ع- التكميلي

متتاليات ونهاية متتالية:

السؤال الأول:

اثبت بالتدريج صحة مايلي أياً كان العدد الطبيعي n يحقق الشرط المعطى:

1. $3^n \geq (n+2)^2$: $n \geq 3$
2. $3n^2 \geq (n+1)^2$: $n \geq 2$
3. $n! \geq 2^{n-1}$: $n \geq 1$
4. $(1+x)^n \geq 1+nx$: $x > -1$

السؤال الثاني:

① اثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

② اثبت بالتدريج صحة العلاقة:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

أياً كانت $n \geq 1$.

③ استفد مما سبق لاستنتاج أن:

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

السؤال الثالث:

ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

1. $u_n = \frac{n}{10^n}$
2. $u_n = \frac{3}{n^2}$
3. $u_n = (n-5)^2$
4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
5. $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$

السؤال الرابع:

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق:

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n} \end{cases}$$

① تحقق أن $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n .

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $u_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.

③ استنتج عبارة v_n بدلالة n واحسب نهايتها.

السؤال الخامس:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{U_n + 1} \end{cases}$$

① اثبت أن $U_n > 0$ أياً يكن n.

② المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق: $t_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$. أثبت أن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها.

③ استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

السؤال السادس:

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $U_1 = -2$.

① احسب U_n بدلالة n

② احسب المجموع: $S_1 = U_2 + U_3 + \dots + U_7$

③ احسب المجموع بدلالة n:

$$S_2 = U_2 + U_4 + U_6 + \dots + U_{2n}$$

السؤال السابع:

احسب المجموع:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \dots + 10$$

السؤال الثامن:

c, b, a ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية.

احسبها اذا علمت:

$a+b+c = 28$ و $a.b.c = 512$

السؤال التاسع:

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$

نعلم أن a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، نرمز إلى أساسها بالرمز q.

كما نعلم أن $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية

احسب q.

السؤال العاشر:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = -U_n + 4 \end{cases}$$

احسب U_1, U_2, U_3, U_4, U_5

وخمن عبارة U_n بدلالة n

ثم حدد U_n بدلالة n.

السؤال الحادي عشر:

نتأمل متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 1 , U_1 = 4 \\ U_{n+1} = 5U_n - 6U_{n-1} & : n \geq 1 \end{cases}$$

① عين عددين حقيقين a و b يحققان:

$a+b=5$ و $a.b=6$

② لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية:

$$v_n = U_{n+1} - aU_n$$

أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها b.

③ لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية:

$$w_n = U_{n+1} - bU_n$$

أثبت أن $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها a.

④ عبر عن v_n و w_n بدلالة n.

ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

السؤال الثاني عشر:

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$

① اثبت أن $0 \leq U_n \leq 2$ أياً كان n.

② اثبت أن المتتالية متزايدة تماماً.

③ أهي متقاربة

السؤال الثالث عشر:

$(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 6} \end{cases}$$

① اثبت أن التابع $x \longmapsto \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن:

$\frac{1}{2} < U_n \leq 1$ أياً كان العدد n.

② اثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

③ أهي متقاربة

السؤال الرابع عشر:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2 \end{cases}$

① اثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن: $1 \leq U_n \leq 2$ أياً يكن $n \in \mathbb{N}$

② a اثبت أن $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$ أياً يكن $n \in \mathbb{N}$

b استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

③ أهي متقاربة.

السؤال الخامس عشر:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $1 \leq n$ وفق:

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

① اثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

② استنتج أن العدد 3 راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$

③ اثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

السؤال السادس عشر:

لتكن $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة:

$$U_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

① اثبت بالتدريج على العدد n أن $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

② استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على $(U_n)_{n\geq 1}$.

السؤال السابع عشر:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $1 \leq n$ وفق:

$$U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

① اثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② a اثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أياً يكن $1 \leq n$.

b ماذا يمكنك أن تستنتج بالنسبة إلى المتتالية.

السؤال الثامن عشر:

ليكن عند كل عدد طبيعي n:

$$U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

① أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n: $U_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$

② ليكن في حالة عدد طبيعي n:

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

السؤال التاسع عشر:

ليكن $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي n غير معدوم

وليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

السؤال العشرون:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

① اثبت أن $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

② اثبت أن $0 < U_n \leq 1$ أياً يكن n.

③ اثبت أنه اذا كان $n > 10^4$، كان $0 < U_n < 10^{-2}$

④ المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

استفد من عبارة U_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

السؤال الواحد والعشرون:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

① اثبت أن:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$ أياً يكن $n \geq 1$

② استنتج تقارب المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$.

ما نهايتها؟

السؤال الثاني والعشرون :

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق :

$$U_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots\dots - \frac{1}{2^n}$$

أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

السؤال الثالث والعشرون :

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n - 2 \end{cases}$$

$$y_n = x_n + 3 .$$

① a اثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية .

b احسب y_n ثم x_n بدلالة n .

② نضع :

$$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

و

$$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

a احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n .

b استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

السؤال الرابع والعشرون :

المتتالية $(U_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق :

$$U_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$$

اثبت انها محدودة من الاعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

السؤال الخامس والعشرون :

فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ في حال وجودها :

1. $U_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$

2. $U_n = \frac{2n! + (-1)^n}{3n!}$

3. $U_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$

4. $U_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$

السؤال السادس والعشرون:

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $U_n = \frac{2n-1}{n+1}$

والمطلوب:

① ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$.

② اثبت أن العدد (2) راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$

③ احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ، ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n>n_0$ كان U_n في المجال $]1.9 , 2.1[$

السؤال السابع والعشرون:

ليكن لدينا المتتاليات $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$

المعرفتان وفق:

$U_n = 5 - \frac{1}{n}$ ، $v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$

والمطلوب:

① اثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② اثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

③ هل المتتاليان $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان؟ علل اجابتك.

④ اذا كانت المتتاليان متجاورتان عين نهايتهما المشتركة.

السؤال السابع والعشرون:

بين اذا كانت المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$

المعرفتان وفق

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

و

$$y_n = x_n + \frac{1}{4n}$$

متجاورتان أم لا.

السؤال الثامن والعشرون:

نتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{2}{U_n} \end{cases}$$

① اثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2,+\infty[$.

② اثبت بالتدريج أن $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$ أياً كان العدد الطبيعي n.

③ استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها.