القسم الثاني: الجبر الخطي (Linear Algebra)

الفصل الخامس

الفضاءات الشعاعية (Vector Spaces)

مقدمة

إن منشأ الجبر الخطي يعود إلى النصف الثاني من القرن السابع عشر وذلك عند دراسة جمل المعادلات الخطية ومن أوائل الرياضيين الذين أسهموا في هذا المجال نذكر Leibintz ومن بعده العالم Maclaurin الذي أعطى العلاقات التي تسمح بحل جمل المعادلات الخطية بمجهولين وبثلاثة مجاهيل.

وأما دراسة الحالة العامة لجمل المعادلات الخطية فيعود الفضل في ذلك إلى العالم Cramer في النصف الثاني من القرن الثامن عشر.

نتيجة لهذه الدراسات نشأ مفهوم المحدد من المرتبة n ونذكر Vandermonde وLaplace الذين عملوا في هذا المجال وجاء بعد ذلك مفهوم المصفوفة على يد العالم Gauss.

إن تطور نظرية المصفوفات سمح في منتصف القرن التاسع عشر بظهور مفهوم الفضاء الشعاعي ذو n بعداً وأول من تحدث عن هذا المفهوم Cayley. وأما التعارف النهائية للفضاءات الشعاعية فقد وضعت من قبل العالم Peano في عام 1888.

1. الفضاءات الشعاعية (Vector Spaces)

تعريف

ليكن حقلاً K تبديلياً. E مجموعة مزودة بقانوني تشكيل الأول داخلي والثاني خارجي $K \times E \to E$ حيث $(\lambda.x) \to \lambda.x$. نقول أن البنية $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل التبديلي K إذا تحققت الشروط التالية:

1- $(E,+)$ زمرة تبديلية.

2- $\forall(\lambda,\mu)\in K^2, \forall(x,y)\in E^2$ فإن: (a)- $(\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.y$

(b)- $\lambda.(x+y)=\lambda.x+\mu.y$ (c)- $(\lambda\times\mu).x=\lambda.(\mu.x)$

3- $\forall x\in E;\ 1_K.x=x$

إن عناصر E تسمى بالأشعة (Vectors) وتسمى عناصر k بالمؤثرات السلمية (Scalars) أو اختصاراً سلميات.

نرمز بـ 0_E للعنصر الحيادي بالنسبة للقانون $(+)$ ويدعى بالشعاع الصفري.

أمثلة

1- إن الحقل $(K,+,\times)$ هو فضاء شعاعي على نفسه وذلك عندما نعرف القانون الخارجي $(.)$ بالشكل التالي: نضع $\lambda\in K$ و $x\in K$ و $\lambda.x=\lambda\times x$

2- إذا كان $K=\mathbb{R}$ و $E=\mathbb{R}^2$. نعرف جمع شعاعين بالشكل التالي:

$$\forall\quad x,y\in\mathbb{R}^2;\quad x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$$ فإن: $$x+y=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

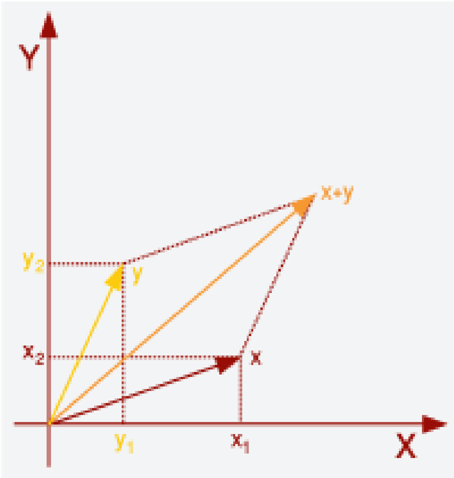
ونعرف ضرب شعاع بسلمي λ كما يلي:

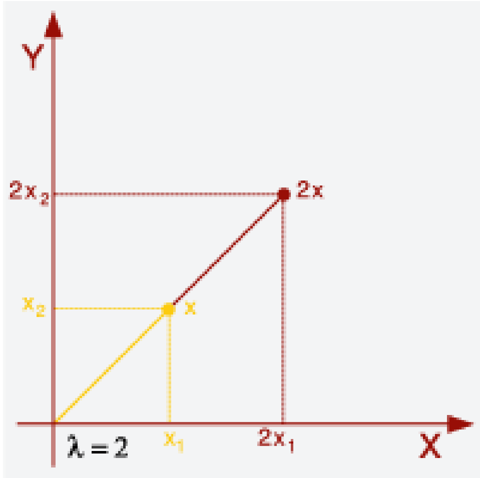
$$\forall\lambda\in\mathbb{R}, x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad \lambda.x=(\lambda x_1,\lambda x_2)$$

إن $(\mathbb{R}^2,+,.)$ هو فضاء شعاعي فوق الحقل $\mathbb{R}$.

يمثل الشعاع $x=(x_1,x_2)$ من $\mathbb{R}^2$ بسهم يبدأ من مركز الجملة الإحداثية $(0,0)$ ونهايته النقطة (x_1,x_2).

وجمع الشعاعين x,y نحصل عليه برسم متوازي مستطيلات أضلاعه x و y ويكون $x+y$ هو القطر الذي يبدأ في النقطة $(0,0)$ وهو ما يمثل بالشكل المجاور وأما الشعاع λx فهو شعاع منطبق على x وإحداثياته $(\lambda x_1,\lambda x_2)$.





تعريف

الجبر Algebra: ليكن K حقلاً تبديلياً. نُسمي **جبراً** على الحقل K. كل بنية جبرية $(E,+,\times,.)$ تحقق الشروط التالية:

1- البنية $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K.

2- البنية $(E,+,\times)$ حلقة.

