tan 2\theta = \frac{\frac{2}{\sqrt{8}}}{1-\frac{1}{\sqrt{8}}}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{8}}}{\frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{8}}} = \frac{2}{\sqrt{8}-1}$

***24)*** $\sec\theta = -\frac{4}{3} \rightarrow cos\theta = -\frac{3}{4}$ $,\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$\sin 2\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \rightarrow sin\theta = \frac{7}{4}$

$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{8}} = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

$\tan\theta = \frac{\frac{7}{16}}{-\frac{3}{4}} = \frac{7}{-12}$

$\tan 2\theta = \frac{2.\frac{7}{-3}-1}{1-\frac{49}{9}} = \frac{2.-1}{1-\frac{7}{3}} = \frac{-2}{-\frac{4}{3}}$

$$\tan\theta = \frac{\frac{7}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{7}{-3}$$

$$= -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$$

*25)* $\cot\theta = \frac{3}{2}$ , $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{3}{2}$ $\quad ,\tan\theta = \frac{2}{3}$

$$\tan 2\theta = \frac{2.\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5}$$

$$\cot^2\theta = 1 - \sec^2\theta$$

$$\sec^2\theta = 1 - \cot^2\theta \rightarrow 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$$

*27)* الخطأ عند سعيد

$$\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} = 0.25 \neq \frac{1}{2}$$

*28)* $\sin\theta = \frac{AP}{OP}$

$$\cos\theta = \frac{OA}{OP}$$

$$\tan\theta = \frac{AP}{OA}$$

$$\frac{\frac{AP}{OP}}{1+\frac{OA}{OP}} = -\frac{\frac{AP}{OP}}{\frac{OP+OA}{OP}} = \frac{AP}{OP+OA}$$

*29)* $\cos^2\theta \quad ,\sin^2\theta$ وجود كلا من

*30)* $\sin(A + A) = sinA\, cosA + cosA\, sinA$

$= 2\, sinA\, cosA = \sin 2A$

$\cos(A + A) = \cos A \cos A - sinA\, sinA$

$= \cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A$

*43) A*

*44) D*

# (٥-٣) حل المعادلات المثلثية

المتطابقات المثلثية هي معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرفاً.

## تدرب وحل المسائل

1) $(cos\theta + 1)^2 = 0$

$Cos\ \theta = -1$

$\theta = 180$

2) $cos2\theta + cos\theta = 0$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta + cos\theta = 0$

$\cos^2\theta + sin\theta - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta + \cos\theta + \frac{1}{4} - \sin^2\theta - \frac{1}{4}$

$\left(cos\theta + \frac{1}{2}\right) - \sin^2 - \frac{1}{4} = 0$

$cos\theta + \frac{1}{2} = sin\theta - \frac{1}{4}$

$2\cos^2\theta - 1 + cos\theta - 0$

$\cos^2\theta + \frac{1}{2}cos\theta - \frac{1}{2} = 0$

$\cos^2\theta + \frac{1}{2}cos\theta + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$\left(cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$

$cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{8}$

$cos\theta\ (2\cos\theta + 1) - 1 = 0$

3) $\cos 2\theta = 8 - 15\ sin\theta$

$1 - 2\sin^2\theta = 8 - 15\sin\theta$

$= 2\sin^2\theta - 15\ sin\theta$

$= 2\sin^2\theta - 15\ sin\theta + \frac{225}{8} - \frac{225}{8}$

6) $2\cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}$ .............

$= -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$, ... ... ... ... ... ...

5) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

$\sin^2\theta = \frac{1}{4} \rightarrow sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, +\frac{7\pi}{6}$

7) $\sin\frac{\theta}{2} + cos\theta = 1$

$\sqrt{\frac{1-cos\theta}{2}} + cos\theta = 1 \rightarrow \sqrt{\frac{1-cos\theta}{2}} = 1 - cos\theta$

$\frac{1-cos\theta}{2} = (1 - cos\theta)(1 + cos\theta)$

$\frac{1}{2} = (1 - cos\theta) \rightarrow -cos\theta = -\frac{1}{2}$

$cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$

8) $\cos 2\theta + 4cos\theta = -3$

$2\cos^2\theta - 1 + 4cos\theta = 3$

$\cos^2\theta + 2cos\theta = 2$

$\cos^2\theta + 2cos\theta + 1 = 1$

$(\cos + 1) = 1 \rightarrow cos\theta = -2$ $\quad (x)$

$\cos\theta = 0$ $\quad (\sqrt{})$

9) $cos2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

$1 - 2\sin^2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

$3 - 3\sin^2\theta = 0$

$\sin^2\theta = 1$

$\sin\theta = \pm 1$

$\theta = 90°$

$\theta = 270°$

10) $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

$\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

| | |
|---|---|
| $Sin\,\theta = 0$ | *or* $\sin\theta - 1 = 0$ |
| $\theta = \pi + 2n\pi$ | $\sin\theta = 1$ |
| | $\theta = 90 + 2n\pi$ $\quad n \in Z$ |

11) $2\sin^2\theta - 1 = 0$

$\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4} = 45$ $(+)$

*or* $\theta = 225$ $(-)$

$\theta = 315$ $(-)$

*12)* $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

$\cos\theta\,(1 - 2\sin\theta) = 0$

$\cos\theta = 0$ *or* $1\text{-}2\sin\theta = 0$

$\cos\theta = 0$ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 90 + 2\,n\pi$ $\theta = 30$ أو $50$

$n \in Z$

*13)* $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$

*a)* $\frac{10.5-12}{3} = \sin\frac{2\pi}{365}t$

$-\frac{1}{2} = \sin\frac{2\pi}{365}t$

$\sin^{-1} -\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{365}t$

$\sin(-30) = \sin(210) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

*(1)* $\frac{7\pi}{6} + 2n\pi = \frac{2\pi}{365}t$

$\frac{7}{12} + n = \frac{1}{365}t$

*t= 28*

*(2)* $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{11\pi}{12} + 2n\,\pi = \frac{2\pi}{365}t$

$\frac{11}{24} + n = \frac{1t}{365}$

*t= 34*

*14)* $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$

$\sin^2\theta + (1 - \sin^2\theta) = 0$

$\sin^2 2\theta - \sin^2\theta + 1 = 0$

$\sin 2\theta\,.\sin 2\theta - \sin^2\theta + 1 = 0$

$2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta + 1$

$4\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1 = 0$

*15)* $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$

$2\sin\theta\ \cos\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ *or* $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2} + n$ $\theta = \frac{\pi}{6} + \pi$

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

16) $\tan\theta = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

17) $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\cos\theta = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{3} \quad ,\theta = 240$

$\theta = -\frac{\pi}{3} \qquad , \quad \theta = 120 \quad ,\theta = 300$

18) $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4} \quad , \ \theta = 135$

$\theta = -\frac{\pi}{4} \quad , \ \theta = 225 \quad , \ \theta = 315$

19) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$

$2\sin\theta \ \cos\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\ \theta\ (2\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0 \qquad or \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$

$\theta = \frac{3\pi}{2} \qquad \theta = 330$

20) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

21) $\tan\theta - \sin\theta = 0 \ \rightarrow \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - sin\theta$

$\frac{\sin\theta - \sin\theta\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta\ (1-\cos\theta)}{\cos\theta} = \tan\theta\ (1 - cos\theta)$

$\tan\theta = 0 \qquad or \quad 1 - \cos\theta = 0$

$\theta = 0 + n\pi \qquad or\ \cos\theta = 1$

$\theta = 0 + 2n\pi$

22) $4\sin^2\theta - 4\sin\theta = 1$

$4\sin^2\theta - 4\sin\theta - 1$

$\sin^2\theta - \sin\theta - \frac{1}{4} = 0$

$\sin^2\theta - \sin\theta + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

$\left(sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\sin\theta - \frac{1}{2} = \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$

$\theta = 78.04 + 2n\pi$

*23)* $h = 2064$ , $x = 1m$ ,3.281 $1m = 3.281$

$\tan\theta = \frac{h}{x} = \frac{2064}{3.281} = 629$

$\theta = 90° = 89.9$

*24)* $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$

*a) let* $x = 24$

$y = 3\sin\left[\frac{20\pi}{6}\right] + 8 = 5.40$

*let* $x = 4$

$y = 3\sin[0] + 8$

$= 8$

*b)* $8 = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$

$0 = \sin[\frac{\pi}{6}(x-4)]$

$\frac{\pi}{6}(x-4) = 0$

$X = 4$

*25)* $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\,sin\theta + 2 = 0$

$2\cos^2\theta\sin\theta - 2\,sin\theta + 2 = 0$

$\cos^2\theta\ \sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

$sin\theta\,(\cos^2\theta - 1) + 1 = 0$

$-\sin^3\theta + 1 = 0$

$\sin^3\theta = 1 \rightarrow \sin\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

*26)* $2\sin^2\theta + (\sqrt{2} - 1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$sin\theta\,(\sqrt{2}\sin\theta + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta\left(\sqrt{2}\,sin\theta + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

*27)* $2\,sin\theta = \sin 2\theta$

$\sin 2\theta = 2\,sin\theta\,\cos\theta$

*if* $\cos\theta = 1$

$\theta = 0 + 2\,n\pi$ $n \in Z$

*28)* $\sin^2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

$2\sin\theta\ \cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} =$

29) $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

$\cos^2\theta - \cos\theta = \cos\theta\,(\cos\theta - 1) = \frac{3}{4}$

*if* $\theta = \frac{\pi}{3}$

30) $n_1 \sin I = n_2 \sin r$

***a)*** $\sin 35 = 2.42 \sin r$

$\sin r = 0.24$

$r = 76.3$

***b)*** إذا كان الماس صافيا أي ليس فيه شوائب تؤثر في انعكاس الزاوية.

32) إجابة هلا الصحيحة

$\theta = 90 \qquad 2\sin 90\ \cos 90 = \sin 90$

$2\,(0) \neq 1$ , 270 وكذلك

33) $\sin 2x < \sin x$

$2\,\sin x \cos x < \sin x$

$\cos x < \frac{1}{2}$

34) لأننا نعمل في دالة دورية

36) $\csc x = \sqrt{2}$

| | |
|---|---|
| $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\csc^2\theta = 2$ <br> $\csc\theta = \pm\sqrt{2} \rightarrow \sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ |

ليس لهما نفس الإجابة

## حلول اختبار الفصل

1. $\csc\ \theta$ الإجابة هي $D$
2. $\cos(30-\theta) = \cos 30 \cos\theta + \sin 30 \sin\theta$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{\sin\theta}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\sin(60+\theta) = \sin 60 \cos\theta + \sin\theta + \cos 60$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{\sin\theta}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

من (1)و (2) المعادلة تمثل متطابقة.

