الجبر البولي

التعريف : ليكن A مجموعة غير خالية.

(١) العملية الأحادية على A هي تطبيق على A :

$$g : A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto g(a)$$

(٢) العملية الثنائية على A هي تطبيق من $A \times A$ على A :

$$f : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a,b) \longmapsto f(a,b)$$

مثال :

عملية الجمع , عملية الضرب على $\mathbb{Z}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$

$$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a,b) \longmapsto +(a,b) = a+b$$

$$\times : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a,b) \longmapsto \times(a,b) = a\times b$$

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a,b) \longmapsto a+b$$

$$\times : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a,b) \longmapsto a\times b$$

عمليتان ثنائيتان .

← عملية المعكوس

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto f(x) = x \text{ معكوس}$$

ليست عملية آحادية
لأن 2 ليس لها صورة .

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

عملية آحادية على $\mathbb{R}^*$

← ليكن U مجموعة غير خالية, نعتبر $\mathcal{P}(U)$

$$\cup : \mathcal{P}(U)\times\mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$$
$$(A,B) \longmapsto A\cup B$$

$$\cap : \mathcal{P}(U)\times\mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$$
$$(A,B) \longmapsto A\cap B$$

عمليتان ثنائيتان

$$' : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$$
$$A \longmapsto A' = U\setminus A$$

عملية المتمم هي عملية
آحادية

التعريف : ليكن B مجموعة تحتوي على عنصرين على الأقل مختلفين

وليكن $+$ و $\cdot$ كل منهما عملية ثنائية على B

وليكن $'$ عملية آحادية على B

و $0, 1 \in B$; $0 \neq 1$

النظام الرياضي $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ هو جبر بولي

اذا كان

(1) $+$ و $\cdot$ كل منهما عملية تجميعية.

(2) $+$ و $\cdot$ " " " إبدالية.

(3) خاصية التوزيع $+$ على $\cdot$ و $\cdot$ على $+$: $\forall a, b, c \in B$:

$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ و $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(4) العنصر المحايد لـ $+$ و $\cdot$. $\forall a \in B$: $a + 0 = a$

$a \cdot 1 = a$

(5) المتمم a' : لكل $a \in B$ يوجد $a' \in B$

حيث $a + a' = 1$ و $a \cdot a' = 0$

مثال (4,1) ص 186

ليكن $B_2 = \{0,1\}$ حيث

a	a'
1	0
0	1

a	b	$a+b$	$a \cdot b$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

نبرهن أن $(B_2, +, \cdot, ', 0, 1)$ جبر بولي.

مثال (4,2) ص 187

ليكن X مجموعة غير خالية.

و $\mathcal{P}(X)$ هي مجموعة أجزاء X. $\left(|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}\right)$

$$\mathcal{P}(X) = \{\phi, \ldots, X\}$$

و نعتبر التالي: لكل $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$A + B = A \cup B$ و $A \cdot B = A \cap B$, $A' = \bar{A} = X - A$

$1 = X$ و $0 = \phi$

نبرهن أن $(\mathcal{P}(X), +, \cdot, ', 0, 1)$ جبر بولي

يعني: $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{\ }, \phi, X)$ جبر بولي

مثال (4,3) ص 187

ليكن B هو مجموعة العبارات التقريرية حيث:

$p+q=p\vee q$ و $p\cdot q=p\wedge q$ و $p'=\neg p$

$c\equiv 0$: عبارة التناقض.

$t\equiv 1$: العبارة الصدوقة.

باستعمال الخصائص للمنطق نبرهن أن

$(B,+,\cdot,',0,1)$ هو جبر بولي.

يعني $(B,\vee,\wedge,\neg,c,t)$ جبر بولي.

$(p\vee c=p,\ p\wedge t=p \qquad p\vee\neg p=t,\ p\wedge\neg p=c)$

مثال (4,4) ص 187

لتكن B مجموعة قواسم 30

$B=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

حيث:

$a \cdot b = gcd(a,b),\ a+b = lcm(a,b)\ ,\ a' = \frac{30}{a}$

$1 \equiv 30\ ,\ 0 \equiv 1$

ونبرهن أن $(B,+,\cdot,',0,1)$ هو جبر بولي.

ملاحظة: قواسم 8: $B=\{1,2,4,8\}$

$2'=\frac{8}{2}=4\ ,\ 2+2'=lcm(2,2')=lcm(2,4)=4 \neq 8$

$(B,+,\cdot,',0,1)$ ليس جبر بولي؛ لأن B هو قواسم 8.

