مسألة (1):

$f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ $\mathbb{R}$.

1- اثبت ان المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب في جوار $+\infty$.

2- ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

3- ادرس تغيرات f ونظم جدول لها بين الصيغة الحدية محلياً.

4- اثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلين مختلفين إحدهما الصفر والآخر α من المجال $]1,2[$

5- ارسم Δ و C

6- احسب المساحة بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=\ln 3$, $x=\ln 2$.

الحل:

1) $f(x) - y_\Delta = 2e^{-x} + x - 2 - x + 2 = 2e^{-x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

$\Leftarrow$ ومنه Δ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$.

2) $f(x) - y_\Delta = 2e^{-x} > 0$

$\Leftarrow$ C فوق Δ على كامل $\mathbb{R}$.

3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 + \infty - 2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = (\infty - \infty)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^{-x}[2 + xe^{x} - 2e^{x}]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty(2 + 0 - 0) = \infty$

«مبرهنة» $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه

$f'(x) = -2e^{-x} + 1 \geqslant 0$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2e^{-x} + 1 = 0$

$e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{-x} = -\ln 2$

$-x = -\ln 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

$f(\ln 2) = -1 + \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	∞	$\searrow$	$-1+\ln 2$ (≈ -0.3)	$\nearrow$	∞

$f(\ln 2) = -1 + \ln 2$ قيمة حدية صغرى يبلغها f عند $x = \ln 2$

$f(x) \geqslant f(\ln 2)$

$\Rightarrow f(x) \geqslant -1 + \ln 2$

4) في المجال $]-\infty, \ln 2[$ التابع مستمر ومتناقص تماماً

$0 \in f(]-\infty, \ln 2[) =]-1+\ln 2, +\infty[$

$\Leftarrow$ ومنه المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-\infty, \ln 2[$

ومن المجال $]\ln 2, +\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

$x \in f(]\ln 2, +\infty[) =]-1+\ln 2, \infty[$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]\ln 2, +\infty[$

المسألة (2):

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x}) \quad ; I =]0, +\infty[$$

1. اثبت أنّ $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x}), x \in I$
2. اثبت $\Delta : y = 2x$ مقارب مائل لـ C
3. الوضع النسبي.
4. ادرس تغيرات f وارسم C و Δ.
5. استنتج رسم C' الخط البياني للتابع g

$$g(x) = \ln(e^{2x+2} - e^{x+1}).$$

6. جد مجموعة تعريف h بحيث

$$h(x) = e^{f(x)}$$

الحل:

1) ط1

$$f(x) = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x})]$$

$$f(x) = \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x})$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x})$$

ط2)

$$f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x})$$

$$f(x) = \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x})$$

$$= \ln[e^{2x}(1 - e^{-x})]$$

$$= \ln(e^{2x} - e^{x})$$

2)

$$f(x) - y_\Delta = \cancel{2x} + \ln(1 - e^{-x}) - \cancel{2x}$$

$$= \ln(1 - e^{-x})$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

<= ومنه Δ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$

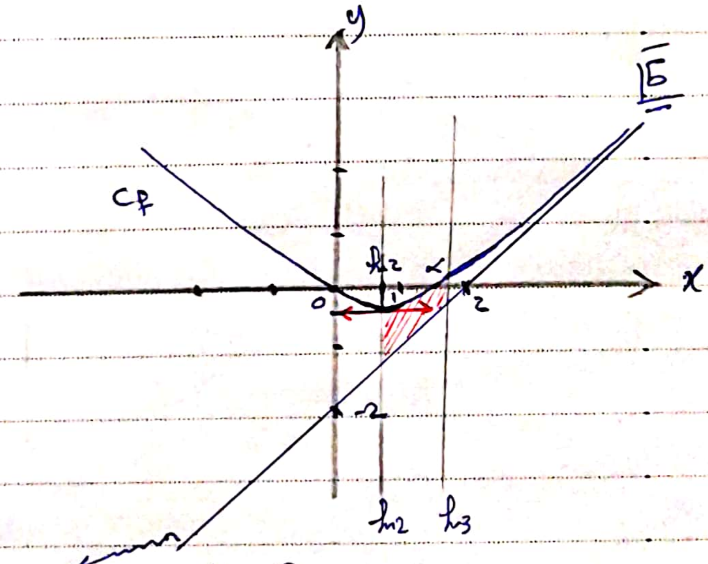
$$f(1) = 2e^{-1} - 1 = \frac{2}{e} - 1 < 0$$

$$f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} > 0$$

$$\Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$

<= إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حلين مختلفين في R.

5)



$$\Delta : y = x - 2 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$$

6) موقع C المستقيم Δ:

$$I = \int_a^b f(x) - y_\Delta \, dx.$$

$$I = \int_{h_2}^{h_3} 2e^{-x} \, dx \Rightarrow I = \left[-2e^{-x}\right]_{h_2}^{h_3}$$

$$= \frac{-2}{3} + 1 \Rightarrow I = \frac{1}{3}$$

وحدة مساحة تشغل منطقة محددة من المستوي الإحداثي.

/ /

3.

$f(x) - y_\Delta = \ln(1 - e^{-x})$

نعلم أنّ:

$e^{-x} > 0 \Rightarrow -e^{-x} < 0$

$1 - e^{-x} < 1 \Rightarrow \ln(1 - e^{-x}) < 0 \;:\; f(x) - y_\Delta < 0$

⇐ ومنه C تحت Δ دوماً على $]0,+\infty[$

4.

f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$.

$x = 0$ مقارب شاقولي لـ Cf منطبق على $y'y$

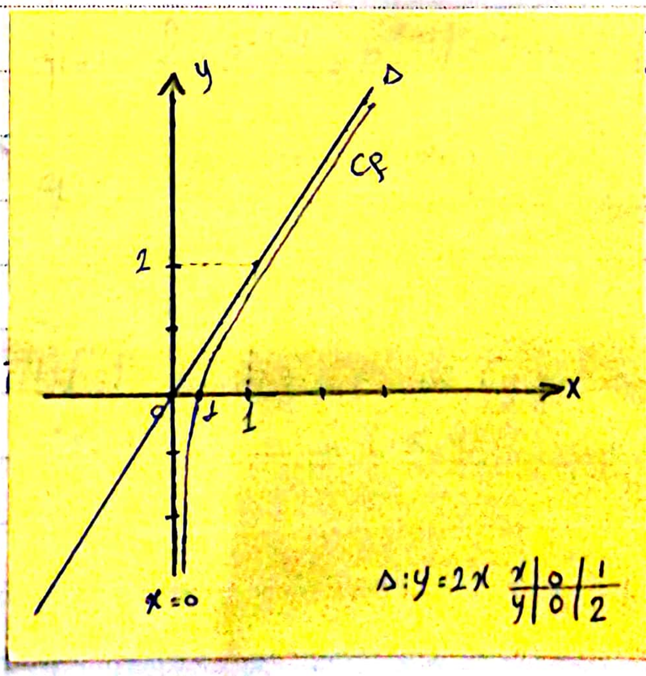
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty + 0 = \infty$

f اشتقاقي على I ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x}} > 0$$

x	0	α	$+\infty$
f'		+	
f	$-\infty$	↗ 0	$+\infty$

5.



إضافة: اثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α وجده.

في المجال $]0,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

$0 \in f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$

⇐ ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في $\mathbb{R}$.

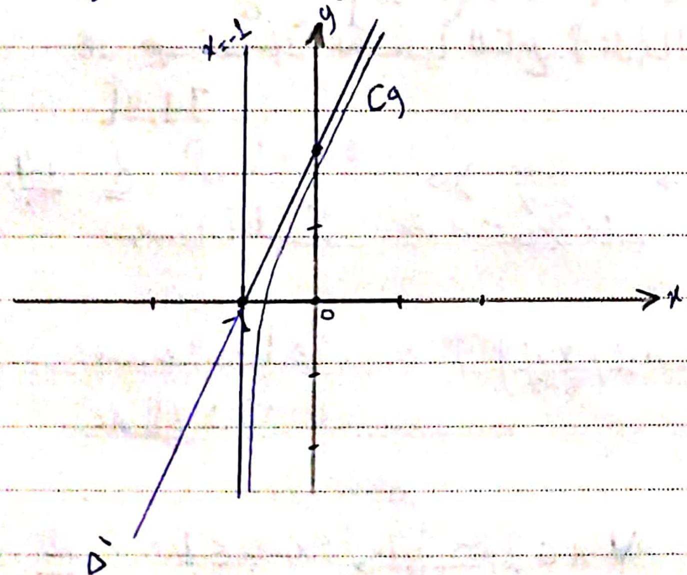
5.

$g(x) = \ln(e^{2(x+1)} - e^{x+1})$

$\Rightarrow g(x) = f(x+1)$

⇐ ينتج Cg عن Cf وفق شعاع: $\vec{U}(-1,0)$

$(x,y) \longrightarrow (-x,y)$



6.

$h(x) = e^{f(x)} \Rightarrow h(x) = e^{\ln(e^{2x} - e^{x})}$

$\Rightarrow h(x) = e^{2x} - e^{x} \Rightarrow D_h = \mathbb{R}$... ♥

/ /

مسألة (3):

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$ $\quad I =]-1,3[$

1- اثبت أن f اشتقاقي على I

2- اثبت أن $A(1,0)$ مركز تناظر للخط C

3- تغيرات تابع f

4- اثبت أن $f(x)=0$ حلاً وحيداً α اوجده

5- اكتب معادلة المماس T من نقطة فاصلتها $x=1$ + الوضع النسبي.

6- ارسم

7- استنتج رسم $g(x)=\ln(3-x)-\ln(x+1)$

8- جد تابعاً عكسياً للتابع f على المجال $]-1,3[$.

