أكاديميا

سلسلة أكاديميا في الرياضيات

البنك الشامل في الأشعة الثالث الثانوي العلمي

تمارين امتحانية لكل أفكار المنهاج

الاختبارات الأربعة

النماذج الوزارية الستة 2017

النموذج الوزاري 2019

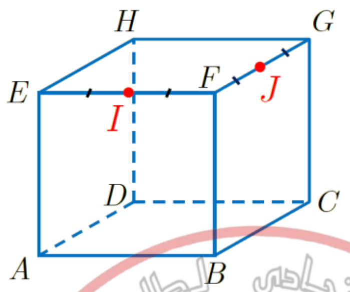
النماذج الوزارية الثلاثة 2020

كافة الدورات الامتحانية من 2017 الى 2022

اعداد المدرس : أحمد الشيخ عيسى مدير معهد أكاديميا

الرقة . هـ : 0998024183

التمرين 1 :



$ABCDEFGH$ مكعّب I منتصف $[EF]$، J منتصف $[FG]$.

❶ بيّن إذا كانت النقطة M المُعرّفة بالمساواة الشعاعيّة المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعّب

$$1.\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \quad , \quad 2.\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$$

❷ حدّدْ موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة :

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}$$

❸ أثبت صحة المساواة الشعاعية : $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$

الحل :

❶ $1.\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG} \Rightarrow$ M تنطبق على G

$2.\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AG'}$

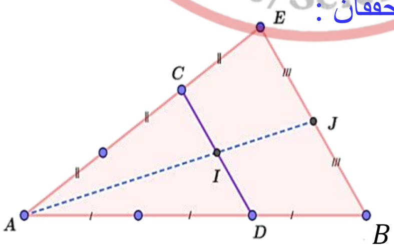
G' نظيرة C بالنسبة إلى G وهي ليست نقطة من المكعّب وبالتالي M ليست نقطة من المكعّب

❷ $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI} \Rightarrow \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AI} \Rightarrow$ N تنطبق على I

❸ $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$

التمرين 2 :



لتكن لدينا ثلاث نقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة من الفراغ والنقطتين E, D تحققان :

$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}\ ,\ 3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$ و I منتصف CD و J منتصف EB

➊ أثبت أن النقاط A, B, C, D, E تقع في مستو واحد

➋ أثبت أن النقاط I, J, A تقع على استقامة واحدة

الحل :

❶ لدينا $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}$ وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AE}$ مرتبطين خطيا

والنقاط A, C, E تقع على استقامة واحدة فالنقطة E تقع على المستقيم (AC) المحتوى في المستوي (ABC)

و لدينا $3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ مرتبطين خطيا

فالنقاط A, B, D تقع على استقامة واحدة فالنقطة D تقع على المستقيم (AB) المحتوى في المستوي (ABC)

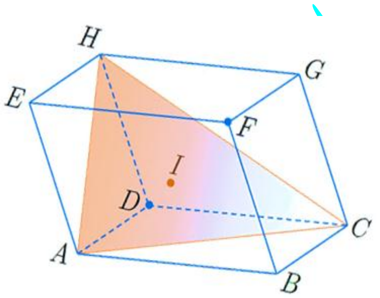
وبالتالي النقاط A, B, C, D, E تقع في مستو واحد

❷ $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ ولدينا $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ وبالتالي :

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\right)=2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \frac{2}{3}\left(2\overrightarrow{AJ}\right)=2\overrightarrow{AI} \Rightarrow$$

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ فالشعاعين $\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{AI}$ مرتبطين خطيا فالنقاط I, J, A تقع على استقامة واحدة

التمرين 3 :



ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح، وليكن I مركز ثقل المثلّث AHC

أثبت أنّ النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة وعيّن موقع I على $[DF]$

الحل :

النقطة I هي مركز ثقل المثلّث AHC وبالتالي

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{DI} \Rightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{DI} \Rightarrow$$

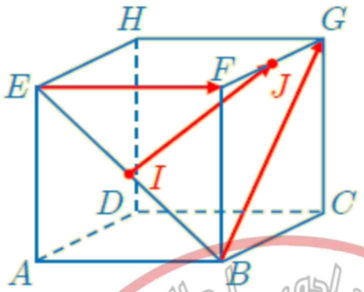
$$\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DI} \Rightarrow \overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$

فالشعاعين $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DF}$ مرتبطين خطيا و النقاط D و F و I تقع على استقامة واحدة و I نقطة من القطعة المستقيمة $[DF]$ تحقّق $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

التمرين 4 :

$ABCDEFGH$ مكعب ، النقطة I منتصف $[BE]$ و J منتصف $[FG]$

أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيا



الحل :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ} \quad ...\ (1) \qquad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ} \quad ...\ (2)$$

بجمع العلاقتين (1) و (2) طرفا الى طرف نجد :

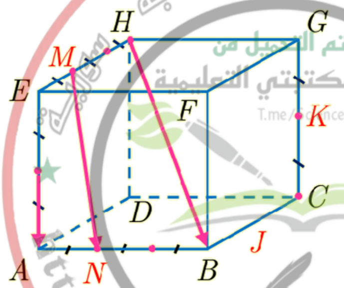
$$2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + (\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{GJ}) = \vec{0} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + \vec{0} \Rightarrow$$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ بالتالي الأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيا

التمرين 5 :

$ABCDEFGH$ مكعب فيه M نقطة تُحقّق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ و N نقطة تُحقّق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ ❷ أتكون الأشعة $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيّاً ؟



الحل :

❶ بالاستفادة من علاقة شال نجد:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

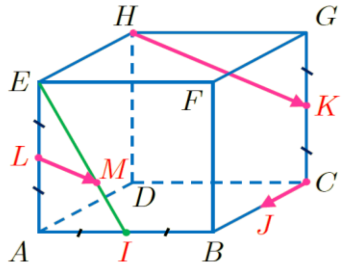
❷ $$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}[-\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{HB}] = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

و الأشعّة $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيّاً

التمرين 6 :

$ABCDEFGH$ مكعّب. I و J و K و L هي بالترتيب منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CG]$ و $[AE]$ ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$

❶ لماذا M هي مركز ثقل المثلّث AEB ؟ ❷ أتكون الأشعّة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطّيّاً ؟



الحل :

❶ $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI} \Rightarrow \overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$ وبالتالي M تقسم هذا المتوسّط بنسبة $1 : 2$

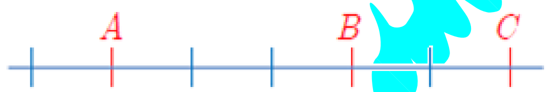
إذاً M هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث EAB ، أي مركز ثقله

❷ $[BL]$ متوسّط آخر في المثلّث EAB إذاً :

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{HG}) \Rightarrow \overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK} \Rightarrow \overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK} + 0\overrightarrow{CJ}$$

فالأشعّة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطّيّاً

التمرين 7 :



أولا : في الشكل الآتي التدريجات متساوية.

عبّر عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين وعين التثقيلات

ثانيا : ليكن المثلث ABC

❶ جِدْ عددين x و y بحيث: $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ حيث M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

❷ جِدْ الأعداد α و β و γ لتكون N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)

حيث N المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

الحل : أولا : $2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ ، $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ، $2\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

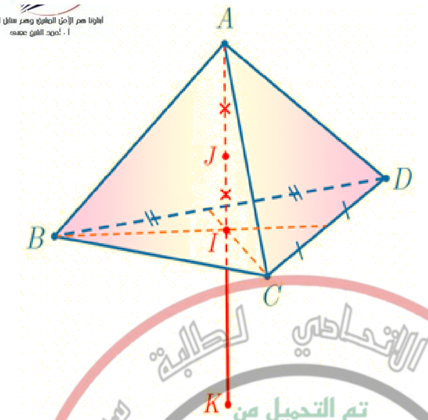
ثانيا : ❶ $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow x = 1 \ ,\ y = 1$

❷ $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{NC}$

$0\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \alpha = 0 \ ,\quad \beta = 2 \ ,\quad \gamma = -1$

التمرين 8 :



ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه وليكن I مركز ثقل المثلث BCD
و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I .
عبّر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة
للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.

الحل :

بما أن I مركز ثقل المثلث BCD فإن $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=3\overrightarrow{JI}$ وبالتالي :

$$\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=3\overrightarrow{AJ}\Longrightarrow 3\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$$

إذاً J هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

وكذلك لدينا :

بما أن I مركز ثقل المثلث BCD فإن $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=3\overrightarrow{KI}$ وبالتالي :

$$\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}\right)\Longrightarrow -3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}=\vec{0}$$

إذاً K هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

التمرين 9 :

أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أن M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$
وعين موضعها ثم عين التثقيلات

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$, 2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

الحل :

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}\Longrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}\Longrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

أي أن M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1),(C,1),(D,1)$ وهي مركز ثقل المثلث DBC

و التثقيلات $\beta=1,\gamma=1\ ,\delta=1$

2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}\ \Longrightarrow$

$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}\Longrightarrow \overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=0$

M هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,1),(C,1),(D,2)$ وبفرض K منتصف $[BC]$ فإن M هي بمنتصف $[KD]$.

و التثقيلات $\beta=1,\gamma=2\ ,\delta=1$

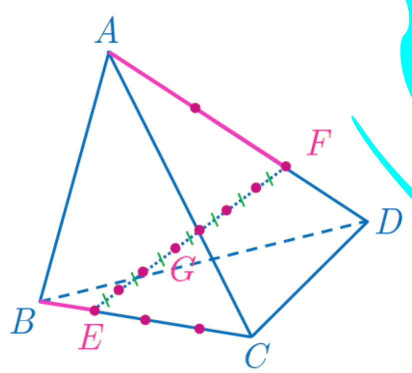
التمرين 10 :

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$، ونقطتين E و F معرّفتين وفق : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

أثبت أنّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$

يقع على $[EF]$ ثمّ عيّن النقطة G على $[EF]$

الحل :



$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ بالتالي E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$ و $(C,1)$

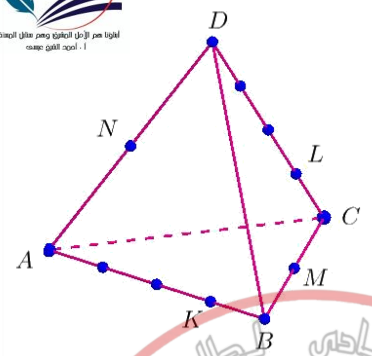
$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ بالتالي F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,2)$

حسب الخاصة التجميعية فإن :

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$

هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,4)$ و $(F,3)$

فالنقاط E و F و G تقع على استقامة واحدة ومنه G يقع على (EF) و $\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$



التمرين 11 :

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a ولتكن النقاط M, N, L, K التي تحقق :

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$:

أثبت أن المستقيمين $(KL), (MN)$ متقاطعين في نقطة.

أولا :

من العلاقة : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ نجد : K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1), (B,3)$

من العلاقة : $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ نجد : L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,3), (D,1)$

نعتبر G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1), (D,1), (C,3), (B,3)$ وبالتالي حسب الخاصة التجميعية :

G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,4), (K,4)$ وهي منتصف القطعة المستقيمة $[KL]$

ثانيا :

بما أن M منتصف $[BC]$ فهي تمثل مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3), (C,3)$

بما أن N منتصف $[AD]$ فهي تمثل مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1), (D,1)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(M,6), (N,2)$

و تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[MN]$ أي أن G نقطة تقاطع المستقيمين (MN) و (KL)

التمرين 12 :

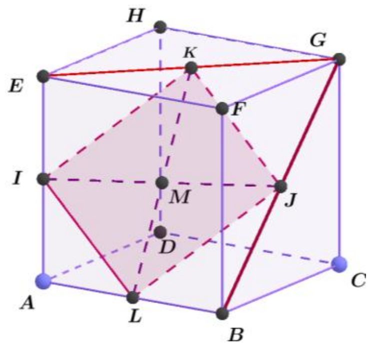
نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ والنقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالترتيب

والنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$

❶ أثبت أنّ M تنتمي إلى $[IJ]$ وعيّن موضعها على هذه القطعة.

❷ أثبت أنّ M تنتمي إلى $[KL]$ وعيّن موضعها على هذه القطعة.

❸ استنتج أنّ I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد وعيِّن طبيعة الرباعي $ILJK$



الحل :

النقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$

❶ I منتصف $[AE]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(E,1)$

و J منتصف $[BG]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1)$ و $(G,1)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية :

تكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,2)$ و $(J,2)$ إذاً M منتصف $[IJ]$

❷ K منتصف $[EG]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(E,1)$ و $(G,1)$

و L منتصف $[AB]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1)$ و $(A,1)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية :

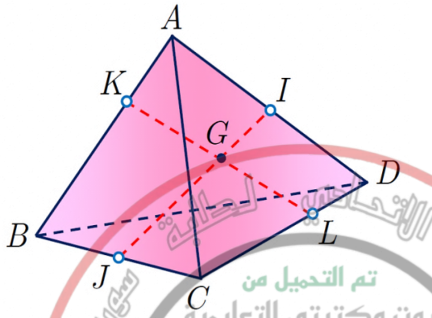
تكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(K,2)$ و $(L,2)$ إذاً M منتصف $[KL]$

❸ مما سبق يتلاقى المستقيمان (KL) و (IJ) في النقطة M فالنقاط I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد

و الرباعي $ILJK$ متوازي اضلاع لتناصف قطريه

التمرين 13 :

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$ ، K نقطة من $[AB]$ تُحقّق $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق $\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ وأخيراً I هي منتصف $[AD]$ و J هي منتصف $[BC]$



نعرّف G للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$

❶ a. أثبت أنّ النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة

b. أثبت أنّ النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة

❷ استنتج وقوع النقاط I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد

الحل :

❶ a. I منتصف $[AD]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(D,2)$.

و J منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$.

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية :

G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4)$ و $(J,2)$ فالنقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

b. K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$.

و L هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$ و $(C,1)$.

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية :

G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(L,3)$ فالنقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

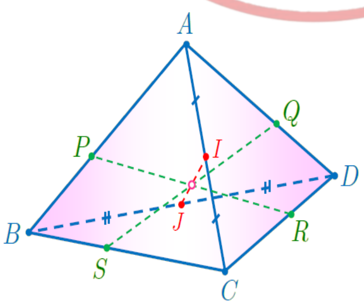
❷ المستقيمان (KL) و (IJ) متقاطعان في G فهما يعينان مستوياً واحداً والنقاط I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد

التمرين 14 :

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. لتكن x من $]0,1[$ ولتكن P و Q و R و S النقاط التي تحقّق $\overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$.

أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة



الحل :

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$ بالتالي P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-x)$ و (B,x)

$\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CD}$ بالتالي R هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,x) و $(C,1-x)$

باعتبار G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x)$ و (B,x) و $(C,1-x)$ و (D,x)

بالتالي حسب الخاصة التجميعية :

G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,1)$ و $(R,1)$ أي هي منتصف $[PR]$

$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AD}$ بالتالي Q هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,x) و $(A,1-x)$

$\overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CB}$ بالتالي S هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و $(C,1-x)$

بالتالي حسب الخاصة التجميعية :

G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1)$ و $(S,1)$ فهي منتصف $[SQ]$

I منتصف $[AC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A.1-x)$ و $(C,1-x)$

J منتصف $[BD]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و (D,x)

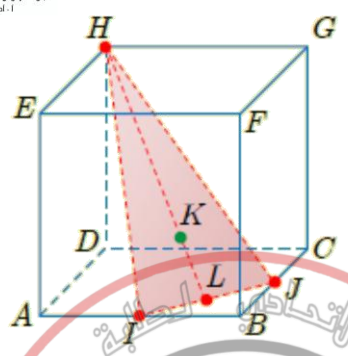
بالتالي حسب الخاصة التجميعية :

G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2x)$ و $(J,2x)$ فهي تنتمي للقطعة المستقيمة $[IJ]$

وبالتالي تتلاقى المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة G

التمرين 15 :

$ABCDEFGH$ مكعب و I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$ بالترتيب
والنقطة K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$
أثبت وقوع النقاط I و J و K و H تقع في مستوٍ واحد

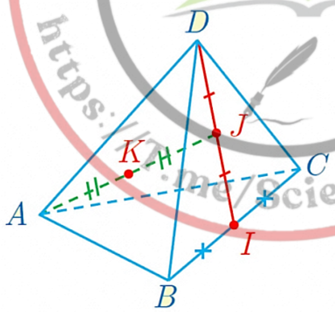


الحل :

I منتصف $[AB]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$.
J منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$.
وبالتالي حسب الخاصة التجميعية :
النقطة K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$
هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,2)$ و $(J,2)$ و $(H,1)$ و النقاط I و J و K و H تقع في مستوٍ واحد

التمرين 16 :

انطلاقاً من الشكل المجاور . جِدْ الأمثال α و β و γ و γ
لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α)و(B,β)و(C,γ)و(D,δ)



الحل :

بما أنّ I منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$
وبما أنّ J منتصف $[ID]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,2)$ و $(D,2)$
و بما أنّ K منتصف $[AJ]$ فهي مركز الأبعاد المتناسب للنقاط $(J,4)$ و $(A,4)$ ويكون :

$$\alpha = 4 \ , \ \beta = 1 \ , \ \gamma = 1 \ , \ \delta = 2$$

طريقة ثانية : بما أنّ K منتصف $[AJ]$ فإن :

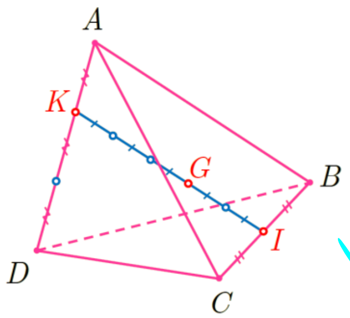
$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{MD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MI} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MD} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MD} + \frac{1}{8}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{MC} \Rightarrow$$

$$4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 8\overrightarrow{MK} \Rightarrow \alpha = 4 \ , \ \beta = 1 \ , \ \gamma = 1 \ , \ \delta = 2$$

التمرين 17 :

بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور



❶ عبر عن k كمركز أبعاد متناسبة للنقطتين (A,a) و (D,d)
❷ عبر عن I كمركز أبعاد متناسبة للنقطتين (B,b) و (C,c)
❸ عبر عن G كمركز أبعاد متناسبة للنقاط (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d)
❹ باعتبار المثلث (ABC) متساوي الساقين و $BC = 4$ احسب : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

الحل :

من الرسم نجد أن :
❶ $\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{0}$ إذاً K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(D,1)$ وبالتالي : $a = 2d \neq 0$
❷ I منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$ وبالتالي : $b = c \neq 0$
❸ $2\overrightarrow{GK} + 3\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{0}$ وبالتالي G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(K,2)$

$$2i = 3k \Rightarrow$$

$$2(b+c) = 3(a+d) \Rightarrow 2(b+b) = 3(2d+d) \Rightarrow 4b = 9d \Rightarrow b = \frac{9}{4}d$$

حتى لا نحصل على أوزان كسرية نختار $d = 4$ وبالتالي $a = 8 \ , \ c = 9 \ , \ b = 9$

❹ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BI}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.cos(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}) = 2 \times 4 \times 1 = 8$

التمرين 18 :

لتكن النقاط $A(1,-1,2), B(2,1,0), C(2,3,-1), D(0,0,2)$ والمطلوب :

❶ عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و$(B,2)$ و$(C,2)$ و$(D,1)$

❷ حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6$

❸ جد معادلة للمجموعة S

❹ حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

❺ حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+6\overrightarrow{GA}\|$$

الحل :

$$A(1,-1,2)\quad,\quad B(2,1,0)\quad,\quad C(2,3,-1)\quad,\quad D(0,0,2)$$

❶ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,2),(C,2),(D,1)$

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(1)+2(2)+2(2)+1(0)}{1+2+2+1}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(-1)+2(1)+2(3)+1(0)}{6}=\frac{7}{6}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(2)+2(0)+2(-1)+1(2)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$G\left(\frac{3}{2},\frac{7}{6},\frac{1}{3}\right)$$

❷
$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MG}$$

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6\Longrightarrow\|6\overrightarrow{MG}\|=6\Longrightarrow 6MG=6\Longrightarrow MG=1$$

S مجموعة النقاط M تمثل معادلة كرة مركزها نصف قطرها $r=1$

❸
$$S:\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{7}{6}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{3}\right)^2=1$$

❹
$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|6\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

$$\|6\overrightarrow{MG}\|=\|6\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MG}\|\Longrightarrow\|6\overrightarrow{MG}\|=\|6(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})\|\Longrightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{GA}\|$$

و مجموعة النقاط M في الفراغ تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها GA

❺ حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+6\overrightarrow{GA}\|$$

$$\|6\overrightarrow{MG}\|=\|6\overrightarrow{MG}++6\overrightarrow{GA}\|\Longrightarrow\|6\overrightarrow{MG}\|=\|6(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})\|\Longrightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MA}\|$$

و مجموعة النقاط M في الفراغ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GA]$

التمرين 19 :

في مَعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ
تتأمّل النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ و $D(-2,5,1)$

❶ جد إحداثيات I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ و G مركز ثقل ABC
❷ جد إحداثيّات النقطة J نظيرة I بالنسبة إلى C
❸ جد احداثيّات النقطة M التي تُحقّق العلاقة $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$
❹ جد احداثيّات النقطة N بحيث يكون الرباعي $ABCN$ متوازي أضلاع
❺ جد احداثيّات النقطة K بحيث يكون المثلث ABK قائم في B
❻ أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط A و B و $F(a,b,4)$ على استقامة واحدة
❼ جد مركبات الأشعّة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم اوجد نسبة مثلثية للزاوية بينهما
❽ عين a ليكون الشعاعان $\vec{u}(2,a,-8)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ ❶ مرتبطين خطّيّاً ، ❷ متعامدين

الحل :

❶ $I\left(\frac{3+2}{2},\frac{5-1}{2},\frac{2+3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2}\right)$ و $G\left(\frac{3+2+0}{3},\frac{5-1-2}{3},\frac{2+3+2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$

❷ $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CJ}\Rightarrow\left(\frac{-5}{2},-4,\frac{-1}{2}\right)=(x-0,y+2,z-2)\Rightarrow J\left(\frac{-5}{2},-6,\frac{3}{2}\right)$

❸ $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\Rightarrow(x_M-2,y_M+1,z_M-3)=(-1,-6,1)+3(-3,-7,0)$
$\Rightarrow(x_M-2,y_M+1,z_M-3)=(-10,-27,1)\Rightarrow M(-8,-28,4)$

❹ يكون الرباعي $ABCN$ متوازي أضلاع اذا كان
$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow(x_N-0,y_N+2,z_N-2)=(1,6,-1)\Rightarrow N(1,4,1)$

❺ يكون المثلث ABK قائم في B اذا كان :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BK}=0\Rightarrow(-1,-6,1).(x_K-2,y_K+1,z_K-3)=0$
$-x+2-6y-6+z-3=0\Rightarrow x+6y-z+7=0\Rightarrow K(x,y,x+6y+7)$

❻ لتقع النقاط A و B و $F(a,b,4)$ على استقامة واحدة
$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AB}\Rightarrow(a-3,b-5,4-2)=(-k,-6k,k)\Rightarrow$
$a=3-k,b=5-6k,k=2\Rightarrow F(1,-7,4)$

❼ $\overrightarrow{AB}(-1,-6,1),\overrightarrow{AC}(-3,-7,0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3+42+2=45$
$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{1+36+1}=\sqrt{38},\ \|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{9+49+0}=\sqrt{58}$
$COS(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{45}{\sqrt{38}\times\sqrt{58}}$

❽ ❶ يكون الشعاعين مرتبطين خطيا اذا كانت مركباتهما متناسبة وبالتالي :
$\vec{u}=k\vec{v}\Rightarrow(2,a,-8)=k(1,-2,a)\Rightarrow(2,a,-8)=(k,-2k,ak)\Rightarrow$
$k=2$ ① , $a=-2k$ ② , $ak=-8$ ③ من المعادلتين ① و ② نجد $k=2\,,a=-4$
نعوض في ③ نجد $-4=-4\Rightarrow-2\times2=-4$ محققة وبالتالي $a=-4$

طريقة ثانية :

يكون الشعاعين مرتبطين خطيا اذا كانت مركباتهما متناسبة وبالتالي : $\frac{2}{1}=\frac{a}{-2}=\frac{-8}{a}$
من النسبة الاولى والثانية نجد : $a=-2\times2=-4$ ومن النسبة الاولى والثالثة نجد : $a=\frac{-8}{2}=-4$
من النسبة الثانية والثالثة نجد : $a^2=-2\times-8\Rightarrow a^2=16\Rightarrow a=\pm4$
وبالتالي قيمة a التي تجعل التناسب محقق هي $a=-4$

❷ يكون الشعاعين متعامدين اذا كان :
$\vec{u}.\vec{v}=0\Rightarrow(2,a,-8).(1,-2,a)=0\Rightarrow2-2a-8a=0\Rightarrow a=\frac{1}{5}$

التمرين 20 :

نتأمّل شعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، فإذا كانت أطوال الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10
ونفترض أنّ $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان

❶ أثبت أن الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

❷ أثبت أنّ للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الطول نفسه

الحل :

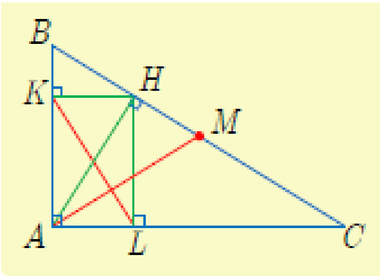
❶ $$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(100-64-36) = 0$$

فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

❷ بما أن $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان فإن : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = 0 \Rightarrow$

$$\vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{v} = 0 \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

التمرين 21 :



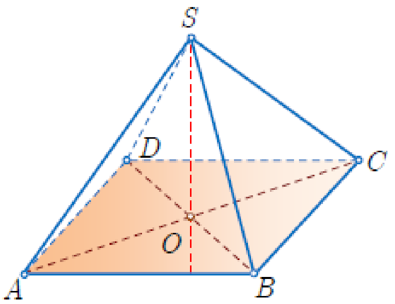
ABC مثلث قائم في A و M منتصف $[BC]$
H موقع الارتفاع المرسوم من A
وليكن K و L المسقطين القائمين للنقطة H على $[AB]$ و $[AC]$ بالترتيب
أثبت تعامد المستقيمين (AM) و (KL)

الحل :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KL}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AL})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0$$

التمرين 22 :



نتأمّل هرماً $S-ABCD$ قاعدته مربّع ورأسه S
وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a
احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$

الحل :

نلاحظ أنّ الأوجه الجانبيّة مثلّثات متساوية الأضلاع و طبوقة
كما أنّ المثلّثان SAC و SBD طبوقة وتطابق BCD لتساوي أطوال أضلاعها
أي أنّها قائمة ومتساوية الساقين $AC = BD = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SB}\|.\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}) = a.a.cos(\frac{\pi}{3}) = a.a.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SC}\|.\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}) = a.a.cos(\frac{\pi}{2}) = a.a.(0) = 0$$

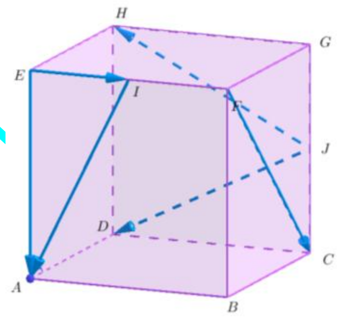
$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AS}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}) = -a.a\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -a.a\sqrt{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -a^2$$

التمرين 23 :

$ABCDEFGH$ مكعّب طول a. فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$.