3- $\forall \quad a \in K, \forall (x,y) \in E^2; \quad (a.x)\times y = a.(x \times y)$

قواعد الحساب في الفضاءات الشعاعية

مبرهنة (1)

ليكن $(E,+,.)$ فضاءً شعاعياً معرفاً على الحقل K وليكن $(x,y) \in E^2, (\lambda,\mu) \in K^2$. عندئذ الخواص التالية محققة:

1- $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$ و $\lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y$

2- $0_k.x = 0_E$ و $\lambda.0_E = 0_E$

3- $(-\lambda).x = -(\lambda.x) = \lambda.(-x)$

4- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0_K) \vee (x = 0_E)$

الإثبات:

1- إن

$$(\lambda-\mu).x+\mu.x=(\lambda-\mu+\mu).x$$
$$=(\lambda+0_K).x=\lambda.x$$

وذلك باستخدام خواص الفضاء الشعاعي. نقوم بتشكيل الطرفين أعلاه مع $\lambda.x$ فنحصل على:

$$(\lambda-\mu).x+\mu.x=\lambda.x=\lambda.x-\lambda x=0_E$$
$$\Rightarrow(\lambda-\mu).x+\mu.x-\lambda.x=0_E$$
$$\Rightarrow(\lambda-\mu).x+\mu.x-\lambda.x+\lambda.x=0_E+\lambda.x$$
$$\Rightarrow(\lambda-\mu).x+\mu.x=\lambda.x$$
$$\Rightarrow(\lambda-\mu).x+\mu.x-\mu.x=\lambda.x-\mu.x$$
$$\Rightarrow(\lambda-\mu).x+0_E=\lambda x-\mu.x$$
$$\Rightarrow(\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x$$

بنفس الطريقة نثبت أن $\lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y$

2- بالاعتماد على الخاصة الأولى. لدينا: $0_K.x=(\lambda-\lambda).x=\lambda.x-\lambda.x=0_E$

وبنفس الأسلوب نثبت أن $\lambda.0_E=0_E$

3- مباشرة بالاعتماد على تعريف الفضاء الشعاعي والخواص أعلاه.

4- $\lambda.x=0_E\Leftrightarrow\lambda.x=0_K.x\Leftrightarrow\lambda=0_K$

أو $\lambda.x=\lambda.0_E\Leftrightarrow x=0_E$

مبرهنة (2): فضاءات الجداء الشعاعية Product Spaces

ليكن K حقلاً تبديلياً وليكن $E_1,E_2,\dots,E_n$ فضاءات شعاعيه على الحقل K. لنعرف على $E=E_1\times\dots\times E_n$ القانونين $(+)$ و $(.)$ كما يلي:

$$\forall\lambda\in K,\quad\forall(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in E\ ;\ (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n),$$

$$\lambda.(x_1,\dots,x_n)=(\lambda.x_1,\dots,\lambda.x_n)$$

عندئذ $(E,+,.)$ هو فضاء شعاعي ويسمى فضاء الجداء والعنصر الحيادي فيه بالنسبة للجمع هو $(0_{E_1},0_{E_2},\dots,0_{E_n})$.

الإثبات:

1- بسهولة تستطيع أن تُثبت أن $(E,+)$ هي زمرة تبديلية.

2- $\forall(\lambda,\mu)\in K^2,\forall(x,y)\in E^2$ حيث $x=(x_1,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ فإن:

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu).x &=\left((\lambda+\mu).x_1,\ldots,(\lambda+\mu).x_n\right)\\ &=\left(\lambda.x_1+\mu.x_1,\ldots,\lambda.x_n+\mu.x_n\right)\\ &=\lambda.x+\mu.x\end{aligned}$$

وبنفس الأسلوب نثبت أن $\lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$ و $(\lambda\mu).x=\lambda.(\mu.x)$ وكذلك:

$$\begin{aligned}&1_K.x=1_K.(x_1,\ldots,x_n)=(1_K.x_1,\ldots,1_K.x_n)=(x_1,\ldots,x_n)\\ &\Rightarrow 1_K.x=x;\quad x\in E=E_1\times E_2\times\ldots\times E_n\end{aligned}$$

مبرهنة (3): فضاءات التوابع

لتكن A مجموعة ما وليكن E فضاء شعاعياً معرفاً فوق الحقل K ولنرمز بـ $\mathcal{F}(A,E)$ إلى مجموعة كل التوابع من A في E.

لنعرف على المجموعة $\mathcal{F}(A,E)$ القانونين التاليين:

$$\begin{aligned}\forall f,g\in\mathcal{F}(A,E);f+g&:A\to A\\ &:x\to f(x)+g(x)\end{aligned}$$

ونعرف ضرب تابع بسلمي كما يلي:

$$\begin{aligned}\forall f\in\mathcal{F}(A,E),\forall\lambda\in K;\lambda f&:A\to E\\ &:x\to\lambda.f(x)\end{aligned}$$

عندئذ البنية $(\mathcal{F}(A,E),+,.)$ هي فضاء شعاعي على الحقل K.

ملاحظة:

من الآن فصاعداً سنكتب λx بدلاً من $\lambda.x$ ما لم يذكر خلاف ذلك.

2. الفضاءات الشعاعية الجزئية (Vector Subspaces)

تعريف التراكيب الخطية (Linear Combinations)

ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K. نسمي جملة أشعة من E، الجماعة $S=(x_1,\dots,x_n)$ والتي عناصرها عبارة عن أشعة من E. نسمي كل عنصر من E من النمط $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i xi=\lambda_1 x_1+\dots,\lambda_n x_n$ تركيب خطي بالجملة S حيث $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in K^n$.

تعريف

ليكن $(E,+,.)$ فضاءً شعاعياً على الحقل K ولتكن $F\subset E$ مجموعة جزئية من E. نقول أن F فضاء شعاعي جزئي من E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1- $0_E\in F$.

2- $\forall(x,y)\in F^2,\forall(\lambda,\mu)\in K^2;\quad \lambda x+\mu y\in F$

(أي F ثابت بالنسبة للتراكيب الخطية).

تعريف (Sub-algebra)

ليكن $(E,+,\times,\bullet)$ جبراً على الحقل K ولتكن $F\subset E$ مجموعة جزئية من E. نقول أن F جبر جزئي من E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1- $0_E\in F, 1_E\in F$.

2- $\forall(x,y)\in F^2,\forall(\lambda,\mu)\in K^2;\quad \lambda x+\mu y\in F$

3- $\forall(x,y)\in F^2; x\times y\in F$

أمثلة

1- إذا كان $(E,+,.)$ فضاء شعاعياً على الحقل K فإن كل من E و$\{O_E\}$ هي فضاءات شعاعية جزئية من E وتسمى بالفضاءات التافهة.

2- إذا كان K حقلاً تبديلياً وليكن $K[x]$ مجموعة كثيرات الحدود بمتحول واحد x والتي أمثالها هي عناصر من الحقل K. إن $K[x]$ بالنسبة إلى قانون جمع كثيرات الحدود وضربها بسلمي $\lambda\in K$ هو فضاء شعاعي والمجموعة $K_n[x]=\{P(x)\in K[x];\deg P\le n\}$ هي فضاء شعاعي جزئي من $K[x]$.

نتيجة هامة (1)

إن أي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $(E,+,.)$ هو فضاء شعاعي أيضاً.