الحل: $\boxed{1}$

$x \mapsto \frac{x+1}{3-x} > 0$

موجب تماماً على I فهو اشتقاقي عليه

⟸ هذا يعني أن $\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$ اشتقاقي على $]-1,3[$

$\boxed{2}$ $\forall x \in I$ فإن $2x_0 - x \in I$

$\Rightarrow 2-x \in I$ نشكل

$x \in]-1,3[$

$-x \in]-3,1[$

$2-x \in]-1,3[$

⟸ الشرط الأول محقق......

$f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$

$f(2-x) = -f(x)$

$L_2 = f(2-x) = \ln\left(\frac{2-x+1}{3-2+x}\right) = -\ln\left(\frac{3-x}{1+x}\right)$

$= -f(x) = L_2$

الشرط الثاني محقق.....

⟸ ومما سبق نجد أن $A(1,0)$ مركز تناظر لـ C

$\boxed{3}$ f معرف ومستمر واشتقاقي على I

$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C_f يوازي $y'y$

$\lim_{x \xrightarrow{<} -3} f(x) = +\infty$

$x=-3$ مقارب شاقولي لـ C_f يوازي $y'y$

. f اشتقاقي على I ومشتقه:

$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{3-x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{3-x}\right)}$

$f'(x) = \frac{\frac{1(3-x)+(x+1)}{(3-x)^2}}{\frac{x+1}{\cancel{3-x}}} = \frac{4}{(3-x)(x+1)}$

$f'(x) > 0$

x	-1		α		$+3$
f'	‖	+	+	+	‖
f	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖

4 على المجال $]-1,3[$ الدالة مستمرة ومتزايدة تماما

$0 \in f(]-1,3[) = \mathbb{R}$

=> معادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$

$f(x)=0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)=0$

$\frac{x+1}{3-x} = 1 \Rightarrow x+1 = 3-x$

$\boxed{x=1}$ $\quad x=1=\alpha$

5 معادلة المماس

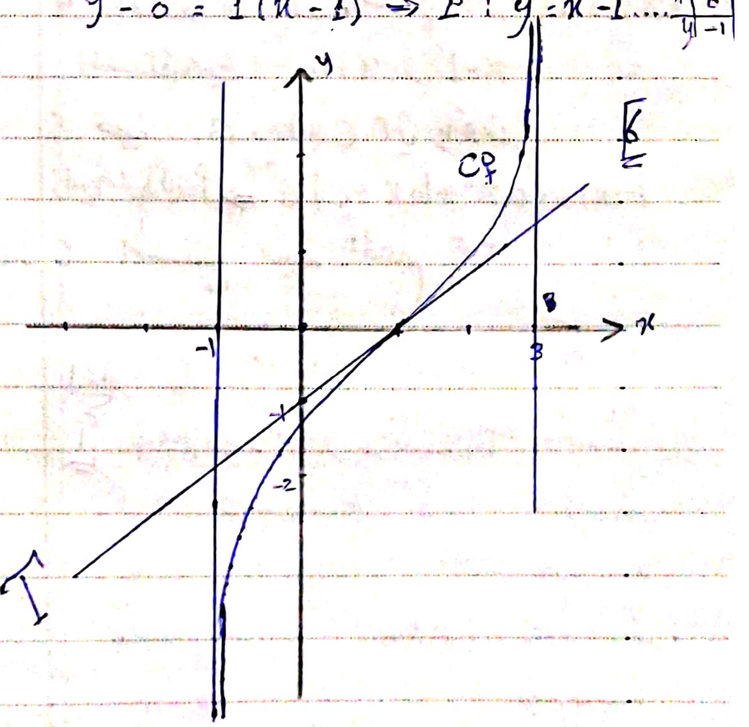
$f(1)=0 \longrightarrow m = f'(1) = 1$

$T: y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow T: y = x-1$

x	0
y	-1

6



وضع C مع T:

$g(x) = f(x) - y_T = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) - x + 1.$

ندرس إشارة $g(x)$:

$g'(x) = \frac{4}{(3-x)(x+1)} - 1$

$g'(x) = \frac{4 - [(3-x)(x+1)]}{(3-x)(x+1)}$

$g'(x) = \frac{4 - (3x+3-x^2-x)}{(3-x)(x+1)}$

$g'(x) = \frac{4-2x-3+x^2}{(3-x)(x+1)} = \frac{x^2-2x+1}{(3-x)(x+1)}$

$g'(x) = \frac{(x-1)^2}{(3-x)(x+1)} \Rightarrow g'(x)=0$

$x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow g(1)=0$

x	-1		1		3
g'	‖	$+$	0	$+$	‖
g	‖	$- - -\nearrow$	0	$+ + + \nearrow$	‖

على $]-1,1[$ $\quad g(x)<0 \Leftarrow f(x)-y_T<0$

$\Leftarrow$ C تحت T دوما

على $]1,3[$ $\quad g(x)>0 \Leftarrow f(x)-y_T>0$

$\Leftarrow$ C فوق T دوما

/ /

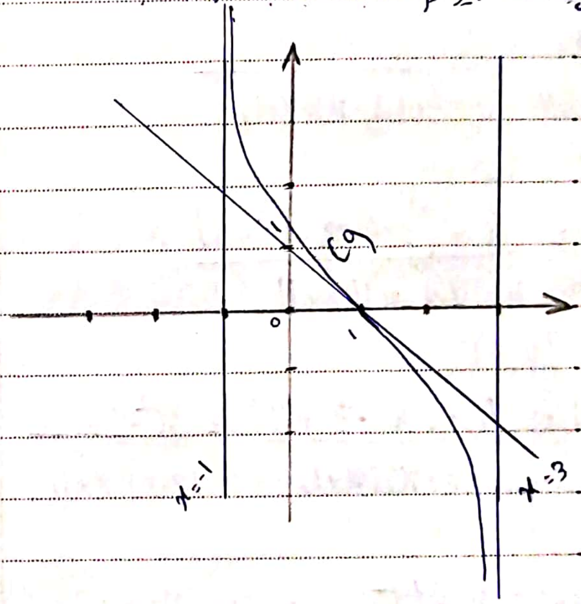
7

$g(x) = \ln(3-x) - \ln(x+1)$

$g(x) = -[\ln(x+1) - \ln(3-x)]$

$g(x) = -\left(\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)\right) \Rightarrow g(x) = -f(x).$

Cg نظير Cf بالنسبة لـ $x'x$



8

$y = f(x) \longrightarrow g(y) = x$

g هو تقابل عكسي للتابع f على المجال $]-1,3[$

التابع مستمر ومتزايد تماماً وينعدم عند $x=1$.

① نبدل كل $f(x) \longrightarrow y$

$y = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$

② نعيد كتابة x بدلالة y :

$e^y = \frac{x+1}{3-x} \Rightarrow x+1 = 3e^y - xe^y$

$x + xe^y = 3e^y - 1$

$x(1+e^y) = 3e^y - 1$

$\Rightarrow x = \frac{3e^y - 1}{1+e^y}$

$g(y) = x = f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

مسألة (4):

$f(x) = (2-x)e^x \quad R$

1. ادرس تغيرات
2. أكتب معادلة المماس d الذي يقبل نقطة فاصلتها تعدم $f''(x)$
3. ارسم C و d
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ و المستقيمين $x=0$, $x=1$
5. عين a و b و c حتى يكون $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابع أصلي لـ $(f(x))^2$
6. استنتج قيمة الحجم V

الحل:

1] f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \times \infty = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (\infty \times 0)$ حالة عدم تعين

$f(x) = 2e^x - xe^x$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

$y=0$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$(f(x))^2 \Rightarrow ((2-x)e^{x})^2$

$(2-x)^2 e^{2x} = (4-2x+x^2)e^{2x}$

$2a=1 \to a=\frac{1}{2}$

$2b+2a=-2 \to b=-\frac{5}{2}$

$b+2c=4 \to c=\frac{13}{4}$

$\Rightarrow F(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{2x}$

6

$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

$V=\pi\int_0^2 f^2(x)\,dx \Rightarrow V=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{2x}\right]_0^2$

$\Rightarrow V=\pi\left[\left(2-5+\frac{13}{4}\right)e^4-\frac{13}{4}e^0\right]$

$= V=\pi\left[\frac{1}{4}e^4-\frac{13}{4}\right] \to V=\frac{\pi}{4}(e^4-13)$

وحدة حجوم ....

مسألة (5):

$f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ $\quad]0,+\infty[$

1. تغيرات
2. اثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$
3. ارسم
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم $y=1$ و $x=e$ و $x=1$.
5. استنتج $g(x)=\frac{\ln x}{x}$
6. باستخدام القيمة التقريبية أحسب: $f(1,1)$.

الحل:

1. f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,\infty[$

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ C_f منطبق على $y'y$

• $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = 1+\frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

$y=1$ مقارب افقي لـ C_f بجوار $+\infty$ يوازي $x'x$

• f اشتقاقي على $]0,\infty[$ ومشتقه

$f'(x)=\frac{(1+\frac{1}{x})x+1(x+\ln x)}{(x)^2}$

$f'(x)=\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=\frac{+1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x)=0$

$\ln x=+1 \Rightarrow \boxed{x=e} \to f(e)=\frac{e+1}{e}$

x	0	α	e	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\frac{e+1}{e}$	$\searrow 1$

/ /

.f اشتقاقي على R ومشتقته :

$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x$

$\Rightarrow f'(x) = [-1+2-x]e^x \Rightarrow f'(x) = (1-x)e^x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$e^x \neq \rightarrow e^x > 0$

$f(1) = e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

قيمة كبرى محلياً يبلغها f عندما $x=1$: $f(1)=e$

$f(x) \leq f(1)$

$\Rightarrow f(x) \leq e$.