احسب $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ}$ و $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD}$

الحل :



$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA} = \|\overrightarrow{EI}\|.\|\overrightarrow{EA}\|.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC} = \|\overrightarrow{EI}\|.\|\overrightarrow{FC}\|.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ} = \|\overrightarrow{EI}\|.\|\overrightarrow{GJ}\|.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EI}.(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA}) = -\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA} = \frac{-a^2}{4} + 0 = \frac{-a^2}{4}$$

$$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = (\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH}).(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD}$$

$$= \frac{-a^2}{4} + 0 + 0 + a^2 = \frac{3a^2}{4}$$

طريقة ثانية : باختيار معلم متجانس $\left(A\,;\,\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$

$A(0,0,0), B(a,0,0), C(a,a,0), D(0,a,0), E(0,0,a), F(a,0,a), G(a,a,a), H(0,a,a)$

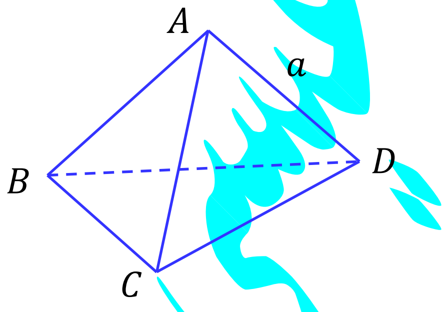
$I\left(\frac{a}{2},0,a\right)$, $J\left(a,a,\frac{a}{2}\right)$

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA} = \left(\frac{a}{2},0,0\right).(0,0,-a) = 0$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC} = \left(\frac{a}{2},0,0\right).(0,a,-a) = 0$

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ} = \left(\frac{a}{2},0,0\right).\left(0,0,\frac{-a}{2}\right) = 0$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA} = \left(\frac{a}{2},0,0\right).\left(\frac{-a}{2},0,-a\right) = \frac{-a^2}{4}$

$$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = \left(-a,a,\frac{a}{2}\right).\left(-a,0,\frac{-a}{2}\right) = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

التمرين 24 :



$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a

❶ احسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ و احسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

❷ أثبت أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-a^2}{2}$

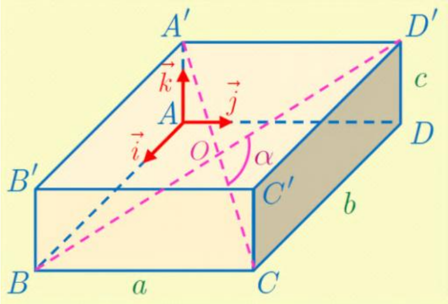
وبما أن $ABCD$ رباعي الوجوه منتظم فإن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}$$

❷ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{-a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

وبالتالي فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ متعامدين ومنه المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين

التمرين 25 :



$ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[BD']$ و $[CA']$ في O

نضع $a = \widehat{COD'}$ ، ونفترض أنّ $BC = a$ و $CD = b$ و $DD' = c$.

نختار معلماً متجانساً $\left(A\,;\frac{1}{b}\overrightarrow{AB}\,,\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{a}\overrightarrow{AA'}\right)$ والمطلوب :

❶ أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات و إحداثيات مركزه O .

❷ أثبت أنّ $cosa = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$ ادرس على وجه الخصوص حالة المكعّب.

الحل :

❶ لنأخذ المعلم المتجانس $\left(A\,;\frac{1}{b}\overrightarrow{AB}\,,\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{a}\overrightarrow{AA'}\right)$ عندئذٍ :

إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات في هذا المعلم هي :

$A(0,0,0)\,, B(b,0,0), C(b,a,0), D(0,a,0)\,, A'(0,0,c)\,, B'(b,0,c)\,, C'(b,a,c)\;\; D'(0,a,c)$

النقطة O منتصف القطر $[A'C]$ فتكون إحداثيّاتها: $O\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$

❷ $$cosa = \frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD'}}{\|\overrightarrow{OC}\|.\|\overrightarrow{OD'}\|}$$

$$\overrightarrow{OC} = \left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},-\frac{c}{2}\right) \;\; \& \;\; \overrightarrow{OD'} = \left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD'} = \frac{-b^2+a^2-c^2}{4}$$

$$\left\|\overrightarrow{OD'}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+a^2+c^2} \quad \& \quad \|\overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+a^2+c^2}$$ نعوّض بالعلاقة :

$$cosa = \frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD'}}{\|\overrightarrow{OC}\|.\left\|\overrightarrow{OD'}\right\|} = \frac{\frac{-b^2+a^2-c^2}{4}}{\frac{b^2+a^2+c^2}{4}} = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

عندما يصبح متوازي المستطيلات مكعباً يصبح $a = b = c$ ويكون $cosa = \frac{a^2-a^2-a^2}{a^2+a^2+a^2} = \frac{-a^2}{3a^2} = -\frac{1}{3}$

التمرين 26 :

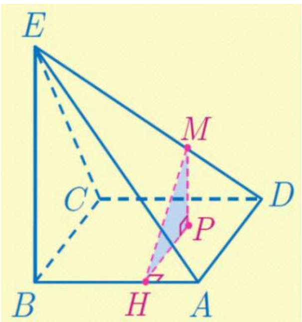
$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربّع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EB = 4\sqrt{2}$ و $AB = 4$

M نقطة من القطعة $[ED]$ تُحقق $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$

لتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ و H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB)

احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$

الحل :



لدينا المعلم المتجانس $\left(B;\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\,,\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\,,\frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{BE}\right)$ عندئذٍ تكون :

$B(0,0,0)\,, A(4,0,0)\,, C(0,4,0)\,, E\left(0,0,4\sqrt{2}\right), D(4,4,0)$

نفترض النقطة $M(x,y,z)$ من ED تُحقّق $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$ ومنه :

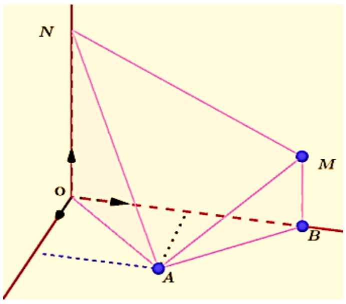
$$3(x-4,y-4,z-0) = \left(-4,-4,4\sqrt{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

P هي المسقط القائم للنقطة M على $(ABCD)$ إذاً $P\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0\right)$ فيكون $H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$

$$MH = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\right)^2+\left(0-\frac{8}{3}\right)^2+\left(0-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{0+\frac{64}{9}+\frac{32}{9}} = \sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

التمرين 27 :

m و n عددان حقيقيان موجبان يُحقّقان $n > m > 0$
نتأمّل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ و $B(0,6,0)$ و $M(0,6,m)$ و $N(0,0,n)$
في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ عيّن m و n ليكون المثلّث MAN قائماً في A
ويساوي حجمُ المجسّم $AOBMN$ $5\sqrt{3}$.



الحل :

المثلّث MAN قائماً في A وبالتالي : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$ وبالتالي :

$$(-\sqrt{3},3,m).(-\sqrt{3},-3,n) = 0 \Rightarrow 3-9+n.m = 0 \Rightarrow m.n = 6 \quad \dots \quad (1)$$

حجم الهرم $AOBMN$ هو $V = 5\sqrt{3}$ بالتالي :

$$V = \frac{1}{3}.S(OBMN).h \Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{BM+ON}{2} \times OB\right)(x_A) = 5\sqrt{3}$$

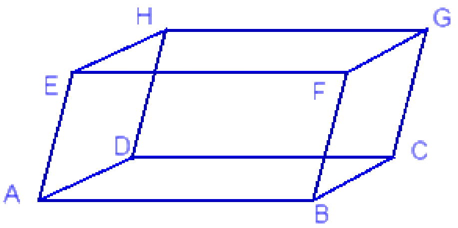
$$BM = \sqrt{0+0+m^2} = m \quad , \quad ON = \sqrt{0+0+n^2} = n \quad , \quad OB = \sqrt{0+36+0} = 6$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m+n}{2} \times 6\right)(\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} \Rightarrow m+n = 5 \quad \dots \quad (2)$$

بحل جملة المعادلتين (1) و (2) بشرط $n > m > 0$ نجد أنّ $m = 2$ و $n = 3$

التمرين 28 :

في مَعلمٍ $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ للفراغ نُعطي إحداثيّات
أربع من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً
وهي $A(2,1,-1)$ و $B(1,3,-1)$ و $C(-3,2,0)$ و $E(3,-1,3)$
جد إحداثيّات الرؤوس الأربعة الأخرى



الحل :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$
$$(x_D\,,y_D\,,z_D) = (x_A\,,y_A\,,z_A) + (-4\,,-1\,,1) = (2,1,-1) + (-4\,,-1\,,1) = (-2,0,0)$$
$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AE}$$
$$(x_F\,,y_F\,,z_F) = (x_B\,,y_B\,,z_B) + (1\,,-2\,,4) = (1,3,-1) + (1\,,-2\,,4) = (2,1,3)$$
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AE}$$
$$(x_H\,,y_H\,,z_H) = (x_D\,,y_D\,,z_D) + (1\,,-2\,,4) = (-2,0,0) + (1\,,-2\,,4) = (-1,-2,4)$$
$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AE}$$
$$(x_G\,,y_G\,,z_G) = (x_C\,,y_C\,,z_C) + (1\,,-2\,,4) = (-3,2,0) + (1\,,-2\,,4) = (-2,0,4)$$

طريقة ثانية :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow (x_D+3\,,y_D-2\,,z_D-0) = (1\,,-2\,,0) \Rightarrow$$
$$x_D+3 = 1 \Rightarrow x_D = -2 \;,\; y_D-2 = -2 \Rightarrow y_D = 0 \;,\; z_D = 0 \Rightarrow D(-2,0,0)$$

وبالمثل باقي النقاط :

$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow H(-1,-2,4)$$
$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow F(2,1,3)$$
$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow G(-2,0,4)$$

التمرين 29 :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ النقطتان $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$ و $C(-1,2,1)$ والشعاع $\overrightarrow{DC}(2\,,1\,,-1)$

والمستويين $P: x-2y+3z-5=0$ و $Q: x+y+z+1=0$ والمطلوب :

❶ أكتب تمثيلا وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه $\vec{u}(2,2,1)$

❷ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيّم (AB)

❸ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيّم d' المار من C وعمودي على P

❹ أثبت أنّ المستويين $Q\,,P$ متقاطعين وفق فصل مشترك d ثم أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيّم d

❺ أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان

❻ جد تمثيلا وسيطياً لكل من : (DC) و $[DC)$ و $[DC]$

الحل :

❶ $\vec{u}(2,2,1)\,,A(1,0,1) \Longrightarrow \begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+b_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases},t\in\mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases},t\in\mathbb{R}$

❷ $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\,,A(1,0,1) \Longrightarrow \begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+b_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases},t\in\mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=1 \end{cases},t\in\mathbb{R}$

❸ $\vec{v}=\vec{n}_p(1,-2,3)\,,C(-1,2,1) \Longrightarrow \begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+b_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases},t\in\mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} x=t-1 \\ y=-2t+2 \\ z=t+1 \end{cases},t\in\mathbb{R}$

❹ $\vec{n}_p(1,-2,3)$ و $\vec{n}_Q(1,1,1)$ غير مرتبطان خطيا لأن مركباتها غير متناسبة فالمستويين $Q\,,P$ متقاطعين

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من d (الفصل المشترك للمستويين $Q\,,P$)عندئذٍ M تحقق معادلتي المستويين

$$\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases} \Longrightarrow -3y+2z-6=0 \Longrightarrow y=\frac{2}{3}z-2$$

نفرض $z=3t$ وبالتالي بالحل : $x=-5t+1$ و $y=2t-2$ و $t\in\mathbb{R}$ $\quad d:\begin{cases} x=-5t+1 \\ y=2t-2 \\ z=3t \end{cases}$

❺ $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\,,\vec{u}(2,2,1) \Longrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AB}=-2+2+0=0 \Longrightarrow$ متعامدين d و (AB)

❻ نفرض $D(x,y,z)$ و لدينا $C(-1,2,1)$ ومنه $\overrightarrow{DC}(-1-x,2-y,1-z)=(2\,,1\,,-1)$

بمطابقة المركبات مع الشعاع $\overrightarrow{DC}$ نجد أن : $-1-x=2 \Longrightarrow x=-3$ و $2-y=1 \Longrightarrow y=1$

و $1-z=-1 \Longrightarrow z=2$ ومنه $D(-3\,,1\,,2)$ و $\overrightarrow{DC}(2\,,1\,,-1)$ بالتالي :

$[DC]:\begin{cases} x=2t-3 \\ y=t+1 \\ z=-t+2 \end{cases};t\in[0,1]$, $[DC):\begin{cases} x=2t-3 \\ y=t+1 \\ z=-t+2 \end{cases};t\in[0,+\infty[$, $(DC):\begin{cases} x=2t-3 \\ y=t+1 \\ z=-t+2 \end{cases};t\in\mathbb{R}$

التمرين 30 :

جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة $A(2,1,3)$ و الموازي للمستوي : $P: x+y+z+1=0$

إذا علمت أن d يقطع المستوي (YOZ) في نقطة B ترتيبها (-1)

الحل :

بما أن B نقطة من (yoz) فأن فاصلتها $x_B=0$ وترتيبها فرضاً هو $y_B=-1$

فالنقطة B من الشكل: $B(0\,,-1\,,z)$ بالتالي $\overrightarrow{AB}(-2,-2,z-3)$ و الشعاع $\vec{n}(1\,,1\,,1)$ هو ناظم المستوي P

بما أن المستقيم d يوازي المستوي P فإن $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \Rightarrow -2-2+z-3=0 \Rightarrow z=7$

ومنه شعاع توجيه d هو $\overrightarrow{AB}(-2,-2,4)$ وهو يمر من $A(2,1,3)$ فتمثيله الوسيطي :

$$d\begin{cases} x=-2t+2 \\ y=-2t+1 \\ z=4t+3 \end{cases};\ t\in R$$

التمرين 31 :

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين : $d:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=2t-1\end{cases}\ ,\ d':\begin{cases}x=s\\y=-s+1\\z=2s-1\end{cases}$

الشعاعان $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$ و $\overrightarrow{v}(1,-1,2)$ بالتالي $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$ فالشعاعين مرتبطين خطّيّاً

فالمستقيمان d و d' متوازيين بالحل المشترك لجملة معادلتيهما

$$\begin{cases}t=s & (1)\\-t=-s+1 & (2)\\2t-1=2s-1 & (3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t-s=0 & (1)\\-t+s-1=0 & (2)\\t-s=0 & (3)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد : $0=-1$ مستحيلة فالجملة مستحيلة وبالتالي فالمستقيمين متوازيين تماما وغير منطبقين

التمرين 32 :

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين : $d:\begin{cases}x=-9t+4\\y=-12t+4\\z=3t\end{cases},d':\begin{cases}x=3s+1\\y=4s\\z=-s+1\end{cases}$

الشعاعان $\overrightarrow{u}(-9,-12,-3)$ و $\overrightarrow{v}(3,4,-1)$ ومنه $\frac{-9}{3}=\frac{-12}{4}=\frac{3}{-1}=-3$

الشعاعان مرتبطين خطّيّاً لأنّ مركباتهما متناسبة فالمستقيمان d و d' متوازيين

بالحل المشترك لجملة معادلتيهما

$$\begin{cases}-9t+4=3s+1 & (1)\\-12t+4=4s & (2)\\3t=-s+1 & (3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3t+s-1=0 & (1)\\3t+s-1=0 & (2)\\3t+s-1=0 & (3)\end{cases}$$

المعادلات الثلاثة متساوية وبالتالي الجملة هي المعادلة $3t+s-1=0$ لها عدد غير منته من الحلول فالمستقيمان طبوقان

التمرين 33 :

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين : $d:\begin{cases}x=2t+3\\y=t+3\\z=t\end{cases}\ t\in R\ ,\ d':\begin{cases}x=s+3\\y=2s+1\\z=-s+3\end{cases}\ s\in R$

نوجد شعاعي توجيه المستقيمين : $\overrightarrow{u_{d'}}(1,2,-1)$, $\overrightarrow{u_d}(2,1,1)$ الشعاعان غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات

$\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}$ فالمستقيمان d,d' غير متوازيين ، لنتحقق فيما اذا كانا متقاطعان أم لا

بالحل المشترك :

$$\begin{cases}2t+3=s+3\Rightarrow 2t-s=0 & (1)\\t+3=2s+1\Rightarrow t-2s+2=0 & (2)\\t=-s+3\Rightarrow -t-s+3=0 & (3)\end{cases}$$

بجمع (2) و (3) نجد $-3s+5=0\Rightarrow s=\frac{5}{3}$ نعوض في (3) نجد $-t-\frac{5}{3}+3=0\Rightarrow t=\frac{4}{3}$

بتعويض قيمتي t,s في (1) نجد : $\frac{8}{3}+3=\frac{5}{3}+3\Rightarrow\frac{8}{3}=\frac{5}{3}$

غير محققة فالمستقيمان غير متقاطعين ، فهما لا يقعان في مستوٍ واحد ،فهما متخالفان

التمرين 34 :

في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$

والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$

dهو المستقيم المار بالنقطة A والموجّه بالشعاع $\vec{u}$ d'هوالمستقيم المار بالنقطة B والموجّه بالشعاع $\vec{v}$

أثبت أنّ المستقيمين d و d' متقاطعين ثمّ عيّن I نقطة تقاطعهما

الحل :

الشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$ غير مرتبطين خطّيّاً لأنّ مركّبتاهما غير متناسبة

فالمستقيمان d و d' غير متوازيين نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيمين :

$$d:\begin{cases} x=t+3\\ y=-1\\ z=-2t+1\end{cases},\quad d':\begin{cases} x=2s+3\\ y=s-3\\ z=-3s-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t+3=2s+3 & (1)\\ -1=s-3 & (2)\\ -2t+1=-3s-1 & (3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-2s=0 & (1)\\ s=2 & (2)\\ -2t+3s+2=0 & (3)\end{cases}$$

من (2) $s=2$ نعوض في (1) $\Leftarrow$ $t=4$ نعوض قيمتي s و t في (3)

$$l_1=-2\times 4+1=-7$$

$$l_2=-3\times 2-1=-7 \Rightarrow l_1=l_2$$

فالمستقيمين متقاطعين ولإيجاد نقطة التقاطع $I(x,y,z)$ نعوض $t=4$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d

$$x=7\,,y=-1\,,z=-7 \Rightarrow I(7,-1,-7)$$

التمرين 35 :

اكتب معادلة للمستوي Q المار بالنقطة $A(1,0,1)$ موازياً للمستوي $\mathcal{P}: 2x-y+3z=4$

الحل :

$$\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(2,-1,3)\ ,\ A(1,0,1)\in Q \Rightarrow$$

$$2(x-1)-1(y-0)+3(z-1)=0 \Rightarrow 2x-y+3z-5=0$$

التمرين 36 :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ المستقيم $t\in\mathbb{R}$: $d:\begin{cases} x=2t-5\\ y=t-2\\ z=-3t+3\end{cases}$ والنقطة $A(1,1,-2)$ والمطلوب :

❶ أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم d ❷ اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والعمودي على المستقيم d

الحل :

❶ نعوض إحداثيات A في معادلة المستقيم فنجد : $\begin{cases} 1=2t-5\\ 1=t-2\\ -2=-3t+3\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t=3\\ t=3\\ t=\frac{5}{3}\end{matrix}$ غير محققة إذاً $A\notin d$

❷ بما أن Q عمودي على d فإن$\overrightarrow{n_Q}=\vec{u}(2\,,1\,,-3)$ و المستوي مار من $A(1,1,-2)$

$$2(x-1)+1(y-1)-3(z+2)=0 \Rightarrow Q: 2x+y-3z-9=0$$

التمرين 37 :

جد نقطة تنتمي لمحور الفواصل متساوية البعد عن النقطتين $A(1,0,1), B(2,-2,3)$
واستنتج معادلة للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

الحل :

بفرض $M(x,0,0)$ نقطة تنتمي لمحور الفواصل متساوية البعد عن النقطتين $A(1,0,1), B(2,-2,3)$ وبالتالي:

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 \Rightarrow (x-1)^2+0+1=(x-2)^2+4+9 \Rightarrow$$

$$x^2-2x+1+1=x^2-4x+4+13 \Rightarrow 2x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{2} \Rightarrow M(\frac{15}{2},0,0)$$

المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ مار من $M(\frac{15}{2},0,0)$ وناظمه $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(1,-2,2)$ معادلته :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow 1\left(x-\frac{15}{2}\right)-2(y-0)+2(z-0)=0 \Rightarrow$$

$$x-\frac{15}{2}-2y+2z=0 \Rightarrow 2x-4y+4z-15=0$$

التمرين 38 :

أوجد معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ المار بالنقطة $A(2,5,-2)$ والعمودي على كل من المستويين :

