
الدرس
7
7
7
7
7
7

العلاقات و الدوال العكسية

INVERSE RELATIONS AND FUNCTIONS


Welcome

لماذا ؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

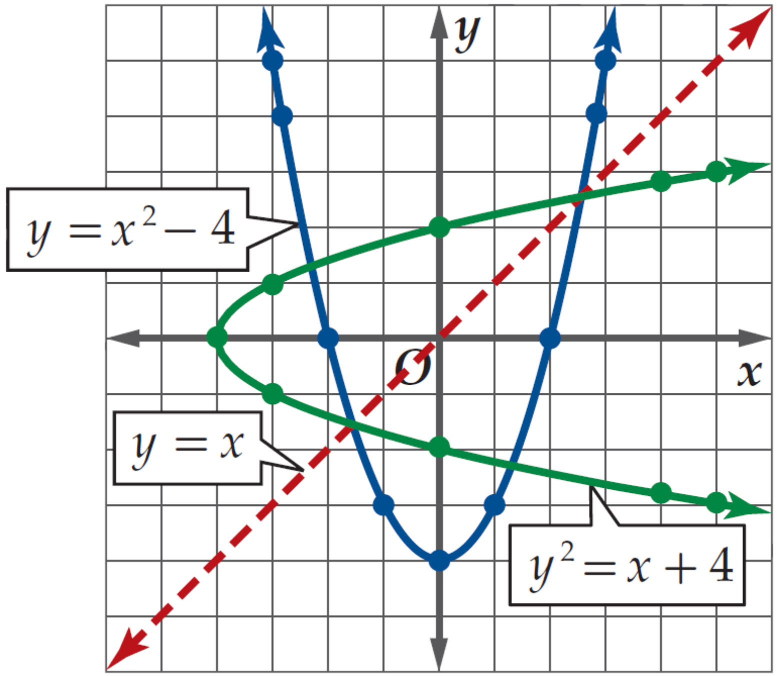
السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الدالة العكسية :

العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن العلاقة A علاقة عكسية للعلاقة B إذا وفقط إذا تحقّق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجودًا في إحدى العلاقتين، فإن (a, b) يكون موجودًا في الأخرى. وإذا مُثّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلاً

العلاقة :

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



العلاقة العكسية :

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم y = x .
هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلاّ أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوال. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت الدالة العكسية لـ f ويرمز لها بالرمز f^{-1}

لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقّق اختبار الخط الرأسي، إلاّ أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

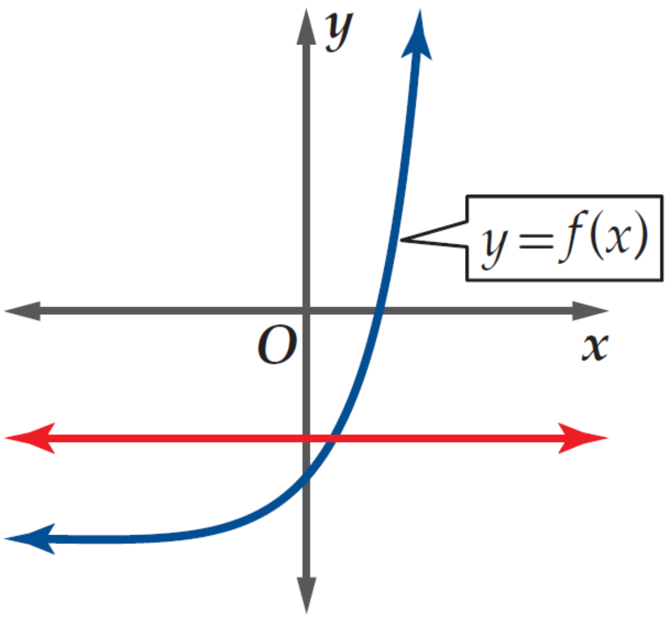
مفهوم أساسي

العمليات على الدوال

التعبير اللفظي :

: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

النموذج :



مثال :

بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة .

مثال 1

تطبيق اختبار الخط الأفقي

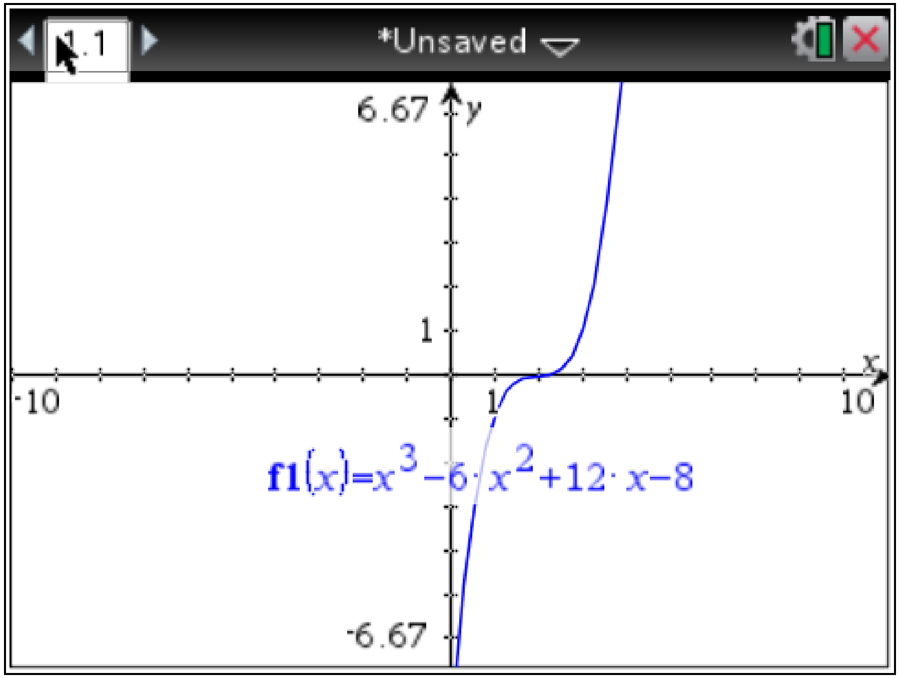
مثل كلاًّ من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

(a $f(x)=|x-1|$

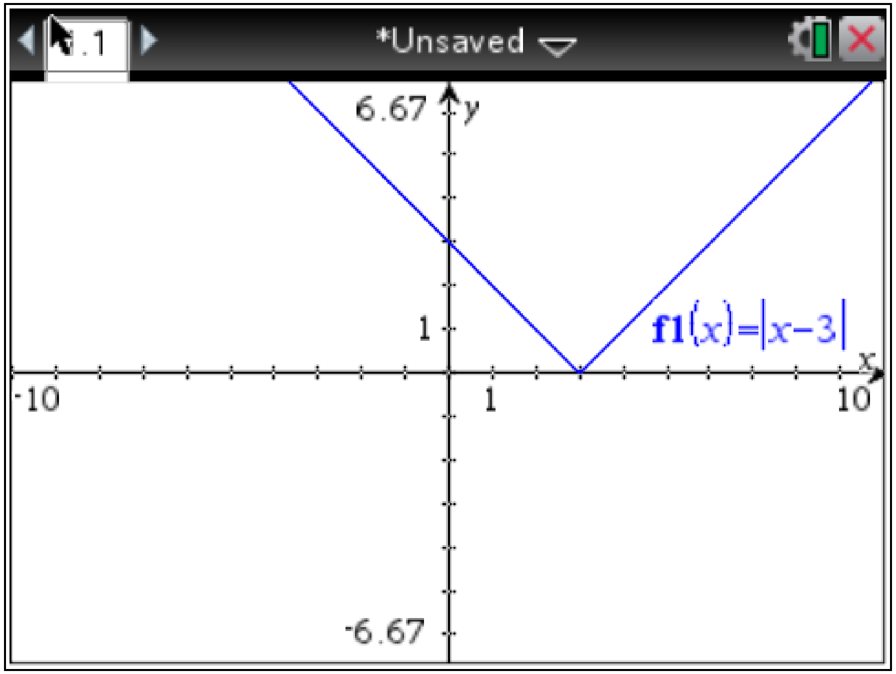
يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى f(x) في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة .

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \quad \text{(b}$$

يوضّح التمثيل البياني للدالة g(x) في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة g(x) في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة .



1.7.2



1.7.1

تحقق من فهمك

(1A $h(x) = \frac{4}{x}$

نعم

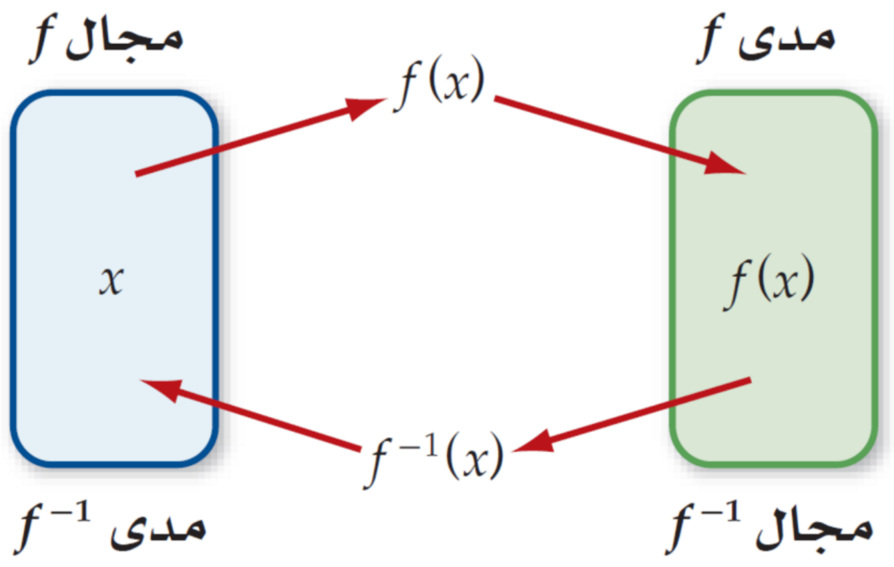
(1B $f(x) = x^2 + 5x - 7$

لا

إيجاد الدالة العكسية :

إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت دالة متباينة ؛ لأن كل قيمة لـ **x** ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ **y**. ولا توجد قيمة لـ **y** ترتبط بأكثر من قيمة لـ **x**.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال **f** مساويًا لمدى f^{-1} ومدى **f** مساويًا لمجال f^{-1}



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية :

مفهوم أساسي

إيجاد الدالة العكسية جبرياً

الخطوة 1 :

تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2 :

ضع y مكان f(x) ، ثم بدّل موقعي x , y.

الخطوة 3 :

حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4 :

اذكر أية شروط على مجال f^{-1} وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1} وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}

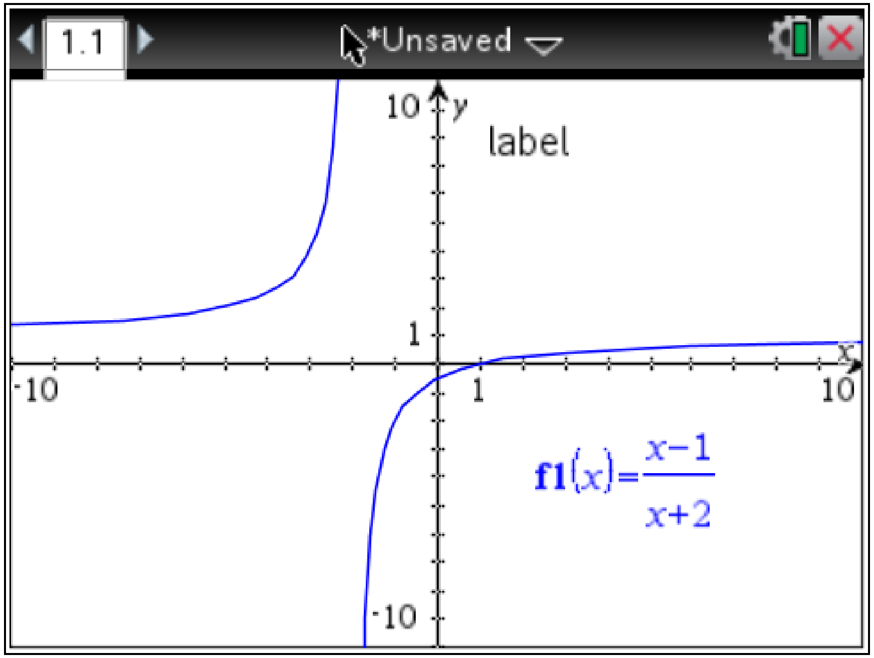
مثال 2

إيجاد الدالة العكسية جبريًّا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه،

وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

(a $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$



يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة

يحقّق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة،

وعليه

فإن لها دالة عكسية، مجال الدالة f هو $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$

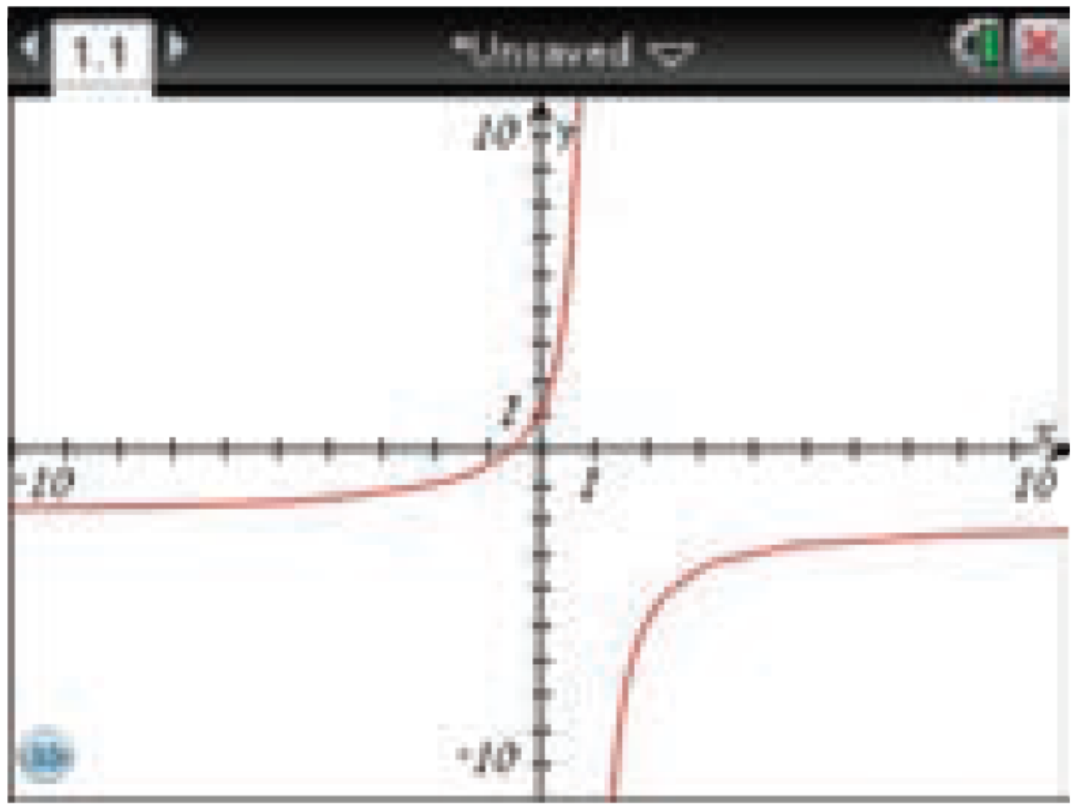
و مداها هو $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

الدالة الأصلية	$f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$
بتعويض y بدلاً من f(x)	$y=\dfrac{x-1}{x+2}$
بالتبديل بين x , y	$x=\dfrac{y-1}{y+2}$
بضرب الطرفين في (y+2) ، ثم تطبيق خاصية التوزيع	$xy+2x=y-1$
بوضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد	$xy-y=-2x-1$
بالحل بالنسبة لـ y	$y(x-1)=\dfrac{-2x-1}{x-1}$
بتعويض f^{-1} بدلاً من y لاحظ أن $x\neq 1$	$f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-1}{x-1}$

يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

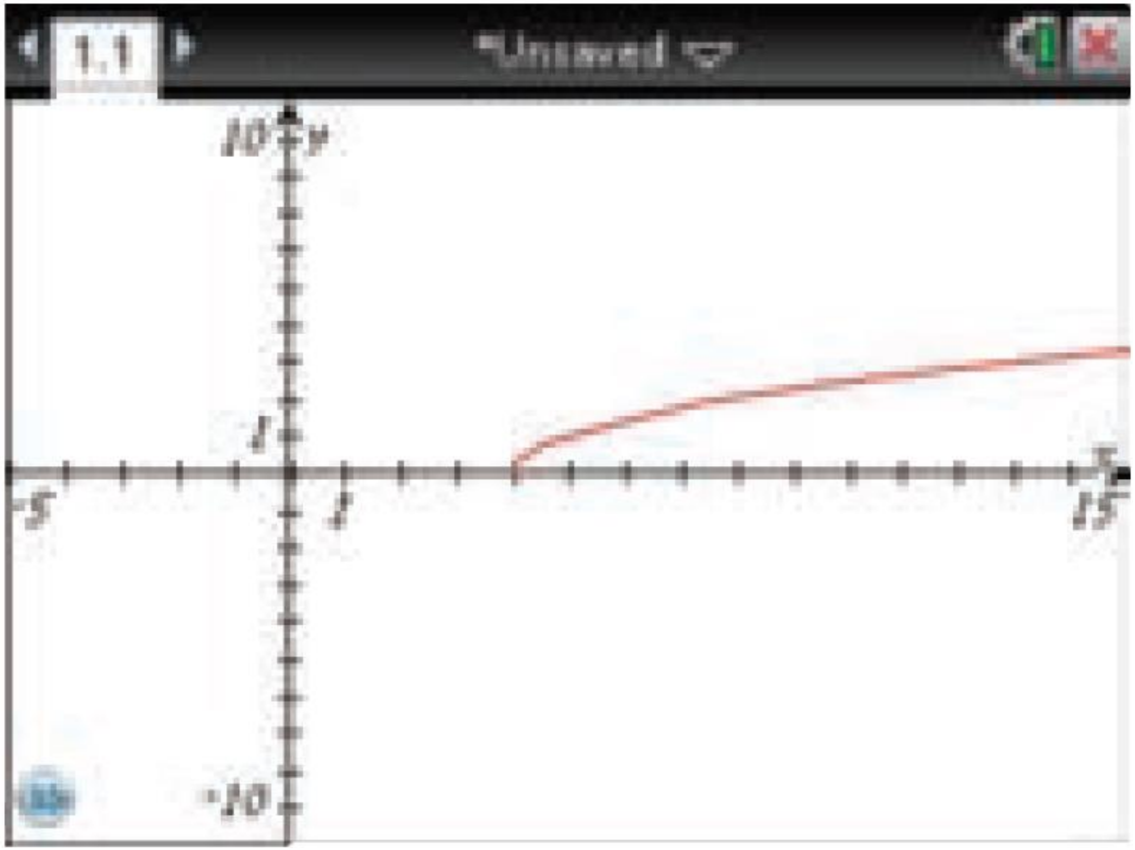
ومداها هو $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان مدى ومجال f^{-1} علي الترتيب

لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1}



(b $f(x)=\sqrt{x-4}$

يوضّح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقّق اختبار الخط الأفقي، لذا فإن الدالة f متباينة، وعليه فإن فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $[4,\infty)$ و مداها $[0,\infty)$ أوجد f^{-1}



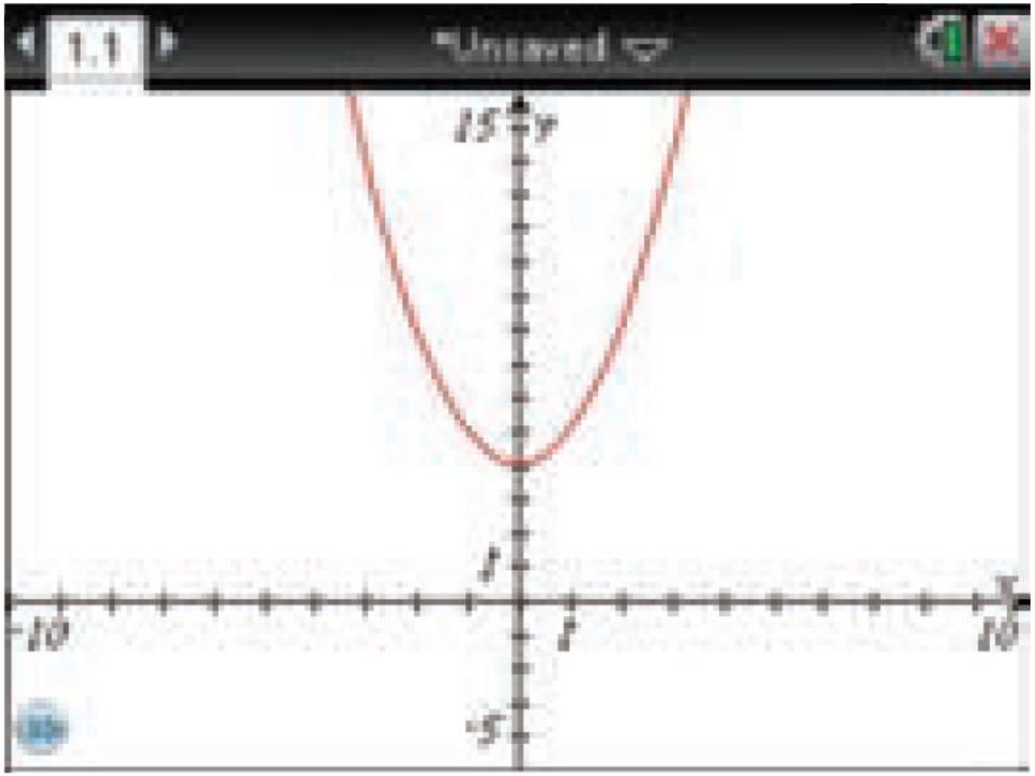
$f(x)=\sqrt{x-4}$	الدالة الأصلية
$y=\sqrt{x-4}$	بتعويض y بدلاً من f(x)
$x=\sqrt{y-4}$	بالتبديل بين x , y
$x^2=y-4$	بتربيع الطرفين
$y=x^2-4$	بالحل بالنسبة لـ y
$f^{-1}(x)=x^2-4$	بتعويض f^{-1} بدلاً من y

يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$

ومداها هو $[4, \infty)$ ومن ثم فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًا لمدى **f** وهو $[0, \infty)$

ويبقى مداها. $[4, \infty)$ والآن يصبح مجال **f** ومداها مساويان لمدى f^{-1}

ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$



تحقق من فهمك

(2A $f(x) = -16 + x^3$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$

(2B $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{7}{x-1}$ ، $x \neq 1$

(2C $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

غير موجودة

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة **f** والعكس صحيح؛ لذا فإننا يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي

تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين **f** و f^{-1} دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان الآتيان :

- $f\left[f^{-1}(x)\right] = x$ لجميع قيم **x** في مجال $f^{-1}(x)$
- $f^{-1}\left[(x)\right] = x$ لجميع قيم **x** في مجال $f(x)$

لاحظ أن تركيب **f** و f^{-1} هو الدالة المحايدة، وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلاّ من الدالتين دالة عكسية للأخرى .