3. $= \cos(\theta - \pi) = \cos\theta \cos\pi + \sin\theta \sin\pi$

$= \cos\theta\,(-1) + \sin\theta(0)$

$= -\cos\theta =$ الطرف الثاني

4. $\frac{4}{5}$ الإجابة هي $D$
5. $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$\tan^2\theta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1 = \frac{7}{9}$

$tan\theta = \mp\frac{7}{\sqrt{3}}$

بما أن الزاوية في الربع الرابع $\tan\theta$ سالبة

$tan\theta = -\frac{7}{\sqrt{3}}$ $cot\theta = -\frac{\sqrt{3}}{7}$

6. $sec\theta = -2$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \qquad = (-2)^2 - 1 = 3$

$\tan\theta = \mp\sqrt{3}$

بما أن الزاوية في الربع الثاني $tan\,\theta$ سالبة

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

7. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\frac{1}{\sec^2\theta} + \frac{1}{\csc^2\theta} = 1$

$\frac{1}{\sec^2\theta} = 1 - \frac{1}{\csc^2\theta} = 1 - \frac{1}{(-2)^2} = \frac{3}{4}$

$\sec^2\theta = \frac{4}{3}$ $sec\theta = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\theta$ في الربع الثالث $sec\,\theta$ سالبة

$sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

8. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\frac{1}{\sec^2\theta} + \sin^2\theta = 1$

$\frac{1}{\sec^2\theta} = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\sec^2\theta = \frac{4}{3}$ $sec\theta = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\theta$ في الربع الأول $sec\,\theta$ موجبة

$sec\,\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

9. $= sin\theta\,(cot\theta + tan\theta)$

$= sin\theta\left(\frac{cos\theta}{sin\theta} + \frac{sin\theta}{cos\theta}\right) = sin\theta\,(\frac{\sin^{2\theta} + \sin^2\theta}{sin\theta\ cos\theta})$

$= sin\theta\,.\frac{1}{sin\theta cos\theta} = \frac{1}{cos\theta} = sec\theta =$ الطرف الثاني

10. $= \frac{cos\theta}{sec\theta - tan\theta} = \frac{cos\theta}{\frac{1}{cos\theta} - \frac{sin\theta}{cos\theta}}$

$= \frac{cos\theta}{\frac{1-sin\theta}{cos\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{1-sin\theta} =$ الطرف الأول

11. $= (tan\theta + cot\theta)^2$

$= \tan^2\theta + (2\,tan\theta\,cot\theta) + \cot^2\theta$

$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \left(2.\frac{sin\theta}{cos\theta}.\frac{cos\theta}{sin\theta}\right) + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$$= \frac{\sin^4\theta\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{(1)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$= \csc^2\theta\sec^2\theta =$ الطرف الثاني

*12.* $= \frac{\sin^2\theta}{1-cos\theta}$ , $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-cos\theta} = \frac{(1-cos\theta)(1-cos\theta)}{1-cos\theta}$$

$= 1+cos\theta = 1+\frac{1}{sec\theta} = \frac{sec\theta+1}{sec\theta} =$ الطرف الأول

*13.* $\sqrt{2}-1$ *B* الإجابة

*15.* $\cos(-225) = \cos(45-270)$

$= \cos 45\cos 270 + sin45\sin 270$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

*16.* $\sin(480) = \sin(360+120) = \sin 120$

$\sin 120 = \sin(90+30)$

$= \sin 90\, cos30 + sin30\cos 90$

$= (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\frac{1}{2})(0)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

*17.* $\cos(75) = \cos(45+30)$

$= \cos 45\, cos30 - \sin 45\sin 30$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\frac{1}{2})$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

*18.* $\sin 165 = \sin(120+45)$

$= \sin 120\ \ cos45 + cos120\sin 45$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

19. $(2cos\theta + 1)(cos\theta - 2) = 0$

$2\ cos\theta + 1 = 0$ أو $cos\theta - 2 = 0$

$cos\theta - -\frac{1}{2}$ أو $cos\theta = 2$ مرفوض

$-1 \le cos\theta \ge 1$

$cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{2\pi}{3}\ ,\frac{4\pi}{3}$

20. $sin3\theta = \frac{1}{2}$

$3\ \theta = \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{2\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{18}\ ,\ \frac{5\pi}{18}$

21. $2\cos^2\theta - 1 + cos\theta = 2$

$2\cos^2\theta + cos\theta - 3 = 0$

$(2cos\theta + 3)(cos\theta - 1) = 0$

$2cos\theta = -\frac{3}{2}$ , $cos\theta - 1 = 0$

$cos\theta = -\frac{3}{2}$ أو $cos\theta = 1$

مرفوض لأن

$-1 \le cos\theta \le 1$

$Cos\ \theta = 1$

$\theta = 0\ ,\ 360$

22. $sin\theta\left(cos\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\sin\theta = 0$ أو $cos\theta - \frac{1}{2} = 0$

$\theta = 0\ ,180\ ,360$ أو $\theta = 60\ ,300$

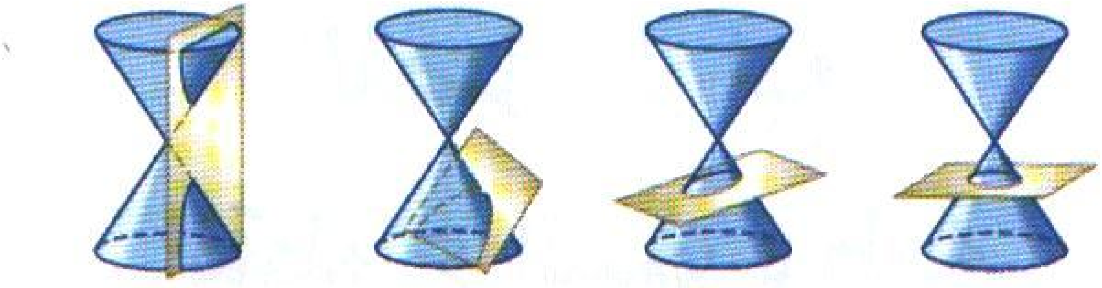
$\theta = 0, 60, 180, 300, 360$

# الفصل الرابع
# القطوع المخروطية
# والمعادلات الوسيطية

# (٤-١) القطوع المكافئة

**القطوع المخروطية:**

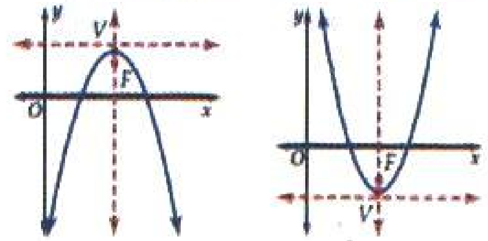
**هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس والقطوع المخروطية الأربعة هي القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.**



الدائرة — القطع الناقص — القطع المكافئ — القطع الزائد

**مفهوم أساسي** — **خصائص القطع المكافئ**

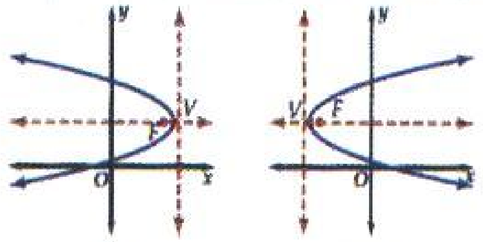
**المعادلة في الصورة القياسية:** $(x-h)^2 = 4p(y-k)$



$p > 0$ — $p < 0$

| | |
|---|---|
| **الاتجاه:** | المنحنى مفتوح رأسيًا |
| **الرأس:** | $(h, k)$ |
| **البؤرة:** | $(h, k+p)$ |
| **معادلة محور التماثل:** | $x = h$ |
| **معادلة الدليل:** | $y = k - p$ |
| **طول الوتر البؤري:** | $\|4p\|$ |

**المعادلة في الصورة القياسية:** $(y-k)^2 = 4p(x-h)$



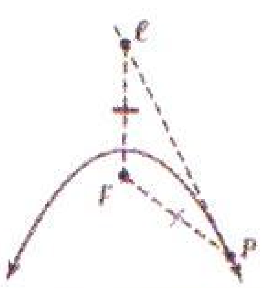
$p > 0$ — $p < 0$

| | |
|---|---|
| **الاتجاه:** | المنحنى مفتوح أفقيًا |
| **الرأس:** | $(h, k)$ |
| **البؤرة:** | $(h+p, k)$ |
| **معادلة محور التماثل:** | $y = k$ |
| **معادلة الدليل:** | $x = h - p$ |
| **طول الوتر البؤري:** | $\|4p\|$ |

**مفهوم أساسي** — **مماس منحنى القطع المكافئ**

مماس القطع المكافئ عند النقطة $P$ هو أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين $P$ والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



# (٢-٤) القطوع الناقصة في الدوائر

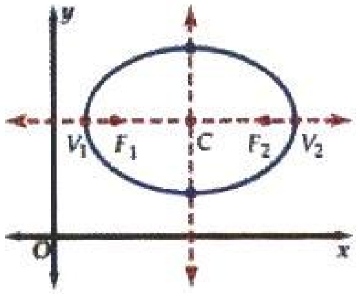
**تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًا:** **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط مستوية يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**. و لتوضيح هذا المفهوم تخيل وجود خيط مربوط من طرفيه عند البؤرتين، حيث يمكنك أن ترسم قطعًا ناقصًا باستعمال قلم على أن يبقى الخيط مشدودًا. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت.

تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر**، وتسمى نقطة منتصف المحور **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، ومتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. تُسمّى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، وتسمّى نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.