$\mathcal{P}: x-2y+3z-5=0 \quad , \quad \mathcal{Q}: x+y+z+1=0$

الحل :

لدينا $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}(1,1,1)\ ,\ \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-2,3)$ ولنفرض $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(a,b,c)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0\\ \overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}.\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a-2b+3c=0\\ a+b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a-2b+3c=0\\ -a-b-c=0\end{cases} \overset{\text{بالجمع}}{\Longrightarrow} -3b+2C=0 \Rightarrow b=\frac{2}{3}c$$

بفرض $c=3$ وبالتالي $a=-5\ ,\ b=2$ ومنه $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(-5,2,3)$ و المستوي $\mathcal{R}$ المار بالنقطة $A(2,5,-2)$

$$-5(x-2)+2(y-5)+3(z+2)=0 \Rightarrow -5x+2y+3z+6=0$$

التمرين 39 :

أوجد معادلة للمستوي Q المار بالنقطتين $A(1,-1,2)\ ,B(2,0,4)$
والعمودي على المستوي $\mathcal{P}: x-y+3z-4=0$

الحل :

بفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ولدينا $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-1,3)$ و $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ وبالتالي

$$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=0 \ ...(1)$$
$$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB}=0 \ ...(2)$$

$a-b+3c=0\ \ (1)\ ,\ \ a+b+2c=0\ (2)$ بالجمع $\Rightarrow 2a+5c=0 \Rightarrow a=\frac{-5}{2}c$

نفرض $c=-2$ وبالتالي $a=5$ ومنه $b=-1$ ومنه $\overrightarrow{n_Q}(5,-1,-2)$

والمستوي مار من $B(2,0,4)$ وبالتالي معادلة المستوي Q :

$$a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$
$$5(x-2)-(y-0)-2(z-4)=0 \Rightarrow 5x-y-2z-2=0$$

التمرين 40 :

لتكن لدينا الأشعة $\overrightarrow{AC}(4,-2,6)$, $\overrightarrow{AB}(2,-1,3)$, $\overrightarrow{AD}(2,-1,6)$ والنقطة $E(2,-1,6)$

❶ أثبت أن النقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة ثم استنتج أن $A\,,B\,,C\,,D$ تقع في مستوي واحد

❷ اكتب معادلة للمستوي المار من E ويقبل $\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه

الحل :

❶ $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا والنقاط النقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}$ فالأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا والنقاط $A\,,B\,,C\,,D$ تقع في مستو واحد

❷ بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي $\mathcal{P}$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Longrightarrow 2a-b+3c=0\ldots(1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AD}=0\Longrightarrow 2a-b+6c=0\ldots(2)$$

بالطرح $3c=0\Longrightarrow c=0$ وبالتالي $b=2a$ و بفرض $a=1$ نجد $b=2$

ومنه $\vec{n}(1,2,0)$ والمستوي يمر بالنقطة $E(2,-1,6)$ وبالتالي معادلة المستوي $\mathcal{P}$ هي :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\Longrightarrow 1(x-2)+2(y+1)+0(z-6)=0\Longrightarrow x+2y=0$$

التمرين 41 :

برهن أن المستويين متوازيين ثم أوجد البعد بينهما
$$\mathcal{P}:\quad x-2y+3z-1=0$$
$$\mathcal{Q}:\quad 2x-4y+6z+3=0$$

الحل :

$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=(1,-2,3)$, $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}=(2,-4,6)\Longrightarrow\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}=2\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$ الشعاعين مرتبطان خطيا فالمستويين متوازيين

نفرض $z=0$, $y=0$ وبالتالي $x=1$ ومنه $H(1,0,0)\in\mathcal{P}$ وبالتالي :

$$dist(H,\mathcal{Q})=\frac{|2(1)-4(0)+6(0)+3|}{\sqrt{4+16+36}}=\frac{5}{\sqrt{56}}$$

فالبعد بين المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ هو $\frac{5}{\sqrt{56}}$

التمرين 42 :

نُعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ومعادلات ثلاثة مستويات،
$$\mathcal{P}_1: x-2y-3z=3$$
$$\mathcal{P}_2: 2x-y-4z=7$$
$$\mathcal{P}_3: 3x-3y-5z=8$$

أثبت أن المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيينها

الحل :

$$\begin{cases}\mathcal{P}_1: x-2y-3z=3\\ \mathcal{P}_2: 2x-y-4z=7\\ \mathcal{P}_3: 3x-3y-5z=8\end{cases}\sim\begin{matrix}x-2y-3z=3\\ 0+3y+2z=1\\ 0+3y+4z=-1\end{matrix}\sim\begin{matrix}x-2y-3z=3\\ 0+3y+2z=1\\ 0+0-2z=2\end{matrix}$$

للجملة حل وحيد والمستويات تتقاطع في نقطة $(2,1,-1)$ $z=-1\Longrightarrow y=1\Longrightarrow x=2\Longrightarrow$

التمرين 43 :

نُعطي معلماً متجانساً $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ومعادلات ثلاثة مستويات

$$\mathcal{P}_1: x+2y+z=0$$
$$\mathcal{P}_2: 2x-y+3z=0$$
$$\mathcal{P}_3: 3x-4y+5z=0$$

أثبت أن المستويات الثلاثة تتقاطع بفصل مشترك يطلب كتابة التمثيل الوسيطي له

الحل :

$$\begin{cases}\mathcal{P}_1: x+2y+z=0\\ \mathcal{P}_2: 2x-y+3z=0\\ \mathcal{P}_3: 3x-4y+5z=0\end{cases} \sim \begin{matrix} x+2y+z=0\\ 0-5y+z=0\\ 0-10y+2z=0\end{matrix} \sim \begin{matrix} x+2y+z=0\\ -5y+z=0\\ 0z=0\end{matrix}$$

للمعادلة الاخيرة عدد غير منته من الحلول فللجملة عدد غير منته من الحلول

والمستويات تتقاطع بمستقيم لكتابة التمثيل الوسيطي : من الثانية نجد $z=5y$

نفرض $y=t$ وبالتالي $z=5t$ نعوّض في الأولى نجد $x=-7t$ ومنه $t\in\mathbb{R}$
$$\begin{cases}x=-7t\\ y=t\\ z=5t\end{cases}$$

التمرين 44 :

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ، نتأمّل نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$

و المستوي P الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$

أثبت أنّ المستقيم (AB) يقطع المستوي P وعيّن احداثيّات C نقطة التقاطع

الحل :

$$\overrightarrow{AB}(-3,4,5)\ ,\qquad \vec{n}(2,-3,1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{n}=-6-12+5=-13\neq 0$$

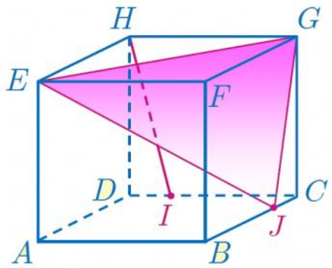
ومنه $\vec{n}$ لا يعامد $\overrightarrow{AB}$ وبالتالي (AB) لا يوازي المستوي P ، فهو قاطع له في C

المستقيم (AB) مار من $A(2,-1,0)$ و $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ وبالتالي $(AB)\begin{cases}x=-3t+2\\ y=4t-1\\ z=5t\end{cases}$

نعوض في معادلة المستوي P فنجد $2(-3t+2)-3(4t-1)+5t-5=0 \Longrightarrow 13t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{13}$

نعوض $t=\frac{2}{13}$ في المعادلات الوسيطية فنحصل على نقطة التقاطع $c\left(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)$

التمرين 45 :



$ABCDEFGH$ مكعّب حيث I نقطة من CD تحقّق : $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب :

❶ جد احداثيّات النقط G , I , J , E , H في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

❷ أثبت أنّ الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطيّاً

❸ أثبت أنّ الأشعّة $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HI}$ مرتبطة خطيّاً ❹ أثبت أنّ المستقيم (HI) يوازي (EGJ)

الحل :

❶ $H(0,1,1)\ ,\quad E(0,0,1)\ ,\quad J\left(1,\frac{3}{4},0\right)\ ,\quad I\left(\frac{1}{4},1,0\right)\ ,\quad G(1,1,1)$

❷ $\overrightarrow{EG}(1,1,0)\ ,\quad \overrightarrow{EJ}\left(1,\frac{3}{4},-1\right)\ ,\quad \overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{4},0,-1\right)$

الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطيّاً لأن مركباتهما غير متناسبة

❸ $\overrightarrow{HI}=a\overrightarrow{EJ}+b\overrightarrow{EG} \Longrightarrow \left(\frac{1}{4},0,-1\right)=a\left(1,\frac{3}{4},-1\right)+b(1,1,0)\Longrightarrow$

$$\left(\frac{1}{4},0,-1\right)=\left(a+b,\frac{3}{4}a+b,-a\right)\Longrightarrow a+b=\frac{1}{4}\ ①\qquad \frac{3}{4}a+b=0\ ②\qquad a=1\ ③$$

بحل المعادلات الثلاثة نجد $a=1\ ,\ b=-\frac{3}{4}$ بالتالي $\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{EJ}-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$ و الأشعّة $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيّاً

❹ الأشعّة $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيّاً فهي تقع في مستوٍ واحد بالتالي المستقيم (HI) يوازي (EGJ)

التمرين 46 :

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط $A(2,1,3)\,,B(1,0,-1)\,,C(4,0,0)\,\,,D(0,4,0)\,,E(1,-1,1)$

❶ أثبت أنّ النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

❷ أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) .

❸ عيّن احداثيّات N نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (CDE).

❹ عند أي قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M\,(\,m\,,1\,,0\,)$ للمستوى (CDE)

الحل :

❶ الشعاعين $\overrightarrow{CD}=(-4,4,0)$ و $\overrightarrow{CE}=(-3,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً
لان مركّباتهما غير متناسبة ، والنقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة

❷ $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)\;\;,\;\overrightarrow{CD}=(-4,4,0)\;,\;\overrightarrow{CE}=(-3,-1,1)\Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(-1,-1,-4).(\,-4,4,0\,)=4-4=0$ متعامدان

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}=(-1,-1,-4).(-3,-1,1)=3+1-4=0$ متعامدان

والمستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي فهو عمودي على المستوي (CDE)

❸ $A(2,1,3)\;\;,\;\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)\Rightarrow(AB):\begin{cases}x=-t+2\\y=-t+1\\z=-4t+3\end{cases}\;\;t\in\mathbb{R}$

المستوي (CDE) مار من $C(4,0,0)$ ويقبل $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)$ ناظما له وبالتالي معادلته :

$-1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0\Rightarrow x+y+4z-4=0$

لتعيين احداثيّات N نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) في معادلة المستوى (CDE) فنجد :

$-t+2-t+1-16t+12-4=0\Rightarrow t=\frac{11}{18}$

نعوض $t=\frac{11}{18}$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) نجد $N(\frac{25}{18}\,,\frac{7}{18}\,,-1)$

❹ نعوض إحداثيات النقطة $M(m,1,0)$ في معادلة المستوي (ABC)

$x+y+4z-4=0\Rightarrow m+1+0-4=0\Rightarrow m=3\Rightarrow M(3,1,0)$

التمرين 47 :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ والمستويين $\mathcal{P}$ و Q :

$\mathcal{P}:x-y+z=0\qquad\&\qquad Q:3x+z-1=0$

احسب بعد A عن المستقيم d الذي يمثّل الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q .

الحل :

$\overrightarrow{n_Q}(3,-1,1)\;,\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}(1,-1,1)$ غير مرتبطين خطاً فالمستويين غير متوازيين فهما متقاطعين بفصل مشترك .

$x-y+z=0\qquad(1)\qquad\qquad 3x+z-1=0\qquad(2)$

من المعادلة (2) نجد $z=-3x+1$ نفرض $x=t$ وبالتالي $z=-3t+1$

نعوض في (1) نجد $y=-2t+1$ ومنه $d:\begin{cases}x=t\\y=-2t+1\\z=-3t+1\end{cases}\;\;t\in\mathbb{R}$ شعاع توجيهه $\vec{u}=(1,-2,-3)$

بفرض A' المسقط القائم لـ A على d وبالتالي $A'(t,-2t+1,-3t+1)$ و $\overrightarrow{AA'}(t-2,-2t-1,-3t+2)$

$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0\Rightarrow\;t-2+4t+2+9t-6=0\Rightarrow 14t=6\Rightarrow t=\frac{3}{7}\Rightarrow A'\left(\frac{3}{7},\frac{1}{7},\frac{-2}{7}\right)$

$$\overrightarrow{AA'}\left(\frac{-11}{7},\frac{-13}{7},\frac{5}{7}\right)\;\Rightarrow\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|=\sqrt{\frac{121}{49}+\frac{169}{49}+\frac{25}{49}}=\sqrt{\frac{315}{49}}=\sqrt{\frac{7\times45}{49}}=\sqrt{\frac{45}{7}}$$

التمرين 48 :

أثبت أن النقطة $A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ هي مسقط النقطة $A(3,-1,2)$ على المستقيم $t\in\mathbb{R}:\quad d:\begin{cases}x=-t+3\\y=-t+2\\z=t\end{cases}$

الحل :

نعوض احداثيات النقطة A' في معادلات المستقيم d

$$x=\frac{4}{3}\Rightarrow -t+3=\frac{4}{3}\Rightarrow -3t+9=4\Rightarrow t=\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{1}{3}\Rightarrow -t+2=\frac{1}{3}\Rightarrow -3t+6=1\Rightarrow t=\frac{5}{3}\quad,\quad z=\frac{5}{3}\Rightarrow t=\frac{5}{3}$$

وبالتالي النقطة A' تنتمي للمستقيم d

$$\overrightarrow{AA'}\left(\frac{-5}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}\right),\ \vec{u}(-1,-1,1)\Rightarrow \overrightarrow{AA'}.\vec{u}=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=0\Rightarrow \overrightarrow{AA'}\perp\vec{u}$$

ومنه فالنقطة $A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ هي مسقط النقطة $A(3,-1,2)$ على المستقيم d

التمرين 49 :

نتأمل النقاط $A(2,3,0)\ ,\ B(2,3,6)\ ,\ M(4,-1,2)$

❶ أثبت أن M لا تقع على (AB)

❷ أثبت أن لكل نقطة K من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(2,3,z)$

❸ احسب $(MK)^2$ بدلالة z

❹ عند أي قيمة لـ z يكون MK أصغر ما يمكن

❺ استنتج بُعد M عن المستقيم (AB)

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}(0,0,6)\Rightarrow (AB):\begin{cases}x=2\\y=3\\z=6t\end{cases}$

بتعويض إحداثيات M في التمثيل الوسيطي نجد $2\neq 4$ إذاً M لا تقع على (AB)

❷ كل نقطة $K\in(AB)$ لها إحداثيات التمثيل الوسيطي أي $(2,3,6t)$.أي أنها من الشكل $(2,3,z)$

❸ $M(4,-1,2)\ ,K(2,3,z)\Rightarrow (MK)^2=(2-4)^2+(3+1)^2+(z-2)^2\Rightarrow$

$$(MK)^2=4+16+(z-2)^2\Rightarrow (MK)^2=(z-2)^2+20$$

❹ أصغر قيمة لـ MK هي عندما $(z-2)^2=0$ وبالتالي $z=2$ ويكون عندها $(MK)^2=20$

❺ بعد M عن المستقيم (AB)هو أصغر قيمة للمسافة MK بالتالي البعد $dist(M,(AB))=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

التمرين 50 :

نتأمل في معلم متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ والمستويين :

$$\mathcal{P} : x+y-2z-1=0 \quad , \quad \mathcal{Q} : x+y+z=0$$

1. أثبت أن المستويين $\mathcal{P}\,,\mathcal{Q}$ متعامدين
2. احسب بُعد A عن كل من المستويين
3. استنتج بُعد A عن الفصل المشترك للمستويين

الحل :

❶ $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,-2)\ ,\ \vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,1,1) \Longrightarrow \vec{n}_{\mathcal{P}}.\vec{n}_{\mathcal{Q}}=1+1-2=0$ الناظمين متعامدين فالمستويين متعامدين

❷ $d_1=dis(A,\mathcal{P})=\frac{|2+2+2-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{|2+2+2-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{5}{\sqrt{6}}\ ,d_2=dis(A,\mathcal{Q})=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$

❸ بفرض $A_{\mathcal{P}}$ مسقط A على $\mathcal{P}$ و $A_{\mathcal{Q}}$ مسقط A على $\mathcal{Q}$ و A' مسقط $A_{\mathcal{P}}$ على d الفصل المشترك لهما

و بما أن المستويين متعامدان فحسب الاعمدة الثلاث تكون A' مسقط A على d

وبالتالي $AA_{\mathcal{P}}A'$ مثلث قائم في $A_{\mathcal{P}}$ وحسب فيثاغورث يكون : $d=\sqrt{d_1^2+d_2^2}=\sqrt{\frac{25}{6}+\frac{9}{3}}=\sqrt{\frac{43}{6}}$

التمرين 51 :

نتأمّل في معلم متجانس $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ النقاط $A(2,4,3)\ ,\ B(4,-2,3)\ ,\ C(1,-1,1)\ ,\ D(3,3,-3)$

1. أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة
2. عيّن إحداثيّات D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC)

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}=(2,-6,0)$ و $\overrightarrow{AC}=(-1,-5,-2)$ غير مرتبطين لأن مركباتهما غير متناسبة فالنقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

❷ نوجد معادلة المستوي (ABC) والتمثيل الوسيطي لـ (DD')

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا $\overrightarrow{AB}=(2,-6,0)$ و $\overrightarrow{AC}=(-1,-5,-2)$ وبالتالي :

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \Longrightarrow 2a-6b=0 \Longrightarrow a=3b \quad \dots(1)$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \Longrightarrow -a-5b-2c=0 \quad \dots(2)$

نعوض (1) في (2) نجد : $-3b-5b-2c=0 \Longrightarrow c=-4b$

نفرض $b=1$ وبالتالي $c=-4$ ومنه $a=3$

وبالتالي $\vec{n}(3,1,-4)$ والمستوي (ABC) مار من $C(1,-1,1)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Longrightarrow$

$3(x-1)+1(y+1)-4(z-1)=0 \Longrightarrow$

$3x+y-4z-3+1+4=0 \Longrightarrow (ABC): 3x+y-4z+2=0$

المستقيم (DD') مار من $D(3,3,-3)$ وعمودي على المستوي (ABC) وبالتالي $\overrightarrow{DD'}=\vec{n}(3,1,-4)$

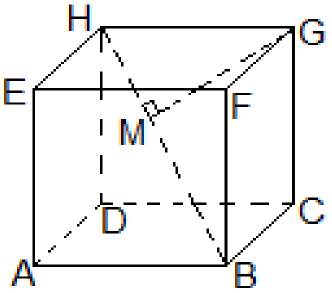
$$(DD'):\begin{cases} x=3t+3 \\ y=t+3 \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=-4t-3 \end{cases}$$

وبالتالي لا يجاد D' نعوض التمثيل الوسيطي لـ (DD') في معادلة المستوي (ABC) فنجد :

$$9t+9+t+3+16t+12+2=0 \Longrightarrow 26t=-26 \Longrightarrow t=-1 \Longrightarrow D'(0,2,1)$$

التمرين 52 :

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1. و ليكن $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ معلماً متجانساً .
النقطة M هي مسقط النقطة G على (BH) . المطلوب :



❶ أوجد إحداثيات كل من النقاط : E, G, B, H .
❷ أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (BH)
❸ استنتج إحداثيات النقطة M
❹ أثبت أن النقطة M هي مسقط النقطة E على (BH)

الحل :

❶ $H(0,0,1)\,,B(1,1,0)\,,G(0,1,1)\,,E(1,0,1)$

❷ $\overrightarrow{BH}(-1\,,-1\,,1) \Longrightarrow (BH)\begin{cases} x=-t+1 \\ y=-t+1 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

❸ بما أن M مسقط G على (BH) فإن $M\in(BH) \Longrightarrow M(-t+1\,,-t+1\,,t)$ و منه
$\overrightarrow{GM}(-t+1\,,-t\,,t-1)$

$$\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{BH}=0 \Longrightarrow t-1+t+t-1=0 \Longrightarrow t=\frac{2}{3} \Longrightarrow M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

❹ $\overrightarrow{EM}\left(\frac{-2}{3}\,,\frac{1}{3}\,,\frac{-1}{3}\right)$ و $\overrightarrow{BH}(-1\,,-1\,,1)$ ومنه $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{BH}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$
بالتالي (EM) و (BH) متعامدان و $M\in(BH)$ فإن M مسقط E على (BH)

التمرين 53 :

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ، نتأمّل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته :
$x+2y+3z=5$ اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

الحل :

نصف قطر الكرة هو بعد مركزها عن المستوي المماس لها $R=dist(A,\mathcal{P})=\frac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$

$$S:(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$$

التمرين 54 :

نتأمل المعلم المتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطتين $A(1,0,1),B(2,-2,3)$ اكتب معادلة للكرة التي يكون $[AB]$ قطرا فيها

الحل:

بما أن $[AB]$ قطر في الكرة فإن I منتصف $[AB]$ هو مركزها

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3}{2}\ ,y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=-1,z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=2$$

$$\overrightarrow{AB}(1,-2,2) \Longrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{1+4+4}=3 \Longrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

التمرين 55 :

أوجد معادلة للمستوي المماس للكرة $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=53$ في النقطة $B(3,4,-2)$

الحل :

مركز الكرة $A(2,-2,2)$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}(1,6,-4)$
المستوي المطلوب مار من $B(3,4,-2)$ وناظمه $\overrightarrow{AB}(1,6,-4)$ معادلته :

$$1(x-3)+6(y-4)-4(z+2)=0 \Longrightarrow$$
$$x+6y-4z-3-24-8=0 \Longrightarrow x+6y-4z-35=0$$

التمرين 56 :

نتأمل في معلم متجانس $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$ ليكن لدينا المستويان $P: x+y+z-6=0$ و $Q: x+y+z=0$

و المستقيم d الذي يقبل تمثيلاً وسيطيّاً: $t\in\mathbb{R}$: $d:\begin{cases}x=t-1\\ y=t\\ z=t+1\end{cases}$

❶ أثبت أن المستقيم d عمودي على كل من المستويين

❷ جد معادلة الكرة التي مركزها يقع على المستقيم d وتمس كل من المستويين P و Q

الحل :

❶ ناظم المستوي P وشعاع توجيه المستقيم d هما $\vec{u}(1\,,1\,,1)$ ، $\overrightarrow{n_Q}(1\,,1\,,1)$ ، $\overrightarrow{n_P}(1\,,1\,,1)$

$\overrightarrow{n_P}=\vec{u}$ فالشعاعين مرتبطين خطيا وبالتالي المستقيم d عمودي على المستوي P

$\overrightarrow{n_Q}=\vec{u}$ فالشعاعين مرتبطين خطيا وبالتالي المستقيم d عمودي على المستوي Q

❷ بما أن الكرة تمس كل من المستويين P و Q و المستقيم d يمر من مركز الدائرة وعمودي على المستويين P و Q

فإن نقطتي تقاطع المستقيم d مع كل من المستويين P و Q تشكلان قطر في الدائرة

لتكن B نقطة تقاطع d مع P :

$$(t-1)+(t)+(t+1)-6=0 \Rightarrow 3t=6 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(1\,,2\,,3)$$

لتكن C نقطة تقاطع d مع Q :

$$(t-1)+(t)+(t+1)=0 \Rightarrow 3t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow C(-1\,,0\,,1)$$

بالتالي مركز الكرة هو $D\left(\frac{-1+1}{2}\,,\frac{0+2}{2}\,,\frac{1+3}{2}\right) \Rightarrow D(0\,,1\,,2)$

ونصف قطرها $R=CD=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$ ومنه معادلة الكرة

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Rightarrow x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=11$$

التمرين 57 :

نتأمل في معلم متجانس $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$ النقاط $A(-4\,,0\,,1)$ و $B(-2\,,0\,,5)$ و $C(-2\,,4\,,3)$ و $D(-2\,,0\,,3)$

والمطلوب : جد معادلة الكرة المارة برباعي الوجوه $ABCD$

الحل :

نوجد المستوي المحوري لكل من القطع المستقيمة $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

المستوي $\mathcal{P}$ مار من $I(-3\,,0\,,3)$ منتصف $[AB]$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=\overrightarrow{AB}(2\,,0\,,4)$ بالتالي :

$$2(x+3)+0(y-0)+4(z-3)=0 \Rightarrow 2x+4z-6=0 \Rightarrow \mathcal{P}: x+2z-3=0$$

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$

المستوي $\mathcal{Q}$ مار من $J(-3\,,2\,,2)$ منتصف $[AC]$ و شعاع الناظم عليه هو $\vec{n}=\overrightarrow{AC}(2\,,4\,,2)$

$$2(x+3)+4(y-2)+2(z-2)=0 \Rightarrow 2x+4y+2z-6=0 \Rightarrow \mathcal{Q}: x+2y+z-3=0$$

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AD]$

المستوي $\mathcal{R}$ مار من $K(-3\,,0\,,2)$ منتصف $[AD]$ و شعاع الناظم عليه هو $\vec{n}=\overrightarrow{AD}(2\,,0\,,2)$

$$2(x+3)+0(y-0)+2(z-2)=0 \Rightarrow 2x+2z+2=0 \Rightarrow \mathcal{R}: x+z+1=0$$

$$\mathcal{P}: x+2z=3 \quad ① \quad , \quad \mathcal{R}: x+z=-1 \quad ② \quad , \mathcal{Q}: x+2y+z=3 \quad ③$$

بطرح المعادلة ② من ① نجد $z=4$ نعوض في ② نجد $x=-5$ نعوض في ③ نجد $y=2$

تتقاطع المستويات في النقطة $G(-5\,,2\,,4)$ وهي مركز الكرة المارة برباعي الوجوه $ABCD$

ونصف قطرها $[GB]=\sqrt{(3)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$

بالتالي معادلة الكرة $(x+5)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=14$

التمرين 58 :

نتأمّل في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ المستوي $P: 3x+y-4z+2=0$

والكرة $S:(x-3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=75$

❶ أثبت أن المستوي P يقطع الكرة S بدائرة

❷ جد نصف قطر الدائرة الناتجة عن التقاطع وعين مركزها

الحل :

❶ الكرة S مركزها $D(3,3,-3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{75}$

$$dis(A,P)=\frac{|3x_A+y_A-4z_A+2|}{\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-4)^2}}=\frac{|3(3)+(3)-4(-3)+2|}{\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-4)^2}}=\frac{26}{\sqrt{26}}=\sqrt{26}$$

$dis(A,P)<R$ بالتالي المستوي يقطع الكرة بدائرة

❷ نصف قطر دائرة المقطع هو : $r^2=75-26=49\Rightarrow r=7$

مركز الدائرة هو النقطة D' مسقط النقطة D مركز الكرة S على المستوي P

المستقيم (DD') مار من $D(3,3,-3)$ وعمودي على المستوي P وبالتالي $\overrightarrow{DD'}=\vec{n}(3,1,-4)$

$(DD'):\begin{cases}x=3t+3\\y=t+3\\z=-4t-3\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$ وبالتالي لايجاد D' نعوض التمثيل الوسيطي لـ (DD') في معادلة المستوي P

فنجد : $9t+9+t+3+16t+12+2=0\Rightarrow 26t=-26\Rightarrow t=-1\Rightarrow D'(0,2,1)$

التمرين 59 :

لتكن لدينا النقاط $O(0,0,0),A(0,0,6),B(4,0,0)$

❶ اكتب معادلة للأسطوانة التي محورها $\left(O,\vec{k}\right)$ و مركزي قاعدتيها A و 0 ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$.

❷ اكتب معادلة للمخروط الذي محوره $(O,\vec{\imath})$ و رأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{6}$

❸ أي من النقطتين $C(10,0,0),D\left(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ تنتمي للمخروط واي منها لا تنتمي مع التعليل

الحل :

❶ $\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\z_1\le z\le z_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=6\\0\le z\le 6\end{cases}$

❷ $\begin{cases}y^2+z^2-\frac{r^2}{a^2}x^2=0\\0\le x\le a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2+z^2-\frac{6}{16}x^2=0\\0\le x\le 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2+z^2-\frac{3}{8}x^2=0\\0\le x\le 4\end{cases}$

❸ من أجل النقطة $D\left(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ نلاحظ : $0\le x_D=2\le 4$ و

بالتالي النقطة D تنتمي للمخروط $(y_D)^2+(z_D)^2-\frac{3}{8}(x_D)^2=1+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}(4)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$

من أجل النقطة $C(10,0,0)$ نلاحظ : $0\le x_C=10\not\le 4$ و بالتالي النقطة C لا تنتمي للمخروط

التمرين 60 :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ ، عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في كل من الحالات التالية :

❶ $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$, ❷ $y^2+z^2-\frac{2}{9}=0 \quad ;0\le x\le 1$

الحل :

❶ نقوم برد المعادلة $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$ بالإتمام إلى مربّع كامل إلى الصيغة القانونيّة :

$$x^2-2x+1+y^2+6y+9+z^2=1+9+2\Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$$

مجموعة النقاط من الشكل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ تمثل كرة :

$$\Omega(1,-3,0) \quad \& \quad r=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

❷ $$y^2+z^2-\frac{2}{9}=0\Rightarrow y^2+z^2=\frac{2}{9}= \quad ;0\le x\le 1$$

من الشكل $y^2+z^2=r^2 \;\; ; x_1\le x\le x_2$ وهي تمثل معادلة اسطوانة محورها منطبق على ox

و قاعدتيها هما دائرتان طبوقتان نصف قطرهما $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ومركزيهما $O(0,0,0),A(1,0,0)$

التمرين 61 :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ ، لتكن النقطتين $A(2,1,2)$ $B(-2,0,2)$

❶ اعطِ معادلة للمجموعة ε المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

❷ ما طبيعة المجموعة ε ؟

الحل :

❶ $$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Rightarrow (2-x,1-y,2-z).(-2-x,-y,2-z)=0$$

$$x^2-4+y^2-y+(2-z)^2=0\Rightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$$

❷ مجموعة النقاط ε هي كرة مركزها $\Omega\left(0,\frac{1}{2},2\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$

المسألة 1 :

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ لتكن النقاط : $A(2,4,3)$, $B(4,-2,3)$, $C(1,-1,1)$, $D(3,3,-3)$
$E(0,2,1)$, $N(2,2,-2)$, $F(1,2,3)$, $H(-2,-2,2)$
والمستوي $Q: 3x-3y+2z+4=0$

❶ أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC)

❷ أكتب معادلة للمستوي P المار من D, N و العمودي على المستوي (ABC)

❸ أحسب بعد النقطة F عن Δ الفصل المشترك للمستويين P و (ABC)

❹ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من D وعمودي على المستوي (ABC)

❺ جد D' مسقط D على المستوي (ABC)

❻ أثبت أن المستويات (ABC) و P و Q تتقاطع في النقطة E

❼ أثبت أن المستوي (ABC) يقطع الكرة التي مركزها D و تمر من H ثم جد نصف قطر الدائرة الناتجة عن التقاطع

❽ أعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=3$ وما طبيعة المجموعة ε

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}(2,-6,0)$, $\overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$ الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة .

لنوجد معادلة المستوي (ABC) ، بفرض $\vec{n}_{ABC}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC)

$$\begin{cases} \vec{n}_{ABC}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow 2a-6b=0 & (1) \\ \vec{n}_{ABC}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow -a-5b-2c=0 & (2) \end{cases}$$

من (1) $a=3b$ ولأجل $b=1$ يكون $a=3$ وبالتعويض في (2) نجد $c=-4$ $\vec{n}_{ABC}(3,1,-4)$

المستوي(ABC) مار من $C(1,-1,1)$ وناظمه $\vec{n}(3,1,-4)$:

$$3(x-1)+(y+1)-4(z-1)=0 \Rightarrow (ABC): 3x+y-4z+2=0$$

❷ $\overrightarrow{DN}(-1,-1,1)$, $\vec{n}_{ABC}(3,1,-4)$ وبفرض $\vec{n}_P(a,b,c)$

$$\begin{cases} \vec{n}_P.\overrightarrow{DN}=0 \Rightarrow -a-b+c=0 & (1) \\ \vec{n}_P.\vec{n}_{ABC}=0 \Rightarrow 3a+b-4c=0 & (2) \end{cases}$$

بالجمع نجد : $2a-3c=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}c$ وبفرض $c=2$ نجد $a=3$ نعوض في (1) لنجد أن $b=-1$

$$\vec{n}_P(3,-1,2) \ , N(2,2,-2) \quad , \quad a(x-x_N)+b(y-y_N)+c(z-z_N)=0 \Rightarrow$$
$$3(x-2)-(y-2)+2(z+2)=0 \Rightarrow P: \ 3x-y+2z=0$$

❸ أحسب بعد النقطة $F(1,2,3)$ عن الفصل المشترك للمستويين P و (ABC)

$$(ABC): 3x+y-4z+2=0 \quad , \quad P: \ 3x-y+2z=0$$

$$d_1=dis(F,ABC)=\frac{|3x_F+y_F-4z_F+2|}{\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-4)^2}}=\frac{|9+2-12+2|}{\sqrt{9+1+16}}=\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$d_2=dis(F,P)=\frac{|3x_F-y_F+2z_F|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2+(2)^2}}=\frac{|3-2+6|}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$dis(F,\Delta)=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2+\left(\frac{8}{\sqrt{14}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{26}+\frac{64}{14}}=\sqrt{\frac{1678}{364}}$$

❹ $\vec{u} = \vec{n}_{ABC} = (3,1,-4)\ ,\ D(3,3,-3) \Rightarrow (DD'):\begin{cases} x = 3t+3 \\ y = t+3 \\ z = -4t-3 \end{cases} \quad t \in R$

❺ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (DD') في معادلة المستوي (ABC) :

$$9t+9+t+3+16t+12+2=0 \Rightarrow 26t+26=0 \Rightarrow t=-1$$

نعوض في التمثيلات الوسيطية لـ (DD') فنحصل على $D'(0,2,1)$

❻ $3(3t+3)-3(t+3)+2(-4t-3)+4=0 \Rightarrow -2t-6=0 \Rightarrow t=-3$

$$(ABC): 3x+y-4z+2=0\ ,\ P:\ 3x-y+2z=0\ ,\ Q: 3x-3y+2z+4=0$$

$$\begin{cases} 3x+y-4z=-2 \\ 3x-y+2z=0 \\ 3x-3y+2z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y-4z=-2 \\ 2y-6z=-2 \\ 4y-6z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y-4z=-2 \\ 2y-6z=-2 \\ 4y-6z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+y-4z=-2 \\ 2y-6z=-2 \\ 6z=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$6z=6 \Rightarrow z=1 \Rightarrow 2y-6=-2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow 3x+2-4=-2 \Rightarrow x=0$$

بالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة وهي النقطة $E(0,2,1)$

❼ نصف قطر الكرة التي مركزها $D(3,3,-3)$ وتمر من $H(-2,-2,2)$ هو :

$$R = DH = \sqrt{(-2-3)^2+(-2-3)^2+(2+3)^2} = \sqrt{25+25+25} = \sqrt{75}$$

بعد مركز الكرة D عن المستوي (ABC) هو $\sqrt{26}$

وبالتالي نصف قطر دائرة المقطع هو : $r^2 = 75-26 = 49 \Rightarrow r = 7$

❽ بفرض $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 3 \Rightarrow (x-2, y-4, z-3).(x-4, y+2, z-3) = 3$$

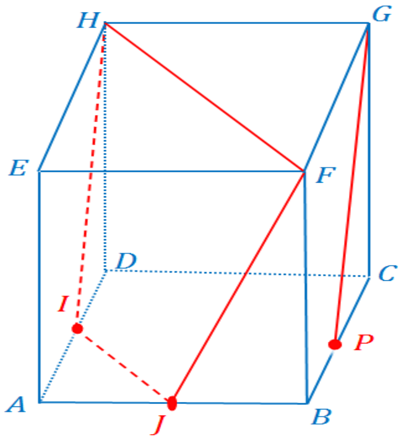
$$x^2-6x+8+y^2-2y-8+(z-3)^2 = 3 \Rightarrow$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)+(z-3)^2 = 3+9+1 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 13$$

مجموعة النقاط ε هي كرة مركزها $\Omega(3,1,3)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{13}$

المسألة 2 :



ليكن $ABCDFEGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = AD = 2$ و $GC = 3$
النقاط I و J و P هي منتصفات $[AD]$ و $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب
نتأمّل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

1. أثبت أنّ المستقيم (GP) يوازي المستوي $(HFJI)$
2. جد معادلة الكرة التي يكون $[EC]$ قطراً فيها
3. جد نصف قطر الدائرة الناتجة عن تقاطع الكرة مع المستوي $(HFJI)$
4. جد معادلة المخروط الناتج عن دوران الضلع $[AH]$ من المثلث AEH حول (AE)
5. احسب بعد النقطة E على المستقيم (JF)
6. احسب بعد النقطة E على المستوي $(HFJI)$
7. هل ينتمي مسقط النقطة E على المستوي $(HFJI)$ الى المستقيم (JF)
8. هل ينتمي مسقط النقطة E على المستقيم (JF) الى المستوي $(HFJI)$
9. احسب $\cos\widehat{EJF}$
10. أحسب حجم الهرم $EHFJI$

الحل :

$A(0,0,0)$ & $B(2,0,0)$ & $C(2,2,0)$ & $D(0,2,0)$
$E(0,0,3)$ & $F(2,0,3)$ & $G(2,2,3)$ & $H(0,2,3)$
$I(0,1,0)$ منتصف $[AD]$ و $J(1,0,0)$ منتصف $[AB]$ و $P(2,1,0)$ منتصف $[BC]$

❶ نفرض $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (HFJ) و $\overrightarrow{HF}(2,-2,0)$, $\overrightarrow{FJ}(-1,0,-3)$

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{HF} = 0 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b$
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{FJ} = 0 \Rightarrow -a - 3c = 0 \Rightarrow a = -3c$

بفرض $c = 1$ وبالتالي $a = -3$ ومنه $b = -3$ وبالتالي $\overrightarrow{n}(-3,-3,1)$
و المستوي (HFJ) مار من $J(1,0,0)$ اذن معادلة المستوي (HFJ) هي :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$
$$-3(x-1) - 3(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow -3x - 3y + z + 3 = 0$$

نعوض احداثيات النقطة I في معادلة المستوي (HFJ) فنجد $0 + 1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
فالنقطة I تنتمي للمستوي (HFJ) وبالتالي معادلة المستوي $(HFJI)$ هي $x + y - 4z - 1 = 0$
$\overrightarrow{GP}(0,-1,-3) \Rightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{GP} = 0 + 3 - 3 = 0$ فالمستقيم (GP) يوازي المستوي $(HFJI)$

طريقة ثانية لحل الطلب الأول :

$\overrightarrow{GP}(0,-1,-3)$, $\overrightarrow{HI}(0,-1,-3) \Rightarrow \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{HI}$ فالشعاعين $\overrightarrow{GP}$ و $\overrightarrow{HI}$ مرتبطين خطيا
المستقيم(GP) يوازي المستقيم(HI) المحتوى في المستوي$(HFJI)$
بالتالي المستقيم(GP) يوازي المستوي$(HFJI)$

❷ مركز الكرة وليكن Ω هو منتصف $[EC]$ وبالتالي $\Omega\left(1,1,\frac{3}{2}\right)$

ونصف قطرها $R = \frac{EC}{2} = \frac{\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(0-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+9}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ و بالتالي معادلة الكرة :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

❸ نصف قطر دائرة التقاطع : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

$$dist(\Omega, (HFJI)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|(1)+(1)-4\left(\frac{3}{2}\right)-1\right|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{5}{\sqrt{18}}$$

$$r = \sqrt{\frac{17}{4} - \frac{5}{18}} = \sqrt{\frac{153}{36} - \frac{10}{36}} = \frac{\sqrt{143}}{6}$$

❹ المخروط ناتج عن دوران الضلع $[AH]$ من المثلث AEH حول (AE)

رأس المخروط هو النقطة A ومركز قاعدته هو النقطة $E(0,0,3)$ و نصف قطر قاعدته هو $r = EH = 2$

معادلته : $\begin{cases} x^2+y^2-\frac{4}{9}z^2=0 \\ 0\le z\le 3 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} x^2+y^2-\frac{r^2}{a^2}z^2=0 \\ 0\le z\le a \end{cases}$

❺ بعد النقطة E على المستقيم (JF)

المستقيم (JF) مار من النقطة $J(1,0,0)$ و $\overrightarrow{JF}(1,0,3)$ وبالتالي : $t\in\mathbb{R}$: $(JF): \begin{cases} x=t+1 \\ y=0 \\ z=3t \end{cases}$

$E'(t+1,0,3t)$ مسقط النقطة $E(0,0,3)$ على المستقيم (JF) وبالتالي $\overrightarrow{EE'}(t+1,0,3t-3)$

$$\overrightarrow{JF}\,.\overrightarrow{EE'}=0 \Rightarrow t+1+9t-9=0 \Rightarrow 10t-8=0 \Rightarrow t=\frac{8}{10} \Rightarrow t=\frac{4}{5}$$

$$E'\left(\frac{9}{5},0,\frac{12}{5}\right)\ ,\overrightarrow{EE'}\left(\frac{9}{5},0,\frac{-3}{5}\right) \Rightarrow dist\big(E,(JF)\big)=\left\|\overrightarrow{EE'}\right\|=\sqrt{\frac{81}{25}+0+\frac{9}{25}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

❻ بعد النقطة E على المستوي $(HFJI)$

لدينا $E(0,0,3)$ ومعادلة المستوي $(HFJI)$ هي $x+y-4z-1=0$ وبالتالي :

$$dist\big(E,(HFJI)\big)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-3(0)-3(0)+(3)+3|}{\sqrt{9+9+1}}=\frac{6}{\sqrt{19}}$$

❼ $dist\big(E,(JF)\big)\neq dist\big(E,(HFJI)\big)$ اذن :

المسقط القائم للنقطة E على المستوي $(HFJI)$ لا ينتمي الى المستقيم (JF)

❽ بما أن المستقيم (JF) محتوى في المستوي $(HFJI)$ فإن :

مسقط النقطة E على المستقيم (JF) ينتمي الى المستوي $(HFJI)$

❾ لدينا $\overrightarrow{JE}(-1,0,3)$ و $\overrightarrow{JF}(1,0,3)$ و $\overrightarrow{JE}\,.\overrightarrow{JF}=-1+0+9=8$

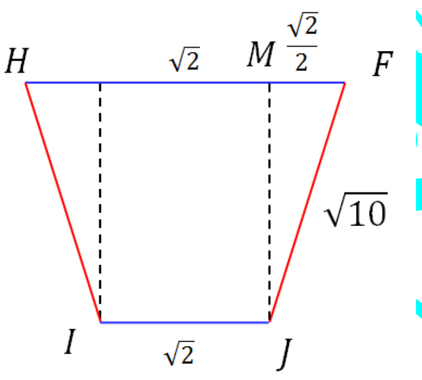
و $\left\|\overrightarrow{JE}\right\|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}$ و $\left\|\overrightarrow{JF}\right\|=\sqrt{1+0+9}=\sqrt{10}$

$$cos\widehat{EJF}=\frac{\overrightarrow{JE}\,.\overrightarrow{JF}}{\left\|\overrightarrow{JE}\right\|\times\left\|\overrightarrow{JF}\right\|}=\frac{8}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

❿ حجم الهرم $EHFJI$

ارتفاع الهرم هو : $dist\big(E,(HFJI)\big)=\frac{13}{3\sqrt{2}}$

القاعدة هي شبه منحرف متساوي الساقين



قاعدته الكبرى : $HF=\left\|\overrightarrow{HF}\right\|=\sqrt{4+4+0}=2\sqrt{2}$

قاعدته الصغرى : $HF=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

ارتفاعه : $h=MJ=\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{10-\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{40-2}{4}}=\sqrt{\frac{38}{4}}=\sqrt{\frac{19}{2}}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}$$

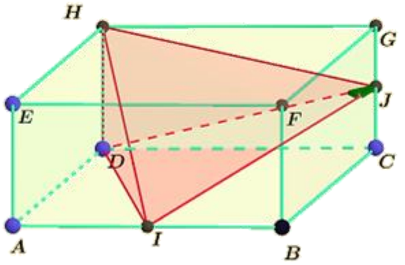
مساحته : $S_{(HFJI)}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{19}}{2}$

$$v_{(EHFJI)}=\frac{1}{3}S_{(HFJI)}.h=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{19}}{2}\times\frac{6}{\sqrt{19}}=3$$

المسألة 3 :

ليكن $ABCDFEGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$.

النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$. نتأمّل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$



❶ أثبت أنّ المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان ، واحسب $\cos\widehat{IJD}$.

❷ أعط معادلة للمستوي (DIJ) .

❸ احسب بعد H عن المستوي (DIJ) .

❹ احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$

❺ a . أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI)

b . احسب إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI) .

c . جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة J عن المستوي (HDI) .