مثال 3

إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًّا أن كلاًّ من الدالتين $f(x)=\frac{6}{x-4}$, $g(x)=\frac{6}{x}+4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)]=x$, $g[f(x)]=x$

$$f[g(x)]=f\left(\frac{6}{x}+4\right)$$

$$=\frac{6}{\left(\frac{6}{x}+4\right)-4}$$

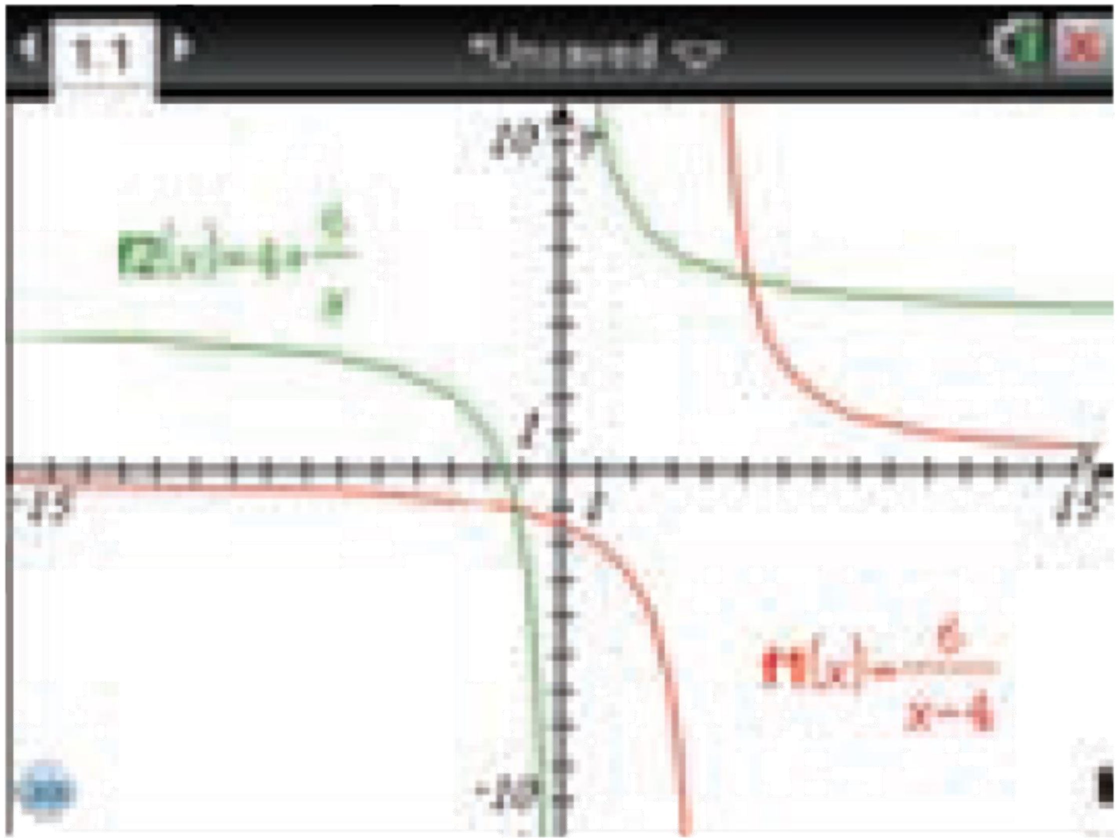
$$=\frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)}=x$$

$$g[f(x)]=g\left(\frac{6}{x-4}\right)$$

$$=\frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)}+4$$

$$=x-4+4=x$$

بما أن $f\left[g\left(x\right)\right]=x\ ,g\left[f\left(x\right)\right]=x$ فإن كلاًّ من الدالتين f(x) , g(x) تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم y = x.



تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلاّ من الدالتين f , g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(3A $f(x) = 18 - 3x \,,\, g(x) = 6 - \dfrac{x}{3}$

$$f[g(x)] = 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right)$$
$$= 18 - 18 + x$$
$$= x$$

$$g[f(x)] = 6 - \frac{18 - 3x}{3}$$
$$= 6 - 6 + x$$
$$= x$$

3B) $f(x) = x^2 + 10,\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

$$f[g(x)] = \left(\sqrt{x - 10}\right)^2 + 10$$

$$= x - 10 + 10$$

$$= x$$

$$g[f(x)] = \sqrt{x^2 + 10 - 10}$$

$$= x$$

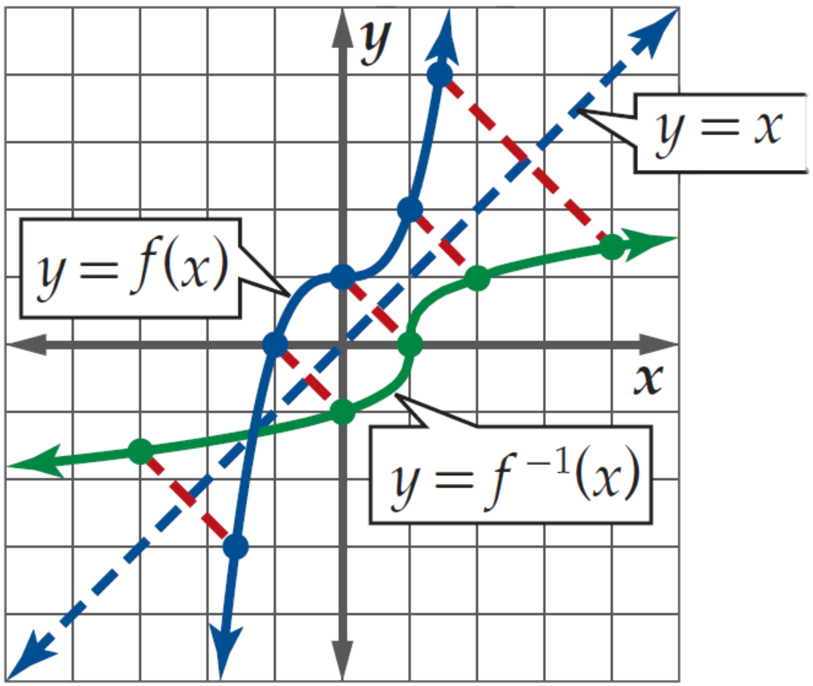
من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًّا لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم y = x.

مثال 4

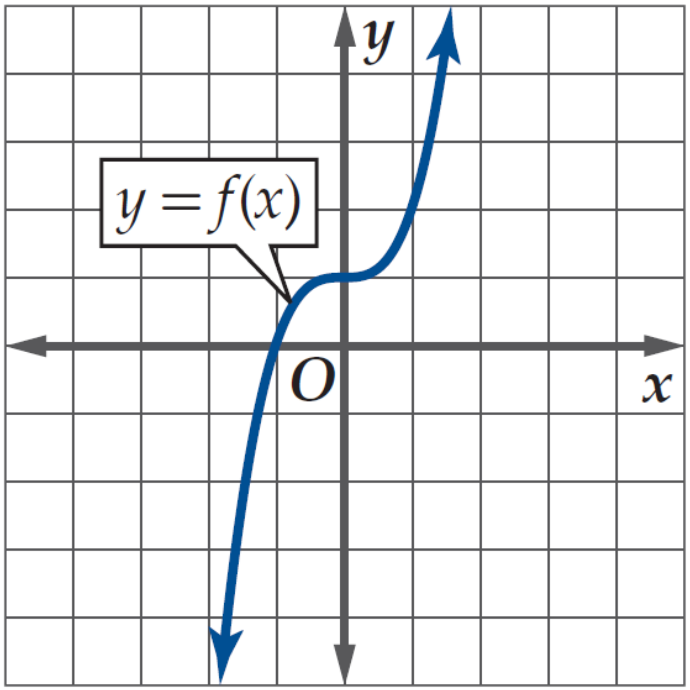
إيجاد الدالة العكسية بيانيًّا

استعمل التمثيل البياني للدالة f(x) في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$

مثّل بيانيًّا المستقيم y = x. وعيّن بعض النقاط على منحنى f(x). أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم y = x. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة f(x) حول المستقيم y = x (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.4