مبرهنة (4)

لتكن $(F_i)_{i\in I}$ جماعة من الفضاءات الجزئية من الفضاء الشعاعي $(E,+,.)$ على الحقل K عندئذ $F=\bigcap_{i\in I} F_i$ هو فضاء شعاعي جزئي من E.

الإثبات:

- $\forall i\in I$ فإن $0_E\in F_i$ لأن F_i فضاء جزئي من E ومنه $0_E\in\bigcap_{i\in I} F_i=F$.
- بما أن $F_i\,;i\in I$ هو فضاء شعاعي جزئي من E فإن:

$$\forall(x,y)\in F_i^2 \quad \& \quad \forall(\lambda,\mu)\in K^2;\quad \lambda x+\mu y\in F_i\,;i\in I$$

عندئذ $\lambda x+\mu y\in\bigcap_{i\in I} F_i=F$ ومنه $F=\bigcap_{i\in I} F_i$ هو فضاء جزئي من الفضاء الشعاعي $(E,+,.)$.

مبرهنة (5)

ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K. ولتكن الجملة $S=(x_1,\ldots,x_n)$ من عناصر E. عندئذ مجموعة كل التراكيب الخطية بالجملة S هي فضاء شعاعي جزئي من E.

3. أساس الفضاء الشعاعي (Basic of Vector Space)

تعريف

نقول أن الجملة S مُولدة للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا كان كل عنصر من E يكتب كتركيب خطي بالجملة S أي:

$$S \text{ جملة مولدة } \Leftrightarrow \forall x\in E;\quad \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in k^n; x=\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n$$

ونرمز لذلك بـ $E=vect(S)$.

لتثبت أن جملة ما هي جملة مُولدة، اتبع الخطوات التالية:

1- خذ عنصر كيفي من E وليكن $x \in E$.

2- ضع $\lambda_1 = \ldots, \ldots, \lambda_n = \ldots$

3- ومن ثم بين أن $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in E$

مثال

في الفضاء $\mathbb{R}^2$ بين أن الأشعة التالية: $x_1 = (1,1),\ x_2 = (2,3) \quad et\ x_3 = (2,2)$

هي جملة مولدة لـ $\mathbb{R}^2$.

الحل:

ليكن $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$، لاحظ أن أي تركيب خطي من الأشعة الثلاثة المعطاة يكتب كما يلي:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3; \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

وبالتالي نجد أن أي شعاع $v \in \mathbb{R}^2$ يمكن أن يكن كتركيب خطي بواسطة الجملة $S = (x_1, x_2, x_3)$ وذلك بحل جملة المعادلات.

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= v_1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= v_2 \end{aligned}$$

وهذه الجملة لها عدد لا نهائي من الحلول في $\mathbb{R}$. إذن S هي جملة مولدة.

تعريف الجملة الحرة (Linearly independent system)

نقول أن الجملة $S = (x_1, \ldots, x_n)$ من عناصر E. نقول أن S هي جملة حرة (مستقلة خطياً) إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n; \quad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0_K$$

وإلا نقول أن الجملة S مرتبطة خطياً (Linearly dependent).

مبرهنة (6): خواص الجمل المرتبطة

لتكن $S = (x_1, \ldots, x_n)$ جملة من عناصر E. عندئذ:

a- إذا كان أحد عناصر هذه الجملة هو الشعاع الصفري 0_E فإن S مرتبطة خطياً.

b- إذا كان في الجملة شعاع مكرر أكثر من مرة فإن S مرتبطة خطياً.

c- إذا كانت الجملة مرتبطة فإن أي شعاع من هذه الجملة يكتب كتركيب خطي ببقية العناصر أو الأشعة الأخرى في S:

$$\forall i \in N_n; \quad \exists (\lambda_1,\dots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\dots,\lambda_n) \in K^{n-1}; \quad x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j x_j ,$$

مثال

الجملة $S = (x_1, x_2, x_3)$ حيث $x_1 = (1,0,2), \quad x_2 = x_3 = (1,1,1)$ هي جملة مرتبطة لأنه من أجل $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ نحصل على $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$.

تعريف الأساس (Basis)

نقول عن جملة الأشعة $S = (x_1, \dots, x_n)$ أنها تشكل أساس للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا كانت:

1- الجملة حرة.

2- الجملة مُولِدة.

نتيجة(2)

أن تكون S أساس للفضاء الشعاعي E فهذا يعني أن كل شعاع من E يكتب كتركيب خطي وبشكل وحيد بالجملة S.

الإثبات:

لنفرض أنه يوجد شعاع x يكتب كناتج لتركيبين خطيين بالجملة $S = (x_1, \dots, x_n)$ أي أن:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$
$$x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$$

عندئذ $0_E = x - x = (\lambda_1 - \mu_1) x_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) x_n$ وحسب المبرهنة (1) فإن:

$\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0_K$ وبالتالي $\lambda_n = \mu_n, \dots, \lambda_1 = \mu_1$.

مثال

إن الجملة $S=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ حيث $e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,\dots,0),\dots,e_n=(0,0,\dots,0,1)$ تسمى بالأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^n$.

مثال

أثبت أن الجملة $S=(e_1,e_2,e_3)$ حيث $e_1=(1,0,1),\ e_2=(1,-1,1)$ و $e_3=(0,1,1)$ هي أساس الفضاء $\mathbb{R}^3$.

الحل:

الجملة مستقلة خطياً أي حرة لأن: $\forall\quad(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3;\quad \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3=0_{\mathbb{R}^3}$

فإن $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,-\lambda_2+\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)$ عندئذ نستنتج أن:

$$\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\&-\lambda_2+\lambda_3=0\\&\lambda_2+\lambda_3=0\end{aligned}$$

بالحل المشترك لهذه الجملة من المعادلات نجد أن $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

$\forall\, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^5$ فإن S تكون مولدة إذا استطعنا كتابة x كتركيب خطي بعناصر S أي إذا وجدنا $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ بحيث يكون $x=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3$. عندئذ :

$$(x_1,x_2,x_3)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,-\lambda_2+\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3)$$

و بالتالي نحصل على جملة المعادلات التالية

$$\begin{aligned}&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=x_1 &(1)\\&-\lambda_2+\lambda_3=x_2 &(2)\\&\lambda_2+\lambda_3=x_3 &(3)\end{aligned}$$

بالحل المشترك نجد أن $\lambda_1=x_1-x_3$ و ذلك بتعويض (3) في (1) و بطرح (2) من (3) نجد أن $\lambda_2=\frac{x_3-x_2}{2}$ و أخيراً بجمع (2) و (3) نحصل على $\lambda_1=\frac{x_3+x_2}{2}$.