[2]

$f''(x) = -e^x + e^x(1-x)$

$= e^x[-1+1-x] \Rightarrow f''(x) = -xe^x$

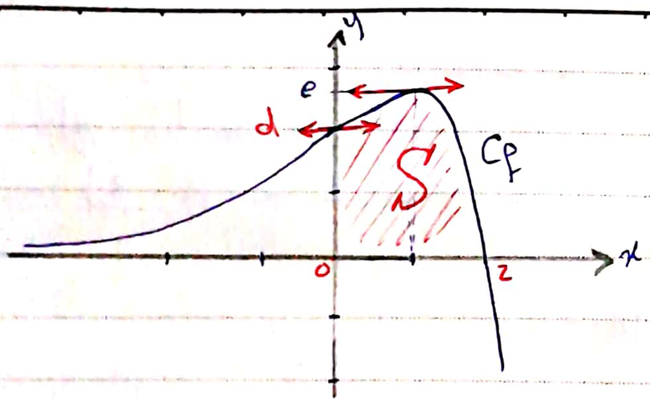
$f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow f''(0) = 0 = m$

$A : f(0) = 2$

$T : y - f(a) = f''(a)(x-a)$

$\Rightarrow T : y - 2 = 0(x-0) \Rightarrow T : y = 2$

مماساً افقياً....



نقطة تقاطع C مع y'y : ⟵ $(y=2 \ , \ x=0)$

نقطة تقاطع C مع x'x : ⟵ $(x=2 \ , \ y=0)$

[4] C فوق x'x

$S = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow S = \int_0^2 (2-x)e^x\,dx$

$u = 2-x \longrightarrow u'(x) = -1$

$v'(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

$S = [(2-x)e^x]_0^2 + \int_0^2 e^x\,dx$

$S = [(2-x)e^x]_0^2 + [e^x]_0^2$

$S = [e^x(3-x)]_0^2 \Rightarrow S = e^2 - 3$

وحدة مساحة. تشغل منطقة محددة من مستوي الإحداثي

[5]

$F'(x) = (f(x))^2$

$\Rightarrow F'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx+c)e^{2x}$

$= e^{2x}[2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c]$

بالمقارنة مع $(f(x))$ نجد أن :

مسألة: $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ $\quad]0,+\infty[$

1. تغيرات
2. معادلة المماس $x=2$
3. الوضع النسبي
4. الرسم
5. مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين $x=1$ و $x=e$.

الحل

$\boxed{1}$ f مستمر معرف واشتقاقي على $]0,\infty[$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 + \infty = \infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = (\infty - \infty)$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \frac{1 + x\ln x}{x} \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1+0}{0} = \infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ C منطبق على $y'y$

f اشتقاقي على $]0,\infty[$ ومشتقه:

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1+x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -1 + x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$f(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
f'			0		
f	∞	↘	1	↗	∞

$f(1)=1$ قيمة حدية صغرى يبلغها f عندما $x=1$

$\boxed{2}$ $x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$

$m = f'(2) = \frac{1}{4}$

$T: y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$\Rightarrow T: y - \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1}{4}(x-2)$

$\Rightarrow T: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ln 2$

$\Rightarrow T: y = \frac{1}{4}x + \ln 2$

$\boxed{3}$ $g(x) = f(x) - y_T = \frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{4}x - \ln 2$

ندرس اطراد g على $]0,\infty[$

$g'(x) = \frac{-1+x}{x^2} - \frac{1}{4}$

$g'(x) = \frac{-4 + 4x - x^2}{4x^2} = \frac{-(x^2 - 4x + 4)}{4x^2}$

$g'(x) = \frac{-(x-2)^2}{4x^2} \Rightarrow g'(x) = 0$

$x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x=2} \rightarrow g(2) = 0.$

x	0		2		$+\infty$
g'			0		
g		↘ $++++$	0	↘ $----$	

/ /

2

من المجال $]0,e[$ التابع مستمر ومتزايد تماما

$0 \in f(]0,e[) =]-\infty, \frac{e+1}{e}[$

<= ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $]0,e[$

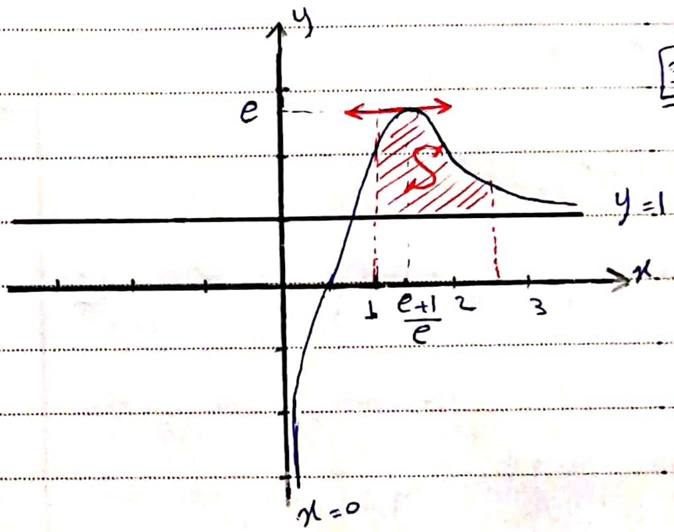
$f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2}} < 0$

$f(1) = 1 > 0$

$f(\frac{1}{2}) * f(1) < 0$

<= ومنه الحل α ضمن المجال $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$

3



4

C فوق

$S = \int_1^e f(x)\,dx \rightarrow S = \int_1^e \frac{x+\ln x}{x}\,dx$

$S = \int_1^e 1 + \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[x + \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e$

$\Rightarrow S = (e + \frac{1}{2}) - (1+0) \Rightarrow S = e + \frac{1}{2} -$

$S = e - \frac{1}{2}$

وحدة مساحة تشغل منطقة محددة من المستوي الإحداثي...

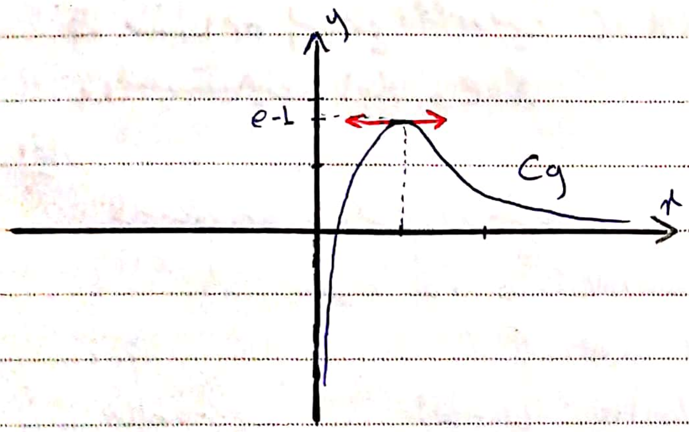
5

$g(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f(x) = \frac{x+\ln x}{x} \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$

$f(x) = 1 + g(x) \Rightarrow f(x) - 1 = g(x)$

Cg ينتج عن Cf بتحويل كل : $(x,y) \longrightarrow (x,y-1)$



6

$f(1.1) \Rightarrow a = 1 \,,\, h = 0.1$

$f(a+h) = f(a) + f'(a) * h$

$f(a) = f(1) = 1$

$f'(1) = 1 . \qquad h = 0.1$

$\Rightarrow f(1.1) = 1 + 1 \times 0.1 = 1.1$

/ /

على $]0,2[$ يكون:

$g(x) > 0 \Rightarrow f(x) - y_T > 0$

$f(x) > y_T$

C فوق T دوماً.

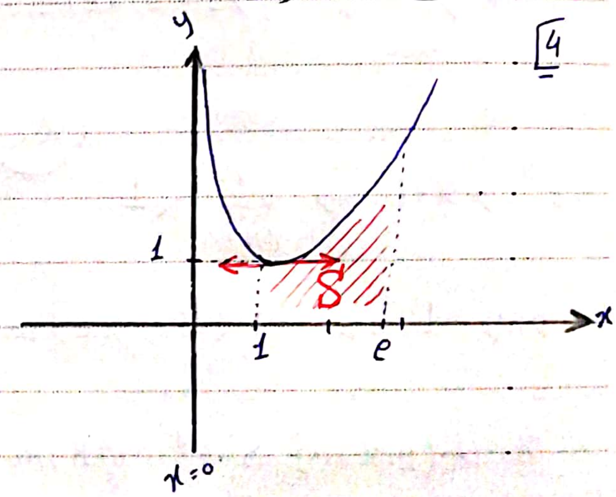
على $]2,+\infty[$

$g(x) < 0 \Rightarrow f(x) - y_T < 0$

$f(x) < y_T$

C تحت T دوماً.