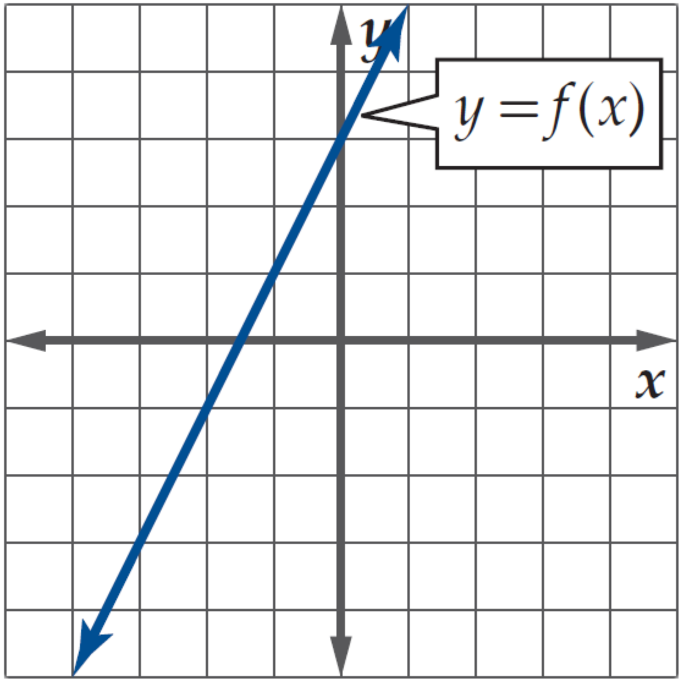


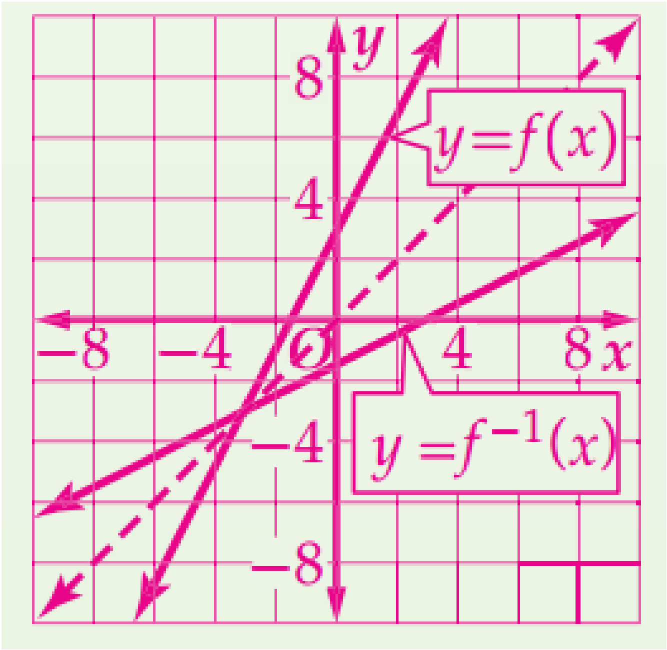
الشكل 1.7.3

تحقق من فهمك

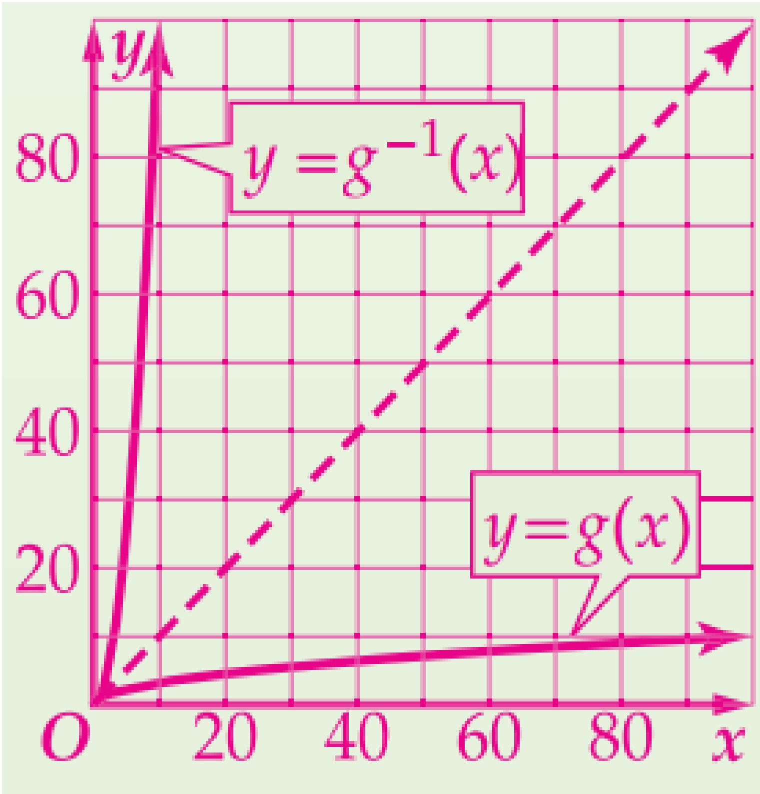
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًّا:

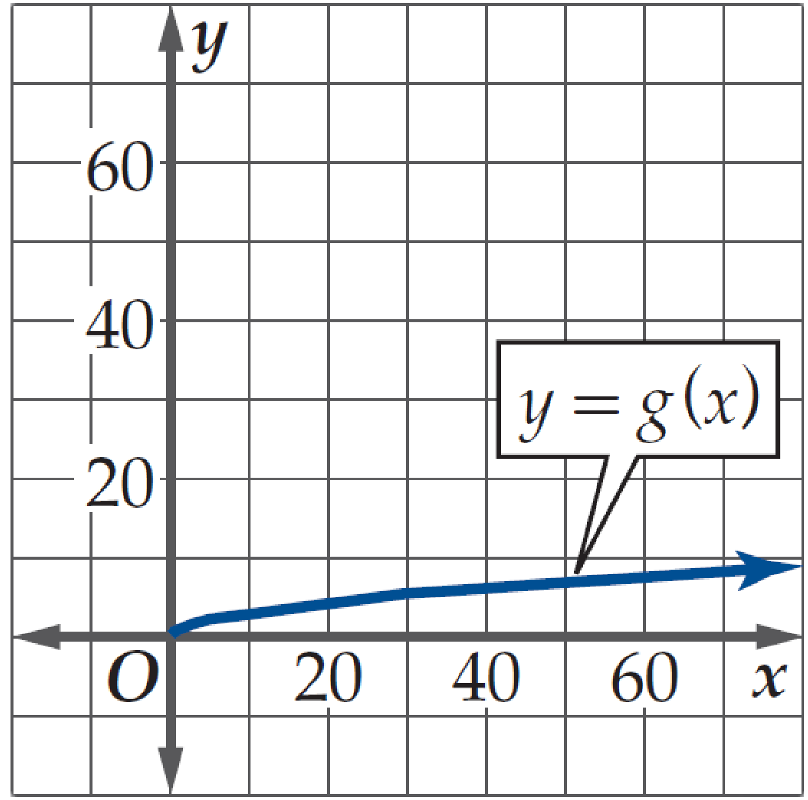
(4A





(4B

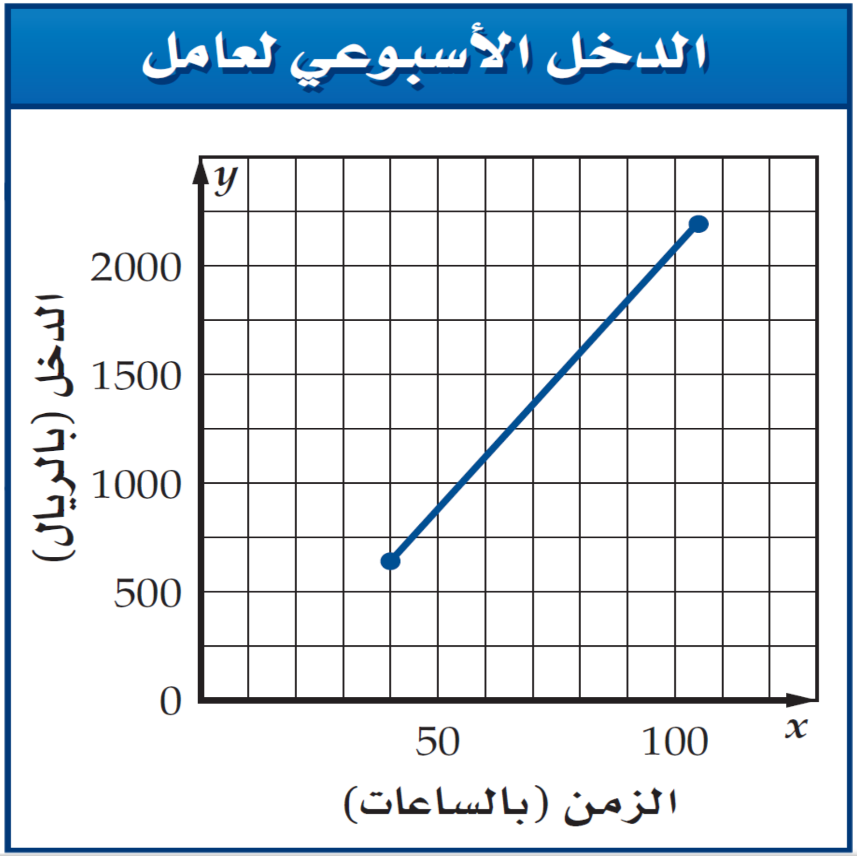




مثال 5 من واقع الحياة

استعمال الدالة العكسية

أعمال : يتقاضى شخص 16 ريالاً عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًّا مقداره 24 ريالاً عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ 40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمّ أوجدها.