ملاحظة

إذا كان E فضاء شعاعي أساسه $e=(e_1,\dots,e_n)$ فإن أي شعاع $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$ يكتب حسب الملاحظة السابقة على شكل تركيب خطي $x=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n;\quad (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n$

نسمي $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ المركبات السلمية لـ x أو إحداثيات x.

4. بُعد فضاء شعاعي (Dimension of vector space)

الهدف الأساسي من هذا الفقرة هو إثبات أن أي إذا كان للفضاء الشعاعي E أكثر من أساس فهذه الأسس لها نفس عدد العناصر.

مبرهنة (8)

لتكن $S(x_1,\dots,x_n)$ جملة مولدة للفضاء الشعاعي E. ولتكن $S_1=(x_1,\dots,x_n)$ أكبر مجموعة جزئية من S عناصرها مستقلة خطياً عندئذ S_1 أساس للفضاء E.

الإثبات:

إن الجملة S_1 حرة ولنثبت أنها مولدة للفضاء الشعاعي. لتكن $x_i\in S$ حيث $i>r$. بما أن S_1 هي أكبر مجموعة حرة ضمن S إذن من أجل x_i يوجد السلميات $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r,\mu$ والتي ليست جميعها معدومة بحيث يكون $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_r x_r+\mu x_i=0$ يجب أن يكون $\mu\neq 0$ وإلا حصلنا على أن الجملة S_1 مرتبطة وهو ما يناقض الفرض. إذن:

$$x_i=-\mu^{-1}\lambda_1 x_1-\mu^{-1}\lambda_2 x_2-\cdots-\mu^{-1}\lambda_r x_r$$

إذن x_i حيث $i>r$ يكتب كتركيب خطي بعناصر الجملة S. لنفرض حالياً أن x هو عنصر كيفي من الفضاء E. بما أن S جملة مولدة فإن $x=\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\cdots+\mu_n x_n$ أثبتنا أن $x_{r+1},\dots,x_n$ تكتب كتراكيب خطية بالجملة S_1 عندئذ بتعويض كل $(i>r)x_i$ بالتركيب الخطي الموافق نجد أن x نفسه يكتب كتركيب خطي بالجملة S_1 ومنه S_1 مولدة لـ E وهي حرة بالفرض إذن S_1 أساس للفضاء E.

مبرهنة (9)

ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي فوق الحقل التبديلي K ولتكن $S=(e_1,\dots,e_n)$ جماعة من عناصر E. عندئذ الخواص التالية متكافئة:

1- الجماعة S أساس لـ E.

2- S هي أصغر جماعة مولدة لـ E.

3- S هي حرة أعظمية.

الإثبات:

$1 \Leftarrow 3$ إن الجماعة هي أساس لـ E إذن هي مولدة ومستقلة خطياً (حرة). إذا لم تكن S حرة أعظمية إذن يوجد $e_{n+1}\in E$ بحيث تكون $(e_1,e_2,\dots,e_{n+1})$ وبما أن S تولد الفضاء الشعاعي E إذن: $e_{n+1}=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$

حيث الأمثال $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ ليست كلها معدومة. وهذا يتناقض مع كون $(e_1,\dots,e_{n+1})$ حرة.

$3 \Leftarrow 2$: إن S حرة أعظمية. وليكن $x\in E$ عندئذ الجملة $(e_1,\dots,e_n,x)$ مرتبطة خطياً إذن يوجد $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1})\in K^{n+1}$ ليست جميعها معدومة بحيث يكون $\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n+\lambda_{n+1}x=0$. إن $0\neq\lambda_{n+1}$ لأن كون $\lambda_{n+1}=0$ يتناقض مع الفرض أن S حرة وبالتالي يمكن القسمة على λ_{n+1} و x يكتب كتركيب خطي بعناصر S و بالتلي هي أصغرية.

$2 \Leftarrow 1$: إذا لم تكن الجملة S حرة فهي مرتبطة وبالتالي يوجد $e_i\in S$ حيث $i=1,\dots,n$ الذي يكتب كتركيب خطي من عناصر $S_1=S\setminus\{e_i\}$ ومنه S_1 مولدة وهذا يتناقض مع الفرض أن S هي أصغر جملة مُولدة .

نتيجة (3)

إذا كانت الجملة $S=(e_1,\dots,e_n)$ قاعدة للفضاء E فوق الحقل K عندئذ أي جملة أخرى $S'=(e'_1,\dots,e'_m)$ حيث $m>n$ هي جملة مرتبطة خطياً.

مبرهنة (10)

ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي فوق الحقل K. لتكن $S=(e_1,\dots,e_n)$ أساس للفضاء E وعدد عناصرها هو n عندئذ أي أساس آخر لهذا الفضاء يحوي n عنصراً (شعاعاً).

الإثبات:

تطبيق مباشر للمبرهنة (8) والنتيجة (3).

تعريف بُعد فضاء شعاعي

ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي فوق الحقل K. نقول أن E منتهي البعد إذا وفقط إذا وجدت فيه جملة مولدة منتهية.

إذا كانت S أساس لـ E نسمي $n=card(S)$ بُعد الفضاء الشُعاعي E ونرمز لذلك بـ $\dim E=n$.

مثال

- إن الفضاء $E=\mathbb{R}^n$ فوق الحقل $K=\mathbb{R}$ هو فضاء ذو n بعد لأن الجملة $S=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ حيث $e_1=(1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,0,\dots,1)$ تشكل أساساً للفضاء $\mathbb{R}^n$.
- بشكل عام إذا كان $E=K^n$ فإن K^n هو فضاء شعاعي فوق الحقل K ذو n بعد أساسه مكون من الأشعة التالية $(1_K,0_K,\dots,0_K),(0_K,1_K,\dots,0_K),\dots,(0_K,0_K,\dots,1_K)$.

ملاحظة

إذا لم يكن الفضاء منتهي البعد أي $\dim E=\infty$ فإننا نقول أن الفضاء لا نهائي البعد. وستقتصر في دراستنا على الفضاءات منتهية البعد.

مبرهنة (11)

ليكن E فضاء ذو n بعد. عندئذ أي جملة حرة عدد عناصرها n تشكل أساساً للفضاء E.

الإثبات:

بالاعتماد على المبرهنة 9 والنتيجة (3) نجد أن أي جملة حرة بعدها n هـي جملـة حـرة أعظمية إذن هي قاعدة.

