Step By Step Q

ملخص مادة الرياضيات

فهرس مادة الرياضيات

التبرير والبرهان

المثال المضاد

وهو مثال نثبت به أن الجملة المعطاة ليست صحيحة دائماً

مثال

للعبارة إذا كانت $x^2 = 9$ فإن $x = 3$

والمثال المضاد هنا هو $x = -3$ وذلك بسبب

$x = -3 \Rightarrow x^2 = (-3)^2 \rightarrow x^2 = 9$

العبارة

وهي جملة خبرية إما صائبة "T" أو خاطئة "F"

يرمز لها بحروف ... p, q, r, s

مثال

① المثلث له ثلاثة أضلاع "T" عبارة صائبة

② $x^2 = 8$ حيث $x = 4$ "F" عبارة خاطئة

وذلك لأن $4^2 = 16$

نفي العبارة

إذا كان رمز عبارة p فإن رمز نفيها هو "$\sim p$" وتقرأ نفي p

العبارة المركبة

هي عبارة تحتوي أكثر من خبر وأنواعها

① عبارة الوصل رمزها ∧

② عبارة الفصل رمزها ∨

③ العبارة الشرطية رمزها →

عبارة الوصل

وهي عبارة مركبة من جزئين (p ، q) رمزها $p \wedge q$

والعبارة تكون صائبة عندما يكون "p، q" صائبتان معاً

والعبارة تكون خاطئة عندما يكون "p، q" أحدهما خاطئ أو الاثنان خطأ

عبارة الفصل

وهي عبارة مركبة من جزئين (p، q) رمزها $p \vee q$

والعبارة تكون صائبة عندما يكون "p، q" أحدهما صائب أو الاثنان صائبين

والعبارة تكون خاطئة عندما يكون "p، q" خاطئتان معاً

العبارة الشرطية

وهي عبارة مركبة من شرط ونتيجة (p، q) ورمزها $\underset{\text{شرط}}{p} \to \underset{\text{نتيجة}}{q}$

وتقرأ إذا كان p فإن q

والعبارة الشرطية تكون خاطئة في حالة واحدة فقط
إذا كان الشرط صحيح والنتيجة خاطئة
ماعدا ذلك فكل العبارات الشرطية صحيحة.

جدول الصواب والخطأ

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T

عبارة شرطية $p \to q$

عكس $q \to p$

معكوس $\sim p \to \sim q$

معاكس إيجابي $\sim q \to \sim p$

العكس هو تبديل الفرض والنتيجة

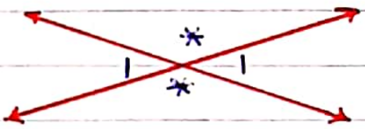
المعكوس نفي كلاً من الفرض والنتيجة

المعاكس الإيجابي نفي كلاً من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية.

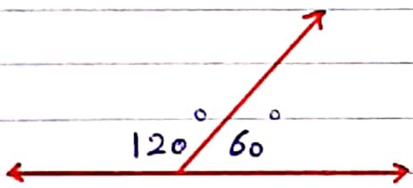
التوازى والتعامد " الهندسة المستوية "

تذكر معلومات هامة

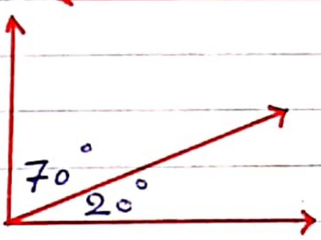
* أى نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط
* أى ثلاث نقاط لا تقع على إستقامة واحدة يمكنه رسم مثلث بهم
* أى ثلاث نقاط تمر بهما دائرة واحدة فقط
* أى ثلاث نقاط يمر بها مستوى واحد فقط
* إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان فى نقطة واحدة فقط
* إذا تقاطع مستويان فإنهما يتقاطعان فى مستقيم واحد فقط
* كل زاويتان متقابلتان بالرأس متطابقتان



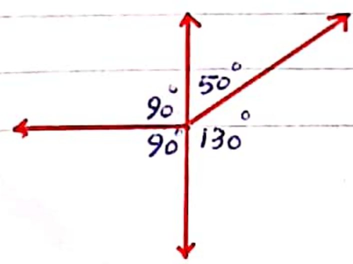
* كل زاويتان متجاورتان على مستقيم متكاملتان
* كل زاويتان متكاملتان مجموعهم 180°



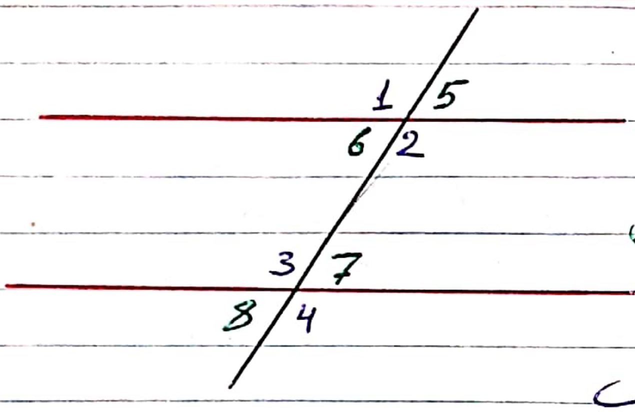
* كل زاويتان متجاورتان داخل زاوية قائمة متتامتان
* كل زاويتان متتامتان مجموعهم 90°



* مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة 360°



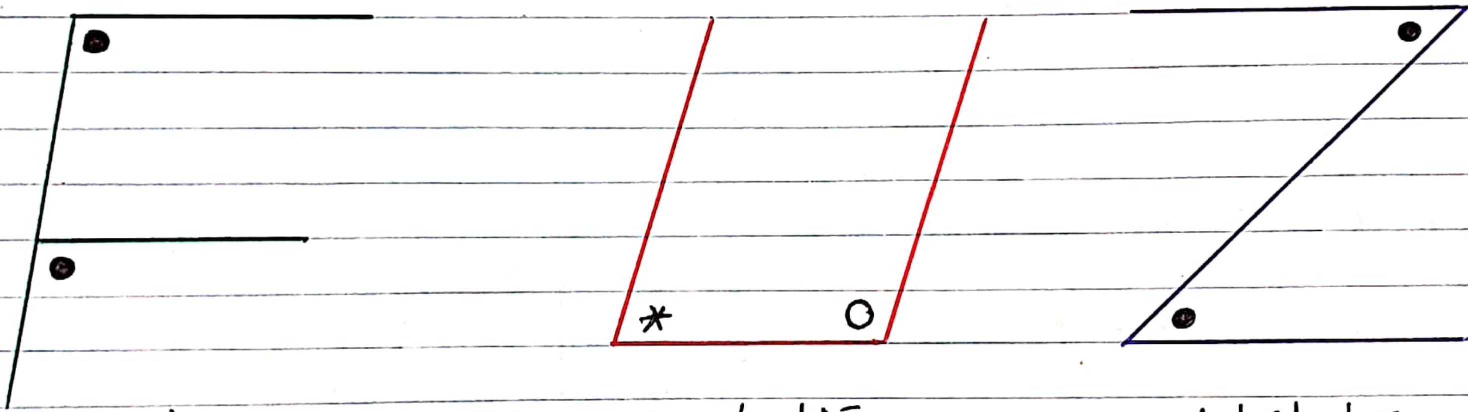
* التوازي



الزوايا 1, 2, 3, 4 متطابقة في القياس

5, 6, 7, 8 متطابقة في القياس

ويمكن تلخيص العلاقات بين الزوايا في التوازي بالأشكال الآتية



متبادلتان متطابقتان — متحالفتان مجموعهم 180° — متناظرتان متطابقتان

* الميل

* المستقيمات المتوازية لها نفس الميل

* المستقيمات المتعامدة حاصل ضرب ميلهما $= -1$

* الميل بمعلومية نقطتين (x_2, y_2) (x_1, y_1) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

* ميل محور x والموازي له هو صفر
* ميل محور y والموازي له هو غير معرف

* معادلة الخط المستقيم

بمعلومية نقطة عليه والميل

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

حيث m ← الميل

(x_1, y_1) ← نقطة على الخط المستقيم

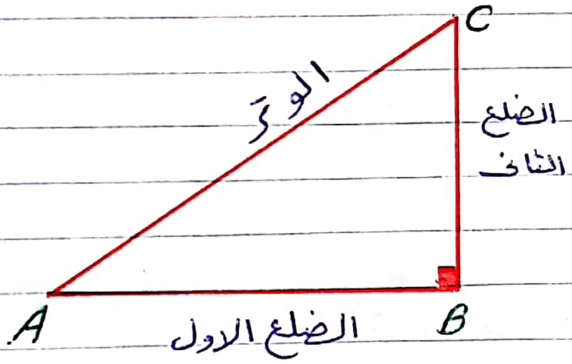
بمعلومية الميل ومقطع y

$$y = mx + c$$

حيث m ← الميل

c ← مقطع y

* نظرية فيثاغورث.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع الاول})^2 + (\text{الضلع الثاني})^2$$

العلاقات في المثلث

تصنيف المثلث بالنسبة

زواياه

* حاد الزوايا
كل زواياه حاده أي أقل من 90°

* قائم الزاوية
به زاوية واحده فقط قائمة

* منفرج الزاوية
به زاوية واحده فقط منفرجة أي أكبر من 90°

أضلاعه

* متطابق الأضلاع
كل الأضلاع متطابقه في الطول والزوايا متطابقة

* متطابق الضلعين
به ضلعان متطابقان زاويتا القاعده متطابقة

* مختلف الأضلاع
لا يوجد به أضلاع متطابقة.

تذكر

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث = 180°

قياس الزاوية الخارجية تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين البعيدتين

تذكر أيضاً بعض النظريات والمسلمات الهامة

SSS ← يتطابق مثلثان إذا تطابقت 3 أضلاع في أحدهما مع نظائرها في الآخر.