يحقق منحنى الدالة f(x) اختبار الخط

الأفقي؛ لذا فإن f(x) دالة متباينة،

وعليه تكون دالتها العكسية موجودة.

أوجد $f^{-1}(x)$

$$f(x) = 24x - 320$$ الدالة الأصلية

$$y = 24x - 320$$ بتعويض y بدلاً من f(x)

$$x = 24y - 320$$ بالتبديل بين x , y

$$x + 320 = 24y$$ بإضافة 320 إلي الطرفين

$$y = \frac{x + 320}{24}$$ بالحل بالنسبة لـ y

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 320}{24}$$ بتعويض $f^{-1}(x)$ بدلاً من y

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية ؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدّد القيود المفروضة على مجال f(x) ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضّح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى 105 ساعات؛ لذا فإن مجال f(x) هو [40, 105]. وبما أن f(40) = 640 , f(105) = 2200. فإن مدى f(x) هو [640,2400] وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالاً .

$f^{-1}(760) = \frac{760+320}{24} = 45$ أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع .

تحقق من فهمك

5) توفير : يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقى تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

1A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمّ أوجدها.

يحقق منحنى الدالة f(x) اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f(x) دالة متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة.

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 360}{0.13}$$

5B) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية ؟

في الدالة العكسية تمثّل x مقدار التوفير الشهري ، وتمثّل $f^{-1}(x)$ الراتب الشهري

c) حدّد أية قيود على كل من مجال $f^{-1}(x)$ f(x) إن وجدت. وبرّر إجابتك.

$$x \geq 2769.23$$

d) إذا وفّر أحمد 500 ريالاً في الشهر، فأوجد راتبه الشهري .

6615.38 ريالاً تقريباً .

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$ لا

2) $y = x^2 - 16x + 64$ لا

3) $y = 3x - 8$ نعم

4) $y = 4$ لا

5) $y = \sqrt{x + 4}$ نعم

6) $y = -4x^2 + 8$ لا

7) $y = \frac{8}{x + 2}$ نعم

8) $y = \frac{1}{4}x^3$ نعم

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$ غير موجودة.

10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$ غير موجودة.

11) $f(x) = \sqrt{x+8}$ نعم، $f^{-1}(x) = x^2 - 8;\ x \geq 0$

12) $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$ غير موجودة.

13) $f(x) = |x - 6|$ غير موجودة.

14) $g(x) = \frac{x-6}{x}$ نعم، $g^{-1}(x) = \frac{6}{1-x};\ x \neq 1$

15) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8-x}}$

نعم، $f^{-1}(x) = 8 - \frac{36}{x^2}; x > 0$

16) $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$

نعم، $g^{-1}(x) = -3 + \frac{49}{x^2}; x > 0$

17) $h(x) = \frac{x+4}{3x-5}$

نعم، $h^{-1}(x) = \frac{5x+4}{3x-1}; x \neq \frac{1}{3}$

18) $g(x) = |x+1| + |x-4|$

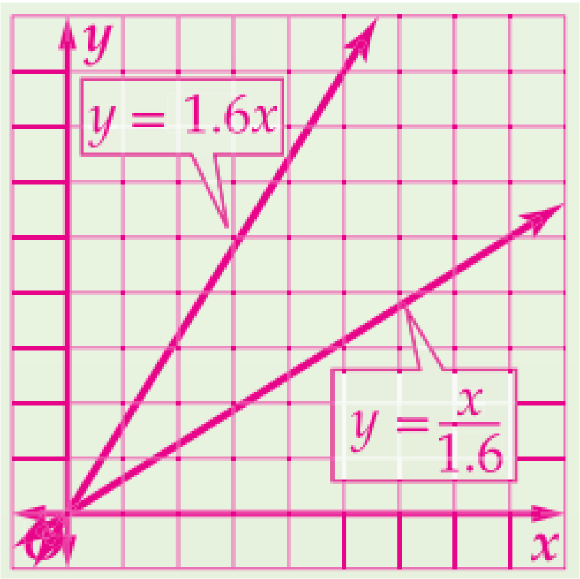
غير موجودة.

19) سرعة : تُعطى سرعة جسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$ حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. **(مثال 2)**

a) أوجد الدالة العكسية لِـ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

$y = \frac{x}{1.6}$ ، y السرعة بالميل لكل ساعة، x السرعة بالكيلو متر لكل ساعة.

b) مَثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.



أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f , g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي: (مثال 3)

(20 $f(x) = 4x + 9$

$$g(x) = \frac{x - 9}{4}$$

(21 $f(x) = -3x^2 + 5 , x \geq 0$

$$g(x) = \sqrt{\frac{5 - x}{3}}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$$ **(22**

$$g(x) = \sqrt{4x - 32}$$

$$f(x) = (x + 8)^{\frac{3}{2}}$$ **(23**

$$g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$$

$$f(x) = 2x^3 - 6$$ **(24**

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 6}{2}}$$

$$f(x) = \frac{x - 6}{x + 2}$$ **(25**

$$g(x) = \frac{2x + 6}{1 - x}$$

26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3)

a) أوجد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$. وماذا يعني كل متغير فيها؟

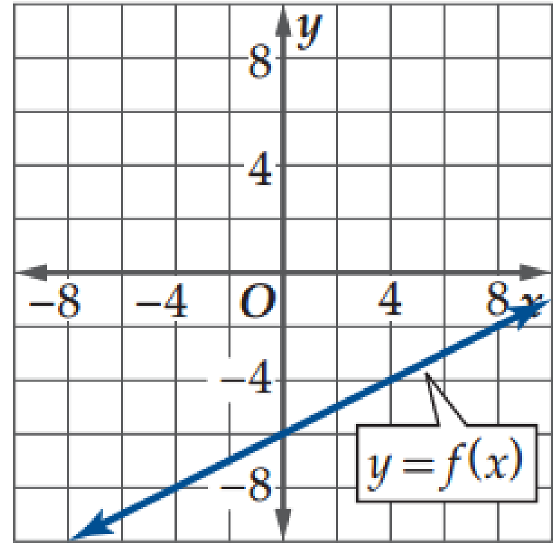
b) أثبت أن كلًّا من الدالتين $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.

c) مَثِّل كلًّا من $f^{-1}(x)$, $f(x)$ على الشاشة نفسها من الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم كيلو جرام واحد.

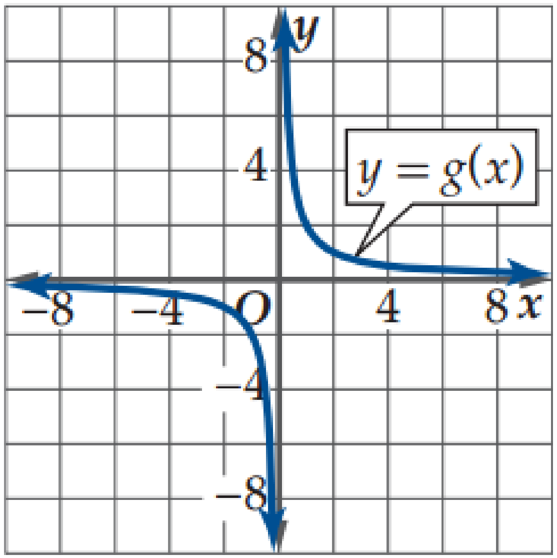
استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها:

(مثال 4)

