أولاً: احسب التكاملات الآتية:

$I_1 = \int (3x-1)^2 dx$ - (1)

$I_2 = \int \tan^2 5x \, dx$ (2)

$I_3 = \int \cos 3x . \sin x \, dx$ (3)

$I_4 = \int 4\cos^2 3x \, dx$ - (4)

$I_5 = \int \cos^4 x \, dx$ - (5)

$I_6 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ - (6)

$I_7 = \int \frac{1}{1+e^{3x}} dx$ - (7)

$I_8 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ - (8)

$I_9 = \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}} dx$ - (9)

$I_{10} = \int e^{\sqrt{x}} dx$ - (10)

$I_{11} = \int x^2 . \cos x \, dx$ - (11)

$I_{12} = \int \sin \sqrt{x} \, dx$ - (12)

$I_{13} = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ - (13)

$I_{14} = \int \frac{x}{x^2-4} dx$ - (14)

$I_{15} = \int \frac{x+1}{x^2-4} dx$ - (15)

$I_{16} = \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$ - (16)

$I_{17} = \int \frac{1}{x . \ln x} dx$ - (17)

$I_{18} = \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ - (18)

$I_{19} = \int \frac{x}{x-1} dx$ - (19)

$I_{20} = x\sqrt{x^2+1} \, dx$ - (20)

$I_{21} = \frac{1}{\sin 2x} dx$ - (21)

$I_{22} = \int (2 - \frac{1}{x^2}) dx$ - (22)

$I_{23} = \int \frac{x^2+x+1}{x^4} dx$ - (23)

$I_{24} = \int (1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}) dx$ (24)

$I_{25} = \int (\frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1) dx$ - (25)

$I_{26} = \int (x+1).(x^2+2x+5)^2 dx$ (26)

$I_{27} = \int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ - (27)

$I_{28} = \int (e^{-x} + \frac{2}{x}) dx$ - (28)

$I_{29} = \int (\frac{x^3+x^2-2}{3}) dx$ (29)

$I_{30} = \int \frac{2}{x^2} dx$ - (30)

$I_{31} = \int (x^3 - 3x + 5) dx$ - (31)

$I_{32} = \int (\frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$ (32)

$I_{33} = \int (3x^2 - 2x + 1) dx$ - (33)

$I_{34} = \int x . e^{x^2+1} dx$ - (34)

$I_{35} = \int x . e^x dx$ - (35)

$I_{36} = \int (\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}) dx$ (36)

$I = \int x . \sin x \, dx$ - (37)

التمرين الأول:

$$I_1 = \int_0^3 (2x+3)\,dx \quad (1)$$

$$I_2 = \int_{-2}^{1} x^2\,dx \quad (2)$$

$$I_3 = \int_{-5}^{5} (4-x)\,dx \quad (3)$$

$$I_4 = \int_0^2 (1-x^2)\,dx \quad (4)$$

$$I_5 = \int_1^2 (x^2+x-2)\,dx \quad (5)$$

$$I_6 = \int_0^1 e^{2x-1}\,dx \quad (6)$$

$$I_7 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx \quad (7)$$

$$I_8 = \int_{-1}^{2} (-3x^2+1)\,dx \quad (8)$$

$$I_9 = \int_{-3}^{2} 2x\,dx \quad (9)$$

$$I_{10} = \int_{-1}^{1} (x^3-x)\,dx \quad (10)$$

$$I_{11} = \int_0^1 (x^2+1)\,dx \quad (11)$$

$$I_{12} = \int_{-1}^{0} (-3x^2+2x)\,dx \quad (12)$$

$$I_{13} = \int_{-2}^{2} -x^3\,dx \quad (13)$$

$$I_{14} = \int_0^1 (x^3+2x+2)\,dx \quad (14)$$

$$I_{15} = \int_1^2 \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)dx \quad (15)$$

$$I_{16} = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1-t^3+t^4}{t^2}\right)dt \quad (16)$$

$$I_{17} = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx \quad (17)$$

$$I_{18} = \int_0^1 \frac{-2}{(x-2)^3}\,dx \quad (18)$$

$$I_{19} = \int_0^3 |x^2-1|\,dx \quad (19)$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\,dx \quad (20)$$

(ابتدائي 2021)

$$I_{21} = \int_0^3 2-|2-x|\,dx \quad (21)$$

(ابتدائي 2021)

$$I_{22} = \int_0^3 x\cdot|x-2|\,dx \quad (22)$$

$$I_{23} = \int_{-1}^{2} x\cdot|x-1|\,dx \quad (23)$$

$$I_{24} = \int_1^e \ln x\,dx \quad (24)$$

$$I_{25} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx \quad (25)$$

$$I_{26} = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x\,dx \quad (26)$$

$$I_{27} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx \quad (27)$$

$$I_{28} = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx \quad (28)$$

$$I_{29} = \int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x-1}\,dx \quad (29)$$

$$I_{30} = \int_0^1 (x-1)\cdot e^x\,dx \quad (30)$$

$$I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cdot\sin x\,dx \quad (31)$$

$$I_{32} = \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx \quad (32)$$

$$I_{33} = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx \quad (33)$$

$$I = \int_1^{\quad} \frac{x^4}{\quad}\,dx \quad (34)$$

$$\int_{\quad}^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx \quad (35)$$

$$\int_{\quad}^{\pi} x\,\ldots \quad (36)$$

$I_{39} = \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos(2x)}\,dx$ - (39)