نتيجة (4)

إذا كان $(E,+,.)$ فضاء شعاعي ذو n ـ بعداً و F فضاء شعاعي جزئي من E عندئذ:

1- F منتهي البعد و $\dim F \le \dim E$

2- $(E = F) \Leftrightarrow \dim F = \dim E$

نتيجة (5)

إذا كان E فضاء شعاعياً ذو n ـ بعداً ولتكن $L = (e_1, \dots, e_p)$ جملة حرة. عندئذٍ نستطيع تمديد هذه الجملة إلى أساس للفضاء الشعاعي أي نستطيع إيجاد جملة $e = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ تشكل أساساً لـ E.

ملاحظة

إن النتيجة (4) تستخدم لإثبات إن فضائين شعاعيين جزئيين F و G من E متساويين:

$F \subset G \quad and \quad \dim F = \dim G \Rightarrow F = G$.

5. المجموع المباشر والفضاءات المتتامة (Direct Sum and additional Spaces)

تعريف

ليكن E فضاءً شعاعياً فوق الحقل K ولتكن $F_1, \dots, F_n$ جماعة من الفضاءات الجزئية من E. نسمي المجموعة $F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n; \quad x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n\}$ مجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية (Sum of vector Subspaces).

مبرهنة (12)

إن $F_1 + \dots + F_n$ هو فضاء شعاعي جزئي من E حيث $F_1 + \dots + F_n = vect(F_1 \cup \dots \cup F_n)$

تعريف المجموع المباشر

ليكن F_1, F_2 فضائين شعاعيين جزئيين من E. نقول أن المجموع $F_1 + F_2$ هو مجموع مباشر إذا وفقط إذا كان $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ ونكتب $F = F_1 \oplus F_2$

ملاحظة

إن أي عنصر $x \in F$ يكتب بشكل وحيد كمجموع عنصرين $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$.

تعريف الفضاءات المتتامة

نقول أن الفضائين الشعاعيين الجزئيين F_1, F_2 متتامين إذا وفقط إذا كان $E = F_1 \oplus F_2$

ملاحظة

F_1 و F_2 متتامين فهذا يعني أن كل عنصر من الفضاء E يكتب بشكل وحيد بالشكل التالي $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$.

مبرهنة (13)

ليكن E فضاءً شعاعياً وليكن E_1, E_2 فضائين جزئيين من E بحيث $E = E_1 \oplus E_2$ عندئذٍ إذا كانت $(e_1, \ldots, e_p)$ أساس لـ E_1 و $(f_1, \ldots, f_a)$ أساس لـ E_2 فـإن $S = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_a)$ تشكل أساساً لـ E .

الإثبات:

بما أن $E = E_1 \oplus E_2$ فإن $\forall \quad x \in E; \quad x = x_1 + x_2; \quad (x_1 \in E_1) \wedge (x_2 \in E_2)$

إن $(e_1, \ldots, e_p)$ قاعدة لـ E_1 عندئذ $x_1 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$ وبنفس الشكل نجد أن $x_2 = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_q e_q$ حيث $(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in K^q$ وبالتالي $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_a f_a$ إلى أن S هي جملة مولدة وبسهولة نثبت أنها حرة وبالتالي هي أساس لـ E .

نتيجة (4)

إذا كان $E = E_1 \oplus E_2$ فإن $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$

الإثبات: ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة.

مبرهنة (14)

إذا كان فضاء شعاعياً منتهي البعد و F فضاء جزئياً منه عندئذٍ يوجد فضاء جزئي من E وليكن G حيث $E = F \oplus G$.

الإثبات:

إذا كانت $(e_1, \ldots, e_n)$ أساساً لـ F عندئذٍ يمكننا بناءً على النتيجة 3 أن نجد $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ في E بحيث تكون: $e = (e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ أساساً لـ E ولنعرف $G = vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ حسب المبرهنة (13) يكون $E = F \oplus G$.

6. التطبيقات الخطية

ليكن E, F فضائين شعاعيين فوق الحقل K وليكن $u : E \to F$ تطبيقاً. نقول أن هو تطبيق خطي إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall (x, y) \in E^2; \quad \forall (\lambda, \mu) \in K^2; \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

ملاحظة

إذا كان لدينا u تطبيقاً خطياً من الفضاء المنتهي الذي أساسه $e = (e_1, \ldots, e_n)$ فإننا نستطيع معرفة شكل التطبيق u إذا كنا نعلم صورة أشعة الأساس e بواسطة u.

مثال

ليكن لدينا التطبيق $\varphi : \begin{cases} C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \to \int_0^1 f(x)dx \end{cases}$ بين أن φ هو تطبيق خطي. إن $C([0,1], \mathbb{R})$ هي مجموعة التوابع المستمرة والقابلة للاشتقاق مرة واحدة على المجال $[0,1]$ ونأخذ قيمتها في $\mathbb{R}$.

الحل:

إن $C([0,1], \mathbb{R})$ هو فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ (تحقق من ذلك). و $\mathbb{R}$ هو فضاء شـعاعي على $\mathbb{R}$.

ليكن $f, g \in C([0,1], \mathbb{R})$ and $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2;$ عندئذ :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+\mu g)&=\int_0^1(\lambda f+\mu g)(x)dx\\&=\lambda\int_0^1 f(x)dx+\mu\int_0^1 g(x)dx\\&=\lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)\end{aligned}$$

و ذلك بتطبيق خواص التكامل إذن φ هو تطبيق خطي.

مبرهنة (15)

ليكن $u:E\to F$ تطبيقاً خطياً وليكن V فضاء جزئي من E و W فضاء جزئـي مـن F عندئذٍ:

1- $u^{-1}(W)$ هي فضاء جزئي من E.

2- $u(V)$ هي فضاء جزئي من F.

الإثبات:

1- إذا كان x_1,x_2 عنصرين من $u^{-1}(W)$. عندئذٍ $\forall(\lambda,\mu)\in K^2$ فإن $u(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda u(x_1)+\mu u(x_2)\in W$ وبالتالي $\lambda x_1+\mu x_1\in u^{-1}(w)$.

2- إذا كان y_1,y_2 عنصرين من $u(V)$ عندئذٍ يوجد $x_1,x_2\in V$ بحيث يكون $y_1=u(x_1),y_2=u(x_2)$ وبالتالي $\forall(\lambda,\mu)\in K^2$ فإن:

$$\lambda y_1+\mu y_2=\lambda u(x_1)+\mu u(x_2)=u(\lambda x_1+\mu x_2)\in u(V)$$

لأن u تطبيق خطي إذن $u(V)$ هو فضاء شعاعي جزئي من F.