4



5. C فوق $x'x$

$S = \int_1^e f(x)dx \Rightarrow S = \int_1^e \frac{1}{x} + \ln x \, dx$

$= \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \ln x \, dx$

$= \int_1^e \frac{1}{x} dx + M$

$M = \int_1^e \ln x \, dx$

$u(x) = \ln x \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x$

$M = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx$

$= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e$

$= [x \ln x - x]_1^e$

$S = [\ln x]_1^e + [x \ln x - x]_1^e$

$S = 1 + e - e - (0 + 0 - 1) = 2$

وحدة مساحة تشغل المنطقة محددة من المستوي الإحداثي

مسألة (7):

$f(x) = \frac{e^x}{x+1} \quad \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

1. تغيرات 2. ارسم C
3. ما هي حلول المتراجحة $e^x > x+1$
4. ناقش بيانياً وحسب قيم m حلول المعادلة $x = \ln(mx+m)$
5. استنتج C' $g(x) = \frac{1}{(-x+1)e^x}$

/ /

1) الدالة معرفة ومستمرة واشتقاقية على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \dfrac{\frac{1}{e}}{0^+} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \dfrac{\frac{1}{e}}{0} = -\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C_f يوازي $y'y$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي لـ C_f بجوار $-\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \dfrac{\frac{e^x}{x}}{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{1} = \infty$$

- f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - 1e^x}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

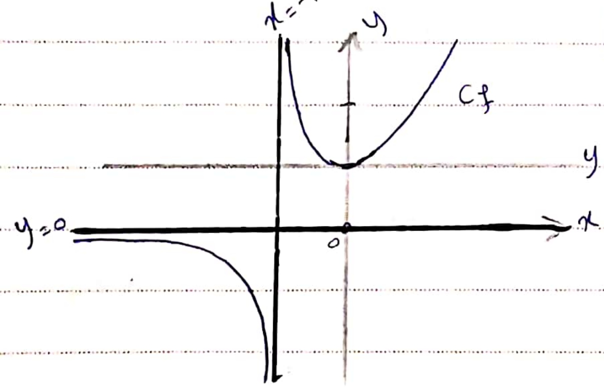
$f'(x)=0 \rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow f(0)=1$

x	$-\infty$		-1		0		∞
f'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘ $-\infty$	‖	∞ ↘	1	↗	∞

$f(0)=1$ قيمة حدية صغرى عندما $x=0$

$f(x) \geqslant f(0) \Rightarrow f(x) \geqslant 1$

2)



3) $\{x>-1$

$e^x > x+1 \Rightarrow \dfrac{e^x}{x+1} > 1$

$f(x) > 1 \rightarrow y>1 \Rightarrow x \in]-1,+\infty[$

$\{x<-1$

$e^x > x+1 \Rightarrow \dfrac{e^x}{x+1} < 1$

$f(x) < 1 \Rightarrow y<1 \Rightarrow x \in]-\infty,-1[$

4) $x = \ln(mx+m) \Rightarrow e^x = mx+m$

$e^x = m(x+1) \Rightarrow m = \dfrac{e^x}{x+1}$

$f(x)=m$

$m \in]-\infty,0[$ يكون للمعادلة حل وحيد

$m \in]0,1[$ لا يوجد حلول

$m \in]1,+\infty[$ حلان مختلفان

$m=1$ حل وحيد.

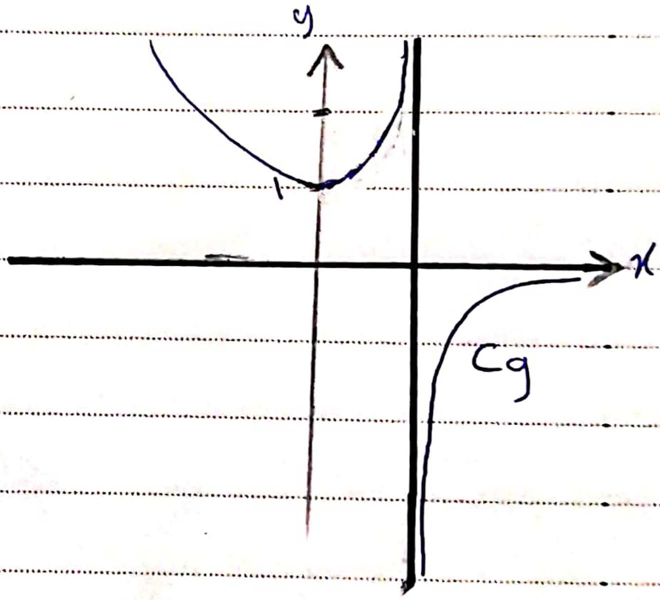
5

$$g(x) = \frac{1}{(-x+1)e^{x}}$$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{-x+1}.$$

$$\Rightarrow g(x) = f(-x)$$

Cg نظير Cf بالنسبة لـ y'y.



مسألة (8):

$f(x) = \frac{e^x-1}{1+e^x}$ ؛ R

1. اثبت أنّ f فردي.

محققة ومحصور $\bullet\ \forall x \in R \longrightarrow -x \in R$

$\bullet\ f(-x) \overset{?}{=} -f(x)$

$f_1 = f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{1+e^{-x}} = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{1+\frac{1}{e^x}}$

$= \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{1-e^x}{e^x+1} = -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$

$\Rightarrow = -f(x) = f_2$ محققة

ومما سبق نجد أن $f(x)$ تابع فردي.

2. ادرس تغيرات f

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\bullet\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0-1}{1+0} = -1$

$y=-1$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$ يوازي $x'x$

$\bullet\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ حالة عدم تعين

$f(x) = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{1-e^{-x}}{e^{-x}+1}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1-0}{0+1} = 1$

$y=1$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$ يوازي $x'x$

f اشتقاقي على R ومشتقه:

$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{e^x[1+\cancel{e^x}-\cancel{e^x}+1]}{(1+e^x)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

مقام موجب دوماً والبسط موجب أيضاً $2e^x > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		+	+	+	
f	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

3. اثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α او وجده

في المجال $]-\infty,\infty[$ التابع f مستمر ومتزايد تماماً

$0 \in f(]-\infty,\infty[) =]-1,1[$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في R...

إيجاده:

$f(x)=0 \rightarrow \frac{e^x-1}{1+e^x}=0$

$e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow \boxed{\alpha = x = 0}$

4. عين عدد حقيقي A بحيث كان $x>A$:

$f(x) \in]\quad , 1.2[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +1 \qquad \varepsilon = \frac{b-a}{2} = \frac{1.2-0.8}{2}$

$\Rightarrow \varepsilon = 0.2$

Subject : / /

$$\left| f(x)-\ell \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{e^x-1}{1+e^x} - 1 \right| < 0.2$$

$$\left| \frac{e^x-1-1-e^x}{1+e^x} \right| < \frac{2}{10} \Rightarrow \left| \frac{-2}{1+e^x} \right| < \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{1+e^x} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{e^x+1}{2} > 5 \quad (\times 2)$$

$$e^x+1 > 10 \Rightarrow e^x > 9 \Rightarrow x > \ln 9$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \ln 9}$$

5- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x))$

$$f\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = f(1) = \frac{e-1}{1+e}$$

6. أكتب معادلة المماس في المبدأ وادرس وضع C بالنسبة لـ T.

في المبدأ ⇐ $A(0,0)$

$$f'(0) = \frac{1}{2} = m$$

$$T: y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

$$\Rightarrow T: y - 0 = \frac{1}{2}(x-0)$$

$$\Rightarrow \boxed{T: y = \frac{1}{2}x}$$ ...♡

الوضع: $g(x) = f(x) - y_T = \frac{e^x-1}{1+e^x} - \frac{1}{2}x$.

ندرس اطراد التابع g:

← g اشتقاقي على R:

$$g'(x) = f'(x) - y'_T$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{4e^x - (1+e^x)^2}{2(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4e^x - (1+2e^x+e^{2x})}{2(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-e^{2x}+2e^x-1}{2(1+e^x)^2} = \frac{-(e^x-1)^2}{2(1+e^x)^2} \leq 0$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)=f(x)-y_T$		$+ + +$ ↘	0	↘ $- - -$	

← على المجال $]-\infty, 0[$; $g(x) \geq 0$ ⇐ $f(x) - y_T \geq 0$

اي C فوق T دوما

← في المجال $]0, +\infty[$; $g(x) \leq 0$ ⇐ $f(x) - y_T \leq 0$

اي C تحت T دوما

Subject : .... / /

7- اوجد التقابل العكسي للتابع f

على المجال R التابع معرف ومستمر ومتزايد تماماً

ومنه للمعادلة $f(x)=y$ حل وحيد $\rightsquigarrow g(y)=x$.

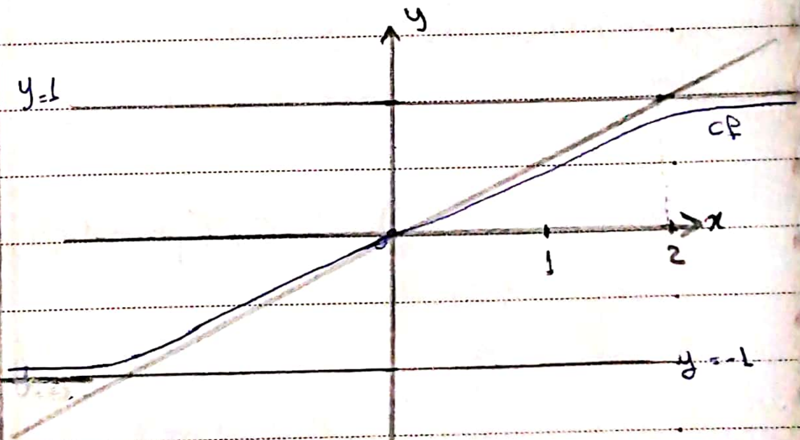
$$y = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow e^x-1 = ye^x+y$$

$$e^x - ye^x = y+1 \Rightarrow e^x(1-y) = y+1$$

$$e^x = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$$

$$g(y) = x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

8- ارسم في معلم متجانس T و C



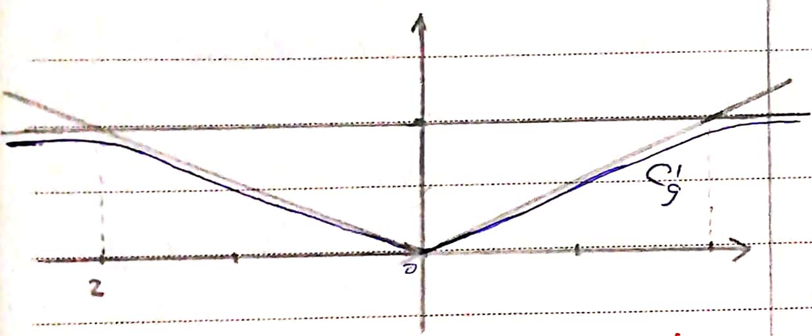
$T: y = \frac{1}{2}x$

x	0	2
y	0	1

9- استنتج رسم C' الخط البياني للتابع

$$g(x) = \frac{|e^x-1|}{e^x+1}$$

$$g(x) = \left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| \Rightarrow g(x) = |f(x)|$$



مسألة (9):

$f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$ و R.