$I_{38} = \int_2^e \frac{3}{x.\ln x}\,dx$ - (38)

$I_{37} = \int_0^2 \frac{x+3}{x-1}\,dx$ - (37)

دالة أصلية : فكرة و مبرزة :

1- بين أن F دالة أصلية لـ f على المجال D في كل حالة من الحالات التالية :

- (1) $F(x) = x^2 - 3x + 1$; $f(x) = 2x - 3$; $D = \mathbb{R}$
- (2) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $D = \mathbb{R}$
- (3) $F(x) = 2 + \frac{x+1}{x-1}$; $f(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- (4) $F(x) = \frac{x-1}{x+1} - 2x$; $f(x) = -\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$; $D =]-1, +\infty[$
- (5) $f(x) = \tan^2 x$; $F(x) = \tan x - x$; $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- (6) $f(x) = \cos x - x.\sin x$; $F(x) = x.\cos x$; $D = \mathbb{R}$
- (7) $f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$; $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$; $D =]0, +\infty[$
- (8) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$; $F(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$; $D =]0, 1[$
- (9) $f(x) = \ln x$; $F(x) = x.\ln x - x$; $D =]0, +\infty[$
- (10) $f(x) = \frac{1}{x.\ln x}$; $F(x) = \ln(\ln x)$; $D =]1, +\infty[$
- (11) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$; $F(x) = x - \ln(1+e^x)$; $D = \mathbb{R}$
- (12) $f(x) = \sqrt{e^x}$; $F(x) = 2\sqrt{e^x}$; $D = \mathbb{R}$

2- في كل حالة من الحالات التالية تحقق أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على المجال I.

1- $F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$; $G(x) = \frac{x^2+7x-5}{x-1}$; $I =]1, +\infty[$

2- $F(x) = \tan^2 x$; $G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

3- $F(x) = \frac{2x^2-3x+7}{4x-5}$; $G(x) = \frac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$; $I =]\frac{5}{4}, +\infty[$

4- $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $G(x) = \frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$; $I = \mathbb{R}$

5- $F(x) = \sin^2 x$; $G(x) = 2 - \cos^2 x$; $I = \mathbb{R}$

6- $F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-2}$; $G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x$; $I =]2, +\infty[$

3-

A- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق: $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$

1- أعط دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2- برر دالة أصلية F للدالة f وتحقق كذلك: $F(1) = 2$.

B- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق: $f(x) = 2x - 1$

1- عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2- عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تحقق: $F(2) = -1$.

C- لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق: $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ (2017 دورة الاحتياط)

1- بين أن المستقيم $\Delta: y = x + 1$ مقارب لـ C_f في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع بين C_f و Δ.

2- أوجد دالة أصلية F للدالة f تحقق: $F(0) = 1$

ثالثا: حل التمارين الآتية:

التمرين الأول: ليكن التكاملين:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx \quad , \quad B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$$

① - احسب $A+B$ ، $A-B$

② - استنتج A و B.

التمرين الثاني: ليكن لدينا العددين

$$I=\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}+1}\,dx \quad , \quad J=\int_0^1 \frac{x\cdot e^{x^2}}{e^{x^2}+1}\,dx$$

1- احسب $I+J$ ، J.

2- استنتج I.

3- أثبت أن التابع $f(x)=\frac{x}{e^{x^2}+1}$ فردي واستنتج أنه كان a من $\mathbb{R}$ فإن $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

التمرين الثالث: إذا كان:

$$I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$$

$$J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}\,dx$$

* احسب $I-3J$ و $I+J$ ثم استنتج قيمة I ، J

التمرين الرابع: إذا كان:

$$I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$$J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

① - احسب J.

② - احسب $I+J$ ثم استنتج I.

التمرين الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-3}{x^2-x-2}$$

① - عين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث:

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

② - احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$

التمرين السادس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-x+2}{x^2-1}$$

① - أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{2}{x^2-1}$ وعين قيمة a، b.

② - أثبت أنه يمكن استعمال d الذي معادلته $y=ax+b$

③ - احسب $\int_2^3 |f(x) - (ax+b)| dx$ حساب لـ C في جوار $+\infty$.

التمرين السابع: ليكن C خط بياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = x(1+e^{-x})$

① - أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

② - ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

③ - ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها ثم ارسم C

④ - احسب مساحة الحيز بين C والمستقيم Δ والمستقيم $x=1$.

التمرين الثامن: ليكن C خط بياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = x + 2^x$

① - أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$، وادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

② - ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بها، ثم ارسم C.