تعريف

ليكن $u:E\to F$ تطبيقاً خطياً. عندئذٍ نسمي:

1- نواة u المجموعة $\ker(u)=\{x\in E;\ \ u(x)=0_F\}=u^{-1}(\{0_F\})$

2- صورة u المجموعة $\operatorname{Im}(u)=\{y\in F;\ \ \exists x\in E, u(x)=y\}=u(E)$

ملاحظة

$\ker(u)$ و $\operatorname{Im}(u)$ فضائين جزئيين من E و F على الترتيب (أثبت ذلك).

خواص التطبيقات الخطية

مبرهنة (16)

ليكن $u:E\to F$ تطبيقاً خطياً عندئذٍ:

1- u متباين $\Leftrightarrow \ker(u)=\{0_E\}$

2- u غامر $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(u)=F$

3- إذا كان u تقابلاً فإن التقابل العكسي هو أيضاً تطبيق خطي.

الإثبات:

1- u متباين وبالتالي

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in E^2;u(x)=u(y);x=y\\ &\Leftrightarrow u\left(x-y\right)=0_F\\ &\Leftrightarrow x-y=0_E\in Ker(u)\\ &\Leftrightarrow \ker(u)=\left(0_E\right)\end{aligned}$$

2- u غامر $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(u)=F \Leftrightarrow \forall y\in F;\exists x\in F;y=u(x)$

3- u تقابل $u^{-1}:F\to E$ هو أيضاً تقابل إذن $\forall y_1,y_2\in F$ فإن $\exists!(x_1,x_2)\in E^2$ بحيث يكون $y_2=u(x_2),y_1=u(x_1)$ أي $x_1=u^{-1}(y_1),x_2=u^{-1}(y_2)$. ليكن $(\lambda,\mu)\in K^2$ عندئذٍ:

$$\begin{aligned}u^{-1}\left(\lambda y_1+\mu y_2\right)&=u^{-1}\left(\lambda u(x_1)+\mu u(x_2)\right)\\ &=u^{-1}\left(u\left(\lambda x_1+\mu x_2\right)\right)\\ &=\lambda x_1+\mu x_2\\ &=\lambda u^{-1}(y_1)+\mu u^{-1}(y_2)\end{aligned}$$

إذن u^{-1} هو أيضاً تطبيق خطي.

مثال

ليكن E فضاء التوابع القابلة للاشتقاق من المرتبة ∞ فوق $\mathbb{R}$ وليكن $D:E\to F;f\to f'$ بين أن D تطبيق خطي وحدد $\ker(D)$.

الحل:

$\forall (f,g)\in E^2, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}$ فإن $D(\lambda f+\mu g)=(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$ وذلـك بتطبيـق خواص المشتق.

إذن $D(\lambda f+\mu g)=\lambda D(f)+\mu D(g)$ أي D هو تطبيق خطي.

إن نواة هي المجموعة $\ker(D)$ حيث

$$\begin{aligned}\ker(D)&=\{f\in E; D(f)=0\}\\&=\{f\in E;\quad f`=0\}\\&=\{f\in E;\quad f=c\}\end{aligned}$$

c هو ثابت من $\mathbb{R}$ إذن نواة التطبيق D هي مجموعة التوابع الثابتة على $\mathbb{R}$.

ملاحظة:

نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية من E إلى F بـ $L(E,F)$.

مبرهنة (17)

إذا كان $u\in L(E,F)$ و $v\in l(F,G)$ تطبيقين خطيين. إن $uov=E\to G$ تطبيق خطي.

الإثبات:

مباشر باستخدام تعريف التطبيق الخطي وتركيب التطبيقات.

مبرهنة (18)

ليكن E فضاء شعاعي منتهي البعد أساسا $e=(e_1,\ldots,e_n)$ و F فضاء شعاعي أساسا $f=(f_1,\ldots,f_n)$ جملة مكونة من n شعاع في F. عندئذٍ:

1- يوجد تطبيق خطي وحيد $u\in L(E,F)$ حيث $\forall\quad i\in N_n;\quad u(e_i)=fi$

2- u متباين $\Leftrightarrow$ f حرة.

3- u غامر $\Leftrightarrow$ f مولدة.

الإثبات:

1- ليكن $x\in E$ فإن $x=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n$ ولنأخذ التطبيق $u:E\to F$ بحيث يكون $u(x)=u(\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n)=\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_nf_n$ لاحظ أنه في حال $x=e_i, i\in\mathbb{N}_n$ فإن

إن $u(e_i)=u\left(0_K e_1+\cdots+1_K e_i+\cdots+0_K e_n\right)=1_K f_i=f_i;\quad i=1,\ldots,n$ التطبيق u معرف لأن x معرف بشكل وحيد وبالتالي له صورة وحيدة في F. ولنثبت أن u هو تطبيق خطي، عندئذٍ $\forall(x,y)\in E^2;\quad \forall(\alpha,\beta)\in K^2$

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y &=\alpha(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n)+\beta(\mu_1 e_1+\cdots+\mu_n e_n)\\ &=(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)e_1+\cdots+(\alpha\lambda_n+\beta\mu_n)e_n\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}u\left(\alpha x+\beta y\right)&=\left(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1\right)f_1+\cdots+\left(\alpha\lambda_n+\beta\mu_n\right)f_n\\ &=\alpha u(x)+\beta u(x)\end{aligned}$$

2- حسب المبرهنة (16) فإن $\ker(u)=\{0_E\}$ وبالتالي إذا فرضنا أنه يوجد $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in K^n$ بحيث يكون $\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n=0 \Leftrightarrow \lambda_1 u(e_1)+\cdots+\lambda_n u(e_n)=0$

$\Leftrightarrow\quad u(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n)=0$ (u تطبيق خطي)

$\Leftrightarrow\quad \lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n=0$

$\Leftrightarrow\quad \lambda_1=\cdots=\lambda_n o_K$ (لأن e أساس لـ E)

إذن f حرة.

3- f غامر إذن حسب المبرهنة (16) فهذا يكافئ $\mathrm{Im}(u)=F$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(F)=F &\Leftrightarrow \forall\quad y\in F;\quad \exists x\in E;\quad y=u(x)\\ &\Leftrightarrow\quad y=u(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n)\\ &\Leftrightarrow\quad y=\lambda_1 u(e_1)+\cdots+\lambda_n u(e_n)\qquad (u\ \text{تطبيق خطي})\\ &\Leftrightarrow\quad y=\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n\end{aligned}$$

إذن f مولدة.

ملاحظة

هذه النظرية مهمة حيث تمكننا من تحديد شكل تطبيق خطي. ويكفي لذلك أن نعطي صـورة أساس بواسطة هذا التطبيق.