**مفهوم أساسي** — **خصائص القطع الناقص**

**المعادلة في الصورة القياسية:**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$




**الاتجاه:** المحور الأكبر أفقي

**المركز:** $(h, k)$

**البؤرتان:** $(h \pm c, k)$

**الرأسان:** $(h \pm a, k)$

**الرأسان المرافقان:** $(h, k \pm b)$

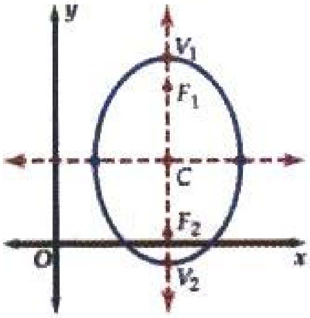
**المحور الأكبر:** $y = k$

**المحور الأصغر:** $x = h$

**العلاقة بين** $a, b, c$ **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

**المعادلة في الصورة القياسية:**

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$




**الاتجاه:** المحور الأكبر رأسي

**المركز:** $(h, k)$

**البؤرتان:** $(h, k \pm c)$

**الرأسان:** $(h, k \pm a)$

**الرأسان المرافقان:** $(h \pm b, k)$

**المحور الأكبر:** $x = h$

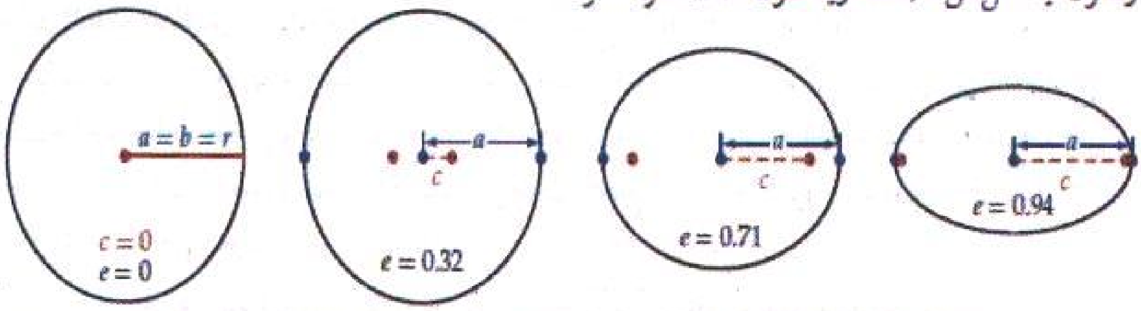
**المحور الأصغر:** $y = k$

**العلاقة بين** $a, b, c$ **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

**مفهوم أساسي** — **الاختلاف المركزي**

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$، حيث $c^2 = a^2 - b^2$، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة $c$ المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى فإن كلًّا من قيمتي $e, c$ تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من $a, b$ مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.




**مفهوم أساسي** الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها $(h, k)$ ونصف قطرها $r$ هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

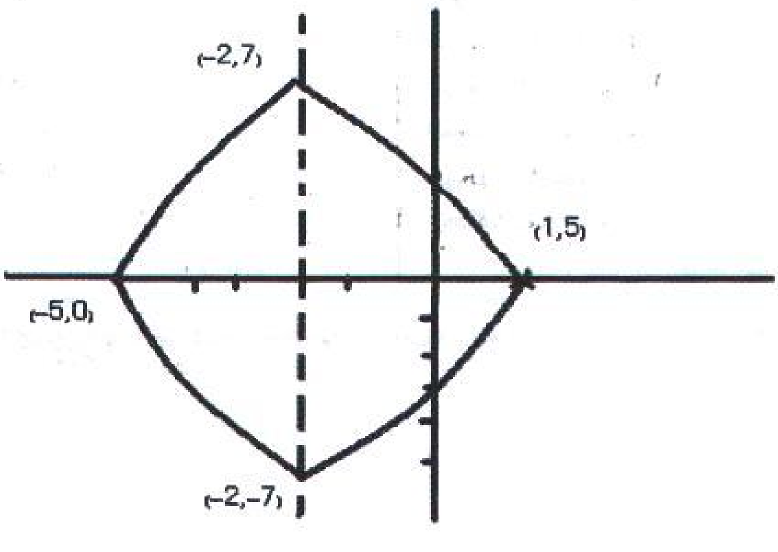
## تدرب وحل المسائل

1. $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

$h = -2 \qquad , t = 0$

$a = 7 \quad , b = 3 \quad , c = \sqrt{49-9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

* الاتجاه : رأسي
* المركز : $(-2, 0)$
* البؤرتان $(-2, \pm 2\sqrt{1)0}$
* الرأسان المرافقان : $(-5, 0)$ , $(1, 0)$
* المحور الأكبر : $x = -2$
* المحور الأصغر : $y = 0$



2. $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4}$

$h = -4 \quad , k = -3$

$a = 3 \quad , b = 2 \quad , c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4 , -3) \leftarrow (h, k)$

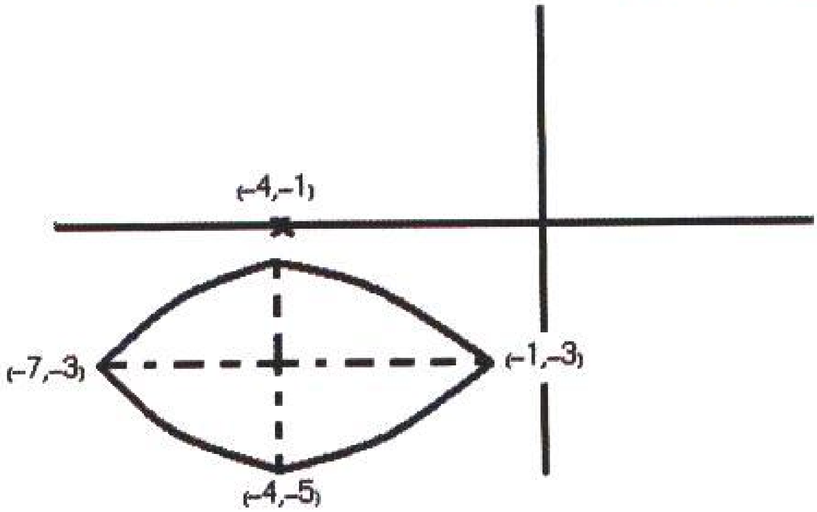
البورتان : $(-4 \pm \sqrt{5} \; , -3) \leftarrow (h \pm c , k)$

الرأسان: $(-1, -3) \; , (-7, -3) \leftarrow (h \pm a , k)$

الرأسان المرافقان: $(-4, -1), (-4, -5) \leftarrow (h, k \pm b)$

المحور الأكبر: $y = -3$

المحور الأصغر : $x = -4$




3. $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

$(X^2 - 14x) + (9y^2 + 36y) = -49$

$(X^2 - 14x) + 9(y^2 + 4y) = -49$

$(x^2 - 14x + 49) + 9(y^2 + 4y + 4) = -49 + 49 + 9(4)$

$(x-7)^2 + 9(y+2)^2 = 36$

$\frac{(x-7)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

$h = 7 \quad , k = -2$

$a = 6 \quad , b = 2 , \quad c = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(7,-2)$

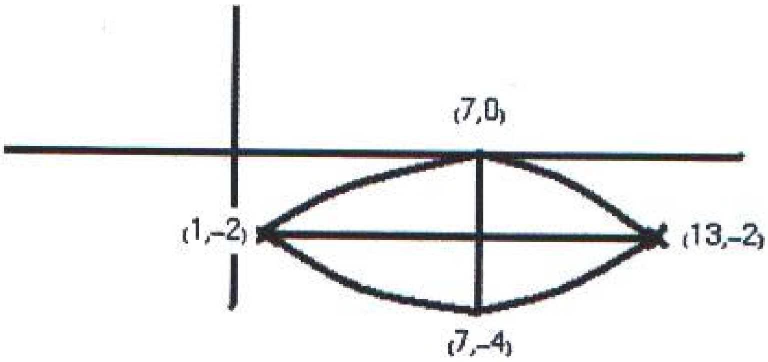
البورتان : $(7 \pm 4\sqrt{2},-2)$

الرأسان: $(13,-2) , (1,-2)$

الرأسان المرافقان : $(7,0) , (7, -4)$

المحور الأكبر: $y = -2$

المحور الأصغر: $x = 7$




4. $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

$(4x^2 - 64x) + (y^2 - 12y) = -276$

$4(x^2 - 16x + 64) + (y^2 - 12y + 36) = -276 + 4(64) + 36$

$4(x-8)^2 + (y-6)^2 = 16$

$\frac{(x-8)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1$

$h = 8 \quad , k = 6$

$a = 4 \quad ,b = 2 \quad ,c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

الاتجاه: رأسي

المركز: (8,6)

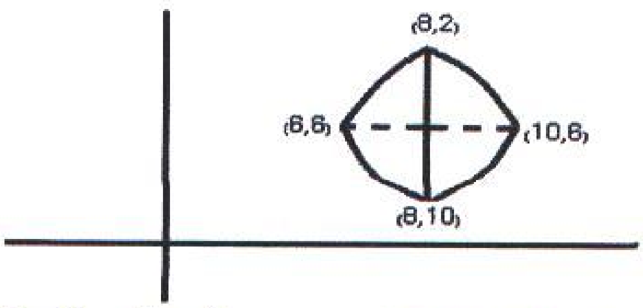
البؤرتان: $(8, 6 \pm \pm 2\sqrt{3})$

الرأسان: (8,2) , (8,10)

الرأسان المرافقان: (6,6) , (10,6)

المحور الأكبر: x = 8

المحور الأصغر: y = 6




5. (-5, -3) , (11,-3) البؤرتان , (-7,-3) , (13,-3) الرأسان

* طول المحور الأكبر .... 29

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 29$

$\sqrt{(-7 - 13)^2 + (-3 + 3)^2} = 29$

$\sqrt{400} = 29$ ............. $29{=}20$

$a{=}10$ المسافة بين الرأسين.

* المسافة بين البؤرتين = $(2c)$

$$\sqrt{(-15-11)^2+(-3+3)^2} = 2c$$

$$\sqrt{(-16)^2} = 2c \rightarrow 2c = 16 \rightarrow c = 8$$

* لإيجاد b

$$C^2 = a^2 - b^2$$

$$b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{100+64} = \sqrt{36} = 6$$

* الرأسين على بعدين متساويين من المركز:

$$(h,k) = \left(\frac{x_1+x_2}{2} ,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-7+13}{2} ,\frac{-3-3}{2}\right) = (3,-3)$$

الاحداثي y لنهايتي المحور الأكبر متساويان ........ المحور أفقي

$$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

6. الرأسان : (4, -9) , (4, 3) ، وطول المحور الأصغر 8

$$2a = \sqrt{(4-4)^2 + (3+9)^2} = \sqrt{144} \rightarrow a = 6$$

$$2b = 8 \rightarrow b = -4$$

$$(h,k) = \left(\frac{4+4}{2},\frac{3-9}{2}\right) = (4,-3)$$

الرأسان مشتركان في الاحداثي x

اتجاه المحور الأكبر رأسي.

$$\frac{(x-9)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{36}$$

7. نهايتا المحور الأكبر (1, 2) و (-13,2) و نهايتا المحور الأصغر (-6,0) و (-6,4)

* نصف طول المحور الأكبر ← $7 = \frac{1-(-13)}{2} = a$

* نصف طول المحور الأصغر ← $2 = \frac{4}{2} = b$

منتصف المحور الأكبر ..... مركز القطع الناقص

$$(h,k) = \left(\frac{-13+1}{2} ,\frac{2+2}{2}\right) = (-6,2)$$

الإحداثيين $y$ لنهايتي المحور الأكبر متساويان ....... المحور أفقي.