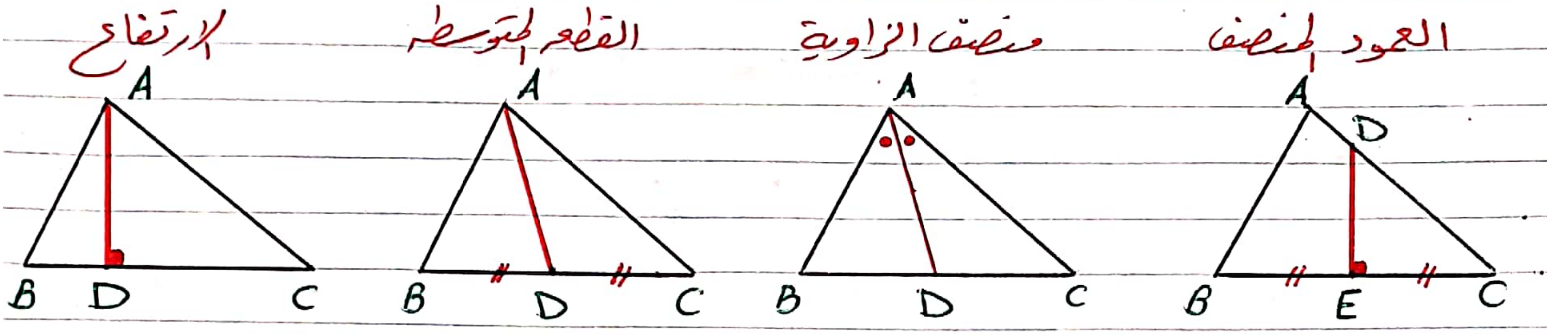
SAS ← التطابق بضلعين وزاويه محصوره. مع نظائرها في الآخر.

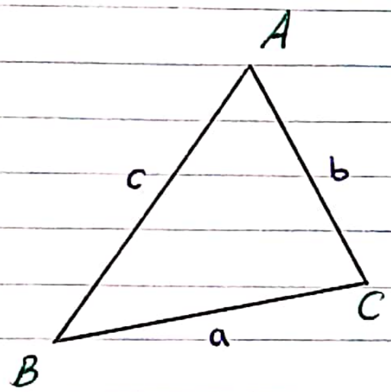
ASA ← التطابق بزاويتين وضلع مع نظائرها في الآخر.

AAS ← التطابق بزاويتين وضلع مع نظائرها في الآخر

S تعني ضلعاً A تعني زاوية

قطع مستقيمة خاصة في المثلث.





متباينة المثلث

مجموع أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث.

$a+b>c$ ، $a+c>b$ ، $b+c>a$

ويكون الضلع الثالث أكبر من فرق الضلعين الآخرين

$a-b<c$ ، $a-c<b$ ، $b-c<a$

وذلك يعني إذا أراد السؤال طول الضلع الثالث.
نجمع الضلعين ، نطرح الضلعين ويكون الاختيار الصحيح هو المحصور بينهما

$$a+b > c > |a-b|$$

مجموع الزوايا الداخلية لأي مضلع $= 180(n-2)$

عدد الأضلاع $= \dfrac{360}{180 - \text{قياس زاوية واحدة داخلية}}$

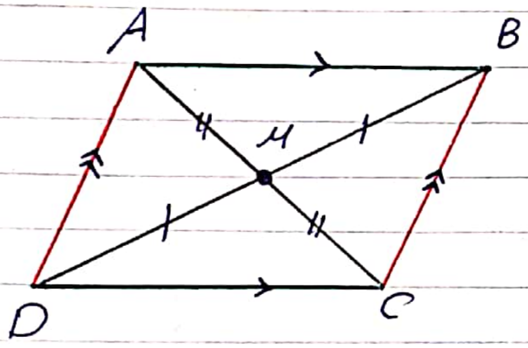
n عدد الأضلاع

الأشكال الرباعية والتحويلات الهندسية

متوازي الأضلاع

هو شكل رباعي كل ضلعين متقابلين متطابقين ومتوازيين

خواص المتوازي الأضلاع

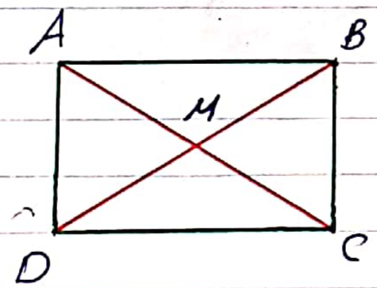


- كل ضلعين متقابلين متطابقين
- كل ضلعين متقابلين متوازيين
- القطران ينصف كل منهما الآخر
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتين
- كل زاويتين متجاورتين متكاملتين

المستطيل

هو متوازي أضلاع به زاوية واحدة قائمة

خواص المستطيل

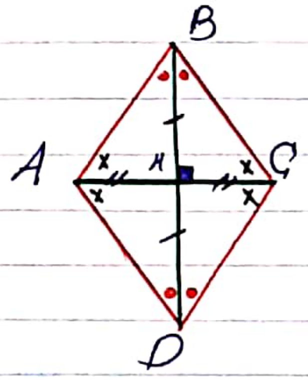


- نفس خواص المتوازي ويضاف إليها
- القطران متطابقان

المعين

هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة

خواص المعين



- نفس خواص المتوازي ويضاف إليها
- قطري المعين متعامدان وينصف كل منهما الآخر.
- قطري المعين ينصفان زوايا الرؤوس.
- جميع أضلاعه متطابقة.

المربع

هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة

خواص المربع

- نفس خواص المتوازي ويضاف إليها
- خواص المستطيل + خواص المعين
- قطرا المربع متطابقان ومتعامدان وينصف كل منهما الآخر

شبه المنحرف
هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان

شبه المنحرف المتطابق الساقين

- فيه ضلعان غير متوازيان ومتطابقان.
- زاويتا القاعدة متطابقتان
- القطران متطابقان

تذكر

- قياس الزاوية الخارجية لأي مضلع منتظم $= \dfrac{360}{n}$

- عدد الأضلاع $= \dfrac{360}{180-\theta}$ حيث θ قياس الزاوية الواحدة لمضلع منتظم

- مجموع قياسات الزوايا الداخلية $(n-2)180$ حيث n عدد الأضلاع

- قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم $= \dfrac{(n-2)180}{n}$

الانعكاس

- الانعكاس حول محور x نغير إشارة y
- الانعكاس حول محور y نغير إشارة x
- الانعكاس حول $y = x$ نبدل الاحداثيات.

الدوران

- الدوران بزاوية 90° $\quad (x,y) \longrightarrow (-y,x)$
- الدوران بزاوية 180° $\quad (x,y) \longrightarrow (-x,-y)$
- الدوران بزاوية 270° $\quad (x,y) \longrightarrow (y,-x)$
- الدوران بزاوية 360° $\quad (x,y) \longrightarrow (x,y)$
- زاوية الدوران موجبة تعني الدوران بعكس عقارب الساعة.

زاوية الدوران سالبة تعني الدوران مع عقارب الساعة.

التمدد

إذا كان k هو معامل التمدد فإن

$k > 1$	$0 < k < 1$	$k = 1$
التمدد تكبير	التمدد تصغير	التمدد تطابق

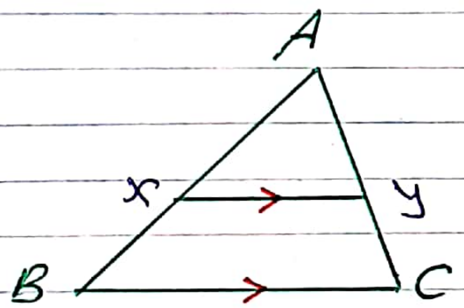
التناسب والتشابه

- يتشابه المضلعان إذا كان ① الأضلاع المتناظرة متناسبة
② الزوايا المتناظرة متطابقة

- نسبة التشابه = النسبة بين طول ضلعين متناظرين = النسبة بين المحيطين.

- يتشابه مثلثان عن طريق SSS أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة
أو عن طريق AA إذا طابقت زاويتين من مثلث زاويتين من مثلث آخر

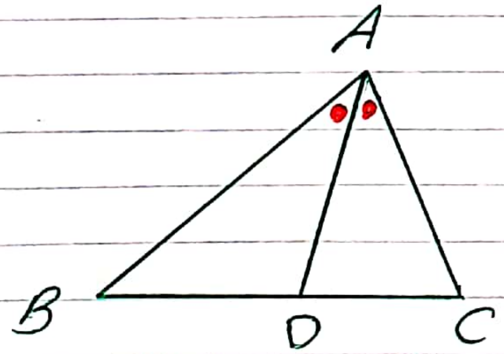
تذكر S تعني ضلع
A تعني زاوية



- إذا كان $BC \parallel xy$ فإن

$$\frac{Ax}{xB} = \frac{Ay}{yC}$$

وأيضاً $\frac{Ax}{AB} = \frac{Ay}{yC} = \frac{xy}{BC}$



"الرسم ليس على القياس"

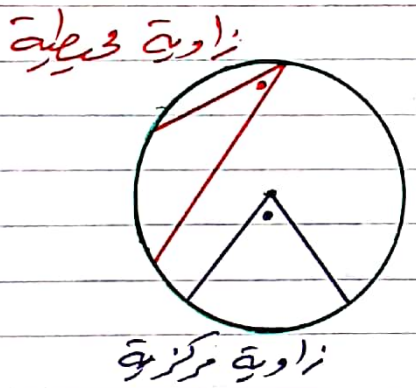
- إذا كان $\overline{AD}$ منصفاً لزاوية $\angle A$

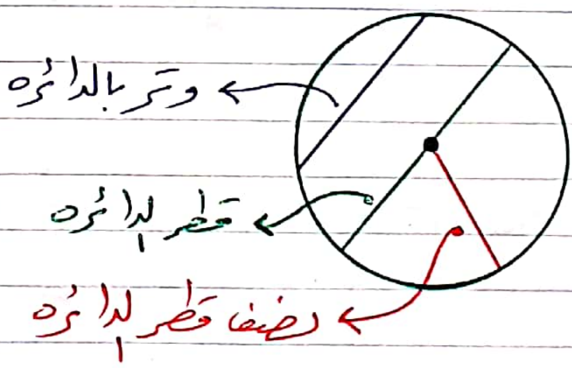
فإن $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$

الدائرة

- الوتر: قطعة مستقيمة طرفاها على الدائرة ولا تمر بالمركز.
- القطر: وتر ويمر بالمركز
- نصف القطر: قطعة مستقيمة أحد أطرافها المركز والآخر على الدائرة.
- زاوية مركزية: زاوية رأسها المركز وضلعاها نصفا قطر.
- زاوية محيطية: زاوية رأسها على الدائرة وضلعاها وتريان في الدائرة
  ⊛⊛ الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس.
- قياس القوس = قياس الزاوية المركزية المرسومة على القوس.

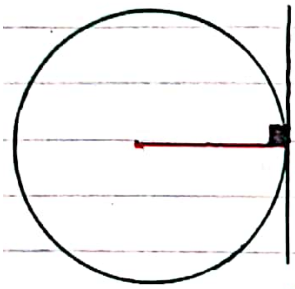
- محيط الدائرة = $2\pi r$
- مساحة الدائرة = πr^2





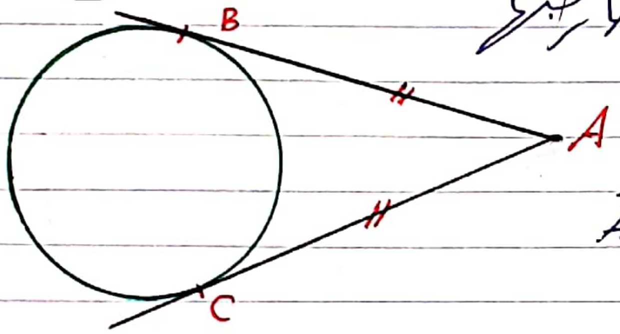
- مماس الدائرة

هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة.