1- اثبت أن f تابع فردي

محقق دوماً $\forall x \in R \longrightarrow -x \in R$ •

• $f(-x) = -f(x)$

$$L_1 = f(-x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{-1}{2}(e^{-x} - e^{x})$$

$$= -f(x) = L_2$$

ومنه f تابع فردي خطه البياني متناظر بالنسبة لـ o.

2- تغيرات + حل المعادلة $f(x)=0$

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\infty - 0) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}(0 - \infty) = -\infty$$

f اشتقاقي على R ومشتقه

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} - e^{x}) = \frac{-1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

$\Rightarrow f'(x) < 0$

$\Leftarrow f$ متناقص تماماً

x	$-\infty$				$+\infty$
f		$-$	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

CamScanner ـحة ضوئيا بـ

$f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})=0.$

$e^{-x}-e^{x}=0 \quad (\times e^{+x}$

$1-e^{2x}=0 \Rightarrow 1=e^{2x} \Rightarrow \boxed{x=0}$

$\boxed{: =0}$

3) حل المعادلة $f(x)=1$ واستنتج قيمة α

$\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{+x})=1 \Rightarrow e^{-x}-e^{+x}=2 \quad \times e^{x}$

$1-e^{2x}=2e^{x}=0 \Rightarrow (e^{2x}+2e^{x}-1)=0$

$\Delta = 4-4(1)(-1) = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}$

$e^{x}=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -1-\sqrt{2}$ مستحيلة

$e^{x}=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow = \boxed{-1+\sqrt{2}=\alpha}$

$\beta = h(\sqrt{2}-1).$

4 معادلة المماس في المبدأ وادرس الوضع النسبي

$A(0,0) \Rightarrow m=f'(0)=-1$

$T: y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow T: y-0=-1(x-0)$

$\Rightarrow \boxed{T: y=-x}$ ♡

الوضع:

$f(x)-y_T = \frac{1}{2}(e^{-x}-e^{+x}) \; +x$

$h(x) = \frac{1}{2}(e^{-x}-e^{+x})+x$

$h'(x) = f'(x)-y'_T$

$= -\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})+1 \qquad \times 2$

$= -e^{x}-e^{-x}+2. \qquad \times e^{x}$

$= -e^{2x}-1+2e^{x} \Rightarrow -e^{2x}+2e^{x}-1=0$

$= -(e^{2x}-2e^{x}+1)=0 \Rightarrow -(e^{x}-1)^2=0 \leq 0$

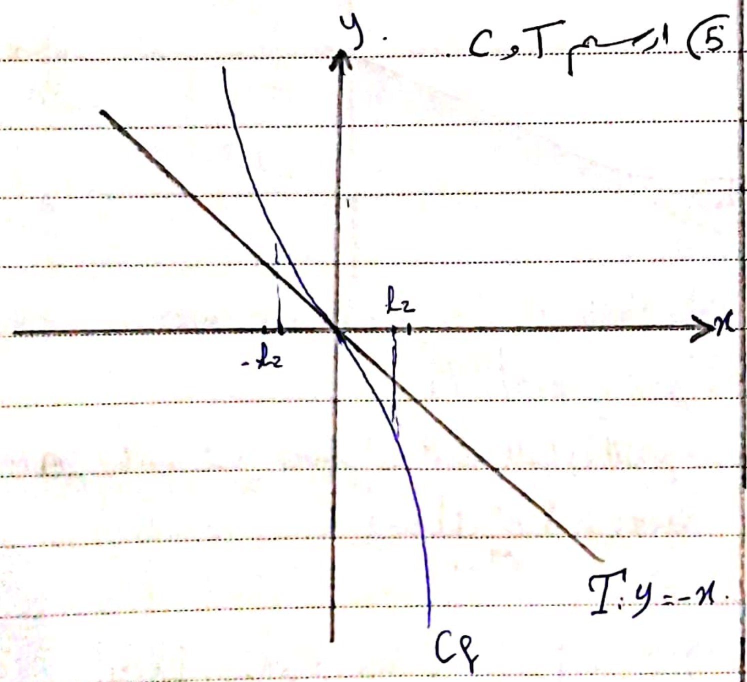
$e^{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow h(0)=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$-$
$h'(x)$	$+++$ ↘	0	$----$ ↘

على المجال $]-\infty,0[$ الناتج
يكون $h(x)>0 \Leftarrow f(x)-y_T>0$
أي C فوق T دوماً.

على المجال $]0,+\infty[$ يكون $h(x)<0 \Leftarrow f(x)-y_T<0$
أي C تحت T دوماً.

5) ارسم T و C



6- احسب مساحة الحيز المحصور بين C و x'x والمستقيمين $x=-\ln 2$ ، $x=\ln 2$.

عادة C تحت x'x فإن:

$$S' = -\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$$

$$S' = -\int_0^{+\ln 2} \frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})\,dx$$

$$S' = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} -e^{-x}+e^{x}\,dx$$

$$S' = +\frac{1}{2}\left[e^{-x}+e^{x}\right]_0^{\ln 2} \Rightarrow S' = +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)-(1+1)$$

$$S' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

ومنه:

$$S = 2S'$$

$$S = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ ♡

وحدة مساحة ♡

7- احسب حجم

$$V(x) = \pi\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f^2(x)\,dx$$

$$V(x) = \frac{\pi}{4}\int_{-\ln 2}^{+\ln 2} (e^{-x}-e^{x})^2\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{-2x}-2+e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\ln 2}^{+\ln 2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)-2\ln 2+\frac{1}{2}(4)\right]-\left[-\frac{1}{2}(4)+2\ln 2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{8}-2\ln 2+2+2-2\ln 2-\frac{1}{8}\right)$$

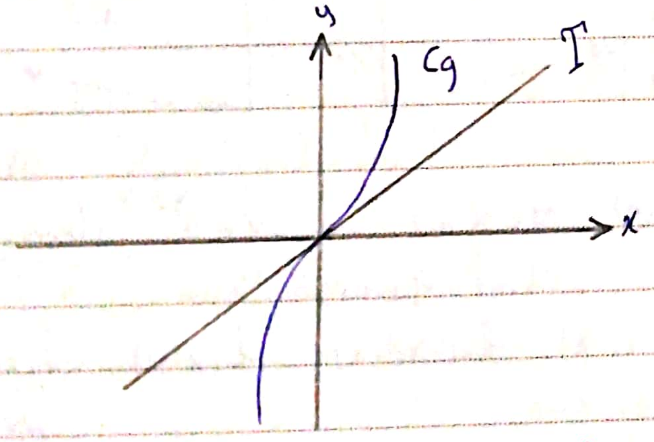
$$= \frac{\pi}{4}\left(-4\ln 2+4-\frac{2}{8}\right) = \frac{\pi}{4}\left(-4\ln 2+\frac{15}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(-\ln 16+\frac{15}{4}\right)$$ ... ♡ وحدة حجوم

8- استنتج رسم C' $g(x) = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

$$g(x) = -\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x}) \Rightarrow g(x) = -f(x)$$

Cg نظير Cf بالنسبة لمحور x'x.



مسألة (10):

$$f(x) = \ln(x^2-1)$$

حيث: $I =]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$

1. تغيرات.

2- اثبت أن f تابع زوجي.

3- اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ حلين مختلفين في I وعينهما

4- ارسم

5- استنتج رسم C' $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

Subject : / /

الحل . أ) استمرارية وقابلية الاشتقاق على I ①

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^{<}} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to -1^{>}} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -1 \ , \ x = 1$

مقاربان شاقوليان لـ C_f

ب) اشتقاق f على I ومشتقة :

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} > 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \notin I$

x	$-\infty$	α	-1	1	β	$+\infty$
f'		$-$			$+$	
f	∞	0	$-\infty$	$-\infty$	0	∞

② . $\forall x \in I \Rightarrow -x \in I$ (محقق شرطاً)

. $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = \ln((-x)^2-1) = \ln(x^2-1) = f(x)$

محقق

$\Leftarrow$ ومنه f تابع زوجي خطه البياني متناظر بالنسبة لـ $y'y$

③ في المجال $]-\infty,-1[$ التابع f مستمر ومتناقص تماما

$0 \in f(]-\infty,-1[) = \mathbb{R}$

$\Leftarrow$ ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في $]-\infty,-1[$

في المجال $]1,\infty[$ التابع f مستمر ومتزايد تماما

$0 \in f(]1,\infty[) = \mathbb{R}$

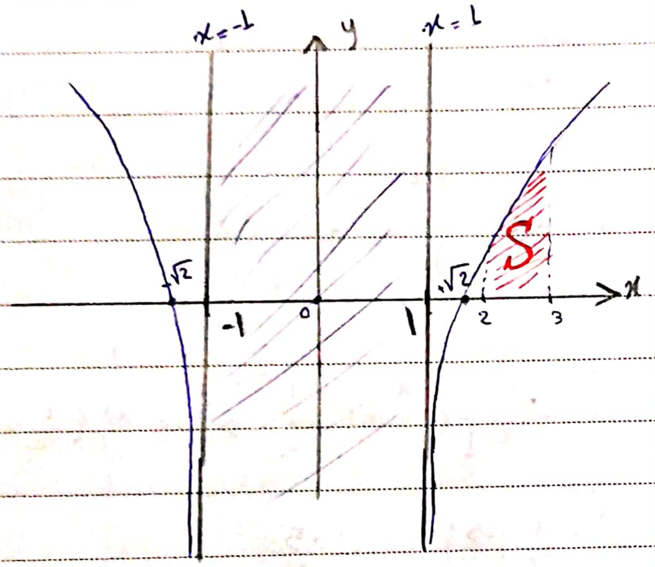
$\Leftarrow$ ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في $]-\infty,-1[$

ومما سبق نجد أن المعادلة تقبل حلين متمايزين $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln(x^2-1) = 0$