$$\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

8. البؤرتان (-6, -3) و (-6,9) و طول المحور الأكبر 20 وحدة.

$$2a = 20 \rightarrow a = 10$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(-6+6)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{144} = 12$$

$C = 6$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 + 36} = 8$$

البؤرتان مشتركان في الاحداثي x .... المحور رأسي

$$(h, k) = \left(\frac{-6-6}{2}, \frac{9-3}{2}\right) = (-6,3)$$

$$\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$$

9. الرأسان المرافقان (-3,7) , (-13,7) و وطول المحور الأكبر 16 وحدة

$$2a = 16 \rightarrow a = 8$$

$$2b = \sqrt{(-13+3)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{100} = 10 \rightarrow b = 5$$

الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$

$$= (h \pm 5,7) = (-13,7), (-3,7)$$

10. $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{72 - 54} = \sqrt{18}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{72}} = 0.5$$

11. $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{40 - 12} = \sqrt{28}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{40}} \approx 0.836$$

12. $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y-3)^2}{57} = 1$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{57 - 14} = \sqrt{43}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{57}} \approx 0.868$$

13. $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33}$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{33 - 27} = \sqrt{6}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{33}} \approx 0.426$$

14. سباق $e = 0.75$ , $2a = 1000$

(a) $W = ?$ (المحور الأصغر)

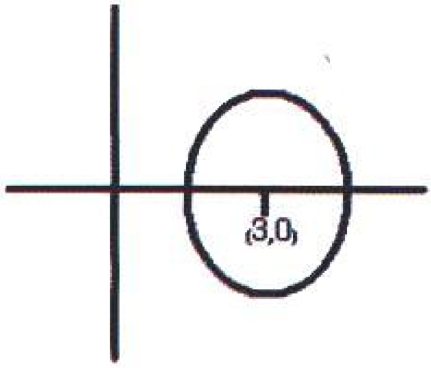
$$e = \frac{c}{a} \rightarrow c = e \times 9 = 0.75 \times 500 = 375$$

$$2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{(500)^2 - (375)^2} \approx 661.4$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad (b)$$ المركز $(0,0)$

$$\frac{x^2}{250000}+\frac{y^2}{109375}=1$$

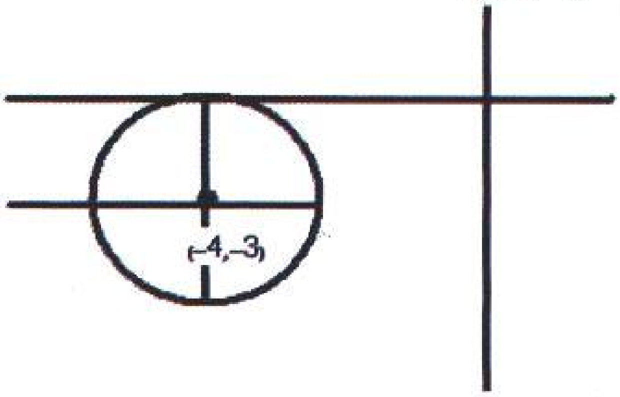
15. المركز $(3,0)$ ونصف القطر 2




16. المركز $(-4,3)$ , القطر 8

$$(x+4)^2+(y+3)^2=4^2$$

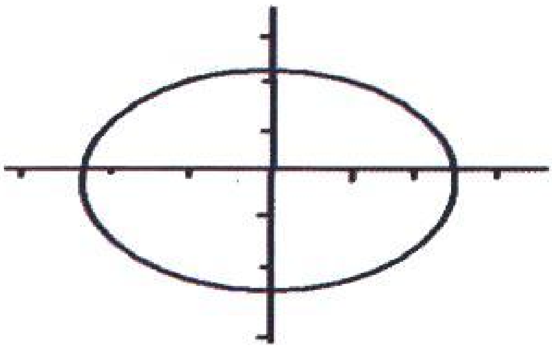
$$(x+4)^2+(y+3)^2=16$$




17. المركز هو نقطة الأصل ونصف القطر 7

المركز $(0,0)$ , ونق = 7

$$x^2+y^2=49$$



18. $(2,1)$ , $(2,-4)$

المركز $(h,k)=\left(\frac{2+2}{2},\frac{1-4}{2}\right)=\left(2,-\frac{3}{2}\right)$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 25$$

.19 (-4, -10) , (4, -10)

$$(h,k) = (0,-10)$$
$$r = \sqrt{(4+4)^2 + (-10+10)^2} = \sqrt{64} = 8$$
$$x^2 + (y+10)^2 = 64$$

.20 (2, -7) , (-2, -9)

$$(h,k) = (\tfrac{3}{2}, -8)$$
$$r = \sqrt{(-2-5)^2 + (-9+7)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+8)^2 = 53$$

.21 (-6,4) , (4, 8)

$$(h,k) = (-1,6)$$
$$r = \sqrt{(4+6)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116}$$
$$(x+1)^2 + (y-6)^2 = 116$$

.24 $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

المركز = (-5,0) أفقي

$$(h \pm c, k) \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$= \sqrt{16-7} = \sqrt{9} = 3$$

البؤرتين (-2,0) , (-8,0)

الرأسين: $(h \pm a, k) = (-5+4,0), (-5-4,0)$

$$= (-1,0), (-9,0)$$

.25 $9y^2 - 18y + 25x^2 - 100x - 116 = 0$

$$(25x^2 + 100x) + (9y^2 - 18y) = 116$$
$$25(x^2 + 9x) + 9(y^2 - 2y) = 116$$
$$25(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y - 1) = 116 + 25(4) + 9$$

$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ ............ (رأسي)

المركز (-2,1)

البؤرتين : $(h, k \pm c) = (-2, 1+4), (-2, 1-4) \rightarrow (-2,5), (-2,-3)$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15-9} = \sqrt{4}$$

الرأسين: $(h, k \pm a) = (-2, 1+5), (-2, 1-5) \rightarrow (-2,6), (-2,-4)$

$$65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$$ .26
$$(65x^2 + 130x) + (16y^2) = 975$$
$$65(x^2 + 2x) + 16y^2 = 975$$
$$65(x^2 + 2x + 1) + 16y^2 = 975$$
$$65(x + 1)^2 + 16y^2 = 1040$$
$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{y^2}{65} = 1$ ............. رأسي

* المركز (-1,0)

* البؤرتين : $(h, k \pm c) = (-1,7), (-1,-7)$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{65 - 16} = \sqrt{49} = 7$$
* الرأسين: $(h, k \pm a) = (-1, \sqrt{65}), (-1, -\sqrt{65})$

.27 شاحنات.

.28 الرأسان (10,0) , (-10,0) والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$
$$2a = \sqrt{(10 - 10)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{400} = 20$$
a= 10
$$e = \frac{c}{a} \rightarrow c = a \times e$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$
الإحداثي y هو نفسه وبالتالي المنحنى هو أفقي
$$(h, k) = (0,0)$$
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

.29 الرأسان المرافقان (6,1) , (0,1) والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$

.30 المركز (2,-4) إحدى البؤرتين $(2, -4+2\sqrt{5})$ ، والاختلاف المركزي $= \frac{\sqrt{5}}{3}$

المركز والبؤرة لهما نفس الاحداثي x .......... المنحنى رأسي.

البؤرتان $(h, k \pm c)$ و $c = 2\sqrt{5}$
$$e = \frac{c}{a} \ldots\ldots\ldots . a = \frac{c}{e}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 2\sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = 6$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16} = 4$$
$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$$

31. طول الوتر البؤري $\frac{2b^2}{a}$ ، حيث أن a هي نصف طول المحور الأكبر و b هي نصف طول المحور الأصغر.

* المركز (3,2)

* طول المحور الأكبر (2a) = 16 وحدة ........... a= 8

* طول الوتر البؤري = 12 وحدة

$$\frac{2b^2}{a} = 12$$

$$\frac{2b^2}{a} = 12 \ldots\ldots b = \sqrt{\frac{12\times 8}{2}} = \sqrt{\frac{69}{2}} = \sqrt{48}$$

معادلة القطع الناقص هي $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{48} = 1$

32. هندسة

$$x - 5y = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2x + 3y = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$4x - 7y = 27 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

من (1) و (2)

$$2x + 3y = 7$$

$$2x - 10y = -6 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2*(x-5y=-3)$$

13y = 13

Y = 1

نعوض في (1)

$$2x + 3y = 7$$

$$x = \frac{7-3y}{2} = 2$$

النقطة (2,1) تنتج من تقاطع (1) , (2)

من (1), (3)

$$4x - 7y = 27$$

4x-20y= -12 ................ 4*(x-5y=-3)

13y = 39

Y = 3

ومن (3) نجد x

$$x = \frac{27+7y}{4}$$

$$= \frac{27+21}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

النقطة هي (12,3) من (1), (3)

من (2), (3)

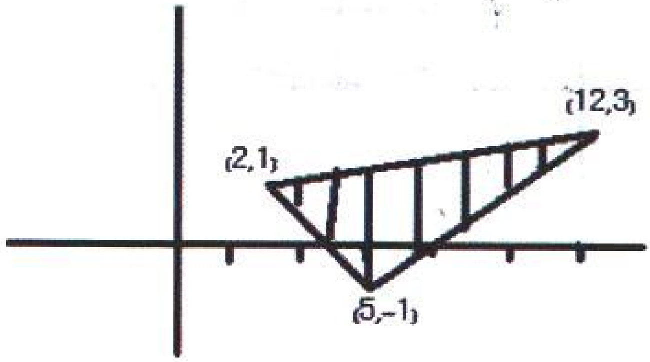
$$4x - 7y = 27$$

$2x = 3y = 7$ .................... $4x + 6y = 14$

$-13y = 13$ $\quad y = -1$

$$x = \frac{27+7y}{4} = \frac{27-7}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

النقطة هي (5, -1)




معادلة الدائرة التي بها طرفا قطر (2,1), (12,3) هي:-

١. المركز $(h, k) = (\frac{x1+x2}{2}, \frac{y1+y2}{2})$

$= (7,2)$

٢. $r = \sqrt{(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2}$

$= \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} \approx 10.2$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-7)^2 + (y-2)^2 = 104$