مبرهنة: ليكن $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ جبر بولي.

فإن

(١) 0 هو وحيد من حيث العنصر المحايد بالجمع.

(٢) 1 هو وحيد من حيث العنصر المحايد الضربي.

(٣) لكل $a \in B$ فإن المتمم a' هو وحيد من حيث المتمم للعنصر a.

تعريف (العبارات البولية)

ليكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغيرات في الجبر البولي B_2
$(x_i = 0$ أو $x_i = 1)$

العبارات البولية تكون كالتالي:

(١) x_1 ، x_2 ، ... ، x_n عبارات بولية.

(٢) إذا كان E و F عبارات بولية فإن $E+F$ و $E \cdot F$ و E' كل منها عبارة بولية.

(٣) العبارة البولية نحصل عليها باستعمال النقطة (١) و (٢) بعملية منتهية وما عدا ذلك فليست عبارة بولية.

مبرهنة (٤,٤) ص ١٩٥

ليكن B جبر بولي فإن لكل $a,b \in B$

أ) $a+a=a$ ، $a \cdot a = a$

ب) $0' = 1$ ، $1' = 0$

ج) $(a')' = a$

د) $(a+b)' = a' \cdot b'$ ، $(a \cdot b)' = a' + b'$

و) $a + ab = a$ ، $a \cdot (a+b) = a$

مبرهنة (4,2) ص 191

ليكن B جبر بولي
نعرف العلاقة $\leq$ كالتالي لكل $a,b\in B$

$$a\leq b \Leftrightarrow a.b=a$$

العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب جزئي على B

البرهان: ← العلاقة $\leq$ انعكاسية لأن
نعلم أن $a.a=a$ بأن $a\leq a$

← العلاقة $\leq$ تخالفية: لأن لكل $a,b\in B$
إذا كان $a\leq b$ و $b\leq a$ بأن $a.b=a$ و $b.a=b$
بأن $a.b=b.a=a=b$

← العلاقة $\leq$ متعدية: لأن لكل $a,b,c\in B$
حيث $a\leq b$ و $b\leq c$ بأن $a.b=a$ و $b.c=b$
بأن $a.(b.c)=a$
بأن $(a.b).c=a$ بأن $a.c=a$
وبالتالي $a\leq c$.

ملاحظة: ليكن B جبر بولي.

(1) العلاقة R حيث

$$a R b \iff a \cdot b = b$$

نبرهن أن R علاقة ترتيب جزئي على B

(2) ليكن $a \in B$:

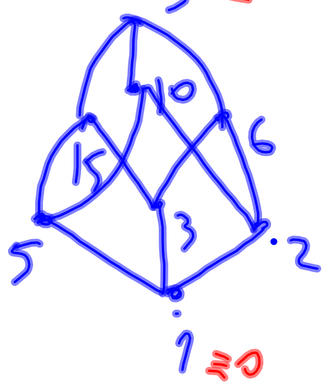
لدينا $0 \cdot a = 0$ بأن $0 \leq a$

ولدينا $a \cdot 1 = a$ فإن $a \leq 1$

وبالتالي لكل $a \in B$ فإن $0 \leq a \leq 1$

مثال (4,7) ص 193

ليكن B قواسم 30 بأن نشكلها سهم الآتي:



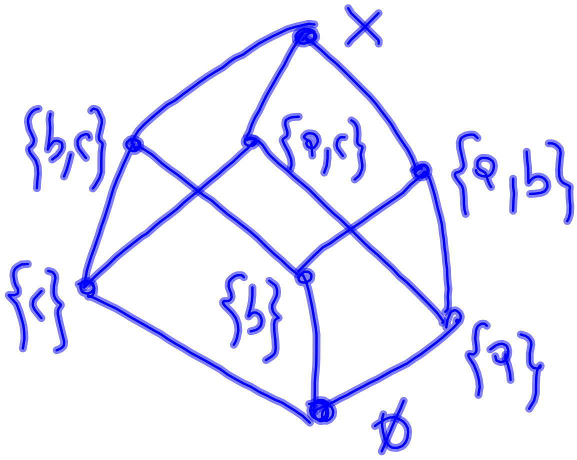
$1.5 = gcd(1,5) = 1$, $1.3 = gcd(1,3) = 1$, $1.2 = gcd(1,2) = 1$