الحل :

$A(0,0,0)$ & $B(2,0,0)$ & $C(2,1,0)$ & $D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$ & $F(2,0,1)$ & $G(2,1,1)$ & $H(0,1,1)$

I منتصف $[AB]$ وبالتالي $I(1,0,0)$ و J منتصف $[CG]$ وبالتالي $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$

❶ $\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IJ} = 1-1+0 = 0$

وبالتالي المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان فالمثلث DIJ قائم في I و $\overrightarrow{DJ}\left(2,0,\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\widehat{IJD} = \frac{IJ}{DJ} = \frac{\|\overrightarrow{IJ}\|}{\|\overrightarrow{DJ}\|} = \frac{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}}{\sqrt{4+0+\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

❷ نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (DIJ) و $\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{IJ} = 0 \Rightarrow a+b+\frac{1}{2}c = 0 \Rightarrow 2a+2b+c = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{DI} = 0 \Rightarrow a-b = 0 \Rightarrow a = b$$

بفرض $b = 1 \Rightarrow a = 1$ ومنه $c = -4$

وبالتالي المستوي (DIJ) مار من $D(0,1,0)$ و ناظمه $\vec{n}(1,1,-4)$ اذن معادلة المستوي (DIJ) هي :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0 \Rightarrow x+(y-1)-4z = 0 \Rightarrow x+y-4z-1 = 0$$

❸ إحداثيّات H هي $(0,1,1)$ وبالتالي :

$$dist\big(H.(DIJ)\big) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|0+1-4\times1-1|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

❹ $\|\overrightarrow{DI}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$

$$v(HDIJ) = \frac{1}{3}S_{(DIJ)}.h = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

❺ a . أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI)
b . احسب إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI) .
c . جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة J عن المستوي (HDI) .

a. نفرض $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه للمستقيم d وبما أن d عمودي على المستوي (HDI) فإن :
هذا الشعاع عمودي على كل من $\overrightarrow{DH}=(0,0,1)$ و $\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$ وبالتالي :

$$\vec{u}.\overrightarrow{DH}=0 \Rightarrow c=0$$
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{DI}=0 \Rightarrow a-b=0$$

بفرض $b=1$ يكون $a=1$ ومنه $\overrightarrow{u}(1,1,0)$ و المستقيم d يمر بالنقطة $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$ فإن :

$$d:\begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=\frac{1}{2}\end{cases} : t\in\mathbb{R}$$

b. المستوي (HDI) يمر بالنقطة $I(1,0,0)$ وناظمه : $\vec{n}=\vec{u}(1,1,0)$ معادلته :

$$1(x-1)+1(y-0)+0(z-0)=0 \Rightarrow x+y-1=0$$

لإيجاد احداثيات $J'(x,y,z)$ نعوض معادلات d في معادلة المستوي (HDI) :

$$t+2+t+1-1=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow J'\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$$

c. طريقة أولى :

$$J\left(2,1,\tfrac{1}{2}\right),\ J'\left(1,0,\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow dist(J,(HDI))=JJ'=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$$

طريقة ثانية :

لمّا كانت معادلة المستوي (HDI) هي $x+y=1$ و $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$ كان :

$$dist(J,(HDI))=\frac{|(2)+(1)-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$$

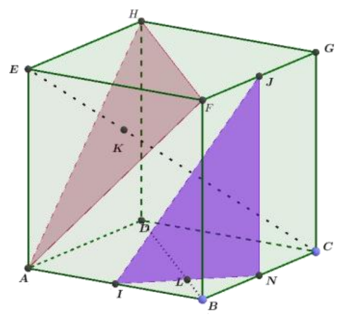
طريقة ثالثة :

مساحة المثلّث القائم HDI تساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\times 1}{2}=\frac{\|\overrightarrow{DI}\|\times\|\overrightarrow{DH}\|}{2}=S_{(HDI)}$

ولدينا حجم الهرم $HDIJ$ يساوي $\frac{1}{3}$ ومنه :

$$v(HDIJ)=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\times S_{(HDI)}\times dist(J,(HDI))=\frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\times dist(J,(HDI))=1 \Rightarrow dist(J,(HDI))=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

المسألة 4 :



ليكن $ABCDFEGH$ مكعب مزود بمعلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$
النقطة I هي منتصف $[AB]$ و N هي منتصف $[BC]$
و J هي منتصف $[FG]$ و L هي منتصف $[IN]$ و K هي مركز ثقل المثلث AFH

❶ جد احداثيات رؤوس المكعب واحداثيات النقاط I, N, J, K
❷ أثبت أن المستويين (INJ) , (AFH) متعامدين
❸ أثبت أن L منتصف $[IN]$ هي مسقط D على المستوي (JNI)
❹ جد حجم رباعي الوجوه $(DINJ)$
❺ أعط معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ المار من D ويعامد كل من المستويين (JNI) , (AFH)

الحل :

❶ $A(0,0,0)$ & $B(2,0,0)$ & $D(0,2,0)$ & $E(0,0,2)$
$C(2,2,0)$ & $F(2,0,2)$ & $H(0,2,2)$ & $G(2,2,2)$
$I(1,0,0)$, $N(2,1,0)$, $J(2,1,2)$, $K\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

❷ $\overrightarrow{NI}(-1,-1,0)$, $\overrightarrow{NJ}(0,0,2)$ و لنفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (INJ) و بالتالي

$$\vec{n}.\overrightarrow{NI}=0\Rightarrow -a-b=0\Rightarrow a=-b \quad , \quad \vec{n}.\overrightarrow{NJ}=0\Rightarrow 2c=0$$

بفرض $b=1$ ومنه $a=-1$ وبالتالي $\overrightarrow{n_{INJ}}(-1,1,0)$

$\overrightarrow{AF}(2,0,2)$, $\overrightarrow{AH}(0,2,2)$ و لنفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (AFH) و بالتالي

$$\vec{n}.\overrightarrow{AF}=0\Rightarrow 2a+2c=0\Rightarrow a=-c \ , \ \vec{n}.\overrightarrow{AH}=0\Rightarrow 2b+2c=0\Rightarrow b=-c$$

بفرض $c=1$ ومنه $a=-1$ و $b=-1$ وبالتالي $\overrightarrow{n_{AFH}}(-1,-1,1)$

$$\overrightarrow{n_{INJ}}.\overrightarrow{n_{AFH}}=(-1,1,0).(-1,-1,1)=1-1+0=0$$

فالناظمين متعامدين وبالتالي فالمستويين (INJ) , (AFH) متعامدين

❸ نوجد معادلة المستوي (JNI) المار من $I(1,0,0)$ وناظمه $\overrightarrow{n_{INJ}}(-1,1,0)$ وبالتالي المعادلة :

$$-1(x-1)+1(y-0)+0(z-0)=0\Rightarrow x-y-1=0$$

احداثيات L منتصف $[IN]$ هي $L\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$ و $\overrightarrow{NL}\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},0\right)$

نعوض احداثيات L في معادلة المستوي (JNI) نجد : $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1=0\Rightarrow 0=0\Rightarrow L\in(JNI)$

كما أن $\overrightarrow{NL}.\overrightarrow{n_{INJ}}=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},0\right).(-1,1,0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=0$

وبالتالي L مسقط D على المستوي (JNI)

❹ $v(DINJ)=\frac{1}{3}S_{(INJ)}.h$

المثلث JNI قائم في N لأن $\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{NJ}=(-1,-1,0).(0,0,2)=0+0+0=0$

وبالتالي $S_{(INJ)}=\frac{1}{2}\times\|\overrightarrow{NI}\|\times\|\overrightarrow{NJ}\|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$

$$h=dist\big(D.(JNI)\big)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-x_0-y_0-1|}{\sqrt{1+1+0}}=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي $v(DINJ)=\frac{1}{3}\times\left(\sqrt{2}\right)\times\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=1$

❺ أعط معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ المار من D ويعامد كل من المستويين (JNI) , (AFH)

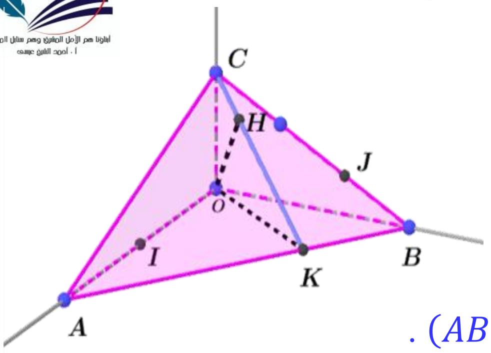
$\overrightarrow{n_{AFH}}(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{n_{INJ}}(-1,1,0)$ و لنفرض $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(a,b,c)$ ناظم المستوي $\mathcal{R}$ و بالتالي

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}.\overrightarrow{n_{INJ}}=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b \quad , \quad \overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}.\overrightarrow{n_{AFH}}=0\Rightarrow -a-b+c=0$$

بفرض $b=1$ ومنه $a=1$ و $c=2$ وبالتالي $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(1,1,2)$ والمستوي $\mathcal{R}$ مارمن $D(0,2,0)$ فمعادلته :

$$1(x-0)+1(y-2)+2(z-0)=0\Rightarrow x+y+2z-2=0$$

المسألة 5:



ليكن رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O

ولنأخذ المعلم المتجانس $\left(O;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$

و لتكن I منتصف $[OA]$ و J نقطة تحقق $3\overrightarrow{CJ}=2\overrightarrow{CB}$

❶ جد احداثيات كلا من A,B,C

❷ أثبت أنّ معادلة المستوي (ABC) لها الشكل $2x+3y+6z=6$

❸ استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC).

❹ جد احداثيات H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC) ثم تحقق أنها نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

❺ أثبت أنّ المسقط القائم لكل من النقطتين C و O على المستقيم (AB) هو النقطة K ذاتها واحسب إحداثيّاتها

❻ احسب مساحة المثلث ABC وأوجد حجم رباعي الوجوه $OABC$

الحل :

❶ $O(0,0,0) \quad \& \quad A(3,0,0) \quad \& \quad B(0,2,0) \quad \& \quad C(0,0,1)$

❷ بما أن A على محور الفواصل و B على محور التراتيب و C على محور الرواقم

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1 \Rightarrow (ABC): 2x+3y+6z-6=0$$

❸ $\vec{u}=\vec{n}(2,3,6)$ و المستقيم Δ مار بالنقطة O وبالتالي : $t\in\mathbb{R}$:

$$\Delta: \begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=6t \end{cases}$$

❹ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي (ABC)

$$2(2t)+3(3t)+6(6t)-6=0 \Rightarrow 49t=6 \Rightarrow t=\frac{6}{49} \Rightarrow H\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}(-3,2,0),\overrightarrow{AC}(-3,0,1),\overrightarrow{BC}(0,-2,1),\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{-13}{49}\right),\overrightarrow{BH}\left(\frac{12}{49},\frac{-70}{49},\frac{36}{49}\right),\overrightarrow{AH}\left(\frac{-135}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0 \quad , \quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=0 \quad , \quad \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0$$

فالنقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

❺ $$\overrightarrow{AB}(-3,2,0) \quad , \quad \overrightarrow{OC}(0,0,1) \quad , \quad \overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=0 \quad , \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OH}=0$$

فالمستقيم (AB) عمودي على المستوي (OCH) ولتكن K نقطة تقاطعهما وبالتالي تكون K هي :

المسقط القائم لأي نقطة من نقاط المستوي (OCH) على المستقيم (AB)

وبالتالي تكون K هي المسقط القائم لكل من النقطتين C و O على (AB)

$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ والمستقيم (AB) مار من $A(3,0,0)$ و بالتالي $t\in\mathbb{R}$:

$$(AB): \begin{cases} x=-3t+3 \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$$

النقطة K تنتمي للمستقيم (AB) وبالتالي $K(-3t+3,2t,0)$ ومنه $\overrightarrow{OK}(-3t+3,2t,0)$

و النقطة K هي مسقط O على (AB) ومنه $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow 9t-9+4t+0=0 \Rightarrow t=\frac{9}{13}$

نعوض في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) نجد $K\left(\frac{12}{13},\frac{18}{13},0\right)$

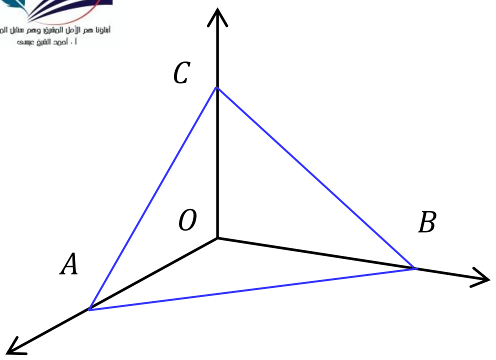
❻ $$\overrightarrow{AB}(-3,2,0) \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{9+4+0}=\sqrt{13} \ , \ \|\overrightarrow{CK}\|=\frac{7}{\sqrt{13}} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{\sqrt{13}\times\frac{7}{\sqrt{13}}}{2}=\frac{7}{2}$$

$$\overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right),\overrightarrow{AB}(-3,2,0),\overrightarrow{AC}(-3,0,1) \Rightarrow \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=0,\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{OH}\perp(ABC) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right) \Rightarrow \|\overrightarrow{OH}\|=\sqrt{\left(\frac{12}{49}\right)^2+\left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{36}{49}\right)^2}=\frac{42}{49}=\frac{6}{7}$$

$$v(ABC)=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}S_{ABC}\times OH=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)\times\left(\frac{6}{7}\right)=1$$

المسألة 6 :



ليكن رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O

ولنأخذ المعلم المتجانس $\left(O;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{3}\overrightarrow{OB},\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)$

❶ جد احداثيات كلا من A,B,C

❷ جد معادلة المستوي (ABC)

❸ استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC)

❹ استنتج مسقط النقطة B على المستقيم Δ

❺ أثبت أن مسقط النقطة O على المستقيم Δ هي نفسها G مركز ثقل المثلث ABC

❻ أكتب معادلة الكرة المارة من النقطة A ومركزها النقطة G

❼ أثبت أن المثلث ABC متساوي الاضلاع واحسب مساحته وأوجد حجم رباعي الوجوه $OABC$

الحل :

❶ $O(0,0,0)$ & $A(3,0,0)$ & $B(0,3,0)$ & $C(0,0,3)$

❷ $$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1 \Rightarrow x+y+z-3=0$$

❸ المستقيم Δ مار بالنقطة O وعمودي على المستوي (ABC) فإن $\vec{u}=\vec{n}(1,1,1)$ وبالتالي :

$$\Delta:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases} \quad : t\in\mathbb{R}$$

❹ مسقط النقطة B على المستقيم Δ هو نقطة تقاطع Δ مع المستوي (ABC)

$$t+t+t-3=0 \Rightarrow 3t=3 \Rightarrow t=1 \Rightarrow B'(1,1,1)$$

❺ مسقط النقطة O على المستقيم Δ هو نقطة تقاطع Δ مع المستوي (ABC) وهي $B'(1,1,1)$

مركز ثقل المثلث هي : $G\left(\frac{3+0+0}{3},\frac{0+3+0}{3},\frac{0+0+3}{3}\right) \Rightarrow G(1,1,1)$ وهي نفسها $B'(1,1,1)$

❻ الكرة مارة من النقطة $A(3,0,0)$ ومركزها النقطة $G(1,1,1)$ بالتالي $R=\|\overrightarrow{AG}\|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$$

❼ المثلثات OAB و OAC و OBC هي مثلثات قائمة و طبوقة بالتالي أوتارها متساوية

و هي أضلاع المثلث ABC بالتالي ABC هو مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه : $\ell=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

مساحته $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{18}\right)^2=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ و ارتفاع رباعي الوجوه $OABC$ هو $h=OB'=\sqrt{3}$ بالتالي :

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\sqrt{3}\right)=\frac{9}{2}$$

طريقة ثانية :

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}S_{AOB}.h=\frac{1}{3}S_{AOB}.OC=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)\times(3)=\frac{9}{2}$$

المسألة 7 :

ليكن لدينا المستقيمين d, d' المعرفين كما يأتي :

$$d:\begin{cases} x = -1 \\ y = -t + 1 \\ z = -2t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad d':\begin{cases} x = -5s + 4 \\ y = -2s + 3 \\ z = s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

❶ أثبت أن المستقيمان d و d' متعامدان ومتقاطعان في نقطة B يطلب ايجاد احداثياتها

❷ أثبت أن النقطة B هي المسقط القائم للنقطة $A(1 , -3 , 3)$ على المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'

❸ أكتب معادلة المستوي P المار بالنقطة $A(1 , -3 , 3)$ ويقبل $\vec{n}\ (5 , 2 , 9)$ ناظما له

❹ لتكن C و D نقطتي تقاطع P مع المستقيمين d و d' على الترتيب ، أوجد حجم رباعي الوجوه $ABCD$

الحل :

❶ شعاعي توجيه المستقيمين : $\vec{u'}(-5,-2,1)$, $\vec{u}(0,-1,-2)$

الشعاعان غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستقيمان d , d' غير متوازيين

بالحل المشترك :

$$\begin{cases} -1 = -5s + 4 & \Rightarrow & s = 1 & (1) \\ -t + 1 = -2s + 3 & \Rightarrow & -t + 2s - 2 = 0 & (2) \\ -2t + 1 = s & \Rightarrow & -2t - s + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

من (1) نجد: $s = 1$ نعوض في (2) نجد $t = 0$ نعوض في (3) نجد $0 = 0 \Rightarrow 0 - 1 + 1 = 0$

محققة بالتالي d , d' متقاطعان ويقعان في مستوي واحد و لإيجاد نقطة التقاطع :

نعوض $t = 0$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم L فنجد نقطة التقاطع هي $B(-1,1,1)$

$\vec{u}(0,-1,-2)$, $\vec{u'}(-5,-2,1)$ $, \Rightarrow \vec{u}.\vec{u'} = 0 + 2 - 2 = 0$ الشعاعان متعامدان فالمستقيمان متعامدان

❷ $\overrightarrow{AB}(-2,4,-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 - 4 + 4 = 0$, $\overrightarrow{AB}.\vec{u'} = 10 - 8 - 2 = 0$

بالتالي $\overrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي المحدد بالمستقيمين d و d' النقطة B تنتمي الى هذا المستوي بالتالي :

النقطة B هي المسقط القائم للنقطة $A(1 , -3 , 3)$ على المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'

❸ المستوي P المار بالنقطة $A(1 , -3 , 3)$ ويقبل $\vec{n}\ (5 , 2 , 9)$ ناظما

$$5(x-1) + 2(y+3) + 9(z-3) = 0 \Rightarrow P: 5x + 2y + 9z - 26 = 0$$

❹ $$5(-1) + 2(-t+1) + 9(-2t+1) - 26 = 0 \Rightarrow -20t - 20 = 0 \Rightarrow t = -1$$

بالتالي نقطة تقاطع P مع المستقيم d هي $C(-1 ,2 ,3)$

$$5(-5s+4) + 2(-2s+3) + 9(s) - 26 = 0 \Rightarrow -20s = 0 \Rightarrow s = 0$$

بالتالي نقطة تقاطع P مع المستقيم d' هي $D(4 ,3 ,0)$

رباعي الوجوه $ABCD$ قاعدته المثلث BCD مثلث قائم في B و ارتفاعه $h = AB$

$$BC = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} \quad BD = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{30}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$h = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

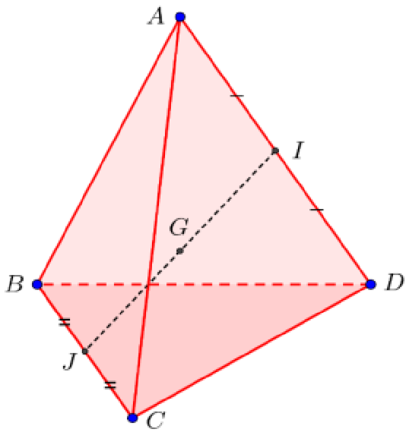
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.h = \frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right) \times (2\sqrt{6}) = 10$$

الاختبارات

الاختبار 1

السؤال الثالث :

$ABCD$ رباعي وجوه، G مركز ثقله I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$
أثبت أنّ النقاط I و G و J تقع على استقامة واحدة



الحل :

G مركز ثقل $ABCD$ فهي
مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$
I منتصف $[AD]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,1)$
و J منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$
حسب الخاصة التجميعية فإن :
النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$
فالنقاط I و G و J تقع على استقامة واحدة وتكون G تقع في منتصف $[IG]$

السؤال الرابع :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(2,-1,0)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $2x+y-2z+9=0$
اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$

الحل :

مركز الكرة A و نصف قطرها هو بعد A عن $\mathcal{P}$: $R = dest(A,\mathcal{P}) = \frac{|2(2)+(-1)-2(0)+9|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{12}{3} = 4$
ومعادلة الكرة : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 \Longrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+z^2 = 16$

الاختبار 2

السؤال الرابع :

نتأمّل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

1. بيّن أنّ النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
2. بيّن أنّ النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد
3. استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداداً حقيقيّة يُطلب تعيينها.

الحل :

❶ $\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$ & $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$ والاشعة غير مرتبطة خطيا لأن مركباتها غير متناسبة
فالنقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة

❷ $\overrightarrow{AD}(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$ & $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (-1,-1,1) = a(9,-1,-1)+b(3,-2,1)$$
$$(-1,-1,1) = (9a+3b, -a-2b, -a+b)$$
$$\begin{cases} 9a+3b=-1 \\ -a-2b=-1 \\ -a+b=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9a+3b=-1 & ① \\ -a-2b=-1 & ② \\ a-b=-1 & ③ \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ② و ③ نجد $-3\beta=-2 \Longrightarrow b=\frac{2}{3}$ نعوض في الثانية نجد $a-\frac{2}{3}=-1 \Longrightarrow a=\frac{-1}{3}$
نعوض في المعادلة الاولى نجد : $9\left(\frac{-1}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)=-1 \Longrightarrow -1=-1$ محققة وبالتالي:
$\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ فالأشعة تقع في مستو واحد و النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد

$$\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Longrightarrow$$

$$3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Longrightarrow$$

$$-2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Longrightarrow 2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

إذاً D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(A\,,2)$ و $(B\,,-1)$ و $(C\,,2)$

طريقة ثانية لحل الطلب الثاني والثالث : بعد ملاحظة أنه في الطلب الثالث طلب منا اثبات D مركز ابعاد لذلك نشكل من النقاط الاربعة ثلاثة أشعة تبدأ بالنقطة D

❷ $\overrightarrow{DA}(1,1,-1)$ & $\overrightarrow{DB}(10,0,-2)$ & $\overrightarrow{DC}(4,-1,0)$

$$\overrightarrow{DA} = \alpha\overrightarrow{DB} + \beta\overrightarrow{DC} \quad \Longrightarrow (1,1,-1) = \alpha(10,0,-2) + \beta(4,-1,0)$$

$$(1,1,-1) = (10\alpha + 4\beta, -\beta, -2\alpha) \Longrightarrow \quad 10\alpha + 4\beta = 1① \quad -\beta = 1② \quad -2\alpha = -1③$$

من ② و ③ نجد $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = -1$ و نعوض في ① محقّقة وبالتالي النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

❸ $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

إذاً D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(A, 2)$ و $(B, -1)$ و $(C, +2)$.

الاختبار 3

التمرين الرابع:

نتأمّل في معلم متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$.

❶ أثبت أنّ المثلّث ABC قائم واحسب مساحه.

❷ أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة للمستوي (ABC).

❸ احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$ بالتالي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 + 2 - 4 = 0$ والمثلّث ABC في A

$$AB = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}, AC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, S(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{21 \times 6} = \frac{1}{2}\sqrt{126} = \sqrt{\frac{63}{2}}$$

❷ يكون الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) إذا كان عمود على مستقيمين فيه:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}(2,-3,1).(1,2,4) \quad = 2 - 6 + 4 = 0 \qquad \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}(2,-3,1).(2,1,-1) = 4 - 3 - 1 = 0 \qquad \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

إذاً $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) ويمر من $A(1,0,-1)$

$$2(x-1) - 3(y-0) + 1(z+1) = 0 \Longrightarrow 2x - 3y + z - 1 = 0$$

❸ حساب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) و حجم رباعي الوجوه $DABC$.

$$dist(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$V(D, ABC) = \frac{1}{3}S(ABC).h = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{63}{2}}.\sqrt{14} = \frac{1}{3}(3 \times 7) = 7$$

السؤال الثالث :

في معلم متجانس $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ النقاط : $A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$
بيّن مع التعليل صحّة أو خطأ كل من المقولات الآتية :

1. المثلّث ABC قائم
2. المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)
3. حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V = 81$

الحل :

❶ صحيحة $\overrightarrow{AB} = (3,3,3)\ ,\overrightarrow{AC}(3,0,-3)\ ,\overrightarrow{AD}(-3,6,-3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9+0-9 = 0$

❷ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -9+18-9 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \quad , \quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -9+0-9 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$

وبما أنّ $\overrightarrow{AD}$ عمود على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فهو عمود على المستوي (ABC) صحيحة

❸ $V = \frac{1}{3}S(ABC).h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\right).\|\overrightarrow{AD}\|$

والقضيّة خاطئة $= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{27}.\sqrt{18}\right)\sqrt{54} = \frac{1}{6}3\sqrt{3}.3\sqrt{2}.3\sqrt{6} = 27$

التمرين الثاني :

المستقيمان L و L' معرّفان وسيطيّاً وفق : $L':\begin{cases}x = 4-5s\\ y = 3-2s\\ z = -1+2s\end{cases} : s \in \mathbb{R}$ و $L:\begin{cases}x = -1\\ y = 1-t\\ z = 1-2t\end{cases} : t \in \mathbb{R}$

1. أثبت أنّ L و L' متقاطعان في نقطة يُطلب تعيين إحداثيّاتها
2. جد معادلة للمستوي المحدّد بالمستقيمين L و L'

الحل :

❶ شعاعي توجيه المستقيمين : $\overrightarrow{u}(0,-1,-2)\ ,\ \overrightarrow{u'}(-5,-2,2)$ الشعاعان غير مرتبطين خطياً
لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستقيمان $L\ ,L'$ غير متوازيين ، لنتحقق فيما اذا كانا متقاطعان أم لا

بالحل المشترك :
$$\begin{cases}-1 = 4-5s & \Rightarrow & s = 1 & (1)\\ 1-t = 3-2s & \Rightarrow & -t+2s-2 = 0 & (2)\\ 1-2t = -1+2s & \Rightarrow & -2t-2s+2 = 0 & (3)\end{cases}$$

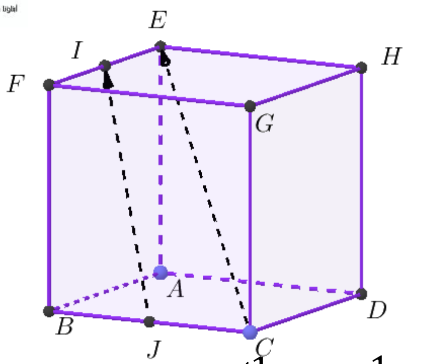
من(1) نجد: $s = 1$ نعوض في (2) نجد $t = 0$ نعوض في (3) نجد $0-2+2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
محققة بالتالي $L\ ,L'$ متقاطعان ويقعان في مستوي واحد و لإيجاد نقطة التقاطع :
نعوض $t = 0$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم L فنجد نقطة التقاطع هي $A(-1,1,1)$

❷ بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ هو ناظم المستوي المطلوب بالتالي

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad -b-2c = 0 \quad (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{u'} = 0 \quad \Rightarrow \quad -5a-2b+2c = 0 \quad (2)$$

من (1) نجد $b = -2c$ نعوض في (2) نجد $-5a+4c+2c = 0 \Rightarrow 5a = 6c \Rightarrow a = \frac{6}{5}c$
وبالتالي بفرض $c = 5$ نجد $a = 6$ و $b = -10$ بالتالي $\vec{n}(6,-10,5)$ والمستوي مار من $A(-1,1,1)$

$$6(x+1)-10(y-1)+5(z-1) = 0 \Rightarrow 6x-10y+5z+11 = 0$$



النموذج الوزاري الأول

السؤال الثالث :

في الشكل المجاور مكعّب. I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$.