- المماس ونصف القطر المار بنقطة التماس متعامدان

- القطعتان المماستان للدائرة من نقطة خارجها متطابقتان



$\overline{AB} \cong \overline{AC}$

- تقاطع وترين داخل دائرة

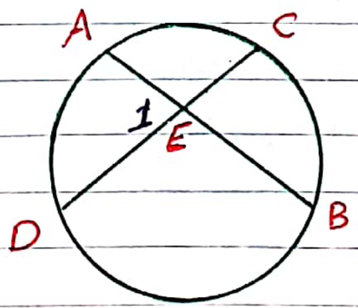
وعلاقتها بالأقواس وقياس زاوية التقاطع.

$m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AD} + m\widehat{CB})$

- تقاطع وترين داخل دائرة

وعلاقتها بنقطة التقاطع.

$EA \times EB = EC \times ED$



- تقاطع وترين خارج دائرة

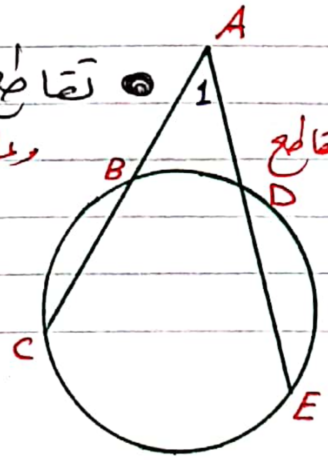
وعلاقتها بالأقواس وقياس زاوية التقاطع

$m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{CE} - m\widehat{BD})$

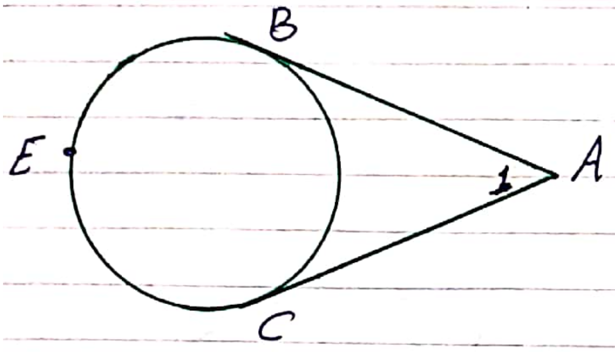
- تقاطع وترين خارج دائرة

وعلاقتها بنقطة التقاطع

$AB \times AC = AD \times AE$

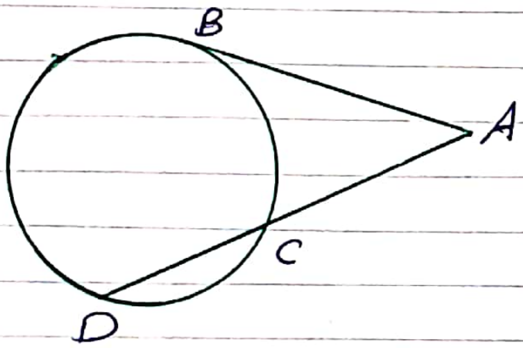


• تقاطع مماسين خارج دائرة



$$m\angle 1 = \frac{1}{2}\left(m\,\widehat{BEC} - m\,\widehat{BC}\right)$$

• تقاطع مماس ووتر خارج الدائرة.



$$(\overline{AB})^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$$

تذكر

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة
• تطابق الأوتار يعني تطابق الأقواس ويعني أيضاً تطابق الزاوية المركزية المرسومة على الوتر والعكس صحيح

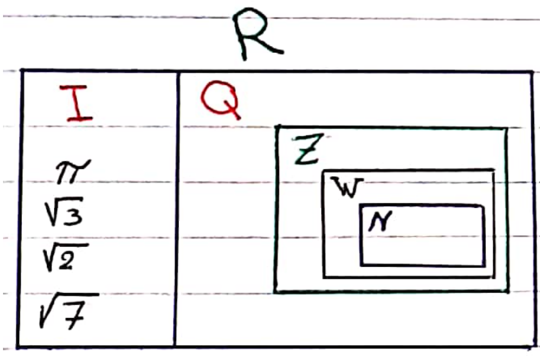
• الزاوية المركزية لنصف الدائرة $= 180^\circ$
الزاوية المحيطية لنصف الدائرة $= 90^\circ$

• الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس متطابقة في القياس.

• معادلة الدائرة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

الدوال و المتباينات

- مجموعة الاعداد الطبيعية N $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعة الاعداد الكلية W $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الاعداد الصحيحة Z $\{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- مجموعة الاعداد النسبية Q هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ أو عدد دورى $0 \neq b$
- مجموعة الاعداد غير النسبية I هو العدد الذى صورته العشرية غير منتهية ولا عدد دورى
- مجموعة الاعداد الحقيقية R هى مجموعة كل الاعداد



⊛ $R = Q \cup I$

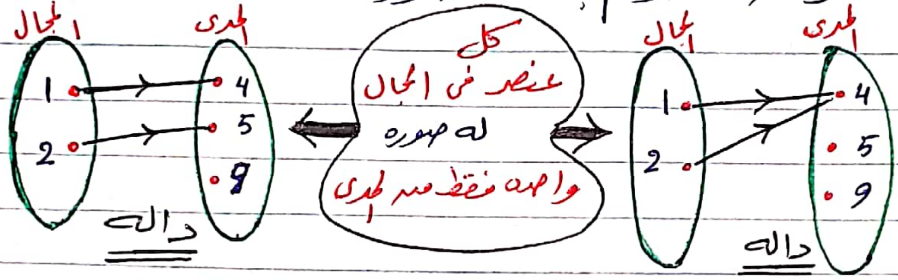
⊛ $N \subset W \subset Z \subset Q$

خصائص الاعداد الحقيقية

- الابدال (أ) على الجمع $a+b = b+a$
  (ب) على الضرب $a \cdot b = b \cdot a$
- التجميع $a+b+c = (a+b)+c$
  $= a+(b+c)$
- النظير (أ) الجمعى $a \rightarrow -a$ مجموع العددين يكون العنصر المحايد الجمعى وهو الصفر
  (ب) الضربى $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a}$ حاصل ضرب العددين يكون العنصر المحايد الضربى وهو الواحد

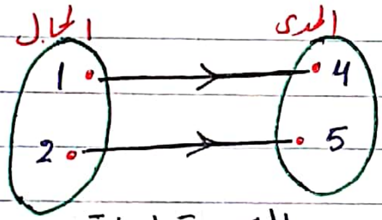
• خاصية التوزيع $a.(b+c) = a.b + a.c$

• الدالة كل عنصر من عناصر المجال له صورة واحدة فقط من عناصر المدى

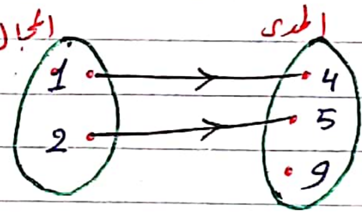


• الدالة المتباينة تسمى أيضاً دالة "واحد لواحد" "one to one"

هي دالة وذلك يعني أن كل عنصر من المجال له صورة واحدة فقط من عناصر المدى
وتكون متباينة عندما يكون كل عنصر من المدى له صورة واحدة فقط من عناصر المجال



دالة متباينة



دالة غير متباينة وذلك بسبب العنصر 9 من المدى ليست له صورة من المجال

• لإيجاد قيمة دالة يتم التعويض عن كل x في الدالة بالقيمة المعطاة

ex: $f(x) = 2x+1$ $\therefore f(3) = 2(3)+1 = 6+1 = 7$

وإذا كانت دالة متعددة التعريف يتم التعويض بالقيمة المعطاة في الجزء الذي يحقق شروطها.

• ومن أنواع الدوال الدالة الثابتة / الدالة الخطية دالة الدرجة الأولى / الدالة التربيعية دالة الدرجة الثانية / الدالة التكعيبية دالة الدرجة الثالثة / الدالة متعددة التعريف / الدالة الدرجية / دالة القيمة المطلقة / الدالة الأسية / الدالة اللوغاريتمية.

الدالة الرئيسية الأم للدالة الثابتة

$f(x) = k$

مجال R مجموعة الأعداد الحقيقية.

مدى K

ترسم بخط مستقيم موازي لمحور السينات (x) ويقطع محور الصادات (y) عند النقطة $(0, k)$

الدالة الرئيسية الأم للدالة من الدرجة الأولى (الخطية)

$f(x) = x$

مجال R مجموعة الأعداد الحقيقية.

مدى R مجموعة الأعداد الحقيقية

ترسم بخط مستقيم ويمر بنقطة الأصل.

الدالة الرئيسية الأم لدالة الدرجة الثانية التربيعية

$f(x) = x^2$

مجال R مجموعة الأعداد الحقيقية

مدى $[0, \infty)$ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

ترسم باليد وهي تشبه نصف الشكل البيضاوي

الدالة الرئيسية الأم لدالة الدرجة الثالثة التكعيبية

$f(x) = x^3$

مجال R مجموعة الأعداد الحقيقية

مدى R مجموعة الأعداد الحقيقية

وهي ترسم باليد بخط منحنى يمر بنقطة الأصل.

الدالة الرئيسية الأم للدالة متعددة التعريف

كل دالة يحدد لها المجال والمدى وذلك تبعاً للشروط المعطاة في المسألة ولذلك لا يوجد لها دالة رئيسية.

الدالة الرئيسية الأم للدالة الدرجية $F(x) = [\![x]\!]$

مجال R مجموعة الأعداد الحقيقية

مدى Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

ترسم بقطع مستقيمة توازي محور x وهي مثل درجات السلم

الدالة الرئيسية الأم لدالة القيمة المطلقة

$F(x) = |x|$

مجال R مجموعة الأعداد الحقيقية

مدى $[0, \infty)$ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

ترسم بخط مستقيم وتشبه حرف V باللغة الإنجليزية

الدالة الرئيسية الأم وبعض التحويلات على بعض الدوال

(1) $f(x) = x \xrightarrow{\text{إذا أضفت}} f(x) = x + 2$ تعني إزاحة للأعلى وحدتان.

$f(x) = x - 2$ تعني إزاحة للأسفل وحدتان.