معادلة الدائرة التي بها طرفا قطر (2,1), (5,-1) هي:-

١. المركز $(h,k) = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$

٢. نصف القطر $r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + y^2 = 13$

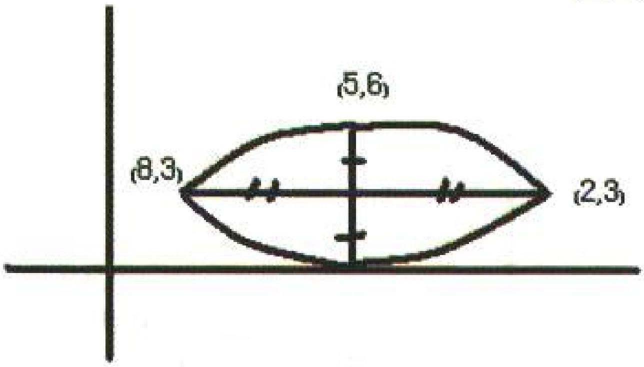
معادلة الدائرة التي بها طرفا قطر *(12,-3)* و *(5,-1)* هي:

١. المركز $(h,k) = \left(\frac{17}{2}, 1\right)$

٢. نصف القطر $r = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$

$\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 65$

33. $(2,3)$ , $(8,3)$ , $(5,6)$




من الرسم يتضح:

المركز هو $(5,3)$

نصف القطر هو $r=3$ ....... $[8-2]$

معادلة الدائرة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$(x-5)^2+(y-3)^2=9$$

34. $(1,-11)$ , $(-3,-7)$ , $(5,-7)$

المركز هو $(1,-7)$

نق هي $r=4$ .......... $[5+3]$

معادلة الدائرة $(x-1)^2+(y+7)^2=16$

35. $(0,9)$ ,$(0,3)$ ,$(-3,6)$

المركز هو $(0,6)$

نق هو $r=3$

معادلة الدائرة هي : $(x+3)^2+(y-6)^2=9$

36. $(7,4)$, $(-1,12)$ ,$(-9,4)$

المركز هو $(-1,4)$

نق هو $r=8$

$$(x+1)^2+(y-4)^2=16$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:-

37. اكتشف الخطأ

إجابة كل من خالد وياسر صحيحة.

38. تبرير $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{p+r}=1$

المنحنى رأسي والبؤرتان ......... $(h,k\pm c)$ والمركز $(0,0)$

$(0,\pm c)=$

$$\frac{x^2}{p+r}+\frac{y^2}{p}=1$$

المنحنى أفقي والمركز $(0,0)$ والبؤرتان $(h\pm c,k)$

$(\pm c, 0) =$

وبالتالي لا يمتلك القطعين الناقصين نفس البؤرة.

*39.* تحد: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$A = \pi\, a\, b$

$b + a = 12 \quad , A = 35\pi$

نعوض في $A = \pi\, a\, b$

$35\pi = \pi\, a(12 - a)$

$35 = 12a - a^2 \;\ldots\ldots\ldots\; a^2 - 129 + 35 = 0$

مرفوض $\quad a = 7 \quad , a = 5$

عندما تكون a=5 فإن b ...... b= 12-a ........ b= 12-5 .......... b=7 وهذا مرفوض

لأن المحور الأكبر أفقي وبالتالي يجب أن تكون قيمة b<a

معادلة القطع هي:

$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$

$a - b = 5 \quad , A = 24\pi$ .40

$a - b = 5 \ldots\ldots\ldots. a = b + 5$

نعوض في $A = \pi\, a\, b$

$24\pi = \pi\,(b + 5)b$

$24 = b^2 + 5b \ldots\ldots\ldots. b^2 + 5b - 24 = 0$

مرفوض $(b + 8)(b - 3) = 0 \ldots\ldots\ldots. b = -8$

b= 3

ومنها:

a+b = 5

= 3+5 = 8

المعادلة هي:

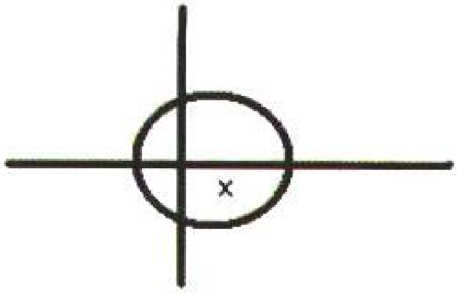
$\frac{x^2}{64} + \frac{b^2}{9} = 1$

41. مسألة مفتوحة

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

* المجال = R

* مثال جبري ..... $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = r^2$



42. اكتب:-

لأن طول المحور الأكبر يقترب من طول المحور الأصغر وبالتالي نقترب من تحقيق خاصية تساوي القطرين في الدائرة ويقترب القطع الناقص إلى شكل الدائرة.

## مراجعة تراكمية:

الدرس (1-4):

43. $y = 3x^2 - 24x + 50$

$$3(x^2 + 8x) = y - 50$$

$$3(x^2 + 8x + 16) = y - 50 + 16$$

$$\frac{3}{3}(x + 4)^2 = \frac{y-34}{3}$$

$$(x + 4)^2 = \frac{1}{3}(y - 34)$$

الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسيا.

الرأس : (-4, 34)

البؤرة : $(-4, \frac{103}{3})$

معادلة محور التماثل : x= - 4

معادلة الدليل : y = 34

طول الوتر البؤري: $\frac{1}{3}$

44. $y = -2x^2 + 5x - 10$

$$-2x^2 + 5x = y + 10$$

$$-2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) = y + 10$$

$$-2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right) = y + 10 + \frac{5}{4}$$

$$-2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = y + \frac{45}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(y + \frac{45}{4}\right)$$

الاتجاه: مفتوح رأسيا

الرأس : $(\frac{5}{4}, -\frac{45}{4})$

ألبؤرة: $(\frac{5}{4}, -\frac{47}{4})$

معادلة محور التماثل : $x = \frac{5}{4}$

معادلة الدليل $y = -\frac{43}{4}$

طول الوتر البؤري: $\frac{1}{2}$

$x = 5y^2 - 10y + 9$ .45

$5y^2 - 10y = x - 9$

$5(y^2 - 2) = x - 9$

$5(y^2 - 2 + 1) = x - 9 + 1$

$(y-1)^2 = \frac{1}{5}(x - 8)$

الاتجاه: مفتوح أفقيا.

الرأس: (1,8)

البؤرة: $(\frac{6}{5}, 8)$

معادلة محور التماثل : y = 8 ......... y = k

معادلة الدليل: $x = \frac{4}{5}$ ....... x= h-p

طول الوتر البؤري: $\frac{1}{5}$

الدرس (3-3)

$\sin\theta = \cos\theta$ .46

$\tan\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ .47

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ .48

$\sin x\,(2\sin x + 3) = -1$

$\sin x = -1 \qquad or\ 2\sin x + 3 = -1$

$\sin x = -\frac{4}{2} = -2$

$f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ .49

$y = \frac{x-2}{x+3}$

$x = \frac{y-2}{y+3}$

$xy + 3x = y - 2$

$xy - y = -3x - 2$

$y(x-1) = -3x - 2$

$y = \frac{-3x-2}{x-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{-3x-2}{x-1}$

المجال = $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
أو R-{1}

$f(x) = \sqrt{5-x}$ .50

$y = \sqrt{5-y}$

$x^2 = 5 - y$

$y = 5 - x^2$

$f^{-1}(x) = 5 - x^2$

المجال = $(-\infty, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ .51

$y = \sqrt{x^2 - 9}$

$x = \sqrt{y^2 - 9}$

$x^2 = y^2 - 9$

$y^2 = x^2 + 9$

$y = \mp\sqrt{x^2 + 9}$

$f^{-1}(x) = \mp\sqrt{x^2 + 9}$

53. الإجابة هي B 8

54. الإجابة هي C

$$\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$$

## تدريب وحل المسائل ص 168:

السؤال الأول:

$(x-3)^2 = 12\,(y-7)$ .1

الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسيا.

الرأس: (3,7)

البؤرة (3, 10)

معادلة محور التماثل : x= 3

معادلة الدليل y = 4

طول الوتر البؤري |12| = 12

$(x+1)^2 = -12\,(y-6)$ .2

الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسيا.

الرأس: (-1,6)

البؤرة (-1,3)

معادلة محور التماثل y = 9

طول الوتر البؤري |12−| = 12

$(y-4)^2 = 20\,(x+2)$ .3

الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقيا.

الرأس: (-2,4)

البؤرة: (3,4)

معادلة محور التماثل : y = 4

معادلة الدليل x = -7

طول الوتر البؤري $|4p| = 20$

$-40(x+4) = (y-9)^2$ .4

الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقيا

الرأس: (-2,9)

البؤرة (-12,9)

معادلة محور التماثل y =9

معادلة الدليل x = 6

طول الوتر البؤري $|4P| = 40$

$(y+5)^2 = 24\,(x-1)$ .5

الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقيا

الرأس: (1,-5)

البؤرة (7, -5)

معادلة محور التماثل y =-5

معادلة الدليل x = -5

طول الوتر البؤري $|4P| = 24$

$-4(y+2) = (x+8)^2$ .6

الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسيا

الرأس: (-8,-2)

البؤرة (-8,-3)

معادلة محور التماثل x= -8

معادلة الدليل y = -1

طول الوتر البؤري $|4P| = 4$

$x^2 = 8(y-2)$ .7

بؤرة القطع $(h, k+P)$ .... (0,2+2) ......... (0,4)

معادلة الدليل y = k-P ........ y = 2-2 ........ y= 0

المسافة بين البؤرة والدليل = 4 أقدام.

$y^2 - 180x + 10y + 656 = 0$ .8

$y^2 + 10y + 656 = 180x$ (a)

$y^2 + 10y + 25 = 4\,(45x - 135)$

$$(y+5)^2 = 4\,(45x - 135)$$
$$(y+5)^2 = 180\,(x-3)$$

(b) بؤرة القطع المكافئ: $(h+p, k)$ ..... (3+45, -5) ..... (48, -5)

رأس القطع المكافئ: (h, k) ...... (3,-5)

طول الحبل = المسافة بين البؤرة والرأس للقطع المكافئ:

$$\sqrt{(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2} = \sqrt{(45)^2 + (0)^2} = 45$$ قدم

9. $x^2 - 17 = 8y + 39$

$$x^2 = 8y + 37 + 17$$
$$x^2 = 8y + 56$$
$$X^2 = 8\,(Y+7)$$

بما أن الحد التربيعي هو x و p=2 فإن المنحنى مفتوح إلى الأعلى.

الرأس: (0, -7)

البؤرة: (0,-5)

طول الوتر البؤري |4P| =8

الدليل y = -9

محور التماثل x = 0

10. $y^2 + 33 = 8x - 23$

$$y^2 = -8x - 56$$
$$y^2 = -8\,(x+7)$$

بما أن الحد التربيعي هو y ، P = -2 فإن المنحنى مفتوح إلى اليسار.