❶ أثبت أنّ $2\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}\right)=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$.

❷ أثبت أنّ الأشعّة $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطّيّاً

الحل :

❶ $2\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}\right)=2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

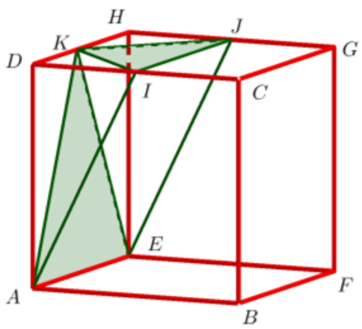
❷ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CJ}=\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}\right)+\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}\right)-\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

والأشعّة $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطّياً.

المسألة الثانية :

نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$. لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[HD]$ بالترتيب

نتّخذ $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ معلماً متجانساً في الفراغ



❶ أوجد احداثيّات النقاط $A\,,\ I\,,E$

❷ اكتب معادلة للمستوي $(AIJE)$

❸ احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$

❹ اكتب تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K

❺ احسب احداثيّات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$

❻ أثبت أنّ N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (I,β) و (E,γ)

حيث α و β و γ هي أثقال يُطلب تعيينها

الحل :

❶ $A(0,0,0)\quad \&\quad I\left(\frac{1}{2},0,1\right)\quad \&\quad E(0,1,0)\quad \&\quad B(1,0,0)$

❷ $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$

$A\in\mathcal{P}\Longrightarrow\ d=0\ ,\ I\in\mathcal{P}\Longrightarrow\frac{1}{2}a+c=0\ \Longrightarrow a+2c=0\ ,\ E\in\mathcal{P}\Longrightarrow b=0$

$-2cx+cz=0\ \Longrightarrow\ \mathcal{P}: 2x-z=0$

❸ $K\left(0\,,\frac{1}{2},1\right)\Longrightarrow dist(K,\mathcal{P})=\frac{|0+0-1+0|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

❹ $\vec{v}=\vec{n}=(2,0,-1)\ \Longrightarrow\ d:\begin{cases}x=at+x_0=2t\\ y=bt+y_0=\frac{1}{2}\\ z=ct+z_0=-t+1\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$

❺ نعوّض في معادلة المستوي : $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)\quad t=\frac{1}{5}\ \Longleftarrow\ 4t+t-1=0$

❻ $\overrightarrow{AN}=\alpha\overrightarrow{AI}+\beta\overrightarrow{AE}\Longrightarrow\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=\alpha\left(\frac{1}{2},0,1\right)+\beta(0,1,0)=\left(\frac{1}{2}\alpha,\beta,\alpha\right)\Longrightarrow\alpha=\frac{4}{5},\beta=\frac{1}{2}$

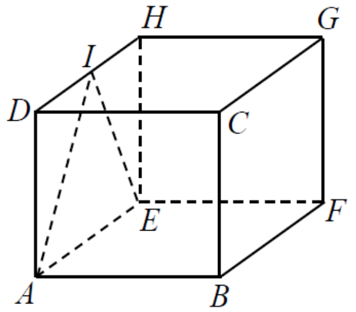
$\overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NI}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NE}\right)$

$10\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{AN}+5\overrightarrow{NE}\Longrightarrow-3\overrightarrow{NA}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$

ومنه N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3)$ و $(I,8)$ و $(E,5)$

النموذج الوزاري الثاني

السؤال الأوّل :



نجد جانباً مكعّباً طول ضلعه 1. مزوّداً بمعلم متجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ حيث I هي منتصف $[DH]$

❶ اعط إحداثيّات النقاط $A\,,E\,,I$ ❷ جد إحداثيّات O مركز ثقل المثلّث AEI

❸ أين تقع النقطة M التي تحقّق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$ ؟ ❹ احسب $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}$

الحل :

❶ $A(0,0,0)\quad,\quad E(0,1,0)\quad,\quad I\left(0\,,\frac{1}{2}\,,1\right)$

❷ $G\left(\frac{x_A+x_E+x_I}{3}\,,\frac{y_A+y_E+y_I}{3},\frac{z_A+z_E+z_I}{3}\right)=\left(\frac{0+0+0}{3}\,,\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)=\left(0\,,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

❸ $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}\Rightarrow 3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FO}\quad\Rightarrow\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FO}$

❹ $\overrightarrow{IA}\left(0\;,-\frac{1}{2}\,,-1\right)\,,\overrightarrow{IE}\left(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\right)\Rightarrow\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=0-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

التمرين الثالث :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$، لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$.

والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$.

❶ أثبت أنّ المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة C يُطلب تعيين إحداثيّاتها

❷ اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}=(-3,4,5)$ وهو شعاع توجيه للمستقيم والشعاع $\vec{n}\,(2,-3,1)$ هو ناظم على المستوي $\mathcal{P}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-6-12+5=-13$ ليسا متعامدين فالمستقيم لا يوازي المستوي فهو قاطع له بنقطة

المعادلات الوسيطية للمستقيم : $d:\begin{cases}x=-3t+2\\y=4t-1\\z=5t\end{cases}$ نعوض في معادلة المستوي :

$-6t+4-12t+3+5t-5=0\quad\Rightarrow t=\frac{2}{13}\quad\Rightarrow C\left(\frac{20}{13}\,,-\frac{5}{13}\,,\frac{10}{13}\right)$

❷ إنّ كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ يوازي الناظم للمستوي وليكن $\overrightarrow{n_Q}(a\,,b\,,c\,)$ بالتالي:

$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0\quad\Rightarrow\quad 2a-3b+\;\;c=0\Rightarrow 6a-9b+3\,c=0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_Q}=0\quad\Rightarrow -3a+4b+5c=0\Rightarrow -6a+8b+10c=0$

بالحل المشترك (بالجمع) نجد : $-b+13c=0\quad\Rightarrow\quad b=13c$

$2a-39c+c=0\quad\Rightarrow a=19c$

بإعطاء قيمة ما $c=1$ يكون $\overrightarrow{n_Q}(19\,,13\,,1\,)$ و المستوي مار بالنقطة $A(2,-1,0)$ بالتالي

$19(x-2)+13(y+1)+(z-0)=0\Rightarrow Q\!:19x+13y+z-25=0$

النموذج الوزاري الثالث

السؤال الثالث :

اكتب معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

الحل :

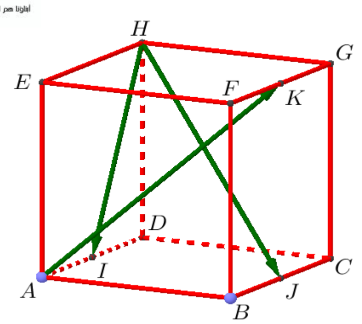
بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المحور فهي متساوية البعد عن A و B بالتالي $[AM]^2=[BM]^2$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2$

$-4x+2y-6z+14=-8x-6y+2z+26$

$4x+8y-8z-12=0\quad\Rightarrow x+2y-4z-3=0$

التمرين الثالث :



$ABCDEFGH$ مكعّب. مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ حيث I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$

❶ احسب مركّبات كل من الأشعّة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

❷ أوجد عددين حقيقيين a و b يحقّقان المساواة : $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$

ثمّ استنتج أنّ الأشعّة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيّاً

الحل :

❶ $D(0,0,0)$ و $A(1,0,0)$ و $C(0,1,0)$ و $H(0,0,1)$ و $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ و $J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ و $K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$

$\overrightarrow{AK}\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$, $\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$, $\overrightarrow{HJ}\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$

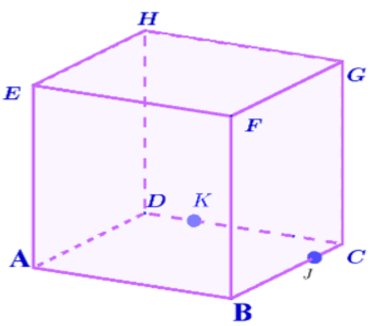
❷ $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}\Longrightarrow\left(-\frac{1}{2},1,1\right)=\left(\frac{a}{2},0,-a\right)+\left(\frac{b}{2},b,-b\right)=\left(\frac{a+b}{2},b,-a-b\right)$

$a+b=-1 \quad , \quad b=1 \quad , \quad -a-b=1\Longrightarrow b=1\,,a=-2\Longrightarrow\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HJ}$

وبما أنّ $\overrightarrow{HJ}$ و $\overrightarrow{HI}$ مستقلّة خطيّاً فالأشعّة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيّاً

النموذج الوزاري الرابع

التمرين الثالث :



$ABCDEFGH$ مكعّب حيث K نقطة من CD تحقّق : $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب :

❶ جد احداثيّات النقط $G\,,K\,,J\,,E\,,H$ في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

❷ أثبت أنّ الشعاعين $\overrightarrow{EG}\,,\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطيّاً

❸ أثبت أنّ الأشعّة $\overrightarrow{HK}\,,\overrightarrow{EG}\,,\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيّاً ❹ أثبت أنّ المستقيم HK يوازي (EGJ)

الحل :

❶ $G(1,1,1)$, $K\left(\frac{1}{4},0,1\right)$, $J\left(1,0,\frac{3}{4}\right)$, $E(0,1,0)$, $H(0,1,1)$

❷ $\overrightarrow{EJ}\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)\,,\overrightarrow{EG}(1,0,1)$ الشعاعين $\overrightarrow{EG}\,,\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطيّاً لأن مركباتهما غير متناسبة

❸ $\overrightarrow{HK}=a\overrightarrow{EJ}+b\overrightarrow{EG}\quad\Longrightarrow\quad\left(\frac{1}{4},-1,0\right)=a\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)+b(1,0,1)\Longrightarrow$

$\left(\frac{1}{4},-1,0\right)=\left(a+b,-a,\frac{3}{4}a+b\right)\Longrightarrow\; a+b=\frac{1}{4}$ ① $\quad a=1$ ② $\quad \frac{3}{4}a+b=0$ ③

بحل المعادلات الثلاثة نجد $b=-\frac{3}{4}$, $a=1$ بالتالي $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{EJ}-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$ و الأشعّة $\overrightarrow{HK}\,,\overrightarrow{EG}\,,\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيّاً

❹ الأشعّة $\overrightarrow{HK}\,,\overrightarrow{EG}\,,\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيّاً فهي تقع في مستو واحد بالتالي المستقيم HK يوازي (EGJ)

المسألة الثانية :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$ والمطلوب:

❶ أثبت أنّ المثلّث ABC قائم واحسب مساحته.

❷ أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

❸ احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $(D.ABC)$

❶ $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$, $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$, $\overrightarrow{BC}(1,-1,-5)$

$AB^2=1+4+16=21$, $AC^2=4+1+1=6$, $BC^2=1+1+25=27$

$BC^2=AB^2+AC^2$ فالمثلث ABC قائم في A مساحته : $S(ABC)=\frac{1}{2}\times\sqrt{21}\times\sqrt{6}=\frac{3}{2}\sqrt{14}$

❷
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = (2,-3,1).(1,2,4) = 2-6+4 = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = (2,-3,1).(2,1,-1) = 4-3-1 = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$

بالتالي $\overrightarrow{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) ومار من $A(1,0,-1)$

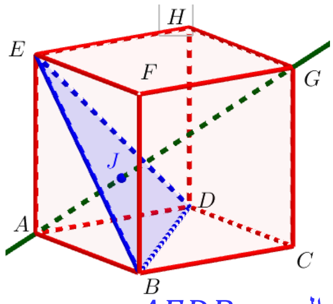
$(ABC): 2(x-1)-3(y-0)+1(z+1) = 0 \Rightarrow \quad 2x-3y+z-1 = 0$

❸ $dist(D, ABC) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$

$V(D.ABC) = \frac{1}{3}S(ABC).dist(D,\mathcal{P}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{14} \times \sqrt{14} = 7$

النموذج الوزاري الخامس

المسألة الثانية :



$ABCDEFGH$ مكعّب طول ضلعه يساوي 3 في المعلم $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

❶ عيّن احداثيات النقاط G و E و B و D ❷ اعطِ تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم (AG)

❸ أثبت أنّ المستقيم (AG) ناظم للمستوي (EDB).

❹ المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عيّن إحداثيّاتها.

❺ أثبت أنّ J هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلّث EDB ومركز ثقله ❻ احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.

الحل :

❶ $G(3,3,3) \quad , \quad E(0,0,3) \quad , \quad B(3,0,0) \quad , \quad D(0,3,0)$

$G(3,3,3) \quad , \quad E(0,0,3) \quad , \quad B(3,0,0) \quad , \quad D(0,3,0)$

❷ المستقيم (AG) مار من $A(0,0,0)$ و $\overrightarrow{AG} = (3,3,3)$ بالتالي : $t \in \mathbb{R}$: $(AG): \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$

❸ $\overrightarrow{ED}(0,3-3) \quad , \quad \overrightarrow{EB}(3,0,-3)$

$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{ED} = (3,3,3)(0,3,-3) = 0+9-9 = 0 \qquad \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{EB} = (3,3,3)(3,0,-3) = 9+0-9 = 0 \qquad \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{EB}$

بالتالي المستقيم (AG) ناظم للمستوي (EDB)

❹ نكتب معادلة المستوي المار من $E(0,0,3)$ و ناظمه $\overrightarrow{AG} = (3,3,3)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0 \Rightarrow 3(x-0)+3(y-0)+3(z-3) = 0$

$(EDB): \; 3x+3y+3z-9 = 0$ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي :

$9t+9t+9t-9 = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{3}$ بالتالي نقطة التقاطع هي : $J(1,1,1)$

❺

$\overrightarrow{BJ}(-2,3,3) \quad , \quad \overrightarrow{DJ}(1,-2,1) \quad , \quad \overrightarrow{EJ}(1,1,-2)$

$\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{ED} = (-2,3,3).(0,3,-3) = 0 \qquad BJ \perp ED \qquad$ ارتفاع BJ

$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{EB} = (1,-2,1).(3,0,-3) = 0 \qquad DJ \perp EB \qquad$ ارتفاع DJ

$\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{BD} = (1,1,-2).(-3,3,0) = 0 \qquad EJ \perp BD \qquad$ ارتفاع EJ

وبالتالي J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث EDJ واحداثيات مركز الثقل : $\left(\frac{0+3+0}{3}, \frac{0+0+3}{3}, \frac{3+0+0}{3}\right) = (1,1,1)$

بالتالي : J هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلّث EDB ومركز ثقله

طريقة ثانية : المثلث EDJ متساوي الاضلاع لأن أضلاعه أقطار في مربعات طبوقة

بالتالي ارتفاعاته هي متوسطات بالتالي نقطة تقاطعها هي مركز ثقل المثلث

احداثيات مركز الثقل : $\left(\frac{0+3+0}{3}, \frac{0+0+3}{3}, \frac{3+0+0}{3}\right) = (1,1,1)$

بالتالي : J هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلّث EDB ومركز ثقله

❻ $V(AEDB) = \frac{1}{3}S(ABD).AE = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3 \times 3}{2}\right) \times 3 = \frac{9}{2}$

السؤال الثالث :

$ABCD$ رباعي وجوه G مركز ثقل المثلّث DBC. جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقّق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

الحل :

بما أنّ G مركز ثقل المثلّث DBC فإنّ: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right) = 3\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}\right) = 3\overrightarrow{GA}$$

بالتالي المساواة المفروضة تكافئ: $\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{GA}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{GA}\|$

و مجموعة النقاط M في الفراغ تمثّل سطح كرة مركزها G ونصف قطرها GA

المسألة الثانية :

نتأمّل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$

وأخيراً لتكن الكرة S التي مركزها A ونصف قطرها AB

❶ أثبت أنّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي $\mathcal{P}$ ❷ جد معادلة الكرة S

❸ أثبت أنّ المستوي Q مستوي مماس للكرة S

❹ أثبت أنّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

❺ ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً: $d:\begin{cases} x = t \\ y = 12-5t \\ z = 4-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

a : أثبت أنّ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q

b : أثبت أنّ المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

الحل :

❶ المستوي $\mathcal{P}$ مار من النقطة $B(3,2,0)$ و $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(2,1,-1)$ بالتالي

$$2(x-3)+1(y-2)-1(z+0)=0 \Rightarrow P:\ 2x+y-z-8=0$$

❷ الكرة S التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها $R=AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$$S:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$$

❸ $dist(A,Q)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R \Rightarrow$ فالمستوي Q مماس للكرة S

❹ $\overrightarrow{CA}(1,-1,2)\ ,\ \overrightarrow{n_Q}(1,-1,2)$ بالتالي و $\overrightarrow{AC}\perp Q$ ولنتحقّق أنّ $C\in Q$

$0-2-2+4=0$ محقّقة، وبالتالي النقطة C هي مسقط النقطة A على المستوي Q

❺ a : يكون d هو الفصل المشترك للمستويين إذا حقّق معادلتيهما :

$\mathcal{P}: 2t+12-5t-4+3t-8=0 \Rightarrow 0=0$ محقّقة

$Q: t-12+5t+8-6t+4=0 \Rightarrow 0=0$ محقّقة

إذاً المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q.

b : لتكن H منتصف $[BC]$ فيكون $H\left(\frac{3}{2},2,\frac{-1}{2}\right)$ و $\overrightarrow{BC}=(-3,0,-1)$ فيكون :

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0(y-2)-1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 3x+z-4=0$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي نجد $6t+8-6t=8 \Rightarrow 8=8$ محققة

إذاً المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

السؤال الثاني :

لتكن النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ والمطلوب :

❶ احسب إحداثيات منتصف القطعة $[AC]$

❷ احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

❸ عين إحداثيات K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع

الحل :

❶ $I\left(\frac{3+0}{2},\frac{5-2}{2},\frac{2+2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$

❷ $\overrightarrow{AB}(-1\,,-6\,,1)\quad,\quad \overrightarrow{AC}(-3\,,-7\,,0)$

❸ يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع اذا كان

$$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{BA}\Longrightarrow (x_K-0,y_K+2,z_K-2)=(1,6,-1)\Longrightarrow K(1,4,1)$$

المسألة الأولى :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$

والمستوي P الذي معادلته $P: x-y+3z-4=0$: والمطلوب :

❶ جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P والمار من النقطتين B و A

❷ جد تمثيلا وسيطياً للمستقيم d المار A و يعامد المستوي P

❸ عين احداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P

❹ أعطِ معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ وما طبيعة المجموعة ε

الحل :

❶ بفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ولدينا $\overrightarrow{n_P}(1,-1,3)$ و $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ وبالتالي

$$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P}=0\ \dots(1)$$
$$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB}=0\ \dots(2)$$

$a-b+3c=0\ \ (1)\,,\ \ a+b+2c=0\ (2)$ بالجمع $\Longrightarrow 2a+5c=0\Longrightarrow a=\frac{-5}{2}c$

نفرض $c=2$ وبالتالي $a=-5$ ومنه $b=1$ وبالتالي معادلة المستوي Q

$$-5(x-2)+(y-0)+2(z-4)=0\Longrightarrow -5x+y+2z+2=0$$

❷ المستقيم d مار من $A(1,-1,2)$ و يعامد المستوي P بالتالي $\vec{u}=\overrightarrow{n_P}(1,-1,3)$

بالتالي التمثيل الوسيطي للمستقيم d هو : $t\in\mathbb{R}$

$$d:\begin{cases}x=t+1\\ y=-t-1\\ z=3t+2\end{cases}$$

❸ النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P هي نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P

$$t+1+t+1+9t+6-4=0\Longrightarrow 11t=-4\Longrightarrow t=\frac{-4}{11}\Longrightarrow A'\left(\frac{7}{11},\frac{-7}{11},\frac{10}{11}\right)$$

❹ بفرض $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Longrightarrow (x-1,y+1,z-2).(x-2,y-0,z-4)=0$$
$$x^2-3x+2+y^2+y+z^2-6z+8=0\Longrightarrow$$
$$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)+(z^2-6z+9)=-10+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+9\Longrightarrow$$
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-3)^2=\frac{6}{4}$$

مجموعة النقاط ε هي كرة مركزها $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},3\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$

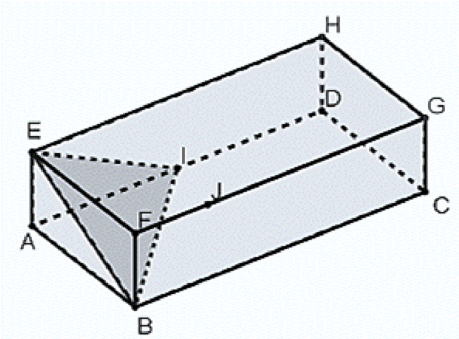
السؤال الثالث :

$ABCD$رباعي وجوه ، مركز ثقله G فيه K مركز ثقل الوجه BCD
اثبت أن النقاط K, A, G تقع على استقامة واحدة وعين موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$.

الحل :

بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فهي
مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$
K مركز ثقل الوجهBCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(B,1),(C,1),(D,1)$
حسب الخاصية التجميعية تكون G النقطة مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(A,1),(K,3)$
إذاً النقاط K, G, A على استقامة واحدة ومنه G يقع على $[AK]$ و $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$

المسألة الثانية :



ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AE=1\ ,\ AD=4\ ,AB=2$
ولتكن I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق $\overrightarrow{FJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$
نتأمل المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$، والمطلوب :

❶ جد احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات واحداثيات كل من J, I
❷ أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي $x+y+2z-2=0$
❸ بين نوع المثلث EIB، ثم احسب مساحته
❹ احسب بعد G عن المستوي (EIB)، واستنتج حجم رباعي الوجوه $G-EIB$
❺ اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J وعمودياً على المستوي (EIB)
❻ استنتج أن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

الحل :

❶ $A(0,0,0)\ ,B(2,0,0)\ ,D(0,4,0)\ ,E(0,0,1), C(2,4,0)\ ,F(2,0,1)\ ,H(0,4,1)\ ,G(2,4,1)$
I منتصف $[AB]$ و $\overrightarrow{FJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$ بالتالي $J(2,1,1)$ $I(0,2,0)$

❷ بما أن Bعلى محور التراتيب Iعلى محور الفواصل E على محور الرواقم (بالاعتماد على النشاط صفحة 93)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Rightarrow\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1\Rightarrow x+y+2z-2=0$$

❸ $(EI)^2=(0-0)^2+(2-0)^2+(0-1)^2=5$
$(EB)^2=(2-0)^2+(0-0)^2+(1-0)^2=5$
$(BI)^2=(0-2)^2+(2-0)^2+(0-0)^2=8$
نلاحظ أن المثلث متساوي الساقين قاعدته $BI=2\sqrt{2}$ وبفرض E' منتصف القاعدة

$$EE'=\sqrt{5-2}=\sqrt{3}\Rightarrow S_{EIB}=\frac{EE'.BI}{2}=\frac{\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$$

❹ $dist(G,EIB)=\frac{|1(2)+1(4)+2(1)-2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Rightarrow V_{GEIB}=\frac{1}{3}h.S=\frac{1}{3}\sqrt{6}.\sqrt{6}=2$

❺ d يمر بالنقطة $J(2,1,1)$ وعمودي على EIB إذاً $\vec{u}_d=\vec{n}_{EIB}(1,1,2)$ بالتالي $d:\begin{cases}x=t+2\\y=t+1\\z=2t+1\end{cases}: t\in\mathbb{R}$

❻ إن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EIB)
لأن المستقيم d مار من J و عمودي على EIB بالتالي

$$(t+2)+(t+1)+2(2t+1)-2=0\Rightarrow 6t+3=0\Rightarrow t=\frac{-1}{2}\Rightarrow J'\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

$$\overrightarrow{BJ'}\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right)\ ,\overrightarrow{BI}(-2,2,0)\Rightarrow\overrightarrow{BI}=4\overrightarrow{BJ'}$$

إذاً النقاطJ', I, B تقع على استقامة واحدة إذاً J' تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

السؤال الأول :

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 فيه I منتصف $[CD]$.