(2) $f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{الصورة العامة}} f(x) = (x-a)^2 + b$

ويكون المجال R

المدى $[b, \infty)$

وقيمة a تعني إزاحة أفقية فإذا كانت

a موجبة الدالة يتم إزاحتها جهة اليسار

a سالبة الدالة يتم إزاحتها جهة اليمين

وقيمة b تعني إزاحة رأسية فإذا كانت

b موجبة الدالة يتم إزاحتها للأعلى

b سالبة الدالة يتم إزاحتها للأسفل

(3) $f(x) = |x| \xrightarrow{\text{الصورة العامة}} f(x) = |x-a| + b$

ويكون المجال R

المدى $[b, \infty)$

وقيمة a تعني إزاحة أفقية مثل الدالة التربيعية (x^2)

وقيمة b تعني إزاحة رأسية

المتباينات: هي عبارة رياضية تحتوي علامة من علامات التباين $>, <, \geq, \leq$

والمتباينة على الرسم تعني مساحة، فإذا كانت نقطة تحقق المتباينة فهي تقع داخل منطقة الحل.

المصفوفات.

تعريف المصفوفة: هي ترتيب وتنظيم العناصر في صفوف (m) وأعمدة (n)

والعناصر ممكن أن تكون "أرقام - حروف - رموز - ...... إلخ"

$$A = \begin{array}{cccc} \text{عمود } 1 & \text{عمود } 2 & \text{عمود } 3 & \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{صف } 1 \\ \text{صف } 2 \end{array} \end{array}$$

رتبة المصفوفة A هي 2×3

حيث يوجد بها صفان وثلاثة أعمدة.

- رتبة المصفوفة $m \times n$

  عدد الصفوف ← m ، عدد الأعمدة ← n

- لإيجاد العنصر a_{mn}

  رقم الصف ← m ، رقم العمود ← n

$a_{23} = 6$

3 ← العمود الثالث

2 ← الصف الثاني

- تتساوى المصفوفات إذا كانت كل العناصر المتناظرة متساوية.

- جمع وطرح مصفوفتين: شرط الجمع أو الطرح للمصفوفتين لهما نفس الرتبة ويتم جمع أو طرح كل عنصر مع نظيره في المصفوفة الثانية.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- ضرب مصفوفتين: شرط ضرب مصفوفتين عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

$A_{m \times n} \quad B_{k \times n}$

$n \neq k$

لا يمكن الضرب

$A_{m \times n} \quad B_{n \times k}$

$n = n$

يمكن الضرب وتكون المصفوفة الناتجة

$AB_{m \times k}$

● المحددات: هي مصفوفة مربعة

محدد الدرجة الثانية

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

* محدد الدرجة الثانية رتبتها 2X2

* محدد الدرجة الثالثة رتبتها 3X3

وطريقة حلها ① الأقطار

② الرتب

محدد الدرجة الثالثة

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right|$$

A = القطر الرئيس − القطر الفرعي

$$A = (1\times5\times9) + (2\times6\times7) + (3\times4\times8) - (3\times5\times7) + (1\times6\times8) + (2\times4\times9)$$

عناصر القطر الرئيس — عناصر القطر الفرعي

$$= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72)$$

$$= 225 - 225$$

= صفر

● النظير الضربي للمصفوفات من الدرجة الثانية

إذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن النظير الضربي لها

هو

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

* إذا كانت محدد المصفوفة تساوي صفر فإن المصفوفة ليس لها نظير ضربي

كثيرات الحدود

- $i=\sqrt{-1}$ $\qquad i^2=-1$ $\qquad i^3=-i$ $\qquad i^4=1$

- العدد المركب يكتب على الصورة $a+bi$

  الجزء التخيلي ← b ، a → الجزء الحقيقي

- عند جمع أو طرح عددين مركبين يكون الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

- عند ضرب عددين مركبين يتم كما في المثال $(a+bi)(m+ni)$

- مرافق العدد المركب هو نفس العدد بتغيير الإشارة الموجودة في الوسط

$$a+bi \xrightarrow[\text{هو}]{\text{يكون المرافق له}} a-bi$$

نلاحظ التغيير في الإشارة فقط

- ناتج حاصل ضرب عددين مترافقين هو $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

- لتبسيط كسر مقامه عدد مركب يتم الضرب بسطاً ومقاماً في مرافق المقام.

- يتساوى العددان المركبان إذا كان الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي
  و الجزء التخيلي = الجزء التخيلي

Step By Step Q

صيغة المعادلة التربيعية في الصورة العامة $ax^2+bx+c=0$

- المميز = b^2-4ac حيث

$a \longrightarrow$ معامل x^2

$b \longrightarrow$ معامل x

$c \longrightarrow$ الحد الخالي من x

ومن قيمة المميز يمكنه تحديد نوع الجذرين

أ) إذا كانت قيمة المميز سالبة المعادلة لها جذران مركبان.

ب) إذا كانت قيمة المميز موجبة المعادلة لها جذران مختلفان: أ) نسبيان إذا كان المميز مربع كامل 25-9-16-4 ب) غير نسبيان إذا كان غير مربع كامل.

ج) إذا كانت قيمة المميز صفر المعادلة لها جذر حقيقي واحد مكرر.

- القانون العام لحل المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$

هو $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- درجة وحيدة الحد هو مجموع أسس المتغيرات. مثال ←

الدرجة الثالثة	الدرجة الثانية
x^2y	x^2
x^3	xy

- درجة كثيرة الحدود هو درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأعلى

- المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود هو معامل الحد ذات الدرجة الأعلى

- جمع وطرح كثيرات الحدود عن طريق الحدود المتشابهة فقط.

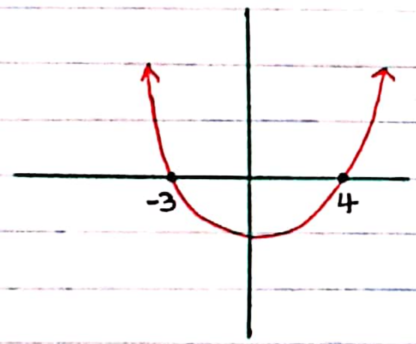
- ضرب كثيرتي الحدود يكون عن طريق فك الأقواس ثم جمع الحدود المتشابهة.

- شرط قسمة أو التبسيط ربط ومقام أن يكون المقام ≠ صفر

Step By Step Q

- **نظرية الباقي**: إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-r)$ فإن باقي القسمة يكون مقدار ثابت يساوي $f(r)$

- **نظرية العوامل**: إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-r)$ فإن باقي القسمة يساوي صفر يكون
  - أ) $f(r)=0$ تبعاً لنظرية الباقي
  - ب) $(x-r)$ عامل من عوامل $f(x)$



ولتحديد العوامل من الرسم
① تحديد نقاط التقاطع مع محور x (الأصفار)
② يكون العوامل $(x-r)$

ومن المثال المقابل يكون الأصفار هي $-3, 4$
وبذلك تكون العوامل هي $(x+3)(x-4)$

- **جذور كثيرة الحدود** (الأصفار)

إذا كانت $f(r)=0$ فإن r هو صفر من الأصفار
وأيضاً يكون $(x-r)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود.
وأيضاً يكون الباقي = صفر.

- ولإيجاد الأصفار أو الجذور من الرسم هي نقاط تقاطع منحنى كثيرة الحدود مع محور x
من الرسم السابق تكون الجذور هي $\{-3, 4\}$

- ولإيجاد الأصفار أو الجذور جبرياً نضع $f(x)=0$ ونوجد قيم x.

- يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور
وإذا كان أحد الجذور عدد مركب فإن مرافقه أيضاً من الجذور.

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

العمليات على الدوال

[١] جمع دالتين أو طرح نقوم بتجميع الحدود المتشابهة

$F(x) = 3x - 2 \qquad g(x) = 4x - 1$

$\therefore (F+g)(x) = (3x-2) + (4x-1) = 7x - 3$

$\therefore (F-g)(x) = (3x-2) - (4x-1) = -x - 1$

[٢] ضرب دالتين نقوم بفك الأقواس

$\therefore (F \cdot g)(x) = (3x-2)(4x-1)$

$= 12x^2 - 3x - 8x + 2$

$= 12x^2 - 11x + 2$

[٣] قسمة دالتين نقوم بالتبسيط للبسط والمقام والاختصار لأبسط صورة

$\therefore \left(\frac{F}{g}\right)(x) = \frac{3x-2}{4x-1}$

[٤] تركيب دالتين $(F \circ g)(x) = F(g(x))$

وفي هذه الحالة تعني أننا نقوم بالتعويض بالدالة $g(x)$ في الدالة $F(x)$.

$\therefore (F \circ g)(x) = F(g(x))$

$= F(4x-1)$

$= 3(4x-1) - 2$

$= 12x - 3 - 2$

$(F \circ g)(x) = 12x - 5$

$\therefore (g \circ F)(x) = g(F(x))$

$= g(3x-2)$

$= 4(3x-2) - 1$

$= 12x - 8 - 1$

$(g \circ F)(x) = 12x - 9$

• الدالة العكسية لها ثلاث خطوات لايجاد الدالة العكسية

① نضع $f(x) = x$ و نستبدل كل x داخل الدالة بـ y

② نقوم بحل المعادلة بالنسبة لـ y " نضع y في طرف "

③ نستبدل y بـ $F^{-1}(x)$

مثال

$$F(x) = 3x - 2$$

$$x = 3y - 2$$

① تم استبدال $f(x)$ بـ x

تم استبدال x داخل الدالة بـ y.

$$\frac{x+2}{3} = \frac{\cancel{3}y}{\cancel{3}}$$

$$\frac{x+2}{3} = y$$

② نضع y في طرف وباقي الدالة في طرف

$$\therefore F^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

③ تم استبدال y بـ $F^{-1}(x)$

← مدى $f(x)$ هو نفسه مجال $f^{-1}(x)$

ومجال $f(x)$ هو نفسه مدى $f^{-1}(x)$

• داله الجذر التربيعي

$$f(x) = \sqrt{x-a} + b$$

المجال $[a, \infty)$

المدى $[b, \infty)$

مثال

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 3$$

المجال $[2, \infty)$

المدى $[3, \infty)$

وإذا كان الجذر في المقام يتم الضرب بسطاً ومقاماً في مرافق المقام.

• دالة المقلوب

$$f(x) = \frac{1}{x-a} + b$$

المجال $R - \{a\}$ خط التقارب الرأسي $x = a$

المدى $R - \{b\}$ خط التقارب الأفقي $y = b$

مثال

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$$

المجال $R - \{2\}$

المدى $R - \{3\}$

• للتحويل من الصورة الجذرية للصورة الأسية والعكس.

$$\sqrt[b]{x^{a}} = x^{\frac{a}{b}}$$

⊛ ملاحظة هامة: إذا كان دليل الجذر (b) عدد زوجي والأس تحت الجذر (a) عدد زوجي

وأس الناتج $\left(\frac{a}{b}\right)$ عدد فردي يجب وضع قيمة مطلقة

مثال:

أس الناتج عدد فردي

$$\sqrt[4]{(x-3)^{12}} = (x-3)^{\frac{12}{4}} = \left|(x-3)^{3}\right|$$

• عند ضرب الأساسات نقوم بجمع الأسس.