③ - احسب مساحة الحيز المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=0$ ، $x=-1$.

التمرين التاسع: ليكن C خط بياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*_+$ وفق: $f(x) = ax+b-\frac{\ln x}{x}$ (2019 ثانية معدل)

① - عين العددين a,b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y=3x$.

② - من أجل $a=4$ ، $b=-4$ أثبت أن المستقيم $\Delta: y=4x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

③ - احسب مساحة الحيز المحصور بين C والمستقيمين Δ و $x=1$ ، $x=e$.

التمرين العاشر: ليكن C خط بياني للتابع f (2017 هندسة ثانية) المعرف على $\mathbb{R}-\{-3\}$ وفق:

$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$

① - أكتب التابع f بالشكل:

$f(x) = ax+b+\frac{c}{x+3}$

② - أثبت أن المستقيم $d: y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

③ - احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$

التمرين (11) 2017 أولى حديث

ليكن C تمثيل البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 2}$$

1- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C ، وادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

2- احسب $\int f(x)\,dx$

التمرين (12) 2017 ثانية حديث

ليكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

a- باستعمال دالة التفاضل أوجد قيمة تقريبية للعدد $f(4.1)$

b- احسب $\int_1^4 f^2(x)\,dx$

التمرين (13): 2013 ثانية

ليكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

C تمثيلها $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

1- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

2- احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخط C ، ومقارب xx' والمستقيمين $x=0$ و $x=3$ دورة كاملة حول xx'.

التمرين (14): 2014 أولى

لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x + \sqrt{x}$$

1- احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2- احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالخط C ومحور الفواصل xx' والمستقيمين $x=0$ و $x=1$ دورة كاملة حول xx'.

التمرين (15): 2014 ثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

1- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2- ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

3- احسب $\int f(x)\,dx$ على $]-\infty,-1[$

التمرين (16): 2015 أولى

ليكن C خط بياني للتابع f

المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

1- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$

ثم أدرس الوضع النسبي بين C و Δ.

2- احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحدد بالخط C، بالمحور $x'x$، والمستقيمين $x=0$، $x=1$ دورة كاملة حول $x'x$.

التمرين (17): 2015 ثانية

ليكن C خط بياني للتابع f المعرف على $]-\infty,1]$ وفق: $f(x)=x\sqrt{1-x}$ ، والمطلوب:

1- أدرس تغيرات f و نظم جدولاً بها، ثم بين أن $f(1)$ قيمة حدية محلية لـ f.

2- احسب $\int f(x)\,dx$ على المجال $]-\\infty,1]$.

التمرين (18): 2016 أولى

ليكن لدينا f_1 ، f_2 : الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ وفق:

$f_1(x)=e^{\frac{x}{2}}$

$f_2(x)=e^{-\frac{x}{2}}$

فلتكن C_1، C_2 على الترتيب.

* 1- احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بين الخطين C_1، C_2 والمستقيم الذي معادلته $x=1$ ، الواقع في الربع الأول دورة كاملة حول $x'x$.

التمرين (19):

ليكن لدينا لنا يعين: $f_1(x)$، $f_2(x)$ الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ وفق:

$f_1(x)=e^{2x}$ ، $f_2(x)=e^{x}$

* 1- احسب مساحة السطح المحصور بين C_1، C_2 والمستقيم $x=\ln 3$.

التمرين (20): ليكن $f(x)=e^{3x}$

a- احسب $f(\ln 2)$ ، $f'(x)$ ثم اتبع $f'(\ln 2)$

$$\lim_{x\to \ln 2}\frac{e^{3x}-\ln 8}{x-\ln 2}$$

b- احسب $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

التمرين (21) : ليكن f تابع معرف على $]0,+\infty[$

وضع : $f(x) = \dfrac{6e^x}{e^{2x}-1}$

① - عين عددين حقيقيين a و b حيث :

$$f(x) = \frac{ae^x}{e^x-1} + \frac{be^x}{e^x+1}$$

② - استعمل الشكل السابق لحساب

$$\int f(x)\,dx \quad \text{على }]0,+\infty[$$

التمرين (22) : لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$

وضع : $f(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+4}{x^2}$

نرمز لبيانها بـ C.

① - عين الأعداد a, b, c حيث يكون :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$$

② - احسب بدلالة λ الحيز المحدد بالخط C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\lambda$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

التمرين (23) : f تابع معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

وضع : $f(x) = \dfrac{4x^2-5x+1}{x+3}$

① - أكتب $f(x)$ بالشكل $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+3}$

② - احسب $J = \int_0^{\cdot} f(x)\,dx$

التمرين (24) : f تابع معرف على $\mathbb{R}$

وضع : $f(x) = e^x \cdot \cos x$

① - احسب $f'(x)$, $f''(x)$

② - جد عددين حقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = af''(x) + bf'(x)$$

③ - استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين (25) : f تابع معرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وضع : $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

① - عين الأعداد a, b, c بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

② - احسب $J = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx$.