الرأس: (-7,0)

البؤرة: (-9,0)

طول الوتر البؤري (8)

الدليل x = -5

محور التماثل y= 0

11. $3x^2 + 72 = -72\,y$

$$3x^2 = -72\,y - 72$$
$$x^2 = -24\,(y+1)$$

الحد التربيعي هو x ، P = -6 فإن المنحنى مفتوح إلى الأسفل.

الرأس: (0,-1)

البؤرة: (0, -7)

طول الوتر البؤري 24

الدليل 5

محور التماثل : x = 0

$$60x - 80 = 3y^2 + 100 \ .12$$

$$3y^2 = 60x - 180$$

$$y^2 = 20x - 60$$

$$y^2 = 20\,(x - 3)$$

المنحنى مفتوح أفقيا إلى اليمين. $\frac{4P}{4} = \frac{20}{4}$ ……… . $P = 5$

الرأس: $(3,0)$

البؤرة: $(8,0)$

الدليل $(x=-2)$

محور التماثل $y = 0$

طول الوتر البؤري $20$

$$-33 = x^2 - 12y - 6x \ .13$$

$$x^2 - 6x = 12y - 33$$

$$x^2 - 6x + 9 = 12y - 33 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 12y - 24$$

$$(x - 3)^2 = 12\,(y - 2)$$

$4P = 12$ $P = 3$

الاتجاه: مفتوح رأسيا لأعلى

الرأس: $(3,2)$

البؤرة: $(3, 5)$

الدليل: $y = -1$

محور التماثل $x = 3$

طول الوتر البؤري $12$

$$-72 = 2y^2 - 16y - 20x \ .14$$

$$2y^2 - 16y - 20x - 72$$

$$2(y^2 - 16y + 64) = 20x - 72 + 64$$

$$2(y - 8)^2 = 20x - 8$$

$$(y - 8)^2 = 10(x - \frac{2}{5})$$

الاتجاه: مفتوح أفقيا لليمين.

الرأس: $(8, \frac{2}{5})$

البؤرة: $(\frac{21}{2}, \frac{2}{5})$

معادلة محور التماثل $y = \frac{2}{5}$

معادلة الدليل $x = \frac{11}{2}$

طول الوتر البؤري: $10$

15. البؤرة (7-,9-) والرأس (4-,9-)

البؤرة والرأس مشتركان في الاحداثي x

المنحنى مفتوح رأسياً والبؤرة هي (h, k+p)

-4+p = -7 ..... p = -3 المنحنى مفتوح إلى أسفل.

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$(x+a)^2 = -12\,(y+4)$$

16. البؤرة (3,3) و المنحنى مفتوح إلى أعلى و يمر بالنقطة (23,18)

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$

$$(23-3)^2 = 4p\,\big(18-(3-p)\big)$$

$$(20)^2 = 4p\,(15+p)$$

$$\frac{400}{4} = \frac{60}{4}p + 4p^2$$

$$100 = 15p + p^2$$

$$p^2 + 15p - 100 = 0$$

$$(p+20)(p-5) = 0$$

P = -20

P = 5

معادلة القطع المكافئ عند p=5 لأنه مفتوح لأعلى.

البؤرة (3,3)

الرأس (2-, 3)

K+p = 3

K = 3-5 = -2

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$

$$(x-3)^2 = 20\,(y+2)$$

17. البؤرة (1- ,2) والرأس (1-,4-)

البؤرة والرأس مشتركان في الاحداثي y فإن المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليمين

البؤرة هي (h+p, k) و h+p = 2 ........ p = 6

$$(y-k0^2 = 4p(x-h)$$

$$(y+1)^2 = 24\,(x+4)$$

18. البؤرة (11,4) والمنحنى مفتوح إلى اليمين ويمر بالنقطة (20,16)

المنحنى مفتوح إلى اليمين .... يتبع المعادلة التالية و p موجبة.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(16-4)^2 = 4p\big(20-(11-p)\big)$$

$$(12)62 = 4p\,(9+p)$$

$$\frac{144}{4} = \frac{4}{4}p\,(9+p)$$

$$36 = 9p + p^2$$

$$p^2 + 9p - 36 = 0$$

$$(p + 12)(p - 3) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots p = -12 \text{ مرفوض}$$

$P = 3$

معادلة القطع المكافئ: البؤرة $(11,4)$

الرأس $(8,4)$ ... $h+p = 11$ ..... $h= 11-3 = 8$

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$$

$$(y-4)^2 = 12\,(x-8)$$

19. البؤرة $(-3, -2)$ والرأس $(1, -2)$

البؤرة والرأس مشتركان الاحداثي $y$ المنحنى مفتوح أفقيا.

$h+p = -3$ ....... $P = -3-1 = -4$ و $p$ سالبة فالمنحنى مفتوح إلى اليسار.

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$$

$$(y+2)^2 = -16\,(x-1)$$

21. البؤرة $(-3,4)$ والرأس $(-3,2)$

البؤرة والرأس مشتركان بالإحداثي $x$ و المنحنى مفتوح رأسيا.

البؤرة هي $k+p = 4$ ، $p = 4-2 = 2$

$P$ موجبة إذن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$(x+3)^2 = 8\,(y-2)$$

22. الرأس $(-3,2)$ محور التماثل $y= 2$ طول الوتر البؤري $8$ وحدات.

محور التماثل $y = 2$ فإن المنحنى مفتوح أفقيا و $k = 2$

طول الوتر البؤري ........ $4p = 8$ ............ $p = 2$

البؤرة $(h+p, k) = (-1,2)$

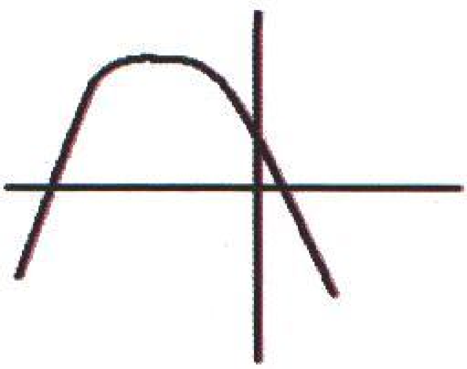
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(y-2)^2 = 8\,(x+3)$$

23. عمارة

(a) $(x-h)^2 = -4\,p(y-k)$

(b)



24. $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$ , (-5,5) .......... مفتوح رأسيا للأسفل.

الرأس (-7,3)

البؤرة $(-7, \frac{23}{8})$

$$p = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots .4p = -\frac{1}{2}$$

d المسافة بين البؤرة ونقطة التماس.

$$d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$

$$= \sqrt{(-5+7)^2 + \left(5 - \frac{23}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{17}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4.5} = 2.92$$

$$A = \left(-7 - 2.92\,, \frac{23}{8}\right)$$

$$= (-9.95\,, 2.875)$$

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{5 - 2.875}{-5 + 9.92} = \frac{3.875}{4.92} \approx \frac{3}{4}$$

$$y - y1 = m\,(x - x1)$$

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x+5) \dots\dots\dots y - 5 = \frac{3}{4} \times \frac{15}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{35}{4}$$

25. $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)$ , (24,2) مفتوح أفقيا لليمين.

الرأس (0,4)

البؤرة $(\frac{1}{20}, 4)$

$$4p = \frac{1}{5} \dots\dots . p = \frac{1}{20}$$

$$d = \sqrt{(24-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{576+4} = \sqrt{580} \approx 24$$

$$A = (-24.03\,, 4)$$

$$m = \frac{2-4}{24+24} = -\frac{2}{48} = -\frac{1}{27}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{24}\,(x)$$

$$y = -\frac{1}{24}x + 2$$

26. $(x+6)^2 = 3\,(y-2)$ ,   $(0,14)$   مفتوح رأسيا لأعلى.

الرأس (-6,2)

البؤرة $\left(-6, \frac{11}{4}\right)$

$$4p = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots p = \frac{3}{4}$$

$$d = \sqrt{6^2 + \left(14 - \frac{11}{4}\right)^2} = \sqrt{36 + \left(\frac{56-11}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{36 + \left(\frac{45}{4}\right)^2} = 12.75$$

$$A = \left(-18.57, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$m = \frac{14 - 2.75}{18.57} = \frac{12.75}{18.57} = 0.68$$

$$y - 14 = 0.68\,(x)$$

$$y = 0.68 + 14$$

27. $-4x = (y+5)^2$ ,   $(0,-5)$   مفتوح أفقيا لليسار.

الرأس (-5,0)

البؤرة (-6,0)

$$4p = -4 \ldots\ldots\ldots\ldots p = -1$$

$$d = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$$

$A = (1,0)$

$$m = \frac{-5-0}{1.07} \approx -5$$

$$y + 5 = -5x$$

$$y = -5x - 5$$

28. الدليل y = 4   و p = -2

Y= 4 .............. المنحنى مفتوح رأسيا.

P=-2 .............. المنحنى مفتوح لأسفل.

29. $y^2 = -8\,(x-6)$

المنحنى مفتوح أفقيا لليسار.

30. الرأس (-5,1)   والبؤرة (-5,3)

الرأس والبؤرة مشتركان بالإحداثي x .............. المنحنى مفتوح رأسيا.

P = 3-1 = 2 ................ P = k+p = 3

منحنى مفتوح رأسيا لأعلى.

31. البؤرة $(7, 10)$ والدليل $(x= 1)$

X= 1 ............ المنحنى مفتوح أفقيا.

X = h-p = 1 .................... (1)

h + p = 7....................(2)

-2p = -6 .............. p =3

P موجبة (المنحنى مفتوح أفقيا لليمين)

32. (a) $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$

33. المنحنى مفتوح رأسيا ومن الرسم:

الرأس $(0,2)$

البؤرة $(0,3)$

$$p = 1 \dots\dots\dots\dots k + p = 3$$

$$x^2 = 4\,(y-2)$$

34. المنحنى مفتوح أفقيا ومن الرسم:

الرأس $(0,0)$

البؤرة $(1,0)$

P= 1

$$y^2 = x$$

35. تمثيلات متعددة:

(a) هندسيا $y^2 = 4(x-2)$ ........ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ مفتوح أفقيا.