• عند قسمة الأساسات نقوم بطرح الأسس.

• حل معادلات الجذر التربيعي. الأسهل في الاختبار هو تجريب الخيارات.

① نجعل الجذر في طرف وباقي المعادلة في طرف

② نقوم بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر.

③ نوجد قيم x

⇐ يجب التعويض بقيم x في المعادلة "تحت الجذر" لكي لا تكون القيمة سالبة تحت الجذر

العلاقات والدوال "الدالة النسبية"

- العبارة النسبية تكون غير معرفة عندما يكون المقام = صفر .

مثال ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x+3}{x-4}$ غير معرفة ؟

قيم x التي تجعل العبارة غير معرفة هي القيم التي تجعل المقام = صفر

$$x-4=0$$

$$\therefore x=4$$

لذلك دالة المقلوب أو الدالة النسبية مجالها $R-\{$ أصفار المقام $\}$

قيم x التي تجعل المقام = صفر .

- LCM المضاعف المشترك الأصغر

لإيجاد LCM للأعداد أو وحيدات الحد أو كثيرات الحدود يتم التحليل الى العوامل الأولية ثم ضرب العوامل والعوامل المتشابهه نضرب التي لها أكبر أس

مثال ① أوجد LCM للعددين 6 ، 8

$$6 = 2 \times 3$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2$$
$$LCM = 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$$

② أوجد LCM لـ $9xy^5$ ، $4x^2y^3$

$$4x^2y^3 = 2 \times 2 \times x^2 \times y^3$$
$$9xy^5 = 3 \times 3 \times x \times y^5$$

$$LCM = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times x^2 \times y^5 = 36x^2y^5$$

- العمليات على العبارات النسبية .

④ ضرب عبارتين نسبيتين

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$. $\frac{\text{البسط} \times \text{البسط}}{\text{المقام} \times \text{المقام}}$

⑤ قسمة عبارتين نسبيتين

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

طريقة كل

تقلب المقسوم عليه وتغير علامة ÷ بـ X .

⑥ جمع وطرح عبارتين نسبيتين : بإيجاد LCM للمقامات .

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

- تبسيط الكسر المركب

نقوم بالضرب بسطاً ومقاماً في حاصل ضرب المقامات الموجودة في البسط والمقام .

مثال بسط $\frac{1+\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{x}}$ بالضرب xy ← مقام موجود بالمقام

مقام موجود بالبسط .

$$\frac{1+\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{xy}{xy}=\frac{xy+\frac{1}{\cancel{y}}\cdot x\cancel{y}}{xy+\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}y}=\frac{xy+x}{xy+y}$$

Step By Step Q

• التغير الطردي: تتغير طردياً y مع x إذا كان $y = kx$

$k \neq 0$ صفر $\neq$ ثابت التغير

مثال: إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y = 20$ عندما $x = 4$
أوجد قيمة y عندما $x = 6$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

طريقة أفضل.
$$\frac{4}{6} = \frac{20}{y_2}$$

$$y_2 = \frac{6 \times 20}{4} = 30$$

• التغير العكسي: تتغير y عكسياً مع x إذا كان $xy = k$

$k \neq 0$ ثابت التغير

مثال: إذا كانت y تتغير عكسياً مع x وكانت $y = 20$ عندما $x = 4$ أوجد قيمة y
عندما $x = 6$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{y_2}{20}$$

$$y_2 = \frac{4 \times 20}{6} = 13.3$$

• التغير المشترك: تتغير y طردياً مع x و z إذا كان $y = kxz$

$$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$$

• التغير المركب: تتغير y طردياً مع x وعكسياً مع z

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$$

المتتابعات والمتسلسلات.

- **المتتابعة الحسابية**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

قانون الحد النوني يستخدم لإيجاد قيمة حد معين أو رتبة الحد.

a_1: الحد الأول، n: عدد الحدود، d: أساس المتتابعة

$$d = a_2 - a_1$$

قانون مجموع المتسلسلة

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

- **المتتابعة الهندسية**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

a_1: الحد الأول، r: أساس المتتابعة، n: عدد الحدود

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

مجموع المتسلسلة غير المنتهية

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

تكون المتسلسلة متقاربة إذا كان $|r| < 1$

تكون المتسلسلة متباعدة إذا كان $|r| > 1$

• مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$

* عدد الحدود هو $n+1$

* الحد الأول هو a^n

* الحد الأخير هو b^n

الاحتمالات

• التجربة العشوائية: هي تجربة معلوم كل نواتجها الممكنة ولكن غير معلوم أي ناتج سيحدث.
مثال مباراة بين فريقين يكون كل النواتج للفريق الأول " فوز - تعادل - خسارة " ولكن غير معلوم أي نتيجة للمباراة.

• فضاء العينة: هو مجموعة كل النواتج
مثال إلقاء قطعة نقود {صورة - كتابة}

• الحدث: مجموعة جزئية من فضاء العينة

احتمال الحدث

• احتمال الحدث: $P(\text{الحدث}) = \dfrac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد نواتج التجربة فضاء العينة}}$

⊛ احتمال أي حدث $0 \leq P(X) \leq 1$

• مضروب العدد $n!$ هو حاصل ضرب الأعداد من n إلى 1
مثال مضروب العدد 5 هو $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

• قانون التباديل يستعمل لإيجاد عدد عناصر فضاء العينة عندما يكون الترتيب مهم

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

n عدد العناصر
r عدد مرات التكرار

مثال صندوق به 6 بطاقات مرقمة من 1 إلى 6 فإذا سحبنا منه عشوائياً كرتين الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع فما احتمال سحب البطاقتين 3 ثم 6 ؟

$$ {}_6P_2 = 30 $$

$$ \therefore P(\text{سحب بطاقة رقم 3 ثم رقم 6}) = \frac{1}{30} $$

• التباديل مع التكرار هو تكرار عنصر r_1 من المرات وعنصر r_2 من المرات لمجموعة عناصر عددها n

مثال كلمة اوروبا من البطاقات الآتية

ا ر و و ا ب

عدد التباديل بالتكرار $= \frac{n!}{r_1!\ r_2!}$

$$\frac{6!}{2!\times 2!} = 180$$

$$\therefore P(\text{كلمة اوروبا}) = \frac{1}{180}$$

• التباديل مع وجود نقطة مرجعية تعتبر تبديلاً "خطياً" $n!$

• التباديل مع عدم وجود نقطة مرجعية يعتبر تبديلاً "دائرياً" $(n-1)!$

• التوافيق لإيجاد عدد جميع النواتج المختلفة عندما يكون الترتيب غير مهم

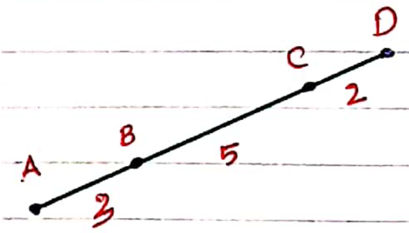
$$nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

n عدد العناصر

r عدد مرات التكرار

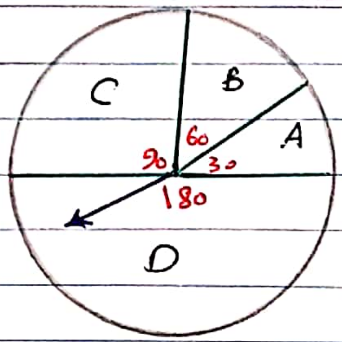
• الاحتمال الهندسي ① الأطوال $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

مثال: احتمال أن تكون النقطة x على القطعة المستقيمة BC



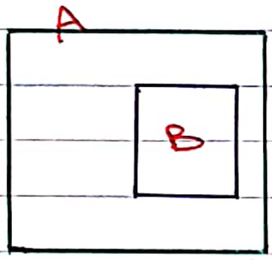
$$P(X_{\text{تقع على } BC}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

• الاحتمال الهندسي ① الاحتمال والزوايا.



إحتمال أن يستقر المؤشر في المنطقة $D = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$

• الاحتمال الهندسي ② الاحتمال والمساحة $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$



$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$

• الحوادث المستقلة والغير مستقلة

الحوادث المستقلة وقوع أحداها لا يؤثر على الآخر مثال إلقاء قطعة نقود ومكعب مرقم.

احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معاً

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

الحوادث الغير مستقلة وقوع إحداهما يؤثر على الآخر مثال سحب بطاقة بدون إرجاع.

• الاحتمال المشروط لدى حادثتين A, B فإن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يعطى بـ

العلاقة

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

• الحادثتان المتنافيتان حادثتان لا توجد عناصر مشتركة بينهما

احتمال حادثتان متنافيتان $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

احتمال حادثتان غير متنافيتان $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

• احتمال الحادثة المتممة $P(A)' = 1 - P(A)$

حساب المثلثات

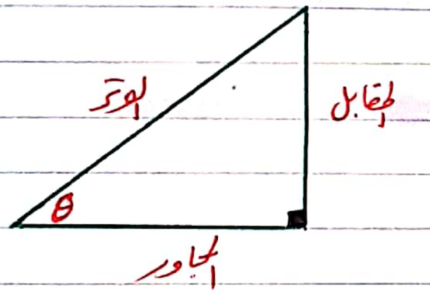
• للتحويل من درجات إلى راديان نضرب في $\frac{\pi}{180^\circ}$

• للتحويل من راديان إلى درجات نضرب في $\frac{180^\circ}{\pi}$

ومن الزوايا المشهورة

30	45	60	90	180	270	360 ⟵	درجات
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π ⟵	راديان

• الدوال المثلثية في المثلث القائم الزاوية .



$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

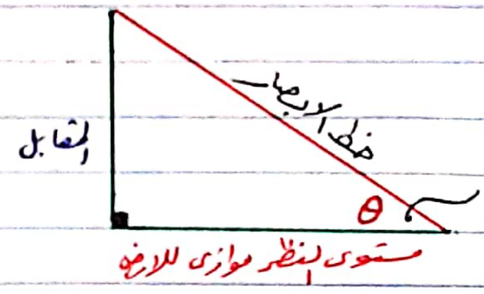
$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\qquad$ $\text{Cat}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

جدول للدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة .

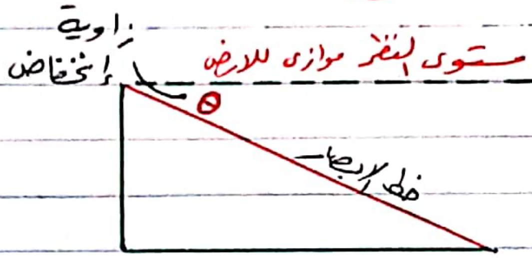
	0° أو 360°	90	180	270	30	45	60
Sin	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	0	غير معرف	0	غير معرف	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

• زاويتا الارتفاع والانخفاض



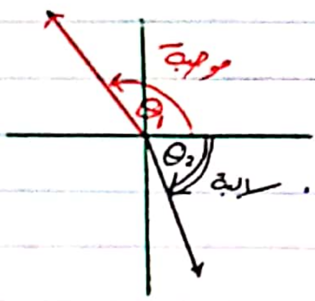
زاوية ارتفاع

زاوية انخفاض



• الزاوية فى الوضع القياسى: ① رأسها نقطة الاصل

② ضلعها الابتدائى منطبق على محور x الموجب.



وتكون موجبة إذا كان ضلع الانتهاء يدور عكس عقارب الساعة.

وتكون سالبة إذا كان ضلع الانتهاء يدور مع عقارب الساعة

• إذا كانت الزاوية فى الوضع القياسى ويمر ضلعها النهائى بالنقطة (x, y) فإن

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

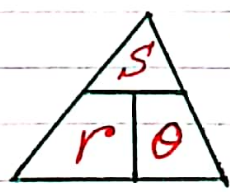
وإذا كانت (x, y) تقع على دائرة الوحدة فإن $r = 1$

الربع الثانى	الربع الاول
$\sin$ موجب، $\csc$ فقط، والباقى سالب	كل الدوال المثلثية موجبة
الربع الثالث	الربع الرابع
$\tan$ موجب، $\cot$ فقط، والباقى سالب	$\cos$ موجب، $\sec$ فقط، والباقى سالب

ولكى يسهل الحفظ

C	t	S	كل
ر٤	ر٣	ر٢	ر١

• طول القوس $= S = r\theta$



S طول القوس

r نصف القطر

θ الزاوية بالراديان

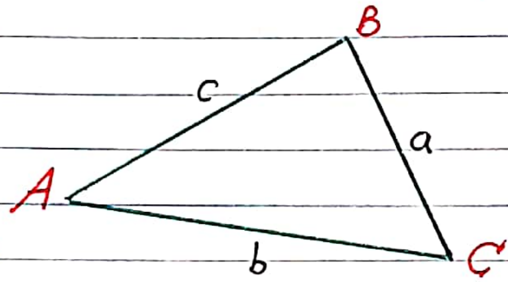
• مساحة المثلث

$= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times$ الضلع الأول $\times$ الضلع الثاني $\times \sin$ الزاوية المحصورة

• قانوني الجيب وجيب التمام

في أي مثلث ABC



⊛ قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

⊛ قانون جيوب التمام

للأضلاع

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

للزوايا

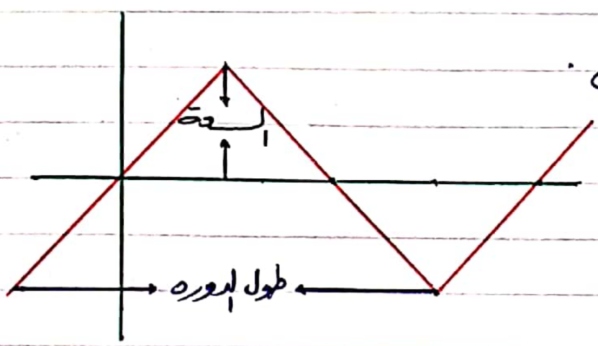
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

• طول الدورة هي المسافة بين قمة وقمة أو قاع وقاع متتاليان.

• السعة هي نصف المسافة بين القمة والقاع.



تحليل الدوال والتحويلات الهندسية عليها

المجال: هو صورة الدالة على محور x

المدى: هو صورة الدالة على محور y

لإيجاد قيمة الدالة عند نقطة بالتعويض بالقيمة في الدالة.

أصفار الدالة مقطع x وهندسياً هو الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع الدالة مع محور x

جبرياً نضع الدالة = صفر $f(x)=0$ ونوجد قيم x

مقطع y هندسياً هو الإحداثي y لجميع نقاط تقاطع الدالة مع محور y

جبرياً نضع x = صفر

الدالة الزوجية هي الدالة التي تكون متماثلة حول محور y

$f(x) = f(-x)$ عند التعويض بـ $(-x)$ في الدالة بدلاً من x تعطي نفس صورة الدالة بدون تغيير الإشارة

الدالة الفردية هي الدالة المتماثلة حول نقطة الأصل.

$f(-x) = -f(x)$ عند التعويض بـ $(-x)$ في الدالة بدلاً من x تعطي نفس صورة الدالة ولكن كل الإشارات تتغير فإذا كانت $(+)$ تكون $(-)$ وكذلك العكس

أما إذا تم التعويض بـ $-x$ في الدالة وتغيرت بعض الإشارات والأخرى لا تكون الدالة ليست زوجية أو فردية

⊕ الأس الزوجي والقيمة المطلقة لا يغير الإشارة ولكن الأس الفردي يغير الإشارة.

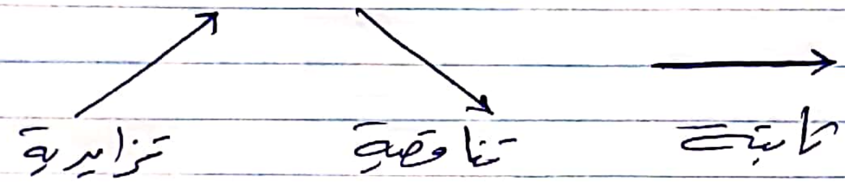
تزايد وتناقص الدالة

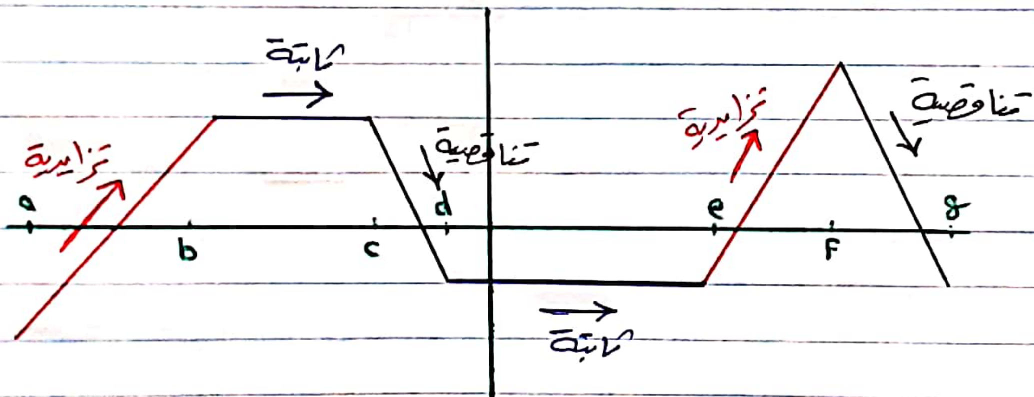
تكون متزايدة إذا كان $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

وتكون متناقصة إذا كان $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

وتكون ثابتة إذا كان $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

وتحليل إستنتاجي من الرسم من اليسار لليمين بإتباع الرسم



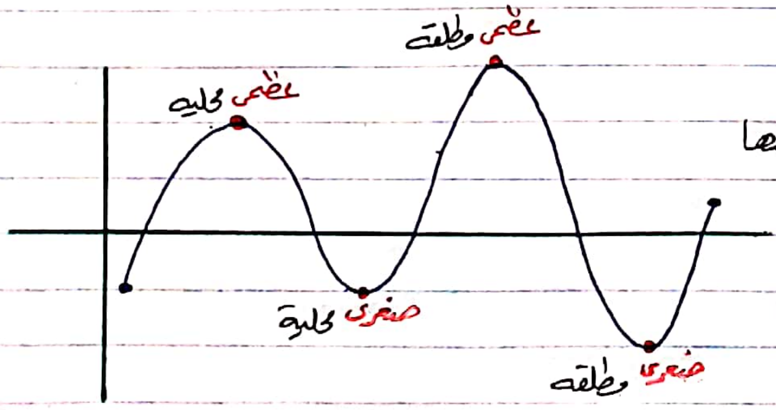


تزايدية (a,b) ، (e,f)

تناقصية (c,d) ، (f,g)

ثابتة (b,c) ، (d,e)

القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة



القمة هي قيمة عظمى
- محلية يوجد قيم أعلى منها
- مطلقة أعلى قيمة

القاع هي قيمة صغرى
- محلية يوجد قيم أقل منها
- مطلقة أقل قيمة

متوسط معدل التغير للدالة

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال: أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = 2x$ في الفترة من $[1, 4]$

$$m_{sec} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

التحويلات الهندسية للدوال :-

$$g(x) = f(x - h) + k$$

$k+$: إزاحة رأسية لأعلى بمقدار k

$k-$: إزاحة رأسية لأسفل بمقدار k

$-h$: أي مع تغيير الإشارة في الدالة الموجودة بجوار h

إزاحة لليسار بمقدار h

$+h$: أي دون تغيير الإشارة في الدالة الموجودة بجوار h

إزاحة لليمين بمقدار h

الانعكاس حول محور x

$$g(x) = -f(x)$$

الانعكاس حول محور y

$$g(x) = f(-x)$$

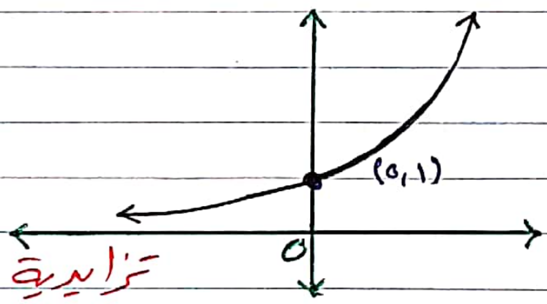
العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية.

الدالة الرئيسية الأم لـ الدالة الأسية

$$F(x) = b^x$$

ويكون لها صورتان

$f(x) = b^x \quad b > 1$



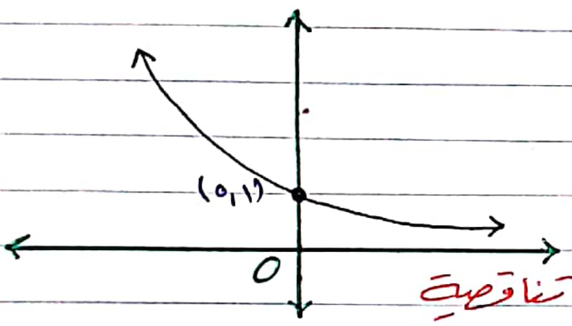
المجال $\mathbb{R}$

المدى $(0, \infty)$

مقطع y = 1

مقطع x لا يوجد

$f(x) = b^x \quad 0 < b < 1$



المجال $\mathbb{R}$

المدى $(0, \infty)$

مقطع y = 1

مقطع x لا يوجد

ملاحظة هامة

* إذا كان الأساس = الأساس فإن الأس = الأس.