❶ وضع النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$

❷ احسب العدد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

الحل :

❶

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AI}\right)-\overrightarrow{BI}$$

$=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}\Longrightarrow$ M تنطبق على B

❷ $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\left(\overrightarrow{AB},.\overrightarrow{AC}\right)=4.4.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=4.4.\frac{1}{2}=8$$

التمرين الثاني :

لتكن النقاط $A(1,-1,2)$, $B(2,1,0)$, $C(2,3,-1)$, $D(0,0,2)$ والمطلوب :

❶ عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$و$(B,2)$و$(C,2)$و$(D,1)$

❷ حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6$

❸ جد معادلة للمجموعة S

الحل :

$A(1,-1,2)\quad,\quad B(2,1,0)\quad,\quad C(2,3,-1)\quad,\quad D(0,0,2)$

❶ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,2),(C,2),(D,1)$

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(1)+2(2)+2(2)+1(0)}{1+2+2+1}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(-1)+2(1)+2(3)+1(0)}{6}=\frac{7}{6}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(2)+2(0)+2(-1)+1(2)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$G\left(\frac{3}{2},\frac{7}{6},\frac{1}{3}\right)$$

❷ $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6\Longrightarrow\|6\overrightarrow{MG}\|=6\Longrightarrow 6MG=6\Longrightarrow MG=1$

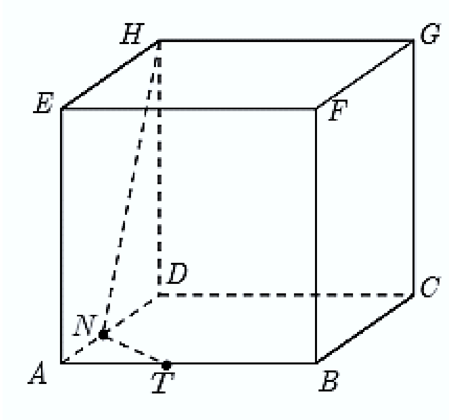
بالتالي S مجموعة النقاط M تمثل معادلة كرة مركزها نصف قطرها $r=1$

❸ $$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\Longrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=1$$

المسألة الأولى :

ليكن لدينا المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 1 و T نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

و N نقطة من $[AD]$ تحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$



❶ في المعلم المتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ جد إحداثيات النقاط H,F,N,T

❷ جد الشعاعين $\overrightarrow{NT},\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة للمستوي (HNT)

❸ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF)

❹ استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

❺ اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) ما طبيعته

الحل :

❶ $A(0,0,0)\ ,B(1,0,0)\ ,D(0,1,0)\ ,E(0,0,1)\ ,C(1,1,0)\ ,F(1,0,1)\ ,H(0,1,1)\ ,G(1,1,1)$

$$T\left(\frac{2}{5},0,0\right)\quad N\left(0,\frac{2}{5},0\right)$$

❷ $\overrightarrow{NH}\left(0,\frac{2}{5},1\right)\ ,\overrightarrow{NT}\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0\right)$ و بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (HNT) بالتالي

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{NT}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{NT}=0\Longrightarrow\frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b=0\Longrightarrow\ a=b\quad(1)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{NH}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{NH}=0\Longrightarrow\frac{3}{5}b+c=0\quad(2)$$

بفرض $b=5$ بالتالي $a=5$ و $c=-3$ ومنه $\vec{n}(5,5,-3)$ والمستوي يمر من $H(0,1,1)$

$$5(x-0)+5(y-1)-3(z-1)=0\Longrightarrow(HNT):5x+5y-3z-2=0$$

❸ المستقيم (EF) مار من $E(0,0,1)$ و شعاع توجيهه هو $\overrightarrow{EF}(1,0,0)$ بالتالي

$$(EF):\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1\end{cases}\quad;t\in R$$

❹ $\vec{n}(5,5,-3)\ ,\vec{u}(1,0,0)\Longrightarrow\vec{n}.\vec{u}=5\neq0$ ومنه (EF) قاطع للمستوي

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF) في معادلة المستوي (HNT)

$$5(t)+5(0)-3(1)-2=0\Longrightarrow5t-5=0\Longrightarrow t=1$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF) نجد نقطة التقاطع هي $(1,0,1)$ وهي نفسها النقطة F

❺ F نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (TNH) وبالتالي المستوي القاطع هو $(HNTF)$

بما أن المستويان $(ABCD)$ و $(EFGH)$ متوازيان و المستوي (TNH) قاطع لهما

بالتالي الفصلين المشتركين (NT) و (HF) متوازيين والمقطع شبه منحرف و

$$HN=\sqrt{0+\frac{9}{25}+1}=\frac{\sqrt{34}}{5}\quad,\ FT=\sqrt{\frac{9}{25}+0+1}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

بالتالي $HN=FT$ فالمقطع شبه منحرف متساوي الساقين

السؤال الأول :

ادرس وضع المستقيمين d, d' المعرفين كما يأتي : $s \in \mathbb{R}$ $d': \begin{cases} x = s + 5 \\ y = 5 \\ z = 2s + 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ $d: \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t - 2 \\ z = -\frac{1}{2}t + 3 \end{cases}$

الحل :

شعاع توجيه المستقيم d هو $\vec{u}\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$ و شعاع توجيه المستقيم d' هو $\vec{u'}(1,0,2)$

و $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي d, d' غير متوازيين ، نبحث عن التقاطع :

$$2s + 5 = -\frac{1}{2}t + 3 \quad ① \quad , \quad 2 = t - 2 \quad ② \quad , \quad s + 5 = 2t - 5 \quad ③$$

من② نجد : $t = 4$ نعوض في ③ : $2s + 5 = -\frac{1}{2}(4) + 3 \Rightarrow s = -2$

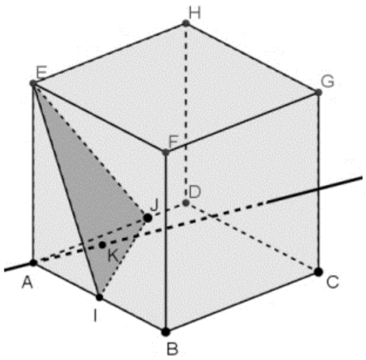
نعوض في ① : $-2 + 5 = 2(4) - 5 \Rightarrow 3 = 3$ محققة إذاً d, d' متقاطعان ويقعان في مستوي واحد و

لإيجاد نقطة التقاطع : نعوض $t = 4$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d نجد نقطة التقاطع هي $(3,2,1)$

المسألة الثانية :

ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً طول حرفه يساوي 4، ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J تحقق $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$

نتأمل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب :



❶ جد احداثيات رؤوس المكعب والنقطتين J, I

❷ أثبت أن معادلة المستوي (EIJ) هي $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

❸ اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A وعمودياً على المستوي (EIJ)

ثم جد إحداثيات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ)

❹ احسب مساحة المثلث AEJ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $I - AEJ$

❺ احسب بعد A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ

الحل :

❶

$$A(0,0,0)\,, B(4,0,0)\,, D(0,4,0)\,, E(0,0,4), C(4,4,0)\,, F(4,0,4)\,, H(0,4,4)\,, G(4,4,4)$$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow 4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB}$ بالتالي $J(0,3,0)$, $I(2,0,0)$

❷ بما أن I على محور الفواصل و J على محور التراتيب و E على محور الرواقم فإن

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Rightarrow\Rightarrow (EIJ): 6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

❸ $d \perp EIJ$ إذاً $\vec{u} = \vec{n}(6,4,3)$ وهو يمر بالنقطة $A(0,0,0)$ بالتالي $t \in \mathbb{R}$: $d: \begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي

$$6(6t) + 4(4t) + 3(3t) - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{16} \Rightarrow k\left(\frac{72}{16}, \frac{48}{16}, \frac{36}{16}\right)$$

❹ إن المثلث AEJ قائم في A بالتالي $S_{AEJ} = \frac{AE.AJ}{2} = \frac{4\times3}{2} = 6$

لأن AI عمودي على المستوي AEJ بالتالي $h = AI = 2$ ومنه $V = \frac{1}{3}h.S = \frac{1}{3}(6)(2) = 4$

❺ $dist(A, EIJ) = \frac{|6(0)+4(0)+3(0)-12|}{\sqrt{6^2+4^2+3^2}} = \frac{12}{\sqrt{61}}$

لدينا حجم رباعي الوجوه $A - EIJ$ و باعتبار أن القاعدة EIJ والارتفاع هو بعد A عن المستوي EIJ

$$V = \frac{1}{3}h.S \Rightarrow 4 = \frac{1}{3}.\frac{12}{\sqrt{61}}S \Rightarrow\Rightarrow S_{EIJ} = \sqrt{61}$$

دورة 2017 الأولى

السؤال الثالث :

❶ اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$.

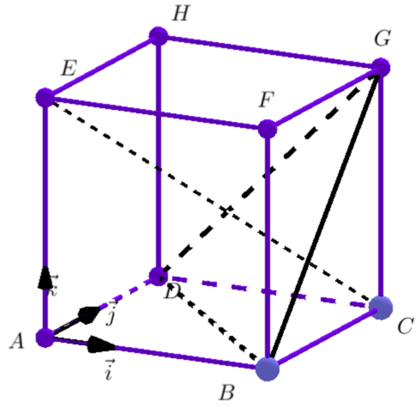
❷ تحقق أن المستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $\mathcal{P}: x-y+z+3=0$ يمس الكرة S

الحل :

❶ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2=3$

❷ $dist(o,p)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|0-0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}=R$ فالمستوي مماس للكرة

المسألة الأولى :



في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2

نتأمل المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\overrightarrow{AE}=2\vec{k}\ ,\overrightarrow{AD}=2\vec{j}\ \ ,\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$

1– اكتب معادلة المستوي (GBD)

2– اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC)

3– جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

4– جد إحداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

5– أثبت تعامد المستقيمين $(EC),(HM)$

الحل :

❶ $A(0,0,0)\ ,B(2,0,0)\ ,C(2,2,0)\ ,D(0,2,0)\ ,E(0,0,2)\ ,F(2,0,2)\ ,G(2,2,2),H(0,2,2)$

$\overrightarrow{GB}(0,-2,-2)\ ,\overrightarrow{GD}(-2,0,-2)$ و بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GBD) بالتالي

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{GB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{GB}=0\Longrightarrow -2b-2c=0\Longrightarrow\ b=-c\quad(1)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{GD}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{GD}=0\Longrightarrow -2a-2c=0\Longrightarrow\ a=-c\quad(2)$$

بفرض بالتالي $c=-1$ بالتالي $a=1$ و $b=1$ ومنه $\vec{n}(1\,,1\,,-1)$ والمستوي يمر من $B(2,0,0)$

$$1(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0\Longrightarrow(GBD): x+y-z-2=0$$

❷ المستقيم مار من $E(0,0,2)$ و شعاع توجيهه $\overrightarrow{EC}(2\,,2\,,-2)$ بالتالي : $t\in\mathbb{R}$: $(EC):\begin{cases}x=2t\\y=2t\\z=-2t+2\end{cases}$

❸ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC) في معادلة المستوي (GBD)

$$2t+2t+2t-2-2=0\Longrightarrow t=\frac{2}{3}\Longrightarrow I\left(\frac{4}{3}\,,\frac{4}{3}\,,\frac{2}{3}\right)$$

❹ بفرض $M(x,y,z)$ بالتالي $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}\Longrightarrow(x\,,y\,,z-2)=\frac{1}{3}(2\,,2\,,-2)$

$$\Longrightarrow(x\,,y\,,z-2)=\left(\frac{2}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{-2}{3}\right)\Longrightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\,,\frac{4}{3}\right)$$

❺ $\overrightarrow{HM}\left(\frac{2}{3},\frac{-4}{3}\,,\frac{-2}{3}\right),\ \overrightarrow{EC}(2\,,2\,,-2)\Longrightarrow\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{EC}=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=0\Longrightarrow\overrightarrow{HM}\perp\ \overrightarrow{EC}$

فالمستقيمين $(EC),(HM)$ متعامدين

السؤال الثاني :

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d', d : $d:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$ و $d':\begin{cases} x = s \\ y = -3s+3 \\ z = -s+1 \end{cases} : s \in \mathbb{R}$

و هل المستقيمين d', d يقعان في مستوٍ واحد ؟ علل إجابتك

الحل :

$\vec{u} = (1,-3,-3)$ شعاع توجيه d و $\vec{v} = (1,-3,-1)$ شعاع توجيه d' غير مرتبطان خطياً

لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي d, d' غير متوازيين فهما إما متقاطعين أو متخالفين

نحل جملة المعادلتين $\begin{cases} t+1 = s \\ -3t+2 = -3s-3 \\ -3t+3 = -s+1 \end{cases} \sim \begin{cases} t-s = -1 & (1) \\ t-s = \frac{5}{3} & (2) \\ 3t-s = 2 & (3) \end{cases}$

نلاحظ التناقض بين المعادلة (1) والمعادلة (2) فجملة المعادلات متناقضة وليس لها حلول

بالتالي المستقيمان d, d' متخالفان ولا يقعان في مستو واحد.

السؤال الرابع :

نتأمل المعلم المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$

والمطلوب اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

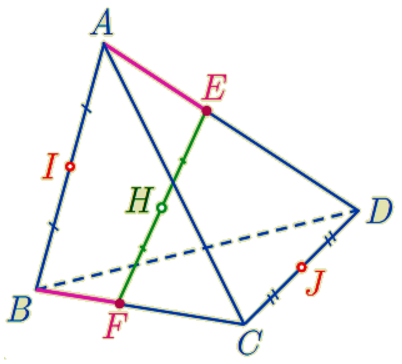
الحل :

لتكن H منتصف $[AB]$ فيكون $H\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$ و $\overrightarrow{BA} = (1, 2, 0)$ فيكون :

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$1\left(x - \frac{3}{2}\right) + 2(y+1) + 0(z-1) = 0 \Longrightarrow x + 2y - \frac{3}{2} + 2 = 0 \Longrightarrow 2x + 4y + 1 = 0$$

التمرين الثاني :



$ABCD$ رباعي وجوه ، α عدد حقيقي I, J هما على الترتيب منتصفا $[CD], [AB]$

و E و F نقطتان تحققان $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BC}$ و H منتصف $[EF]$

أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة

الحل :

أولا :

$\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BC} \Longleftarrow F$ مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C, \alpha), (B, 1-\alpha)$

$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD} \Longleftarrow E$ مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(A, 1-\alpha), (D, \alpha)$

وبما أن H منتصف $[EF]$ وبالتالي H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(E, 1)$ و $(F, 1)$

فحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)$

ثانيا :

J منتصف $[CD]$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة لـ (C, α) و (D, α)

I منتصف $[AB]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A, 1-\alpha)$ و $(B, 1-\alpha)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية :

تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)$

هي نفسها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 2-2\alpha)$ و $(J, 2\alpha)$

وهذا يعني أن النقاط I, J, H تقع على استقامة واحدة

السؤال الثاني :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي P الذي معادلته $p: x+2y+z-1=0$:
والمطلوب :
احسب بعد النقطة A عن المستوي P ، ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

الحل :

$$dist(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|(1)+2(-2)+(0)-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{6}$$

الكرة مركزها $A(1\,,-2\,,0)$ ونصف قطرها $R=dist(A,P)=\frac{4}{6}$ معادلتها :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=\frac{16}{36}$$

المسألة الثانية :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,1,0)$ و $B(1,2,1)$ و $C(4,0,0)$ والمطلوب :

❶ أثبت أن النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة
❷ أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة $x+3y-3z-4=0$

ليكن المستويان Q,P معادلتهما : $Q: 2x+3y-2z-5=0 \quad , \quad P: x+2y-z-4=0$

❸ أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d التمثيلات الوسيطية التالية : $d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$

❹ ما هي نقطة تقاطع المستويات $P\,,\,Q\,,(ABC)$
❺ احسب بعد A عن المستقيم d

❶ $\overrightarrow{AB}(0,1,1)\;,\;\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$ الشعاعان غير مرتبطان خطيا والنقاط ليست على استقامة واحدة

❷ نعوض احداثيات النقاط في معادلة المستوي $x+3y-3z-4=0$

$$(1)+3(1)-3(0)-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow A\in(ABC)$$
$$(1)+3(2)-3(1)-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow B\in(ABC)$$
$$(4)+3(0)-3(0)-4=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow C\in(ABC)$$

بالتالي معادلة المستوي (ABC) هي $x+3y-3z-4=0$

❸ يكون d هو الفصل المشترك للمستويين إذا حقّق معادلتيهما :

$P: t-2+6-t-4=0 \Rightarrow 0=0$ محقّقة
$Q: 2t-4+9-2t-5=0 \Rightarrow 0=0$ محقّقة

إذاً المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q

❹ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي (ABC) نجد

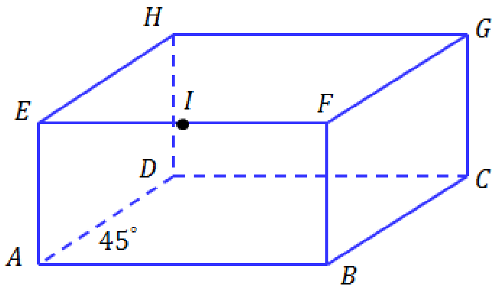
$$t-2+9-3t-4=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\,,3\,,\frac{3}{2}\right)$$

❺ بفرض A' المسقط القائم لـ $A(1,1,0)$ على d
وبالتالي $A'(t-2\,,3\,,t)$ و $\overrightarrow{AA'}(t-3\,,2\,,t)$ و $\vec{u}(1\,,0\,,1)$

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0 \Rightarrow t-3+t=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow A'\left(\frac{-1}{2}\,,3\,,\frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AA'}\left(\frac{-3}{2},2\,,\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AA'}\right\|=\sqrt{\frac{9}{4}+4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{34}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

السؤال الثاني :



$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 2$
وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ تساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$

❶ أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

❷ عين موضع النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\cos\widehat{DAB} = 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

❷ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}$

ومنه M منطبقة على I

المسألة الأولى :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(2,1,3), B(1,0,-1), C(4,0,0), D(0,4,0), E(1,-1,1)$

❶ جد $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$

❷ أثبت أن النقاط E, D, C ليست واقعة على استقامة واحدة

❸ أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE)

❹ اكتب معادلة المستوي (CDE)

❺ احسب بعد B عن المستوي (CDE)

❻ اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE)

الحل :

❶ جد $\overrightarrow{AB}(-1\,,-1\,,-4)\ ,\ \overrightarrow{CD}(-4\,,4\,,0)\ ,\ \overrightarrow{CE}(-3\,,-1\,,1)$

❷ الشعاعين $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطيا لان مركباتهما غير متناسبة فالنقاط E, D, C ليست واقعة على استقامة واحدة

❸

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-1\,,-1\,,-4).(-4\,,4\,,0) = 4 - 4 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = (-1\,,-1\,,-4).(-3\,,-1\,,1) = 3 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CE}$$

بالتالي (AB) يعامد المستوي (CDE)

❹ المستوي (CDE) مار من $C(4,0,0)$ وناظمه $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(-1\,,-1\,,-4)$ بالتالي :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow -1(x - 4) - 1(y - 0) - 4(z - 0) = 0$$

$$-x - y - 4z + 4 = 0 \Rightarrow x + y + 4z - 4 = 0$$

❺ $dist\big(B, (CDE)\big) = \frac{|ax_B + by_B + cz_B + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(1) + (0) + 4(-1) - 4|}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = \frac{7}{\sqrt{18}}$

❻ الكرة مركزها $B(1,0,-1)$ ونصف قطرها $R = dist\big(B, (CDE)\big) = \frac{7}{\sqrt{18}}$ معادلتها :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{49}{18}$$

السؤال الرابع :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتان $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$ والمطلوب :

❶ أكتب تمثيلا وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه $\vec{u}(2,2,1)$

❷ أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان

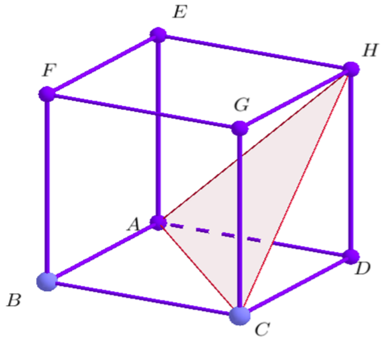
الحل :

❶ $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + b_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ,t \in R \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t \\ z = t + z_0 \end{cases} ,t \in R$

❷ $\overrightarrow{AB}(-1,1,0) ,\vec{u}(2,2,1) \Rightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AB} = -2 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow$

$\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ فالمستقيمين (AB) و d متعامدين

المسألة الأولى :



نتأمل المعلم المتجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ مكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب

❶ اكتب إحداثيات كلاً من النقاط A,C,D,F,H

❷ اكتب معادلة المستوي (ACH)

❸ أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH) .

❹ بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F,I,D على استقامة واحدة

❺ اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

الحل :

❶ $A(0,0,0) ,B(1,0,0), C(1,1,0) ,D(0,1,0) ,E(0,0,1), F(1,0,1) ,G(1,1,1) \ ,H(0,1,1)$

❷ $\overrightarrow{AH}(0,1,1) ,\overrightarrow{AC}(1,1,0)$ و بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ACH) بالتالي

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b \quad (1)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AH} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AH} = 0 \Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow c = -b \quad (2)$$

بفرض بالتالي $b = -1$ بالتالي $a = 1$ و $c = 1$ ومنه $\vec{n}(1 ,-1 ,1)$ والمستوي يمر من $A(0,0,0)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow (ACH): x - y + z = 0$$

❸ $\overrightarrow{n_{ACH}}(1 ,-1 ,1) ,\overrightarrow{n_P}(-2 ,2 ,-2) \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = -2\overrightarrow{n_{ACH}}$

شعاعي الناظمين مرتبطين خطيا لان مركباتهما متناسبة فالمستويين متوازيين

❹ مركز ثقل المثلث ACH هو $I\left(\frac{0+1+0}{3} ,\frac{0+1+1}{3} ,\frac{0+0+1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} ,\frac{2}{3} ,\frac{1}{3}\right)$ و $F(1,0,1)$ و $D(0,1,0)$

$$\overrightarrow{DI}\left(\frac{1}{3} ,\frac{-1}{3} ,\frac{1}{3}\right) ,\overrightarrow{DF}(1,-1,1) \Rightarrow \overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$

الشعاعين مرتبطين خطيا لان مركباتهما متناسبة فالنقاط F,I,D على استقامة واحدة

❺ الكرة مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ معادلتها :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$$

$$dist(\Omega, ACH) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(1) - (-1) + (1)|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = R$$

بالتالي المستوي (ACH) يمس الكرة S

السؤال الرابع :

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتان $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$
والمستوي P الذي معادلته $p: 3x-y-3z-8=0$: والمطلوب :
❶ أثبت أن المستقيم (AB) يعامد على المستوي P
❷ أكتب تمثيلا وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثم عين احداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P

الحل :

❶ $\overrightarrow{n_P}(3,-1,-3)\ ,\ \overrightarrow{AB}(-3,1,3) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=-\overrightarrow{AB}$
الشعاعين مرتبطين خطيا بالتالي المستقيم (AB) يعامد على المستوي P

❷ $$(2,1,-2)\,,\overrightarrow{AB}(-3,1,3) \Rightarrow (AB):\begin{cases}x=at+x_0\\ y=bt+b_0\\ z=ct+z_0\end{cases}\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow (AB):\begin{cases}x=-3t+2\\ y=t+1\\ z=3t-2\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) في معادلة المستوي

$$-9t+6-t-1-9t+6-8=0 \Rightarrow t=\frac{3}{19} \Rightarrow A'\left(\frac{29}{19},\frac{22}{19},\frac{-29}{19}\right)$$

المسألة الأولى :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات
$P: 2x-y+2z-2=0\ ,\ Q:\ x+y+z-1=0\ ,\ R:\ x-z-1=0$ والمطلوب :
➊ أثبت أن المستويان Q,P يتقاطعان في الفصل المشترك Δ أكتب تمثيلا وسيطياً له
➋ تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر في النقطة A
➌ أثبت أن المستويات Q,P,R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين احداثياتها
➍ استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

الحل :

❶ $\overrightarrow{n_P}(2,-1,2)\ ,\ \overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$ شعاعي الناظمين غير مرتبطين خطيا لان مركباتهما غير متناسبة
فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك لكتابة الفصل المشترك نجمع معادلتي المستويين

$$\begin{matrix}P: 2x-y+2z-2=0\\ Q:\ x+y+z-1=0\end{matrix}\ \xRightarrow{\text{بالجمع}} 3x+3z-3=0 \Rightarrow x+z-1=0 \Rightarrow x=-z+1$$

نعوض في المعادلة الثانية نجد : $-z+1+y+z-1=0 \Rightarrow y=0$

نفرض $z=t$ بالتالي $x=-t+1$ ومنه : $\Delta:\begin{cases}x=-t+1\\ y=0\\ z=t\end{cases}\ ,t\in\mathbb{R}$

❷ $\overrightarrow{u_\Delta}(-1,0,1)\ ,\ \overrightarrow{n_Q}(1,0,-1) \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=-\overrightarrow{n_Q}$
الشعاعين مرتبطين خطيا بالتالي المستقيم Δ يعامد المستوي R
نعوض احداثيات النقطة $A(1,2,0)$ في معادلة المستوي $R:\ x-z-1=0$ نجد :
$1-0-1=0 \Rightarrow 0=0$ بالتالي المستوي R ويمر في النقطة A

❸ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي R نجد $-t+1-t-1=0 \Rightarrow t=0$
بالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع في النقطة $I(1,0,0)$

❹ النقطة تنتمي للمستوي R العمودي على المستقيم Δ ويتقاطع معه في النقطة I بالتالي :

$$dist(A,\Delta)=AI=\sqrt{(0)^2+(2)^2+(0)^2}=2$$

السؤال الثاني :

نتأمل المستويين $P_1: 2x - y + z + 1 = 0$, $P_2: x + y - z = 0$ والمطلوب:

❶ تبين أن المستويين متعامدان.