$x^2-1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} = \alpha \\ x_2 = +\sqrt{2} = \beta \end{cases}$

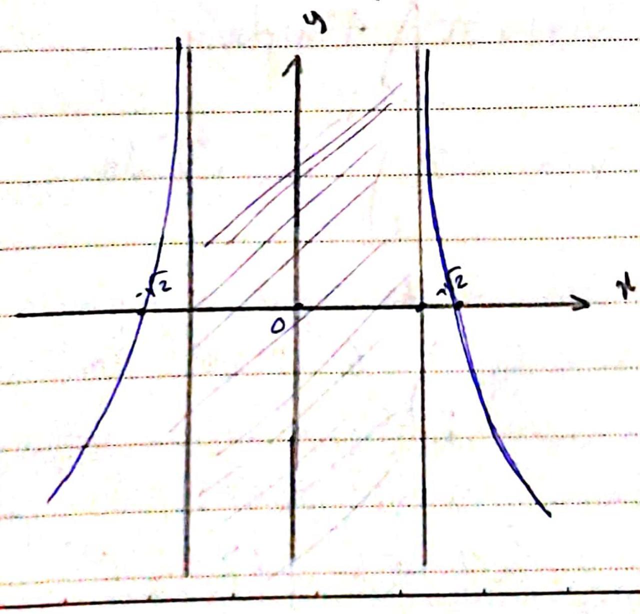
④



⑤ $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) \Rightarrow g(x) = -\ln(x^2-1)$

$g(x) = -f(x)$

$\Leftarrow$ C_g نظير C_f بالنسبة لـ $x'x$.



Subject : .... / /

6- احسب مساحة السطح بين C و $x'x$ والمستقيمين $x=2$ و $x=3$.

بيانات: C فوق $x'x$ ماذن:

$$S=\int_2^3 f(x)\,dx \quad = S=\int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx$$

$$U(x)=\ln(x^2-1) \longrightarrow U'(x)=\frac{2x}{(x^2-1)}$$

$$V(x)=1 \longrightarrow V'(x)=x.$$

$$S=\left[x\ln(x^2-1)\right]_2^3-\underbrace{\int_2^3 \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx}_{M}$$

$$M=\int_2^3 \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & x^2-1 \\ \mp 2x^2 \pm 2 & 2 \\ \hline +2 & \end{array}$$

$$=\int_2^3 2+\frac{2}{x^2-1}\,dx.$$

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{(x+1)}$$

$$2=ax+a+bx-b$$

$$2=(a+b)x+a-b$$

$$a+b=0$$

$$a-b=2 \quad (+$$

$$2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1} \rightarrow \boxed{b=-1}$$

$$M=\int_2^3 2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\,dx.$$

$$M=\left[2x+\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_2^3$$

$$M=(6+\ln 2-\ln 4)-(4+0-\ln 3)$$

$$=(6-\ln 2-4+\ln 3=2-\ln\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S=\left[x\ln(x^2-1)\right]_2^3-M$$

$$S=3\ln 8-2\ln 3-2\cdot\ln\frac{3}{2}.$$

$$=9\ln 2-2\ln 3-2\ln\frac{3}{2}$$ وحدة مساحة

مسألة (II):

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x} \quad ; I=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

1- تغيرات f وتعيين القيمة الحدية.

2- مماس عند $x=e$

3- رسم

4- استنتج رسم C': $\quad g(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

5- مساحة السطح المحصور بين C ، $x'x$ ، $x=2$ ، $x=e$

6- ناقش بيانياً وحسب قيم m عدد الحلول

7- اوجد عددين موجبين مختلفين يحققان

$$\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{b}{a}.$$

Subject : / /

الحل : ① f معرف ومستمر واشتقاقي على I

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي لـ C_f منطبق على $y'y$

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي لـ C_f موازٍ لـ $y'y$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$ — $y = 0$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

f اشتقاقي على I :

$$f'(x) = -\frac{(x \ln x)'}{(x \ln x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\left[\ln x + \frac{1}{x} \cdot x\right]}{(x \ln x)^2} = \frac{-1 - \ln x}{(x \ln x)^2} \lessgtr 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{e}} \rightarrow f(e^{-1}) = -e$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		∞
f'	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
f	|| $-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ || ∞	↘	0

$f\left(\frac{1}{e}\right) = e$. قيمة حدية كبرى يبلغها f عندما $x = \frac{1}{e}$.

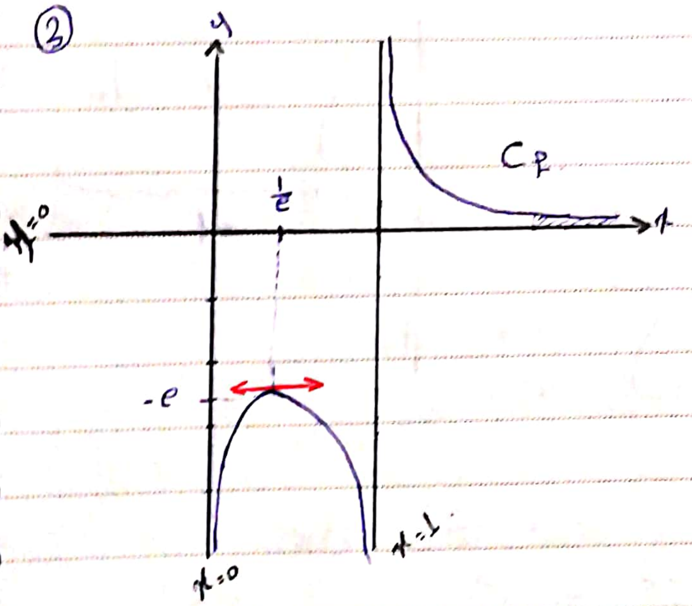
② $A\left(x = e \longrightarrow y = \frac{1}{e}\right) \Rightarrow f'(e) = -\frac{2}{e^2}$

$$T : y - f(e) = f'(e)(x - e)$$

$$T : y - \frac{1}{e} = \frac{-2}{e^2}(x - e) \Rightarrow T : y = \frac{-2}{e^2}x + \frac{2}{e} + \frac{1}{e}$$

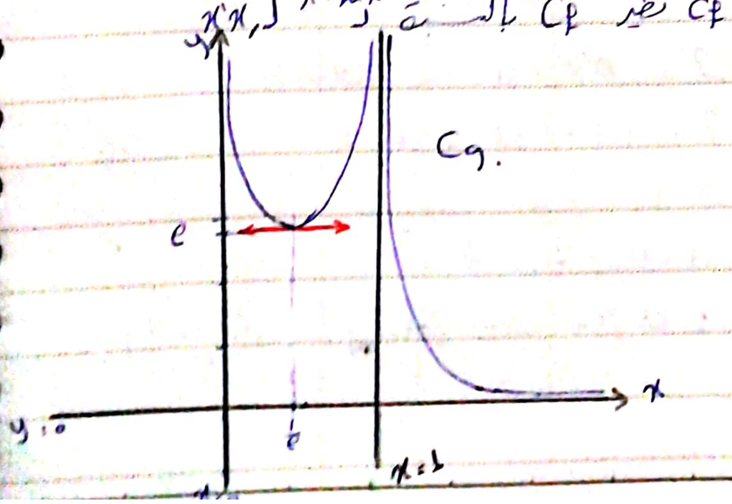
$$\Rightarrow \boxed{T : y = \frac{-2}{e^2}x + \frac{3}{e}}$$

③



④ $g(x) = -\frac{1}{x \ln x} \Rightarrow g(x) = -f(x)$

C_f نظير C_f بالنسبة لـ $x'x$



Subject :   / /

2. اثبت أن $d': y = x+3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$ ووضح

$f(x) - y_{d'} = x - 1 + \frac{4}{e^x+1} - x - 3 = \frac{4}{e^x+1} - 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_{d'}) = 0$

$\Leftarrow d'$ مقارب لـ C بجوار $-\infty$

الوضع:

$$\left\{\begin{array}{l} e^x > 0 \\ e^x + 1 > 1 \\ \frac{4}{e^x+1} < 4 \\ \frac{4}{e^x+1} - 4 < 0 \end{array}\right.$$

$\Leftarrow$ ومنه C تحت d' دوما

3. ادرس تغيرات + الجدول

f معرف ومستمر وإشتقاقي على R

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

f اشتقاقي على R:

$f'(x) = 1 + \frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \geq 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

⑤ $S = \int_2^e f(x)\,dx$ المساحة ...

$S = \int_2^e \frac{1}{x \ln x}\,dx \Rightarrow S = \int_2^e \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$

$S = [\ln(\ln x)]_2^e \Rightarrow S = 0 - \ln(\ln 2)$

$S = -\ln(\ln 2)$ وحدة مساحة

⑥ $m \in]-\infty, e[$ لا يوجد حل

$m \in]0, +\infty[$ يوجد

$a > 0$ ، $b > 0$ ، $a \neq b$

$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{b}{a} \rightarrow f(a) = f(b)$

$\rightarrow \frac{1}{a \ln a} = \frac{1}{b \ln b}$

$a \ln a = b \ln b \Rightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{b}{a}$

يوجد حل وحيد.

مسألة (2):

$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$; R

1. اثبت أن $d: y = x-1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ والوضع

$f(x) - y_d = \frac{4}{e^x+1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y_d) = 0$

$\Leftarrow d$ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$

$f(x) - y_d = \frac{4}{e^x+1} > 0$

$\Leftarrow C$ فوق d دوما

4. معادلة المماس T في نقطة تقاطع C مع محور التراتيب.