$a^n = a^4$ فإن $n = 4$

* إذا كان الأس = الأس فإن الأساس = الأساس

$a^n = 40^n$ فإن $a = 40$

Step By Step Q

ملاحظة هامة

$b>1$: $b^x > b^y \iff x>y$

$0<b<1$: $b^x > b^y \iff x<y$

التحويل من الصورة الأسية إلى اللوغاريتم والعكس

لا يوجد لوغاريتم لعدد سالب

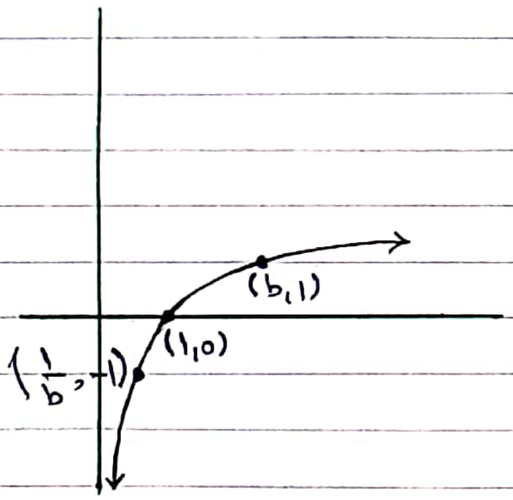
$$\log_a b = x \longleftrightarrow a^x = b$$

مثال

$\log_2 8 = 3$ $\qquad$ $2^3 = 8$

الدالة الرئيسية الأم للدالة اللوغاريتمية

$$f(x) = \log_b x$$



من خلال ثلاث نقاط يمكن رسم الدالة

$(b,1)$

$(1,0)$

$(\frac{1}{b},-1)$

المجال $(0,\infty)$ أو $\mathbb{R}^+$

المدى $\mathbb{R}$

خصائص اللوغاريتمات

① $\log_b b = 1$ ② $\log_b 1 = 0$

③ $\log_b b^x = x \log_b b = x(1) = x$

④ $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

⑤ $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

⑥ $\log 10 = 1$ $\log 0.1 = -1$

$\log 100 = 2$ $\log 0.01 = -2$

ولكي يتم حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية نستخدم الخصائص السابقة

ولكن لابد من أن يكون أساس اللوغاريتم متساوي .

حساب المثلثات

متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

ومن هذه القاعدة نستخرج العديد من القواعد والقوانين الهامة منها

① $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

② $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

③ $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

المتطابقات المثلثية لمجموع وفرق زاويتين

① $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

② $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

③ $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

الدوال المثلثية العكسية وهي تعني إيجاد قيمة الزاوية التي تعطي القيم المعطاه ويرمز لها بالرمز Arc أو تكتب الداله المثلثية أس -1

مثال $\quad \text{Arc}\sin\frac{1}{2} = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30^\circ$

ملاحظة $\quad \cos^{-1}\cos x = x \quad \sin^{-1}\sin x = x \quad \tan^{-1}\tan x = x$

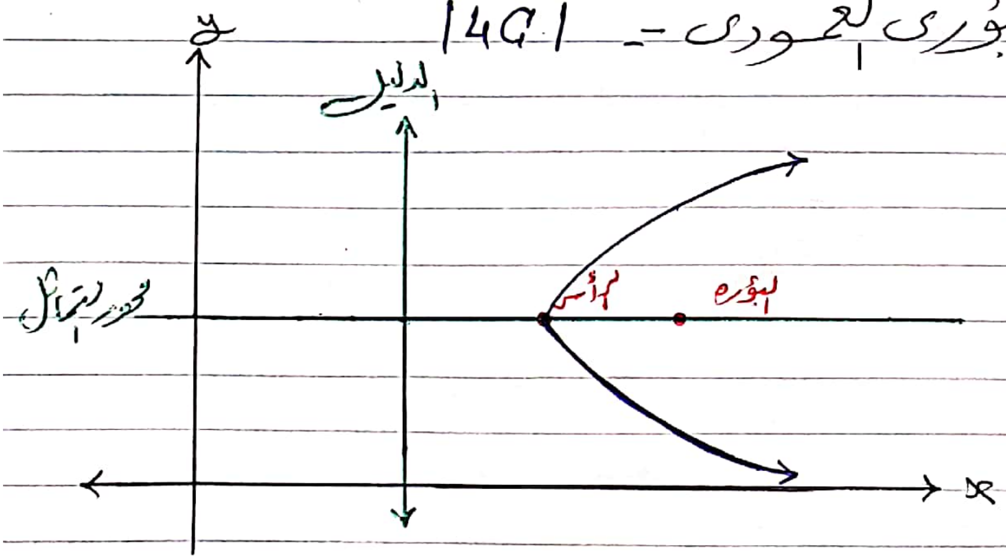
وحل المعادلات المثلثية هي إيجاد قيمة θ التي تحقق المعادلة

القطوع المخروطية

القطع المكافئ

رأسي	أفقي
$(x-h)^2=4c(y-k)$	$(y-k)^2=4c(x-h)$
إذا كانت c موجبة مفتوح للأعلى.	إذا كانت c موجبة مفتوح جهة اليمين
c سالبة مفتوح للأسفل.	c سالبة مفتوح جهة اليسار
البؤرة $(h, k+c)$	البؤرة $(h+c, k)$
معادلة محور التماثل $x=h$	معادلة محور التماثل $y=k$
معادلة الدليل $y=k-c$	معادلة الدليل $x=h-c$

طول الوتر البؤري العمودي = $|4c|$



القطع الناقص

القطع الناقص الذي محوره الأكبر أفقي

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

البؤرتان $(h\pm c\,,\,k)$

الرأسان $(h\pm a\,,\,k)$

الرأسان المرافقان $(h\,,\,k\pm b)$

معادلة المحور الأكبر $y=k$

معادلة المحور الأصغر $x=h$

القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

البؤرتان $(h\,,\,k\pm c)$

الرأسان $(h\,,\,k\pm a)$

الرأسان المرافقان $(h\pm b\,,\,k)$

معادلة المحور الأكبر $x=h$

معادلة المحور الأصغر $y=k$

العلاقة بين a, b, c

$$c^2=a^2-b^2$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

$$e=\frac{c}{a}$$

⊛ عندما $e=0$ فإن القطع الناقص يصبح دائرة.

القطع الزائد

القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي		القطع الزائد الذي محوره القاطع رأسي.	
	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$		$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
الرأسان	$(h\pm a , k)$	الرأسان	$(h , k\pm a)$
البؤرتان	$(h\pm c , k)$	البؤرتان	$(h , k\pm c)$
معادلة المحور القاطع	$y=k$	معادلة المحور القاطع	$x=h$
معادلة المحور المرافق	$x=h$	معادلة المحور المرافق	$y=k$
خطا التقارب	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	خطا التقارب	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

إذا كان B^2-4AC

- موجبة: يكون القطع زائد
- صفر: يكون القطع مكافئ
- سالب: يكون القطع ناقص

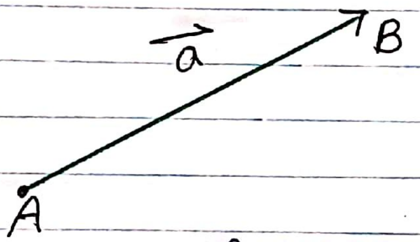
وإذا كان $B=0$ و $A=C$ يصبح دائرة.

المتجهات

يوجد كميات قياسية مثل الزمن والكتلة فهي لها مقدار فقط

ويوجد كميات متجهة مثل الإزاحة والقوة فهي لها مقدار واتجاه

يرمز للمتجه $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$



إتجاه المتجه

① عن طريق زاوية الاتجاه الحقيقي وتكتب على الصورة 030° وهي 30°
وتبدأ من اتجاه الشمال مع عقارب الساعة.

② زاوية الاتجاه الربعي تتحدد من الشرق E الغرب W
الشمال N الجنوب S

العلاقة بين متجهين

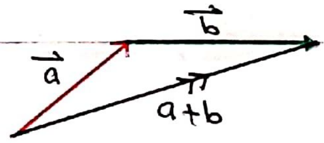
متوازيان: لهما نفس الاتجاه أو عكس الاتجاه وليس بالضرورة متساويان الطول.

متساويان: لهما نفس الاتجاه ونفس الطول.

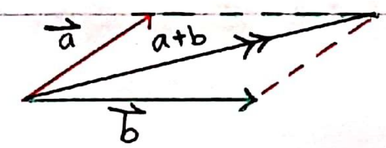
معكوس المتجه: عكس الاتجاه ونفس الطول.

لإيجاد محصلة متجهين يمكن استخدام

① قاعدة المثلث
بداية المتجه الثاني نفس نقطة نهاية المتجه الأول

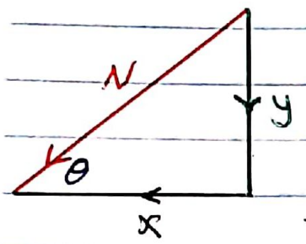


② قاعدة متوازي الأضلاع
المتجهين لهما نفس نقطة البداية



Step By Step Q

* أي متجه يمكن تحليله إلى مركبتين متعامدتين أفقية ورأسية



المركبة الأفقية $|x| = N\cos\theta$

المركبة الرأسية $|y| = N\sin\theta$

الصورة الإحداثية لمتجه بدايته $A(x_1, y_1)$ ونهايته $B(x_2, y_2)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle = \langle x , y \rangle$$

طول المتجه $\overrightarrow{AB}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

العمليات على المتجهات

إذا كان $\vec{b} = \langle x_2 , y_2 \rangle$ $\vec{a} = \langle x_1 , y_1 \rangle$

جمع متجهين

$$\overrightarrow{a+b} = \langle x_1 + x_2 , y_1 + y_2 \rangle$$

طرح متجهين

$$\overrightarrow{a-b} = \langle x_1 - x_2 , y_1 - y_2 \rangle$$

ضرب متجه بعدد حقيقي

$$ka = \langle kx_1 , ky_1 \rangle$$

متجه الوحدة: هو المتجه الذي طوله 1 وحدة طول. $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

متجها الوحدة القياسيان: $i \ \langle 1 , 0 \rangle$

$J \ \langle 0 , 1 \rangle$

كتابة المتجه على صورة التوافق الخطي $\langle 3 , 4 \rangle = 3i + 4J$

Step By Step Q

- الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle \quad b = \langle x_2, y_2 \rangle$

$$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

شرط تعامد متجهين $a \cdot b =$ صفر

- قياس الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

- المسافة بين نقطتين في الفضاء ثلاثي الأبعاد

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- إحداثي نقطة المنتصف في الفضاء ثلاثي الأبعاد

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

- المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

الصورة الإحداثية

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

متجهات الوحدة القياسية $\vec{i}, \vec{J}, \vec{k}$

$i = \langle 1, 0, 0 \rangle$
$J = \langle 0, 1, 0 \rangle$
$k = \langle 0, 0, 1 \rangle$

صورة التوافق الخطي $\vec{a} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle = x_1 i + y_1 J + z_1 k$

• طول المتجه $|\vec{V}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

• العمليات على المتجهات $\vec{a} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ $\vec{b} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$

جمع متجهين $a+b = \langle x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2 \rangle$

طرح متجهين $a-b = \langle x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2 \rangle$

ضرب المتجه بعدد k $k\vec{a} = \langle kx_1, ky_1, kz_1 \rangle$

• الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء

$$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

* تذكر لكي يكون المتجهان متعامدان $a \cdot b =$ صفر

• الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

يتم إيجاد قيمة المحدد عن طريق قاعدة الأقطار.