الرأس $(2,0)$

البؤرة $(3,0)$

البعد بين الرأس والبؤرة ....... $\sqrt{(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2}$

$$= \sqrt{(3-2)^2 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$y^2 = 8\,(x-2)$$

الرأس $(2,0)$ ............ 4p = 8

البؤرة $(4,0)$ p = 2

البعد $\sqrt{(4-2)^2} = 2$

$$y^2 = 16\,(x-2)$$

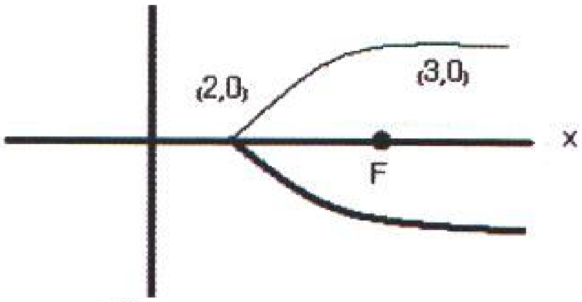
الرأس $(2,0)$ 4p = 16

البؤرة $(6,0)$

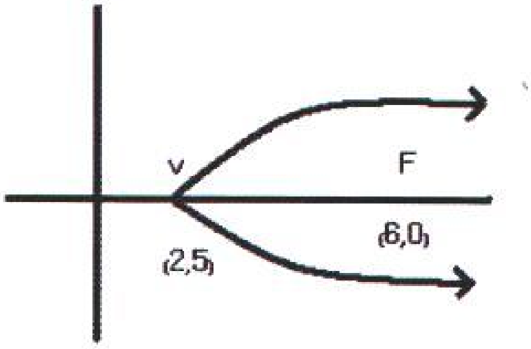
البعد $\sqrt{(6-2)^2} = 4$

(b)

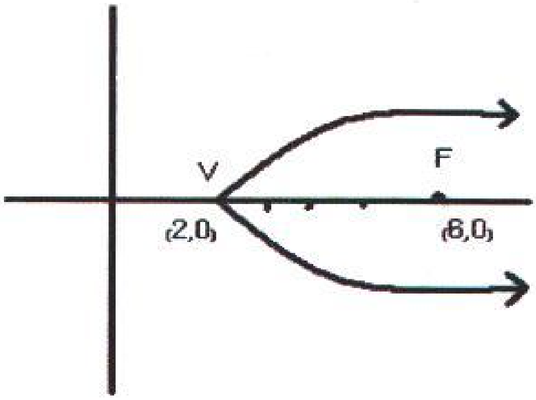
(1)




(2)




(3)




(c) لفظياً

كلما زاد البعد بين الرأس والبؤرة يزيد اتساع القطع المكافئ.

(d) تحليلياً

$(x+1)^2 = 20\,(y+7)$ مفتوح رأسيا

الرأس (-1, -7)

البؤرة (-1, -2) ......... p= 5

نغير من p بحيث تصبح البؤرة أكبر:

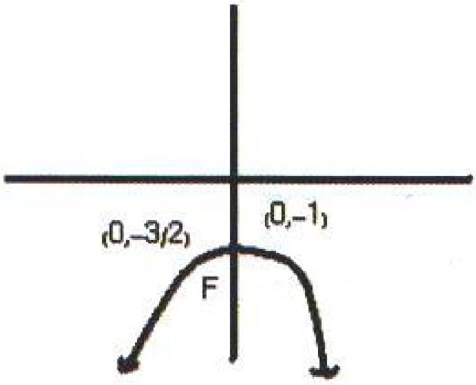
$$(x+1)^2 = 24\,(y+7)$$

(e) تحليلياً:-

$x^2 = -2\,(y+1)$ $\qquad -\frac{2}{4} = \frac{4}{4}p \;\ldots\ldots\; p = -\frac{1}{2}$

الرأس (0, -1)

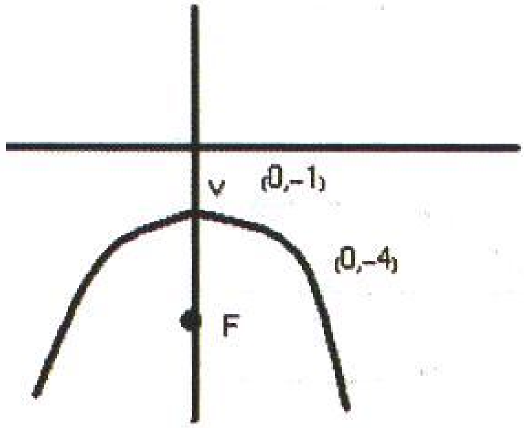
البؤرة $\left(0\,, \frac{-3}{2}\right)$




$-12 = 4p$ $\qquad$ $x^2 = -12\,(y+1)$

P= -3 $\qquad$ الرأس (0, -1)

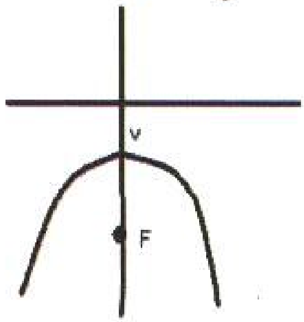
البؤرة (0,-4)




$x^2 = -5\,(y+1)$

-5 = 4p $\qquad$ الرأس = (0, -1)

$p - \frac{5}{4}$ $\qquad$ البؤرة $(0, -\frac{9}{4})$




## مسائل مهارات التفكير العليا

36. اكتشف الخطأ:- $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ $\qquad$ تجميع

$(x^2 + 6x) - 4y + 9 = 0$ $\qquad$ إكمال مربع

$x^2 + 6x + 9 = 4y - 9 + 9$

$(x+3)^2 = 4y$

المنحنى مفتوح رأسياً

الرأس (3,0-)

p= 1 ............ 4p = 4

البؤرة (3,1-)

معادلة محور التماثل 3- =X

معادلة الدليل 1- = y

وبالتالي التمثيل الصحيح هو تمثيل ميمونة لأن 1- =y

37. نقطة الرأس (3,0-) هي الأقرب لأن البؤرة والرأس مشتركان في x أما الرأس أقرب إلى البؤرة عندما يكون أصغر ما يمكن.

38. $(y-5)^2 = -8\ (x+2)$

لن تمر في الربع الأول لأن المنحى مشترك في y ولكنه مفتوح أفقيا لليسار فلا يمر بالأول .

39. تحد:

$$A = \frac{4}{3}xy$$

مساحة المقطع 2.4 = A

ارتفاعه 3 = y

$$y^2 = 4px \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$A = \frac{4}{3}xy$$
$$2.4 = \frac{4}{3} \times 3 \dots\dots\dots\dots x = 0.6$$

نعوض في (1)

$$y^2 = 4px$$
$$9 = 4p \times 0.6$$
$$9 = 2.4\,p$$
$$y^2 = 15x$$

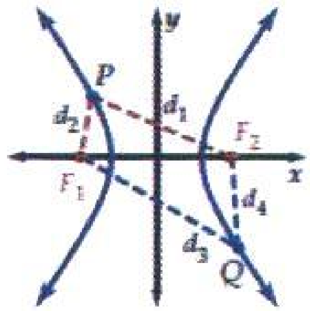
40. اكتب

إذا كان الرأس والبؤرة مشتركان في h فان المنحنى مفتوح رأسياً و إذا كانا مشتركان في k فغنه مفتوح أفقيا.

# (٣-٤) القطوع الزائدة

القطع الناقص هو المحل الهندسي لجميع النقاط المستوية التي يكون مجموع بعديها عن البؤرتين ثابت، بينما القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع النقاط المستوية التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن بؤرتين مقداراً ثابتاً.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

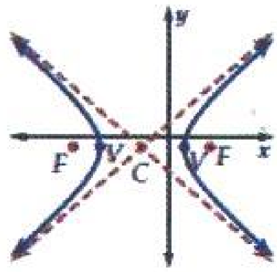



للقطع الزائد محورا تماثل هما: المحور القاطع ويمر بالرأسين والمحور المرافق وهو عمودي على المحور القاطع ويمر بالمركز.

**مفهوم أساسي** خصائص القطع الزائد

**المعادلة في الصورة القياسية:**

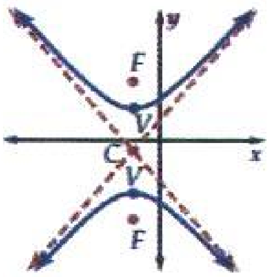
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$




| | |
|---|---|
| **الاتجاه:** | المحور القاطع أفقي |
| **المركز:** | $(h, k)$ |
| **الرأسان:** | $(h \pm a, k)$ |
| **البؤرتان:** | $(h \pm c, k)$ |
| **المحور القاطع:** | $y = k$ |
| **المحور المرافق:** | $x = h$ |
| **خطا التقارب:** | $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$ |
| **العلاقة بين** $a, b, c$: | $c^2 = a^2 + b^2$ و $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ |

**المعادلة في الصورة القياسية:**

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$




| | |
|---|---|
| **الاتجاه:** | المحور القاطع رأسي |
| **المركز:** | $(h, k)$ |
| **الرأسان:** | $(h, k \pm a)$ |
| **البؤرتان:** | $(h, k \pm c)$ |
| **المحور القاطع:** | $x = h$ |
| **المحور المرافق:** | $y = k$ |
| **خطا التقارب:** | $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$ |
| **العلاقة بين** $a, b, c$: | $c^2 = a^2 + b^2$ و $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ |

# (٤-٤) تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

**الصورة القياسية لمعادلات القطوع المخروطية ،** يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي $A, B, C$ جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع.

اكتب كل من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًا:

$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ (a

$$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$$

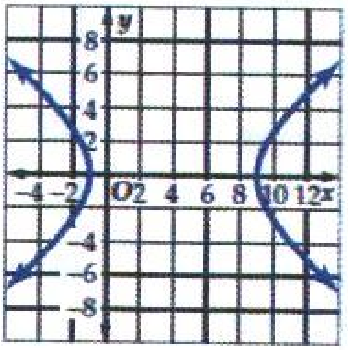
$$16(x^2 - 8x + \blacksquare) - 25y^2 = 144 + 16(\blacksquare)$$

$$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$$

$$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$$

$$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

المنحنى قطع زائد مركزه $(4, 0)$.