← نقطة تقاطع C مع محور التراتيب هي:

$f(0)=1$

$m = f'(0) = 0$

$\Rightarrow T: y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$T: y-1 = 0(x-0) \Rightarrow \boxed{T: y=1}$

← مماس أفقي لـ C_f

5. الوضع بين C و T

$$f(x) - y_T = x - 1 + \frac{4}{e^x+1} - 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f-1$	$-\infty$	$- - - \nearrow$	0	$+ + + \nearrow$	$+\infty$

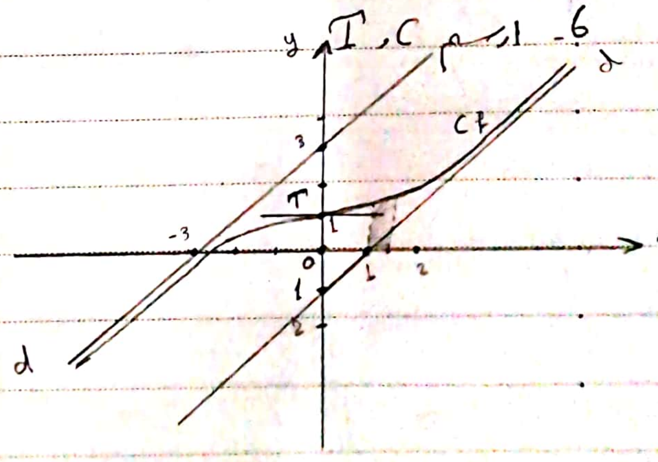
← في المجال $]-\infty,0[$ يكون $f(x)-1 \leq 0$

أي C يكون تحت T

← في المجال $]0,+\infty[$ يكون $f(x)-1 \geq 0$

أي C يكون فوق T ... ♡

6. ارسم C ، T



7. احسب S المساحة بين C والمستقيمات $x=1$ ، $x=\ln 3$ والمستقيم d

بما أن C فوق d فإن:

$$S = \int_1^{\ln 3} f(x) - y_d \, dx \Rightarrow S = \int_1^{\ln 3} \frac{4}{e^x+1} \, dx$$

$$S = 4\int_1^{\ln 3} -\frac{(-e^{-x})}{1+e^{-x}} \, dx \Rightarrow S = -4\left[\ln(1+e^{-x})\right]_1^{\ln 3}$$

$1+\frac{1}{3}$

$$S = -4\left(\ln\frac{4}{3} - \ln\left(1+\frac{1}{e}\right)\right)$$

$$S = -4\left(\ln\frac{4}{3} - \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)\right)$$

$$S = -4\ln 4 + 4\ln 3 + 4\ln(e+1) + 4\ln e$$

$$S = -4\ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4\ln(e+1) + 4$$

وحدة مساحة ... ♡

مسألة (13):

$$f(x) = x - \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) \quad , \quad]0,+\infty[$$

1. تغيرات f

f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على I

• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ C_f ينطبق على $y'y$

• $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Subject : / /

اشتقاق f على I

$f'(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{(2x+1)x}$

$f'(x) = \frac{2x^2+x+1}{2x^2+x} > 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2+x+1 = 0$

$\Delta = 1-4(2)(1) = -7$ مستحيل الحل

x	0		α		∞
f'	||	$+$	$+$	$+$	
f	|| $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2. اثبت ان المستقيم $\Delta: y = x - \ln 2$ مقارب مائل

$f(x) - y_\Delta = -\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) + \ln 2$

x	0	$\ln 2$
y	$-\ln 2$	0

$\lim_{x \to \infty} f(x) \ldots = 0$ (Δ مقارب لـ C بجوار $+\infty$)

3. ادرس الوضع النسبي:

$f(x) - y_\Delta = \ln 2 - \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$

$= \ln\left(\frac{2}{2+\frac{1}{x}}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{\frac{2x+1}{x}}\right)$

$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

الوضع 1

$\frac{2x+1}{2x+1} > \frac{2x}{2x+1}$

$\frac{2x}{2x+1} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < 0$

⇐ C تحت Δ دوما ... ♡

4. اثبت ان المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى $]1,2[$

في المجال $]0,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماما

$0 \in f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$

⇐ حسب المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $\mathbb{R}$

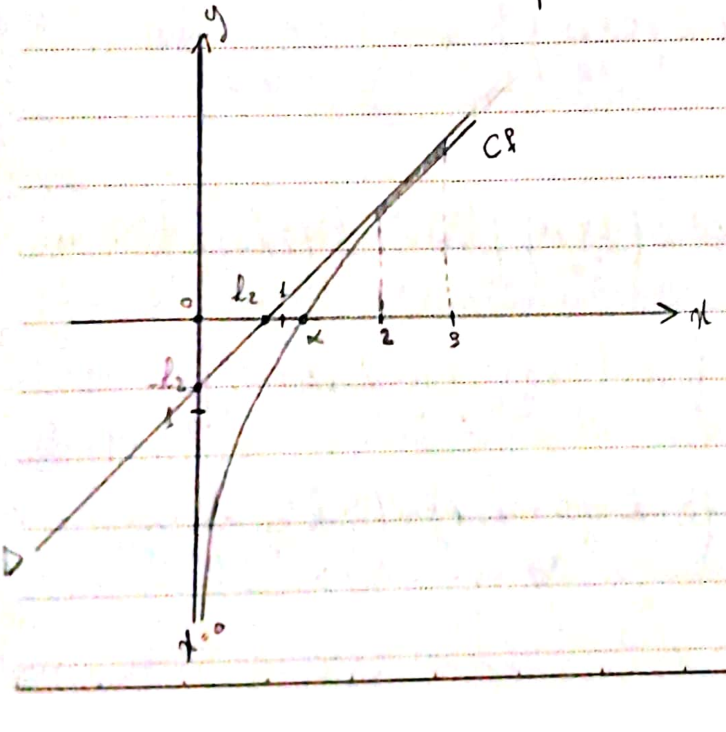
$f(1) = 1-\ln 3 < 0$

$f(2) = 2-\ln\frac{5}{2} > 0$

$f(1)\cdot f(2) < 0$

⇐ α يقع ضمن المجال $]1,2[$ ....♡

5. ارسم



C يقع تحت Δ <=

$$S=\int_2^3 y_\Delta - f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow S=\int_2^3 x-\ln 2 - x+\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\Rightarrow S=\int_2^3 \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{2}\right)dx$$

$$S=\int_2^3 \ln\left(\frac{\frac{2x+1}{x}}{2}\right)dx$$

$$S=\int_2^3 \ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)dx$$

$$u(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)\longrightarrow u'(x)=\frac{-1}{x(2x+1)}$$

$$v'(x)=1\longrightarrow v(x)=x$$

$$S=\left[x\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)\right]_2^3+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(2x+1)}dx$$

$$S=\left[x\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)\right]_2^3+\left[\ln|2x+1|\right]_2^3$$

$$S=\left[x\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)+\ln(2x+1)\right]_2^3$$

$$S=\left(3\ln\frac{7}{6}+\ln 7\right)-\left(2\ln\frac{5}{4}+\ln 5\right)$$

$3\ln 7-3\ln 6+\ln 7-2\ln 5+2\ln 4+\ln 5$

$=4\ln 7-\ln 5$

$$S=3\ln 7-3\ln 6+\ln 7-2\ln 5+2\ln 4+\ln 5$$

$$\Rightarrow S=4\ln 7-\ln 5+2\ln 4-3\ln 6$$

وحدة مساحة ... ♡

مسألة (14):

$f(x)=x(1+e^{-x}) \Longleftrightarrow f(x)=x+xe^{-x}\ ;\ \mathbb{R}$

1. اثبت أن $\Delta: y=x$ مقارب مائل عند $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=xe^{-x}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$$

<= Δ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$

2. ادرس الوضع النسبي:

$f(x)-y_\Delta = x.e^{-x}$

<- $e^{-x}>0$ موجبة دوماً اذاً الإشارة من إشارة x:

x		0	
$f(x)-y_\Delta$	$-$	0	$+$
الوضع	C تحت Δ		C فوق Δ

3. ادرس تغيرات f

f معرف واستمراري على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

f اشتقاق على R :

$f'(x) = 1(1+e^{-x}) - e^{-x}x$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x}$

$f'(x) = 1 + e^{-x}(1-x) > 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$1 + e^{-x}(1-x) = 0$

$1 + \frac{(1-x)}{e^{x}} = 0$

$1 = \frac{-1+x}{e^{x}} \Rightarrow e^{x} = -1+x$

$h(x) = e^{x} - x + 1 = 0$

ندرس اطراد $h(x)$:

$h'(x) = e^{x} - 1 \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$h(0) = 2$

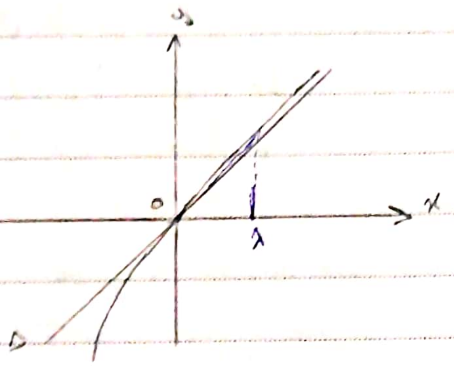
x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

من السطر الأخير نجد أنّ :

$h(x) \geq 2 \Rightarrow h(x) > 0$ موجبة تماما

$\therefore f'(x)$ متزايد تماما على R

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+ \quad + \quad +$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	∞



4_ ليكن λ عدداً حقيقياً موجباً تماماً احسب $A(\lambda)$

مساحة السطح المحصور بين C و Δ و $x=0$ و $x=\lambda$.

C فوق Δ $\Leftarrow$

$S = \int_0^{\lambda} f(x) - y \, dx.$

$= \int_0^{\lambda} x \cdot e^{-x} \, dx.$

$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

$S = \left[-xe^{-x}\right]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} e^{-x} \, dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^{\lambda} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}$

$S = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 = e^{-\lambda}(-1-\lambda) + 1$

وحدة مساحة.