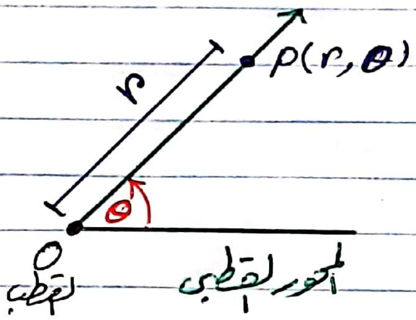
ملحوظة ① الضرب الاتجاهي يعطي متجه عمودي على المستوى الذي يحوي $\vec{a}, \vec{b}$

② القيمة المطلقة للضرب الاتجاهي تعطي مساحة متوازي الأضلاع.

• الضرب القياسي يعطي حجم متوازي السطوح

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

الإحداثيات القطبية



المحور القطبي: شعاع يمتد أفقياً من القطب لليمين

الإحداثيات القطبية (r, θ)

r : هي المسافة المتجهة من القطب إلى النقطة P

θ : هي الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى المتجه $\overrightarrow{OP}$

θ موجبة إذا كانت في عكس اتجاه عقارب الساعة

θ سالبة إذا كانت مع اتجاه عقارب الساعة.

r موجبة إذا كانت تقع P على ضلع الانتهاء.

r سالبة إذا كانت P تقع على امتداد ضلع الانتهاء.

- المعادلة القطبية هي معادلة معطاه بالإحداثيات القطبية.

مثال $r = 5$ وهي تمثل بيانياً بدائرة طول نصف قطرها 5

$\theta = 40°$ وهي تمثل بيانياً بخط مستقيم يميل عن المحور القطبي بزاوية $40°$

- البعد بين نقطتين في المستوى القطبي

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

- التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية

$x = r \cos \theta$ $\qquad$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r \sin \theta$ $\qquad$ $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ إذا كانت x موجبة

$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi$ إذا كانت x سالبة

Step By Step Q

- العدد المركب بالصوره الديكارتية والقطبية

الصوره الديكارتية $a+bi$

الصوره القطبية بالنقطه (a,b)

- القيمة المطلقه للعدد المركب $|Z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=r$

- سعه العدد المركب θ

إذا كان a موجبة $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$

إذا كان a سالبة $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}+\pi$

- نظرية ديموافر

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$$

- الجذور النونية للعدد المركب $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ تعطى بالصيغه

المقياس $\rightarrow$ $$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

السعة $\rightarrow$ $\frac{\theta}{n}$ $\quad k=0,1,2,\dots,n-1$

Step By Step Q

الاحتمالات والإحصاء

- الدراسة المسحية جمع البيانات عن الأشياء أو الظواهر دون التعديل فيها
- الدراسة التجريبية يتم التقسيم الى مجموعتين مجموعة تجريبية وهي المجموعة التي تخضع للمعالجة مجموعة ضابطة وهي المجموعة التي لا تخضع للمعالجة

ويتم ملاحظة الاستجابات بين المجموعتين التجريبية والضابطة.

- الدراسة بالملاحظة هي الملاحظة دون أي تأثير في النواتج.

- هامش الخطأ

$$\text{هامش الخطأ} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

n ← عدد العينة.

- مقاييس النزعة المركزية

$\frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عددهم}}$ الوسط (المتوسط) ويستعمل عندما لا تكون هناك قيم متطرفة.

ترتيب ثم حذف الوسيط يستعمل عندما تكون قيم متطرفة ولا توجد فراغات كبيرة

الأكثر تكرارًا المنوال يستعمل مع البيانات التي فيها قيم تتكرر كثيرًا.

مقاييس التشتت

التباين σ^2 وهو يقيس مدى تباعد مجموعة البيانات من الوسط .

الانحراف المعياري σ الجذر التربيعي للتباين .

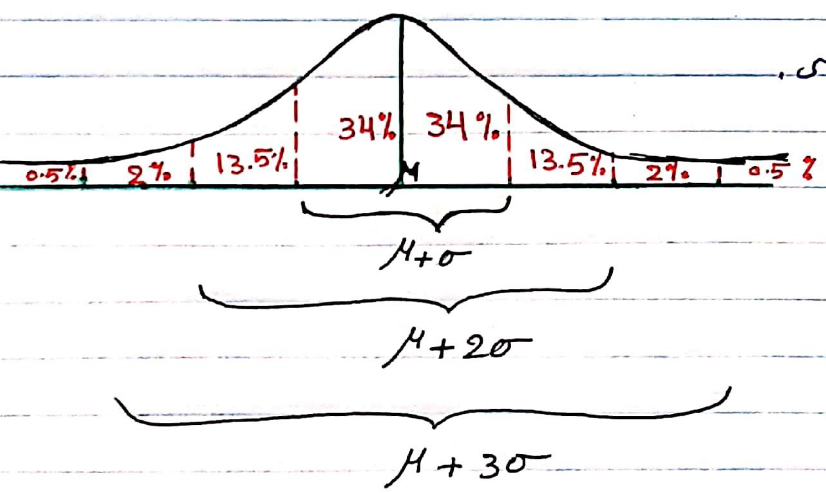
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n}}$$

- احتمال النجاح والفشل لحادثة ما .

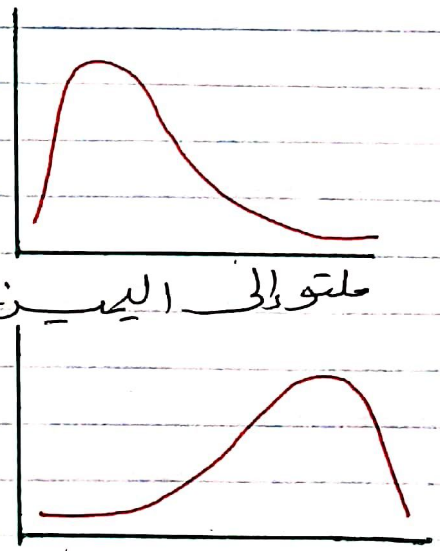
$$P(S) = \frac{s}{s+f} \qquad P(F) = \frac{f}{s+f}$$

عدد مرات النجاح . s عدد مرات الفشل f

- التوزيع الطبيعي والملتوي . المنحنى جرسي .



توزيع طبيعي .



توزيعات ذات الحدين

$$P(X=x) = {}_nC_x \, p^x \, q^{n-x}$$

p . احتمال النجاح

q . احتمال الفشل

$$p + q = 100\%$$

- الوسط لتوزيع ذات الحدين

$$\mu = np$$

- التباين لتوزيع ذات الحدين

$$\sigma^2 = npq$$

النهايات والاشتقاق والتكامل

• النهاية عند نقطة

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

$$\therefore \lim_{x \to c} f(x) = L$$

ملاحظة: إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

فإن $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

• النهايات والاتصال. تكون الدالة متصلة إذا تحقق الشروط الآتية.

$$\circledast \quad f(x)\Big|_{x=a} = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

① الدالة موجودة ولها قيمة.

② النهاية من الناحية اليمنى = النهاية من الناحية اليسرى.

③ الشرط الأول = الشرط الثاني.

• أنواع عدم الاتصال.

(أ) لانهائي (ب) قفزي (ج) قابل للإزالة.

حساب النهايات جبرياً

① $\lim\limits_{x\to c} k = k$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$

② $\lim\limits_{x\to c} x = c$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$

حيث يتم التعويض عن كل x بالقيمة المعطاه.

$$\lim_{x\to 0} 2x+3 = 2(0)+3 = 0+3 = 3$$

ولكن في بعض النهايات يكون الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ومن هذه الحالة نقوم بتحليل البسط والمقام لكي نتخلص من العامل الصفري.

مثال

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4.$$

النهايات عندما $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} x^2+3x+4 = \infty^2+3\infty+4$$
$$= \infty+\infty+4$$
$$= \infty$$

ولكن عندما يكون هناك بسط ومقام لها ثلاث حالات

أ) درجة البسط > درجة المقام يكون الناتج مباشرةً ∞

ب) درجة البسط < درجة المقام يكون الناتج مباشرةً صفر

ج) درجة البسط = درجة المقام يكون الناتج $\frac{\text{معامل الرئيس للبسط}}{\text{معامل الرئيس للمقام}}$

• القواعد الأساسية في الاشتقاق

	الدالة	مشتقتها
	$f(x)$	$f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d}{dx}$ ، y' ، f' ، $\frac{df}{dx}$
الدالة الثابتة	$f(x) = k$	$f'(x) =$ صفر
دالة القوة	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
	$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
	$f(x) = ax^n$	$f'(x) = an\,x^{n-1}$

حاصل ضرب دالتين $f(x) =$ (الدالة الأولى) × (الدالة الثانية)

$f'(x) =$ الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى

قسمة دالتين $f(x) = \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$

$$f'(x) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

الدالة المرفوعة للقوة n $f(x) = (\text{دالة})^n$

$f'(x) = n\,(\text{الدالة})^{n-1} \times \text{مشتقة الدالة}$

الدوال الأصلية وقواعد التكامل.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- $\int a\,dx = ax + C$
- $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int k x^n\,dx = \frac{k\,x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int g(x) \pm h(x)\,dx = \int g(x)\,dx \pm \int h(x)\,dx$

التكامل المحدد

وهو المساحة تحت المنحنى

$$\int_a^b f(x) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

نهاية الملخص