7. رتبة جملة أشعة ورتبة تطبيق خطي

تعريف

لتكن $S=(x_1,\ldots,x_n)$ جملة من الفضاء الشعاعي E المعرف على الحقل K.

نسمي رتبة الجملة S بُعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ S أي $rg(S)=\dim(vect(S))$.

وإذا كان F,E فضائين منتهيي البعد وليكن $u\in L(E,F)$، فإننا نسمي رتبة التطبيق الخطي u بُعد الفضاء الشعاعي الجزئي $\text{Im}(u)$ أي $rg(u)=\dim(\text{Im}(u))$.

مبرهنة (19)

إذا كان E فضاء شعاعياً أساسه $e=(e_1,\ldots,e_n)$ وليكن $u\in L(E,F)$ فعندئذٍ $rg(u)=rg\left(u(e_1),\ldots,u(e_n)\right)$.

الإثبات:

إن $rg(u)=\dim(\text{Im}(u))$ عندئذ

$$\forall y\in \text{Im}(u);\quad \exists x\in E;\quad y=u(x)$$
$$\Rightarrow y=u(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n)=\lambda_1 u(e_1)+\cdots+\lambda_n u(e_n)$$

أي أن $\text{Im}(u)$ مولد بالجملة $u(e)$ وهي جملة حرة إذن $rg(u)=\dim\left(vect\left(u(e)\right)\right)=rg\left(u(e)\right)$.

مبرهنة (20)

ليكن E فضاء شعاعي منتهي البعد على حقل K وليكن $u\in L(E,F)$ حيث F فضاء شعاعي ما على الحقل K عندئذٍ $\dim(E)=\dim(\ker(u))+\dim(\text{Im}(u))$.

تدريبات

التمرين الأول

أثبت أن الفضاءات الجزئية من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ هي $\{(0,0)\}$ و $\mathbb{R}^2$ و كل المستقيمات المارة بالمركز ونرمز لها بـ F أي $F=\{\lambda(x_0,y_0);\quad \lambda\in\mathbb{R}\}$.

الحل:

بسهولة نتحقق أن $\{(0,0)\}$ و $\mathbb{R}^2$ هي فضاءات جزئية من $\mathbb{R}^2$. ليكن F فضاء جزئي ما من $\mathbb{R}^2$ و ليكن $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$; $(x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ فإن

$$\begin{aligned}\lambda x+\mu y&=\lambda(x_1,x_2)+\mu(y_1,y_2)\\&=(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2)\end{aligned}$$

وهو ما يُمثل شعاعاً يمر بالمركز لأنه مجموع شعاعين يمران بالمركز إذن نستطيع أن نستنتج أن F هو عبارة عن مستقيم يمر بالمركز.

التمرين الثاني

ليكن $E=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هي مجموعة التطبيقات من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، وقد أثبتنا أن E فضاء شعاعي.

حَدد أياً من المجموعات التالية تشكل فضاءً جزئياً من E:

1- $F_1=C^n(\mathbb{R})$.

2- $F_2=\{f\in E; f(1)=2f(0)\}$

3- $F_3=\{f\in E; f(0)=f(1)+1\}$

4- $F_4=\{f\in E;\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=f(1-x)\}$

5- $F_5=\{f\in E; f\in C^1, f'(x)=a(x)f(x)\}$

حيث $a(x)$ هو تابع من E.

الحل:

1- F_1 هو فضائي جزئي من E فوق $\mathbb{R}$ لأن $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ $f,g\in C^n(\mathbb{R}),\forall$ فإن $\lambda f+\mu g\in C^n(\mathbb{R})$ لأن $\lambda f,\mu g$ هما مستمرين وقابلين للاشتقاق n مرة ومجموعهما هو كذلك.

-2 $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall(f,g)\in F_2^2$ فإن

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)(1)&=\lambda f(1)+\mu g(1)\\&=2\lambda f(0)+2\mu g(0)\\&=2(\lambda f+\mu g)(0)\end{aligned}$$

وبالتالي $\lambda f+\mu g\in F_2$ وبالتالي F_2 فضاء جزئي من E.

- 3

$$\begin{aligned}\forall(f,g)\in F_3^2;\quad(\lambda f+\mu g)(0)&=\lambda f(0)+\mu g(0)\\&=\lambda\left(f(1)+1\right)+\mu\left(g(1)+1\right)\\&=\left(\lambda f+\mu g\right)(1)+\lambda+\mu\notin F_3.\end{aligned}$$

وبالتالي F_3 ليس فضاءً جزئياً.

-4

$$\begin{aligned}\forall(f,g)\in F_4^2;\left(\lambda f+\mu g\right)&=\lambda f(x)+\mu g(x)\\&=\lambda f(1-x)+\mu g(1-x)\\&=\left(\lambda f+\mu g\right)\left(1-x\right)\in F_4\end{aligned}$$

وبالتالي F_4 هو فضاء جزئي.

-5 $\forall(f,g)\in F_5^2;\quad(\lambda f+\mu g)\in C^1$ لأن كل من g,f من C^1 إذن $\lambda f+\mu g$ $C^1,$

وكذلك:

$$\begin{aligned}\left(\lambda f+\mu g\right)'(x)&=\lambda f'(x)+\mu g'(x)\\&=a(x)\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)\\&=a(x)\left(\lambda f+\mu g\right)(x)\in F_5\end{aligned}$$

إذن F_5 هو فضاء جزئي.

التمرين الثالث

إذا كان $A\subset B$ بين أن $vect(A)\subset vect(B)$ وأن $vect\left(vect(A)\right)=vect(A)$.

الحل:

$(a_1,...,a_n)\in A^n$ و $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in K^n$ حيث $\forall x \in vect(A); \quad x=\lambda_1 a_1+...+\lambda_n a_n$

إن $(a_1,...,a_n)\in A^n \subset B^n$ إذن $x \in vect(B)$ وبالتالي $vect(A)\subset vect(B)$

ليكن $x \in vect(vect(A))$ فعندئذ يوجد $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in K$ و $\exists(b_1,...,b_n)\in vect(A)$ بحيث

$x=\lambda_1 b_1+...+\lambda_n b_n$ وكذلك $b_i \in vect(A)$ حيث $i=1,...,n$

إذن $\exists(a_{i1},...,a_{im})\in A^n \;\&\; \exists(\mu_i,...,\mu_{im})\in K^n$ بحيث يكون $b_i=\mu_{i1}a_{i1}+...+\mu_{im}a_{im}$ من أجل كل $i=1,...,n$ و بالتالي $x=\lambda_1(\mu_{11}a_{11}+...+\mu_{1m}a_{1m})+...+\lambda_n(\mu_{n1}a_{n1}+...+\mu_{nn}a_{nn})$

وهو ما يمثل تركيب خطي بعناصر من A إذن $x \in vect(A) \Rightarrow vect(vect(A))\subset vect(A)$.