$3.6 = gcd(3,6) = 3$, $2.6 = gcd(2,6) = 2$

ملاحظة:

$\wp(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$; $X = \{a,b,c\}$

نعلم أن $(\wp(X), \cup, \cap, ^{-}, \phi, X)$ جبر بولي



$\{a\} . \{a,b\} = \{a\} \cap \{a,b\} = \{a$

تعريف: ليكن B جبر بولي و $a \in B$, $a \neq 0$

نقول أن a ذرة في B إذا كان

لكل $b \in B$ حيث $0 \leq b \leq a$ يكون

$b = a$ أو $b = 0$

مثال (1) B قواسم 30

الذرات في B هي: 2 , 3 , 5

(2) B هو $P(X)$ حيث $X = \{a, b, c\}$

فإن ذرات B هي: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.

مبرهنة: (3,6)

ليكن B جبر بولي و $a \in B$, $b \in B$

(1) إذا كان a ذرة فإن $a.b=0$ أو $a.b=a$

(2) إذا كان a ذرة و b ذرة، $a \neq b$

فإن $a.b=0$

برهنة

ليكن B جبر بولي, $a \in B$

(١) ليكن $a_1, a_2, \dots, a_n$ كل ذرات B

إذا كان $a \cdot a_i = 0$ لكل i فإن $a=0$

(٢) ليكن $a_1, a_2, \dots, a_k$ كل ذرات B حيث $a \cdot a_i \neq 0$ و ليكن $b = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ فإن

(أ) $a \cdot b = b$ (ب) $a \cdot b' = 0$

(٣) ليكن $a_1, \dots, a_n$ كل ذرات B

فإن كل عنصر $a \in B$ بيكتب بطريقة وحيدة (باستثناء الترتيب) كمجموع لبعض الذرات.

(٤) إذا كان $a_1, \dots, a_n$ كل ذرات B

فإن $|B| = 2^n$

تعريف ليكن B_1 و B_2 كل منهما جبر بولي

B_1 و B_2 متطابقان إذا كان يوجد φ

تقابل : $\varphi : B_1 \longrightarrow B_2$ تحقق

لكل $a,b \in B_1$ فإن

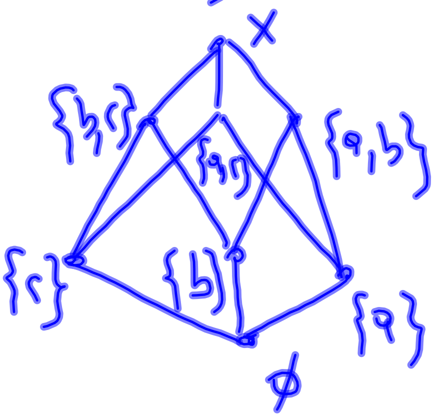
$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ و $\varphi(a.b)=\varphi(a).\varphi(b)$

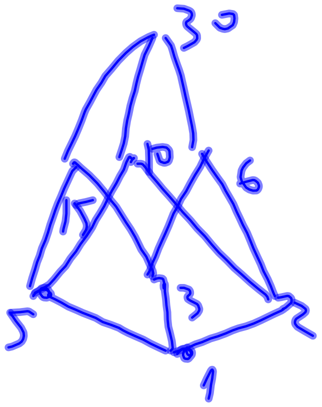
و $\varphi(a')=(\varphi(a))'$

مثال

$B_1 = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ قواسم 30

$B_2 = \mathcal{P}(X)$ حيث $X = \{a,b,c\}$





x	1	2	3	5	6	10	15	30
$\varphi(x)$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	X

ملاحظة: إذا كان φ تطابق من B_1 إلى B_2

فإن $\varphi(0_{B_1}) = 0_{B_2}$

حيث 0_{B_1}: العنصر المحايد الجمعي في B_1

0_{B_2}: " " " B_2.

مبرهنة: ليكن B جبر بولي حيث $|B|=2^n$

(B يحتوي على n ذرة)

فإنه يوجد X مجموعة حيث $|X|=n$

و $\mathcal{P}(X)$ و B متطابقان.

ملاحظة:

B جبر بولي و $a_1, a_2, \dots, a_n$ كل ذرات B

ليكن $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

إذن φ حيث $\varphi(a_i)=\{x_i\}$

هي تطابق من B إلى $\mathcal{P}(X)$

وبالتالي $\varphi(a_{i_1}+a_{i_2}+\dots+a_{i_k})=\{x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k}\}$