❷ اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك

الحل :

❶ $\overrightarrow{n_{P_1}}(2\,,-1\,,1)$, $\overrightarrow{n_{P_2}}(1\,,1\,,-1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{P_1}}.\overrightarrow{n_{P_2}} = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow$
شعاعي الناظمين متعامدين فالمستويين متعامدين

❷
$$\begin{matrix} P_1 : 2x - y + z + 1 = 0 \\ P_2 : x + y - z \quad = 0 \end{matrix} \overset{\text{بالجمع}}{\Longrightarrow} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

نفرض $z = t$ ونعوض في المعادلة الثانية نجد $y = t + \frac{1}{3}$ بالتالي : $t \in \mathbb{R}$,
$$\Delta : \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ y = t + \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

التمرين الرابع :

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,0), B(4,3,-3), C(-1,1,2), D(0,0,1)$ المطلوب :

❶ أثبت أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً

❷ أثبت أن الأشعة: $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

❸ استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$
حيث أن α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}(3,3,-3)$, $\overrightarrow{AC}(-2,1,2)$ الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لان مركباتهما غير متناسبة

❷ ليكن $a\,,b \in \mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$$(-1\,,0\,,1) = a(3\,,3\,,-3) + b(-2\,,1\,,2) \Rightarrow (-1\,,0\,,1) = (3a - 2b\,, 3a + b\,, -3a + 2b)$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = -1 \\ 3a + b = 0 \\ -3a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = -1 & ① \\ -3a - b = 0 & ② \\ -3a + 2b = 1 & ③ \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ① و ② نجد $-3b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$ نعوض في ② $-3a - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{9}$

نعوض في ③ نجد $-3\left(\frac{-1}{9}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow 1 = 1$ محققة بالتالي $\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

أي $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً

❸ $$\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 9\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow -9\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC}$$

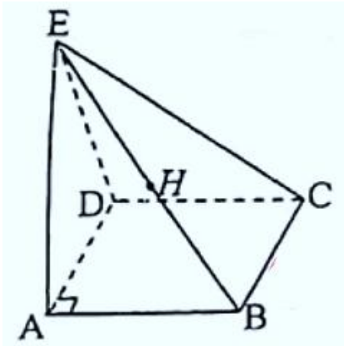
$$9\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Rightarrow 7\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

أي D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C, 3)$ و $(B, -1)$ و $(A, 7)$

المسألة الأولى:

$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E، قاعدته مربع طول ضلعه 3 ، $[AE]$عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA=3$

نختار المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب :



❶ عين إحداثيات A,B,C,D,E

❷ جد معادلة للمستوي (EBC)

❸ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC)

❹ استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC)

❺ احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$

الحل :

❶ $A(0,0,0)\ ,\ B(3,0,0)\ ,\ C(3,3,0)\ ,\ D(0,3,0)\ ,\ E(0,0,3)$

❷ $\overrightarrow{EB}(3,0,-3)\ ,\overrightarrow{EC}(3,3,-3)$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظما على المستوي (EBC)

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{EB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{EC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-3c=0\\ 3a+3b-3c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=c\\ a+b-c=0\end{cases}$$

بفرض $c=1$ بالتالي $a=1$ و $b=0$ ومنه $\vec{n}(1,0,1)$ والمستوي مار من $E(0,0,3)$

$$(x-0)+0(y-0)+1(z-3)=0\Rightarrow(EBC):x+z-3=0$$

❸ المستقيم d يعامد المستوي بالتالي $\vec{u}=\vec{n}(1,0,1)$ ويمر من $A(0,0,0)$

$$d:\begin{cases}x=at+x_A\\ y=bt+y_A\\ z=ct+z_A\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\Rightarrow d:\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

❹ $E(0,0,3)\ ,B(3,0,0)\Rightarrow H\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$

بما أن المستقيم d يعامد المستوي (EBC) فان المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC)

هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي(EBC) بالتالي نعوض معادلة المستقيم في المستوي

$$t+t-3=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{3}{2}\Rightarrow A'\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)\Rightarrow A'=H$$

❺ المثلث EBC قائم في B و $BC=3$ و $EB=|\overrightarrow{EB}|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

بالتالي $S_{EBC}=\frac{EB\times BC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times3}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ و $AH=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$$V=\frac{1}{3}S_{EBC}\times AH=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}\times3}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}$$

طريقة ثانية : $V=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}S_{ABCD}\times EA\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\times3\times3\times3\right)=\frac{9}{2}$

السؤال الرابع :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$

والنقطة $A(1,1,-2)$ والمطلوب :

❶ أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P

❷ اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والموازي للمستوي P

الحل :

❶ نعوض إحداثيات A في معادلة المستوي فنجد : $2+1+6+2\neq 0$ غير محققة إذاً $A\notin P$

❷ بما أن P,Q متوازيين فإن $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{n_P}(2\,,1\,,-3)$ و المستوي مار من $A(1,1,-2)$

$$2(x-1)+1(y-1)-3(z+2)=0 \Longrightarrow Q: 2x+y-3z-9=0$$

التمرين الثالث :

المستقيمان d و d' معرفان وسيطياً وفق : $d:\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1 \\ z=-t \end{cases}\ ,t\in\mathbb{R}$ و $d':\begin{cases} x=2s-1 \\ y=s-2 \\ z=3s-2 \end{cases}\ ,s\in\mathbb{R}$

المطلوب:

❶ أثبت أن d و d' متقاطعان ، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع

❷ جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d و d'

الحل :

❶ شعاع توجيه المستقيم d هو $\vec{u}(1\,,2\,,-1)$ و شعاع توجيه المستقيم d' هو $\overrightarrow{u'}(2\,,1\,,3)$

$\vec{u}$ و $\overrightarrow{u'}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي d,d' غير متوازيين ، نبحث عن التقاطع :

$2s-1=t+2$ ① , $s-2=2t+1$ ② , $3s-2=-t$ ③

بجمع ① مع ③ : $5s-3=2 \Rightarrow s=1$ نعوض في ③ نجد $t=-1$ نعوض في ②

$1-2=-2+1 \Rightarrow -1=-1$ محققة إذاً d,d' متقاطعان ويقعان في مستوي واحد

و لإيجاد نقطة التقاطع : نعوض $t=-1$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d نجد نقطة التقاطع هي $I(1\,,-1\,,1)$

❷ $\vec{u}(1\,,2\,,-1)\,,\ \overrightarrow{u'}(2\,,1\,,3)$ ولنفرض ناظم المستوي المطلوب $\vec{n}(a\,,b\,,c\,)$

إنّ كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ يوازي الناظم للمستوي وليكن بالتالي:

$$\begin{aligned} \vec{n}.\vec{u}=0 &\Rightarrow a+2b-c=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{u'}=0 &\Rightarrow 2a+b+3c=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3a+6b-3c&=0 \\ 2a+b+3c&=0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{بالجمع}} 5a+7b=0 \Rightarrow a=\frac{-7}{5}b$$

$0 \Rightarrow -6a+8b+10c=0$

نفرض $b=-5 \Rightarrow a=7$ نعوض في المعادلة الاولى نجد $c=-3$ ومنه $\vec{n}(7\,,-5\,,-3\,)$

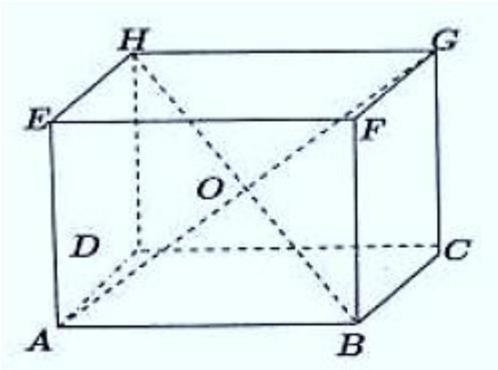
و المستوي مار بالنقطة $I(1\,,-1\,,1)$ بالتالي

$$7(x-1)-5(y+1)-3(z-1)=0 \Longrightarrow Q: 7x-5y-3z-9=0$$

المسألة الأولى :

مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2 ، O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.

نختار المعلم متجانس $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:



❶ جد إحداثيات النقاط A, B, G, H, O.

❷ أعط معادلة للمستوي (GOB).

❸ احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $cos\,\widehat{GOB}$.

❹ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

❺ أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)

❻ جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)

الحل :

❶ $A(0,0,0)\,,B(2,0,0)\,,C(2,2,0)\,,D(0,2,0)\,,E(0,0,2)\,,F(2,0,2)\,,G(2,2,2),H(0,2,2),O(1,1,1)$

❷ $\overrightarrow{OG}(1\,,1\,,1)\,,\overrightarrow{OB}(1\,,-1\,,-1)$ و بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GOB) بالتالي

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{OG}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{OG}=0\Longrightarrow a+b+c=0\quad(1)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{OB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{OB}=0\Longrightarrow a-b-c=0\quad(2)$$

بجنع المعادلتين نجد $2a=0\Longrightarrow a=0$ نعوض في (1) نجد $c=-b$ بفرض $b=1$ بالتالي $c=-1$

ومنه $\vec{n}(0\,,1\,,-1)$ والمستوي يمر من $B(2,0,0)$

$$0(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0\Longrightarrow(GBD):\ y-z=0$$

❸ $\overrightarrow{OB}(1\,,-1\,,-1)\,,\overrightarrow{OG}(1\,,1\,,1)\,,\|\overrightarrow{OB}\|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\,,\|\overrightarrow{OG}\|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}=1-1-1=-1\Rightarrow cos\,\widehat{GOB}=\frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{OB}\|\times\|\overrightarrow{OG}\|}=\frac{-1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{-1}{3}$$

❹ المستقيم (DC) مار من $D(0,2,0)$ و شعاع توجيهه $\overrightarrow{DC}(2\,,0\,,0)$ بالتالي : $t\in\mathbb{R}$: $(EC):\begin{cases}x=2t\\y=2\\z=0\end{cases}$

❺ $\vec{n}(0\,,1\,,-1)\,,\overrightarrow{DC}(2\,,0\,,0)\Longrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{DC}=0+0+0=0$

الشعاعين متعامدين بالتالي المستقيم يوازي المستوي

$A(0,0,0)\,,B(2,0,0)\,,C(2,2,0)\,,D(0,2,0)\,,E(0,0,2)\,,F(2,0,2)\,,G(2,2,2),H(0,2,2),O(1,1,1)$

❻ $\overrightarrow{DA}(0\,,-2\,,0)\quad\&\quad\overrightarrow{DB}(2\,,-2\,,0)\ \,,\overrightarrow{DC}(2\,,0\,,0)$

$$\overrightarrow{DA}=a\overrightarrow{DB}+b\overrightarrow{DC}\quad\Longrightarrow(0\,,-2\,,0)=a(2\,,-2\,,0)+b(2\,,0\,,0)$$

$$(0\,,-2\,,0)=(2a+2b\,,-2a\,,0)$$

$$\begin{cases}2a+2b=0\\-2a=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-a & ①\\a=1 & ②\end{cases}$$

نعوض ② في ① نجد $a=1\,,\ b=-1$

بالتالي : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\Longrightarrow\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=0$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$ ومنه $\alpha=1\,,\beta=-1\,,\ \gamma=1$

طريقة ثانية : بحسب خاصة متوازي الاضلاع في الوجه $ABCD$ نجد :

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}\Longrightarrow\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=0$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$

ومنه $\alpha=1\,,\beta=-1\,,\ \gamma=1$

السؤال الرابع :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,0,5)$ و $D(6,2,5)$ والمطلوب :

❶ أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

❷ جد العددين الحقيقيين α و β بحيث $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن A . B , C , D تقع في مستو واحد

الحل :

❶ $\overrightarrow{AC}(3,0,4)$, $\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$ الشعاعين غير مرتبطين خطيا لأن مركباتهما غير متناسبة

❷ $$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\Longrightarrow(4,2,4)=\alpha(-1,-2,0)+\beta(3,0,4)$$

$$(4,2,4)=(-\alpha+3\beta,-2a,4\beta)$$

$$-\alpha+3\beta=4 \quad ① \quad , \quad 2\alpha=2\Longrightarrow\alpha=-1 \quad ② \quad , \quad 4\beta=4\Longrightarrow\beta=1 \quad ③$$

نعوض $\alpha=-1$, $\beta=1$ في المعادلة الاولى نجد $1+3=4\Longrightarrow4=4$ محققة

بالتالي : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ والاشعة الثلاثة مرتبطة خطيا والنقاط A . B , C , D تقع في مستو واحد

المسألة الأولى :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(-1,2,3)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-3,4,-1)$ و $D(3,1,1)$ والمطلوب :

❶ جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبين أن المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان

❷ أثبت أن الشعاع $\vec{n}\,(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة للمستوي (ABC)

❸ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم d المار من D والعمودي على المستوي (ABC)

❹ احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$

❺ بفرض G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,2),(B,-1),(A,1)$

اثبت أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

الحل :

❶ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(3,-1,-2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-2,2,-4)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-6-2+8=0$

الشعاعان متعامدان فالمستقيمان (AB) و (AC) متعامدان

❷ $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-4+8-4=0$, $\vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}=6-4-2=0$

بالتالي الشعاع $\vec{n}\,(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) والمستوي مار من $B(2,1,1)$ ومنه :

$$2(x-2)+4(y-1)+1(z-1)=0\Longrightarrow(ABC):\ 2x+4y+z-9=0$$

❸ المستقيم d يعامد المستوي بالتالي $\vec{u}=\vec{n}\,(2,4,1)$ ويمر من $D(3,1,1)$

$$d:\begin{cases}x=at+x_A\\y=bt+y_A\\z=ct+z_A\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\Longrightarrow d:\begin{cases}x=2t+3\\y=4t+1\\z=t+1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

❹

$$dist(D,ABC)=\frac{|ax_D+by_D+cz_D+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2(3)+4(1)+(1)-9|}{\sqrt{4+16+1}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$S_{ABC}=\frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|.\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|}{2}=\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{24}}{2}=\frac{\sqrt{14}\times2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2\times7\times2\times3}=2\sqrt{21}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h=\frac{1}{3}\times(2\sqrt{21})\times\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{4}{3}$$

❺ G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,2),(B,-1),(A,1)$, بالتالي

$$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=0\Longrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GC}=0\Longrightarrow\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{GC}$$

الشعاعين $\overrightarrow{GC}$ و $\overrightarrow{BA}$ مرتبطين خطيا فالمستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

طريقة ثانية : نوجد احداثيات G ثم مركبات الشعاعين $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{AB}$ ثم نثبت الارتباط الخطي لهما

السؤال الثاني :

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ لدينا $A(2\,,1\,,2)$ والمستوي $P: 2x+y-2z-4=0$

❶ أحسب بعد النقطة A عن المستوي P

❷ اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

الحل :

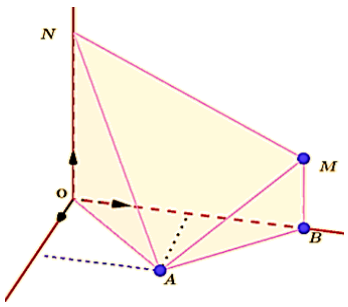
❶

$$dest(A\,,P)=\frac{|2(2)+(1)-2(2)-4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{3}{3}=1$$

❷ مركز الكرة A و نصف قطرها هو بعد A عن P : $R=dest(A\,,P)=1$ ومعادلة الكرة :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Longrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$$

التمرين الثاني :



في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط

$A(1\,,3\,,0)\,,B(0\,,6\,,0)\,,N(0\,,0\,,3)\,\,,M(0\,,6\,,2)$ والمطلوب :

❶ أكتب معادلة للمستوي (AMN)

❷ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN)

❸ أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$

الحل :

❶ $O(0,0,0)\,,A(1\,,3\,,0)\,,B(0\,,6\,,0)\,\,,N(0\,,0\,,3)\,\,,M(0\,,6\,,2)$

$\overrightarrow{AM}(-1\,,3\,,2)\,,\overrightarrow{AN}(-1\,,-3\,,3)$ و بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (AMN) بالتالي

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\Longrightarrow -a+3b+2c=0 \quad (1)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AN}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AN}=0\Longrightarrow -a-3b+3c=0 \quad (2)$$

بجنع المعادلتين نجد $-2a+5c=0\Longrightarrow a=\frac{5}{2}c$

بفرض $c=2$ بالتالي $a=5$ نعوض في (1) نجد $b=\frac{1}{3}$ للتخلص من الكسور نضرب المركبات بـ 3

ومنه $\vec{n}(15\,,1\,,6)$ والمستوي يمر من $N(0\,,0\,,3)$

$$15(x-0)+1(y-0)+6(z-3)=0\Longrightarrow (AMN):\;\; 15x+y+6z-18=0$$

❷ المستقيم Δ مار من $O(0\,,0\,,0)$ و يقبل $\vec{n}(15\,,1\,,6)$ شعاع توجيهه له بالتالي : $t\in\mathbb{R}$: $(EC):\begin{cases}x=15t\\ y=t\\ z=6t\end{cases}$

❸ المستوي مار من $(0\,,6\,,1)$ منتصف $[BM]$ وناظمه $\vec{n}=\overrightarrow{BM}(0\,,0\,,2)$ معادلته

$$0(x-0)+0(y-6)+2(z-1)=0\Longrightarrow z-1=0$$

السؤال الثاني :

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط $C(0,0,1), B(0,1,0), A(2,0,0)$ والمطلوب :

❶ أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج $cos\left(\widehat{BAC}\right)$

❷ اذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}(-2,1,0),\overrightarrow{AC}(-2,0,1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2,1,0).(-2,0,1)=4+0+0=4$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5},\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}\Rightarrow\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

❷ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\Rightarrow\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\Rightarrow\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{1}{6}AB$

المسألة الأولى :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ النقطة $A(1,1,2)$ و المستويان P و Q :

$P: x-y+2z-1=0 \quad , \quad Q: 2x+y+z+1=0$ والمطلوب :

➊ أثبت ان المستويين P و Q متقاطعين بفصل مشترك d ➋ أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d

➌ اكتب معادلة للمستوي R المار من A و يعامد كلا من المستويين P و Q

➍ جد احداثيات النقطة B الناتجة عن تقاطع المستقيم d و المستوي R

➎ احسب بعد النقطة A عن المستقيم d ➏ اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q

الحل :

➊ $\overrightarrow{n_P}(1,-1,2)\ ,\ \overrightarrow{n_Q}(2,1,1)$ الشعاعين غير مرتبطين خطيا لان مركباتهما غير متناسبة فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك

➋
$$\begin{aligned}P&: x-y+2z-1=0\\ Q&: 2x+y+z+1=0\end{aligned}\ \xRightarrow{\text{بالجمع}}\ 3x+3z=0\Rightarrow x=-z$$

نعوض في المعادلة الثانية نجد : $-2z+y+z+1=0\Rightarrow y=z-1$

نفرض $z=t$ بالتالي $y=t-1\ ,\ x=-t$ ومنه : $\Delta:\begin{cases}x=-t\\ y=t-1\\ z=t\end{cases}\ ,t\in\mathbb{R}$

➌ لدينا $\overrightarrow{n_Q}(2,1,1)\ ,\ \overrightarrow{n_P}(1,-1,2)$ ولنفرض $\overrightarrow{n_R}(a,b,c)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_P}=0\\ \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b+2c=0\\ 2a+b+c=0\end{cases}\ \text{بالجمع}\Rightarrow 3a+3C=0\ \Rightarrow a=-c$$

بفرض $c=-1$ وبالتالي $a=1\ ,\ b=-1$ ومنه $\overrightarrow{n_R}(1,-1,-1)$ و المستوي R المار بالنقطة $A(1,1,2)$

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$(x-1)-(y-1)-(z-2)=0\Rightarrow x-y-z+2=0$$

➍ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي R

$$-t-t+1-t+2=0\Rightarrow t=1\Rightarrow B(-1,0,1)$$

➎ النقطة A تنتمي للمستوي R العمود على d بالتالي النقطة $B(-1,0,1)$ هي مسقط A على d بالتالي

$$dest(A,d)=AB=\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}$$

➏ مركز الكرة $A(1,1,2)$ و نصف قطرها هو بعد A عن Q :

$$R=dest(A,Q)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2(1)+(1)+(2)+1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

معادلة الكرة : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$

السؤال الثاني :

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$، $B(1,-1,1)$ والمطلوب :
اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S

الحل :

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المحور فهي متساوية البعد عن A و B بالتالي $MA=MB \implies MA^2=MB^2$

$$(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$$
$$x^2+y^2-2y+1+z^2+2z+1=x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2-2z+1$$
$$2x-4y+4z-1=0 \implies x+2y-4z-3=0$$

مجموعة النقاط S هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

المسألة الأولى:

في المعلم المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ نتأمل النقاط $A(2,-2,2)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,0,1)$ و $D(0,0,1)$ والمطلوب :

❶ أثبت أن النقاط B و C و D لا تقع على استقامة واحدة
❷ أثبت أن $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD)
❸ اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD)
❹ عين احداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)
❺ اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً فيها

الحل :

❶ $\overrightarrow{BD}(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{BC}(0,-1,-1)$ الشعاعان غير مرتبطان خطيا والنقاط ليست على استقامة واحدة

❷ نعوض احداثيات النقاط في معادلة المستوي $x+3y-3z-4=0$

$$1+0-1=0 \implies 0=0 \implies B\in(BCD)$$
$$0+1-1=0 \implies 0=0 \implies C\in(BCD)$$
$$0+1-1=0 \implies 0=0 \implies D\in(BCD)$$

بالتالي $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD)

❸ المستقيم Δ مار من $A(2,-2,2)$ و يقبل $\vec{n}(0\,,1\,,1)$ شعاع توجيه له : $(\Delta):\begin{cases}x=2\\ y=t-2\ : t\in\mathbb{R}\\ z=t+2\end{cases}$

❹ النقطة K هي نقطة تقاطع Δ مع المستوي (BCD) بالتالي
نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي (BCD) نجد

$$t-2+t+2-1=0 \implies t=\frac{1}{2} \implies \left(2\,,\frac{-3}{2}\,,\frac{5}{2}\right)$$

❺ مركز الكرة هو I منتصف $[AD]$ ومنه $I\left(1\,,-1\,,\frac{3}{2}\right)$

نصف قطر الكرة هو AD بالتالي $R=\frac{AD}{2}=\frac{\sqrt{4+4+1}}{2}=\frac{3}{2}$

$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2 \implies (x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$