وواضح أن $A\subset Vect(A)$ إذن حسب القسم الأول من التمرين نجد أن $vect(A)\subset vect(vect(A))$ ومنه $vect(A)=vect(vect(A))$.

التمرين الرابع

(فضاء خارج القسمة)

ليكن E فضاء شعاعياً على حقل تبديلي K. وليكن H فضاءً شعاعياً جزئياً من E ولنعرف العلاقة الثنائية $\forall(x,y)\in E^2; \quad x\Re_H y \Leftrightarrow x-y\in H$

بين أن مجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة E/H هي فضاء شعاعي على الحقل K.

وأن التطبيق $\begin{array}{l} Q_H: E\to E/H \\ x\to [x] \end{array}$ غامر. و هو ما يسمى الغمر القانوني.

الحل:

إذا كان $[y]$ و $[x]$ عنصرين من E/H ولنعرف على هذه المجموعة القانونين (+) و (.) بالشكل التالي

$$[x]+[y]=\{x_1+y_1;(x_1,y_1)\in[x]\times[y]\}\in E/H$$
$$\lambda.[x]=\{\lambda x_1;\; x_1\in[x]\}\in E/H$$

بسهولة نثبت أن $(E/H,+,.)$ هي فضاء شعاعي نسميه فضاء خارجي القسمة على الفضاء الجزئي H.

إن Q غامر لأن $\forall[x]\in E/H; \quad [x]=\{y\in E; y-x\in H\}\neq\varnothing$

إي من أجل كل صف تكافؤ من E/H يوجد $y\in E$ بحيث يكون $y\Re_H x$ وبالتالي

$\forall [x] \in E/H;\quad \exists y \in E;\quad Q_H(y) = [x]$.

التمرين الخامس

ليكن E فضاءً شعاعياً منتهي البعد على الحقل K وليكن $F \subset E$ فضاءً جزئياً. عندئذ يكون E/F منتهي البعد ويكون $\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$.

الحل:

يوجد فضاء جزئي G من E بحيث يكون $E = F \oplus G$ استناداً إلى المبرهنة (14) من هذا الفصل. ولنبرهن أن $\phi : G \to E/F$ هو تشاكل تقابلي خطي أي تطبيق خطي تقابلي.

إن ϕ هو مقصور Q_H على G ولنثبت أنه متباين أي لنثبت أن $\ker(\phi) = \{0_E\}$

$$
\begin{aligned}
x \in \ker(\phi) &\Leftrightarrow (x \in G) \wedge ([x] = [0]) \\
&\Leftrightarrow (x \in G) \wedge (x \in F) \\
&\Leftrightarrow x \in G \cap F = \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}
$$

ولنثبت أن ϕ غامر $\forall x \in E; x = x_F + x_G \Rightarrow [x_G] = [x] = \phi(x_G)$ إذن ϕ غامر وبالتالي ϕ تقابل ومنه حسب النتيجة (4) هذا الفصل نجد أن

$$
\begin{aligned}
&\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \\
&\Rightarrow \dim(G) = \dim(E/F) = \dim E) - \dim(F)
\end{aligned}
$$

التمرين السادس

عين رتبة الجملة $S = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

حيث

$$
a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}
$$

الحل:

نضع هذه الجملة ضمن جدول واحد سنسميه مصفوفة كما يلي:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 13 \\ 9 & 7 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_3 & a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3 & a_1 + 2a_3 & a_4 - 2a_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 5 & -6 \\ 5 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & -9 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_3 & a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3 = b_2 & a_1 + 2a_3 - 7b_2 & a_4 - 2a_3 - 3b_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -114 & -57 \\ 5 & 9 & -48 & -24 \\ 1 & -9 & 74 & 37 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 17 & -57 & 0 \\ 5 & 9 & -24 & 0 \\ 1 & -9 & 37 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث:

$b_1 = a_3$

$b_2 = a_2 - a_1 - a_4 + 5a_3$

$b_3 = 3a_1 + 3a_2 - 17a_3 + 4a_4$

$b_4 = 2a_1 - a_2 + a_3 - a_4$

نستنتج أن $rg(S) = 3$ وأن الأشعة a_4, a_3, a_2, a_1 مرتبطة خطياً حيث:

$b_4 = 2a_4 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$

التمرين السابع

أوجد الفضاء الجزئي المكمل للفضاء الجزئي W_1 حيث

$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$

الحل:

نوجد أولاً قاعدة لـ W_1 كما يلي

لاحظ أن $x = -y + z$ ومنه $W_1 = \{(-y + z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

$\Rightarrow \; W_1 = \{y(-1,1,0) + z(1,0,1); (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

لاحظ أن $e' = \{(-1,1,0), (1,0,1)\}$ هي أساس لـ W_1 (أثبت ذلك).

لاحظ أنه يمكن إكمال e' إلى أساس e بالمجموعة $e'' = \{e_3 = (0,-2,1)\}$ حيث

$e = e' \cup e'' = \{(-1,1,0), (1,0,1), (0,-2,1)\}$ تشكل أساساً لـ $\mathbb{R}^3$. لنفرض أن $W_2 = vect(e'')$

عندئذٍ $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_3$. إن الفضاء المتمم ليس وحيداً لأنه مثلاً من أجل $e_3 = (0,0,1)$

نجد أن $e = \{(-1,1,0), (1,0,1), (0,0,1)\}$ تشكل أساساً لـ $\mathbb{R}^3$ ونستطيع إيجاد

$U = vect(\{(0,0,1)\})$ بحيث يكون $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus U$.

التمرين الثامن

ليكن لدينا الفضائين الجزئيين U و W من $\mathbb{R}^3$ حيث:

$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; z = 3x + 17y\}$ و $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; z = x - y\}$، عين

الفضاء الجزئي $U \cap W$؟

الحل:

$$L = U \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 3x + 17y = x - y\}$$
$$= \left\{\left(x, -\frac{1}{9}x, z\right);\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

وهو ما يمثل مستقيماً. بتقاطع المستويين U و W نحصل على النتيجة بحل جملة المعادلتين:

$$3x + 17y - z = 0 \quad (1)$$
$$x - y - z = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (1) - (2) \Rightarrow 2x + 18y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{9}x.$$