$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$ (b

$$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$$

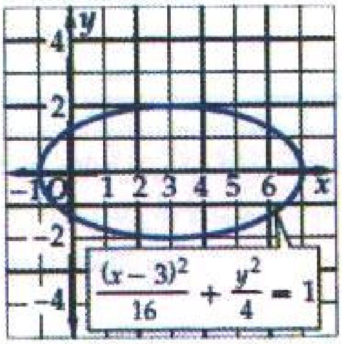
$$(x^2 - 6x) - 4y^2 = 7$$

$$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$$

$$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

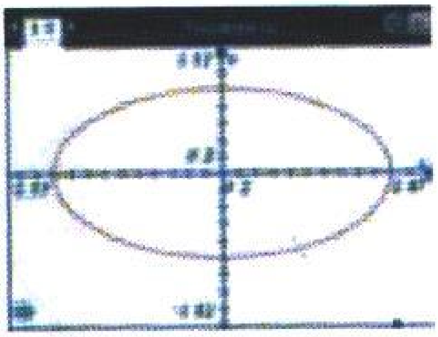
بما أنّ المعادلة على الصورة $1 = \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(x-h)^2}{a^2}$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$




**مفهوم أساسي** تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

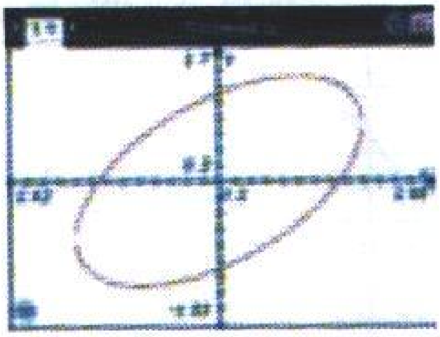
| نوع القطع المخروطي | المميز |
|---|---|
| دائرة | $B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$ |
| قطع ناقص | $B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$ |
| قطع مكافئ | $B^2 - 4AC = 0$ |
| قطع زائد | $B^2 - 4AC > 0$ |

**قطع ناقص أفقي، $B = 0$**



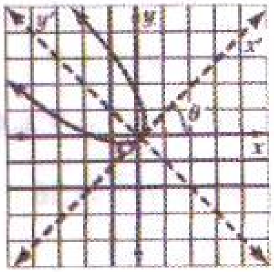
$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

**قطع ناقص ليس رأسيًا ولا أفقيًا ، $B \neq 0$**



$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

**مفهوم أساسي** دوران محاور القطوع المخروطية



يمكن إعادة كتابة المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى $xy$ على الصورة $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$ ، بزاوية دوران قياسها $\theta$ ، وذلك باستعمال صيغتي الدوران الآتيين:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

**مفهوم أساسي** دوران محاور القطوع المخروطية

إذا عُلمت معادلة قطع مخروطي في المستوى $x'y'$ بزاوية دوران قياسها $\theta$ ، فإنه يمكن إيجاد المعادلة في المستوى $xy$ باستعمال صيغتي الدوران الآتيتين:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

# حل تمارين ص 192

1. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$
$(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = 11 + 16 + 9$
$(x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 36$
$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

المنحنى قطع ناقص.

2. $(x^2 + 12x + 36) + (y^2 - 8y + 16) = -36 + 36 + 16$
$(x+6)^2 + (y-4)^2 = 16$
$$\frac{(x+6)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$
المنحنى قطع ناقص.

3. $9(y^2 - 2y + 1) - 16(x^2 + 4x + 4) = 199 + 9 - 64$
$9\,(y-1)^2 - 16(x+2)^2 = 144$
$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$
المنحنى قطع زائد.

4. $6(y^2 - 4y + 4) = x - 28 + 24$
$6(y-2)^2 = x - 4$
$$(y-2)^2 = \frac{1}{6}(x-4)$$
المنحنى قطع مكافئ

5. A= 4 , B = 0 , C= 0
$B - 4AC$ = المميز
$= 0 - (4)(4)(0) = 0$
القطع قطع مكافئ

6. $A = 3 \quad B = 0 \quad C = -5$
المميز $= B^2 - 4AC$
$= 0 - (4)(3)(-5) = 6070$
القطع قطع زائد

7. $A = 8 \quad B = 0 \quad C = 8$
المميز $= 0 - (4)(8)(8) = -256$
المميز $< 0 \quad A = C$
القطع يمثل دائرة

8. $A = 4 \quad B = 0 \quad C = 0$

المميز $= 0 - (4)(4)(0) = 0$

القطع قطع مكافئ

9. $A = 4 \quad b = 8 \quad C = -3$

$= (8)^2 - (4)(4)(-3) = 112 > 0$

القطع قطع زائد

10. $A = -3 \quad B = 5 \quad C = 6$

$= (5)^2 - (4)(-3)(6) = 97 > 0$

القطع قطع زائد.

11. $A = 8 \quad B = 16 \quad C = 8$

$= (16)^2 - 4)(8)(8) = 0$

القطع قطع مكافئ.

12. a. $A = 24 \quad B = 0 \quad C = 0$

$= 0 - (4)(24)(0) = 0$

المنحنى يمثل قطع مكافئ

$24x^2 + 1000y - 31650x - 45600 = 0$

$24(x^2 - 1320x + 435600) = -1000y + 45600 + 10454400$

$24(x - 600)^2 = -1000(y - 10500)$

$(x - 600)^2 = -\frac{125}{3}(y - 10500)$

27. C المعادلة

28. a المعادلة

29. b المعادلة

35. a. $a = 4 \quad 3 - a = 1 \quad h - a = -1$

$b = 2 \quad -2 - b = -4 \quad k - b = -4$

$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

b.16 نضرب المعادلة القياسية في

$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

$(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 16$

$x^2 - 6x + 9 + 4y^2 + 16y + 16 = 16$

$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$

40. $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$

المركز $(h,k) = (0,0)$

$b = \sqrt{400} = 20 \qquad a = \sqrt{225} = 15$

الرأسان هما : $(0, 15)$ , $(0,-15)$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{225 + 400} = 25$$

البورتان هما $(0, 25)$ , $(0,-25)$

خطا التقارب هما :

$$y = \frac{3}{4}x \quad , \quad y = -\frac{3}{4}x$$

41. $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

الاتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0, \sqrt{18})$ , $(0, -\sqrt{18})$

البؤرتان: $(0, 3)$ , $(0, -3)$

الرأسان المرافقان $(3, 0)$ , $(-3,0)$

المحور الأكبر $x= 0$

المحور الأصغر $y= 0$

# (٥-٤) المعادلات الوسيطية

**مفهوم أساسي** **المعادلات الوسيطية**

إذا كانت $f$ و $g$ دالتين متصلتين في المتغير $t$ على الفترة $I$ ، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تمثل منحنى وسيطيًا. المعادلتان:

$$x = f(t), y = g(t)$$

هما معادلتان وسيطيتان لهذا المنحنى، حيث $t$ المتغير الوسيط و $I$ الفترة الوسيطية.

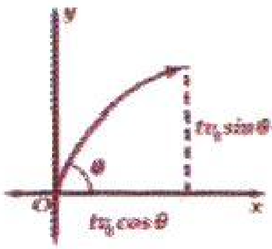
**مفهوم أساسي** **حركة المقذوفات**

إذا قذف جسم بسرعة متجهة ابتدائية $v_0$ بحيث يصنع زاوية غير قائمة $\theta$ مع الأفق، فإن:

**المسافة الأفقية :** $x = tv_0 \cos\theta$

**المسافة الرأسية :** $y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

حيث $g$ ثابت الجاذبية الأرضية، $t$ الزمن، $h_0$ الارتفاع الابتدائي.




## حلول اختبار الفصل ص 208

١. طول المحور الأكبر $2a$ = المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(7+3)^2 + (-4+4)^2} = 10$$

$a=5$

المسافة بين البؤرتين $2c$

$$2c = \sqrt{(6+2)^2 + (-4+4)^2} = 8$$

C= 4

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = 25 - 16$$

b= 3

المركز = (2, -4)

المحور الأكبر أفقي لأن الاحداثيين y متساويين.

المعادلة هي:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

٢. طول المحور الأكبر 2a = 12

a= 6

المسافة بين البؤرتين 2c

$$2c = \sqrt{(-2+2)^2 + (1+9)^2} = 10$$

$$C = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = 36 - 25 = 11$$

b= $\sqrt{11}$

المركز = (-2, -4)

المحور الأكبر رأسي لأن الاحداثيين x متساويين.

المعادلة هي:

$$\frac{(x+2)^2}{11} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$$

٣. الإجابة C 4

٤. $y = 3t - 4$ , $x = t - 5$

بالتعويض عن t في y

Y= 3(x+5)-4 = 3x+15-4

Y= 3x+11

٥. $t = \frac{y-1}{2}$ $y = 2t + 1$

بالتعويض عن t في x

$$x = \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{y^2-2y+1}{4} - 1$$

$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} - \frac{3}{4}$$

٦. الرأس = $(200, 5)$

البؤرة = $(200, 378)$

$P= 373$

المعادلة هي:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$(x-200)^2 = 1492\ (y-5)$$

٧. المحور القاطع أفقي لان الاحداثيين y متساويان.

المركز $(0,0)$

المسافة بين الرأسين 2a

$$2a = \sqrt{(3+3)^2 + (0-0)^2} = 6$$

$a= 3$

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \qquad b = 2$$

المعادلة هي:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

٨. المركز = $(8,4)$

المسافة بين الرأسين 2a

$$2a = \sqrt{(8-8)^2 + (2-6)^2} = 4$$

$a=2$

المسافة بين البؤرتين 2c

$$2c = \sqrt{(8-8)^2 + (0-8)^2} = 8$$

$C= 4$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$$

$$b = \sqrt{12}$$

المحور القاطع رأسي $a^2$ ترتبط بالحد $y^2$

$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-8)^2}{12} = 1$$

٩. $y' = y\cos\theta - x\sin\theta \qquad X' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$$y' = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3x}}{2} \qquad X' = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3y}}{2}$$

بالتعويض في المعادلة:

$$7\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3\right) = \left(\frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$$

$$-\frac{7x}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}y + 21 + \frac{y^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}x^2 = 0$$

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{y^2}{4} - \frac{7x}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}y + 21 = 0$$

10. $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{x}{2}$ $\qquad$ $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}$

بالتعويض

$5x'^2 + y'^2 = 10$ $\qquad$ $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{10} = 1$

$$5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{x}{2}\right)^2 = 10$$

$$5\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{y^2}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{x^2}{4}\right) = 10$$

$$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 10$$

13. الإجابة C

14. المنحنى مفتوح رأسيا لأن الاحداثيين x متساويان

المعادلة: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$p = -2$ $\qquad$ $8 = k + p = 10 + p$

المعادلة هي:

$$(x-2)^2 = -8(y-10)$$

15. المنحنى مفتوح أفقيا

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$p = 3$ $\qquad$ $h + p = -1 + p = 2$

المعادلة هي:

$$(Y-5)^2 = 12(X+1)$$

18. $\theta = 60$ $\qquad$ $V_0 = 40$

$X = t V_0 \cos\theta$ $\qquad$ المسافة الأفقية.

$X = 20t$

المسافة الرأسية:

$$Y = t V_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

$$y = t(40)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)(32)t^2 + (5)$$

$$y = 20\sqrt{3}t - 16t^2 + 5$$