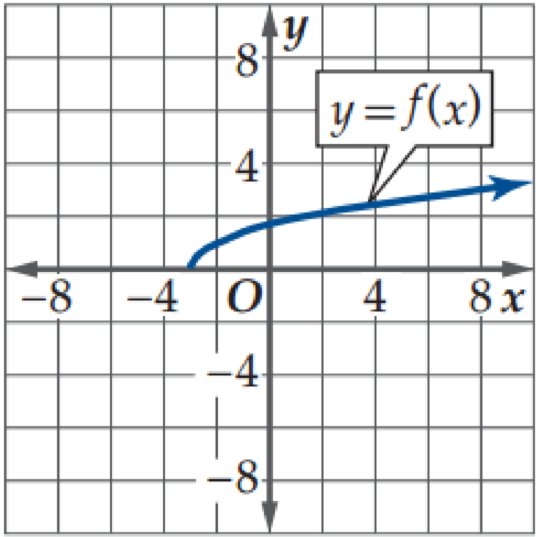
(27

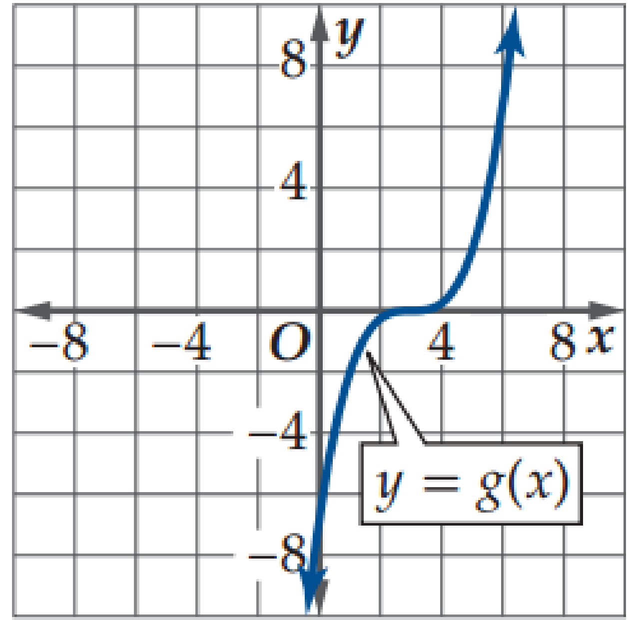


(28



(29





(30

31) **وظائف:** يعمل فالح في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 420 ريالًا في الأسبوع، ويتقاضى أيضًا عمولة مقدارها 5% من قيمة المبيعات. أي أن ما يتقاضاه أسبوعيًا يُعطى بالدالة $f(x) = 420 + 0.05x$ حيث تمثل x قيمة المبيعات. (مثال 5)

a) أثبت أن الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

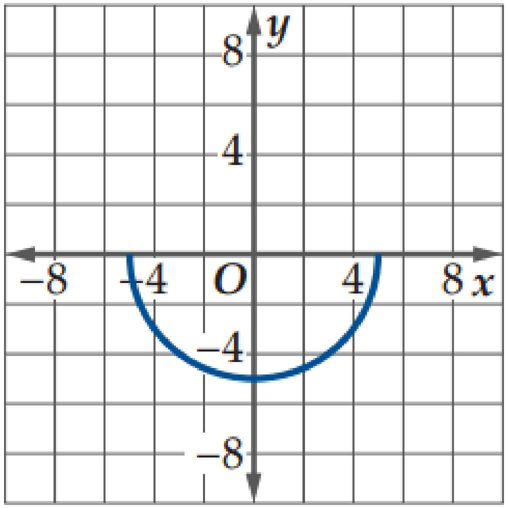
b) ماذا تمثّل كل من x , $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

c) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x)$, $f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

d) أوجد قيمة مبيعات فالح في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 720 ريالًا.

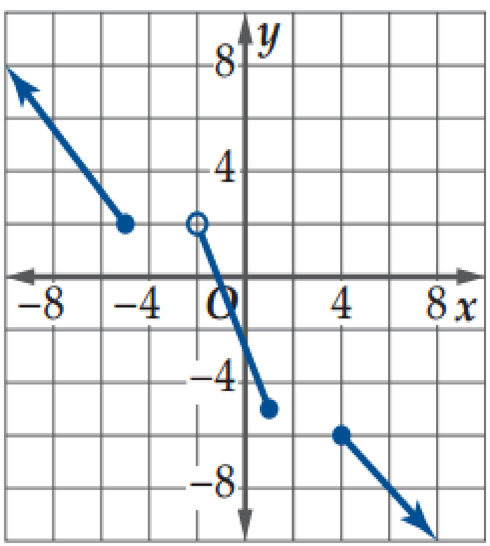
حدد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

(32



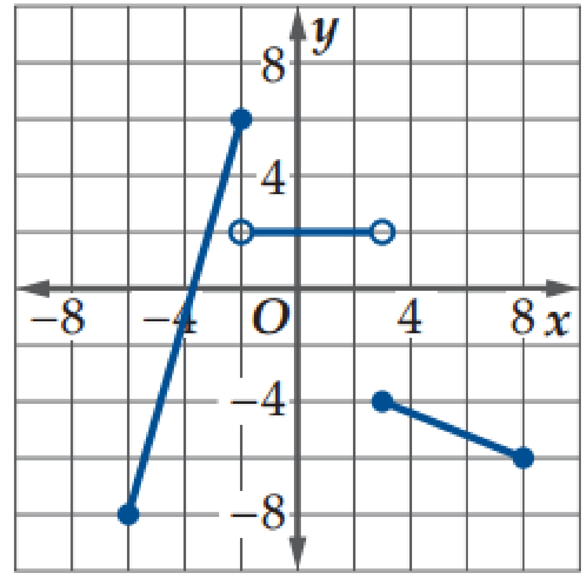
غير موجودة

(33



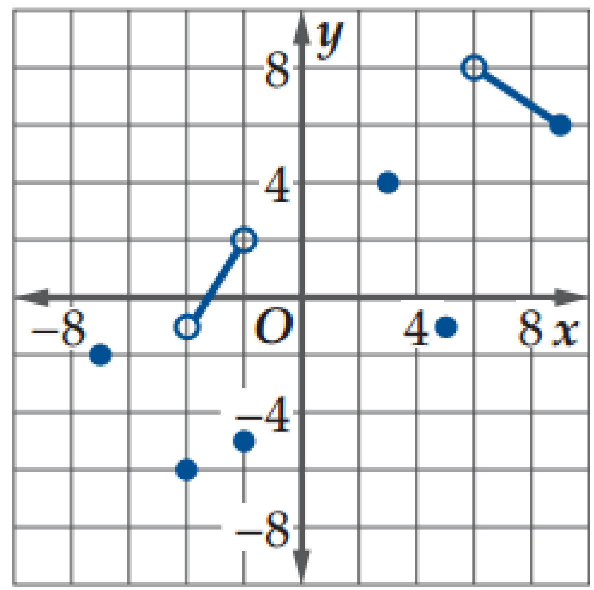
موجودة

(34



غير موجودة

(35



موجودة

كون جدولًا للدالة f^{-1} في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، وإذا لم تكن موجودة، فاذكر السبب.

(36

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

f^{-1} موجودة.

x	-4	0	3	5	9	13
$f^{-1}(x)$	-6	-4	-1	3	6	10

(37

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

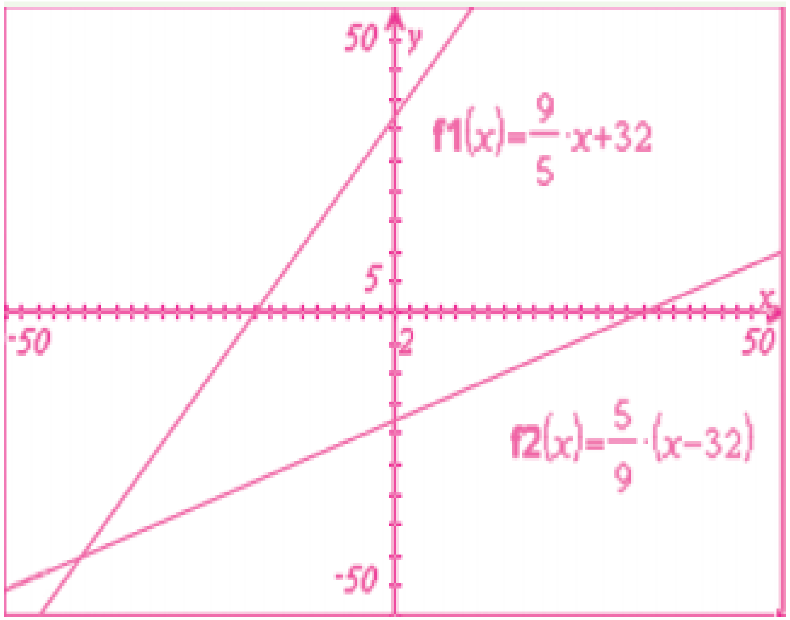
f^{-1} غير موجودة؛ لأن f غير متباينة.

38) **درجات حرارة:** تُستعمل الدالة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل الدالة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$ للتحويل من درجات

a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$; f^{-1} تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات فهرنهايتية إلى درجات سيليزية.

b) أثبت أن كلاً من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الحاسبة البيانية.



$$f[f^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x-32)\right) + 32$$
$$= x - 32 + 32$$
$$= x$$
$$f^{-1}[f(x)] = \frac{5}{9}\left(\left(\frac{9}{5}x + 32\right) - 32\right)$$
$$= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x\right)$$
$$= x$$

c) أوجد $(k \circ f)(x)$، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

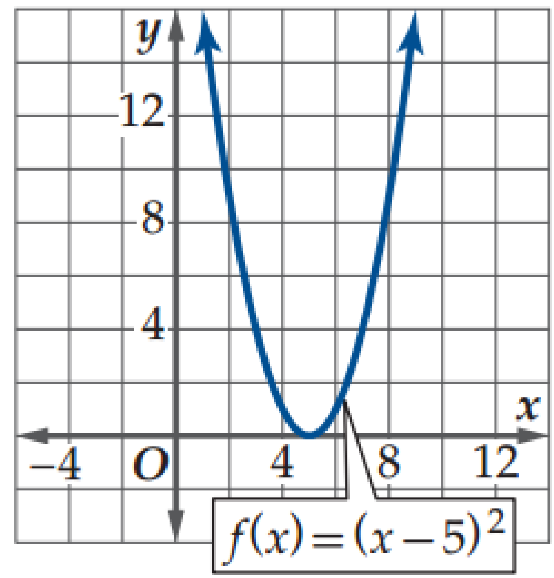
$k[f(x)] = x + 273.15$؛ تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات سيليزية إلى درجات مطلقة (كلفن).

d) إذا كانت درجة الحرارة $60°C$، فأوجد درجة الحرارة المطلقة المقابلة لها.

333.15 درجة مطلقة .

ضع قيودًا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة. ثم أوجد الدالة العكسية لها:

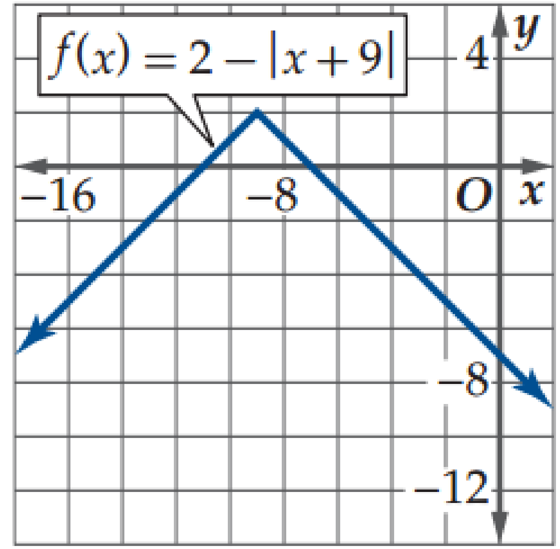
(39



إجابة ممكنة:

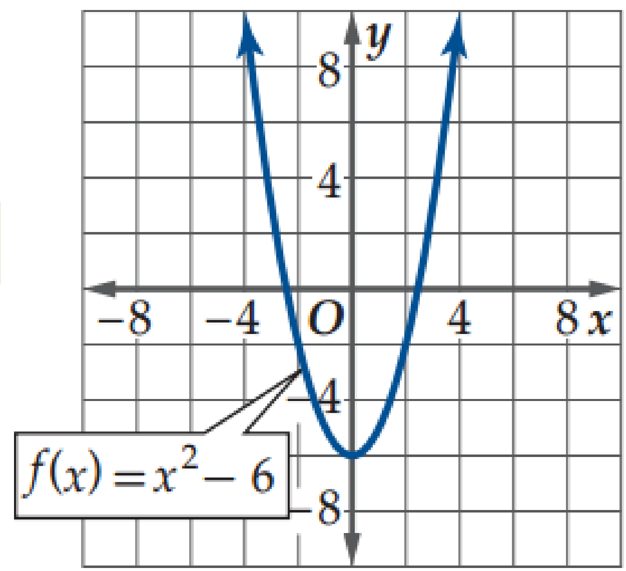
$x \geq 5; f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 5$

(40



إجابة ممكنة: $x \leq -9; f^{-1}(x) = x - 11$

(41



إجابة ممكنة: $x \geq 0 ; f^{-1}(x) = \sqrt{x + 6}$

43) **أزهار:** تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة لتزيين قاعة في إحدى المناسبات، فإذا كان بإمكانها شراء قرنفل بسعر 3 ريالات للزهرة الواحدة وشراء جوري بسعر 5 ريالات للزهرة الواحدة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة. وماذا يمثّل كل متغير فيها ؟

c) حدّد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار 305 ريالات، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟

إذا كانت الدالة f^{-1} موجودة، فاكتب المجال والمدى لكل من f, f^{-1}:

44) $f(x) = \sqrt{x-6}$

الدالة f، المجال: $\{x \mid x \geq 6, x \in R\}$،

المدى: $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

الدالة f^{-1}،

المجال: $\{x \mid x \geq 0, y \in R\}$ ،

المدى: $\{y \mid y \geq 6, x \in R\}$

45) $f(x) = x^2 + 9$

f^{-1} غير موجودة.

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-4} \quad (46$$

الدالة f، المجال: $\{x \mid x \neq 4, x \in R\}$ ،

المدى: $\{y \mid y \neq 3, x \in R\}$

الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x \neq 3, \in R\}$ ،

المدى: $\{y \mid y \neq 4, x \in R\}$.

$$f(x) = \frac{8x+3}{2x-6} \quad (47$$

الدالة f، المجال : $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$ ،

المدى: $\{y \mid y \neq 4, x \in R\}$.

الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x \neq 4, x \in R\}$

المدى: $\{y \mid y \neq 3, x \in R\}$.

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f^{-1} , f في مستوى إحداثي واحد. و اذكر أية قيود على المجال:

(48

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad -4 \geq x \\ -2x+5 & , \quad -4 < x \end{cases}$$

(49

$$f(x)=\begin{cases} -4x+6 & , \quad -5 \geq x \\ 2x-8 & , \quad -5 < x \end{cases}$$

50) **اتصالات:** أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن عرض مبين في الشكل أدناه. فكانت الشركة تخصم 50 ريالًا وتمنح تخفيضًا مقداره 10% من سعر الجهاز الأصلي.

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم خصم 50 ريالًا فقط.

$$r(x) = x - 50$$

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم منح التخفيض (10%) فقط.

$$d(x) = 0.9x$$

c) اكتب قاعدة تمثّل $T = r \circ d$ إذا تم التخفيض ثم الخصم.

$$T(x) = 0.9x - 50$$

d) أوجد T^{-1} ، وماذا تمثّل؟

$T^{-1}(x) = \dfrac{x + 50}{0.9}$ ؛ تمثل الدالة العكسية السعر الأصلي للجهاز كدالة في سعر الجهاز بعد الخصم وإجراء التخفيض.

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض ثم الخصم 760 ريالًا، فكم يكون سعره الأصلي؟

900 ريال تقريبًا.

إذا كانت $f(x) = 8x - 4, g(x) = 2x + 6$ فأوجد:

(51 $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(x)$

(52 $\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x)$

(53 $(f \circ g)^{-1}(x)$

(54 $(g \circ f)^{-1}(x)$

55) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة وجود أو عدم وجود دالة عكسية لكلٍّ من الدالة الزوجية والدالة الفردية.

a) **بيانيًّا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

b) **تحليليًّا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الزوجية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.

c) **بيانيًّا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال فردية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

d) **تحليليًّا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الفردية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.