5_ ما نهاية $A(\lambda)$ عندما λ تسعى إلى ∞

$\lim_{\lambda \to \infty} S = \lim_{\lambda \to \infty} A(\lambda) = (0 \times -\infty)$ حالة عدم تعيين

$A(\lambda) = \frac{-1}{e^{\lambda}} - \frac{\lambda}{e^{\lambda}} + 1 \Rightarrow \lim_{\lambda \to \infty} A(\lambda) = 0 - 0 + 1$

$\Rightarrow \lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = +1$ ♥

Subject :   /   /

مسألة (15) :

$I =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\Rightarrow f(x) = 2x-1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1- اثبت ان $\Delta : y = 2x-1$ مقارب بجوار $\mp\infty$

$f(x) - y_\Delta = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

$\Rightarrow \Delta$ مقارب مائل لـ C بجوار $\mp\infty$

2- ادرس الوضع بين C و Δ.

$f(x) - y_\Delta = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\Leftarrow x+1 > x-1$

ولكن على $]-\infty, -1[$

$\frac{x+1}{x-1} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$

$-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$

C يكون فوق Δ ....

ولكن على $]1, +\infty[$

$\frac{x+1}{x-1} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$

$-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$

و C يكون تحت Δ ....

3- ادرس تغيرات.

f معرف واشتقاقي على I

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow x = -1 , x = 1$ مقاربات شاقولية لـ Cf توازي $y'y$

f اشتقاقي على I :

$f'(x) = 2 - \dfrac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}$

$f'(x) = 2 - \dfrac{\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} =$

$f'(x) = 2 + \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)+2}{x^2-1} = \dfrac{2[(x^2-1+1)]}{x^2-1}$

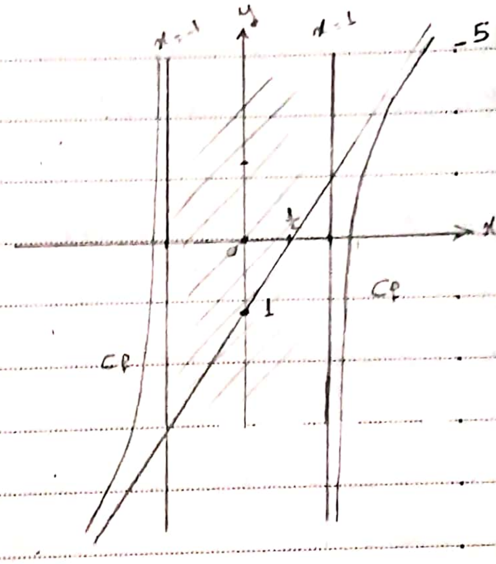
$f'(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1} > 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \notin I$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$				$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	∞		$-\infty$	$\nearrow$	∞

f متزايد تماماً.

Subject : / /

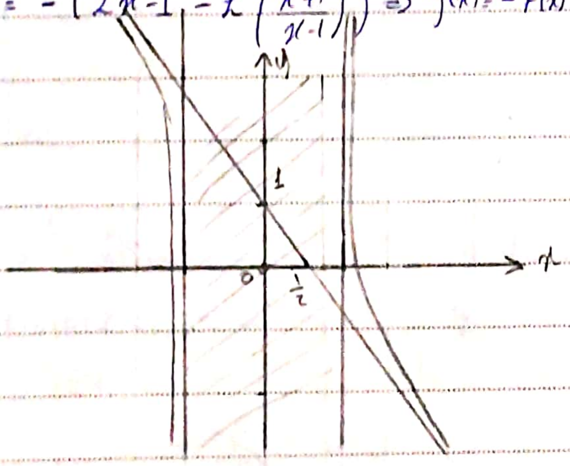
5-



6- استنتج C' الخط البياني للتابع $g(x) = -2x+1-\ln\left(\frac{x+1}{x+1}\right)$

$g(x) = -\left(2x-1+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$

$g(x) = -\left(2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) \Rightarrow g(x) = -f(x)$ ... ♡



4- اثبت أن $f(-x)+f(x)=-2$ ثم

استنتج أن $I(0,-1)$ مركز تناظر للخط

$f(-x) = -2x-1-\ln\left(\frac{\frac{1-x}{x-1}}{\frac{-1-x}{1-x}}\right) \overset{?}{=} -2-f(x)$

$L_2 = -2-2x+1+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$= -2x-1+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$L_1 = -2x-1-\ln\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = -2x-1+\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$

$\Leftarrow L_1 = L_2$ ومنه العلاقة محققة .... ♡

$\forall x\in I \Rightarrow 2x_0-x\in I \Rightarrow -x\in I$

الشرط محقق .... ♡ والشرط الثاني محقق أيضاً ♡

إذاً ⇐ $I(0,-1)$ مركز تناظر لـ C_f

مسألة (16):

$f(x) = (x-1)e^x$; R

1- تغيرات التابع f + رسم C

2- مساحة بين C ومحوري الإحداثيات.

3- اثبت بالتدريج أن: $f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$

4- استنتج رسم C' الخط البياني $g(x) = x\,e^{x+1}$

الحل ① f ⇐ معرف ومستمر على R

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty\times 0)$ عدم تعيين

$f(x) = xe^x - e^x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0-0 = 0$

$y=0$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$

Subject : / /

دراسة تغيرات f على R .

$f'(x) = e^x + e^x(x-1)$

$= e^x(1 + x - 1)$

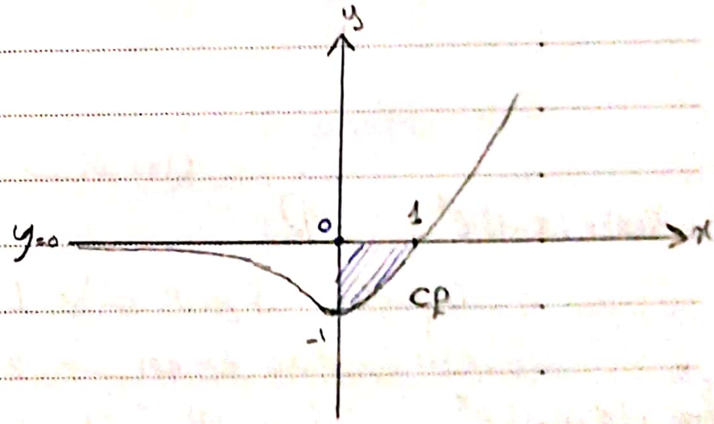
$f'(x) = xe^x \geqslant 0$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$f(0) = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'			0		
f	0	↘	-1	↗	∞

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى محلية ...



C يقطع $x'x$:

$f(x) = 0$ ، $e^x = 0$ مستحيلة

$x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

② نحسب تحت محور الفواصل $x'x$

$S = -\int_0^1 f(x)\,dx$

$S = -\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$ ... تجزئة

$u(x) = (x-1) \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \longrightarrow v(x) = e^x$

$S = -\left[e^x(x-1)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$S = -\left[e^x(x-1)\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1$

$= \left[e^x(1 - x + 1)\right]_0^1 = \left[e^x(2-x)\right]_0^1$

$S = (e \times 1) - (2) = e - 2$ وحدة مساحة

③ $f^{n}(x) = (x+n-1)e^x$

نفرض $E(n)$ الخاصية المراد إثباتها :

$E(n) : \left(f^{n}(x) = (x+n-1)e^x\right)$

نثبت صحة الخاصية من أجل $n=1$

$f'(x) = (xe^x) \Rightarrow xe^x = xe^x$

محققة .

نفرض $E(n)$ الخاصية صحيحة

نثبت صحة الخاصية من اجل $n+1$

$f^{n+1}(x) = (x+n+1-1)e^x$

$\Rightarrow f^{n+1}(x) = (x+n)e^x$.

$\ell_1 = \left(f^{n}(x)\right)' = \left((x+n-1)e^x\right)'$

$= \left[1 \times e^x + e^x(x+n-1)\right]$

$= e^x(1 + x + n - 1) = e^x(n+x) = \ell_2$

اذاً الخاصية $E(n+1)$ صحيحة , الخاصية $E(n)$

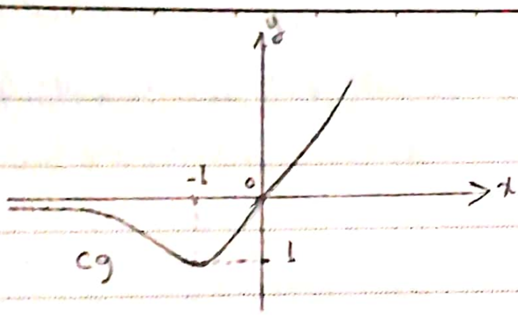
صحيحة ...

Subject :   /   /

نلاحظ أن (4) $g(x)=f(x+1)$

C_g ينتج عن C_f بانسحاب على محور الفواصل نحو

اليسار وحدة $(x,y)\mapsto(x-1,y)$



مسألة (17):

$g(x)=\frac{-1}{x^2}+1+\ln x$

$f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$

$I=]0,+\infty[$

1. اثبت أن g اشتقاقي على I

$x\mapsto\frac{-1}{x^2}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ لأنه اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x\mapsto\ln x$ اشتقاقي على $]0,\infty[$

ومجموع اشتقاقيين على المجال I فيكون g اشتقاقي على I

2. تغيرات g

← g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,\infty[$

$\lim_{x\to0^+}g(x)=-\infty$ $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ C_f

g اشتقاقي

$g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{2+x^3}{x}>0$

$g'(x)$ موجب تماماً فيكون $g(x)$ متزايد تماماً على I

لا ينعدم.

x	0		α		+∞
g'	‖		+		
g	‖ $-\infty$	↗	0	↗	∞

3. اثبت أن المعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد.

في المجال $]0,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

$0\in f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α في $\mathbb{R}$

4. نظم جدول تغيرات f وارسم C_f.

f معرف واشتقاقي ومستمر على I

$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

f اشتقاقي على I

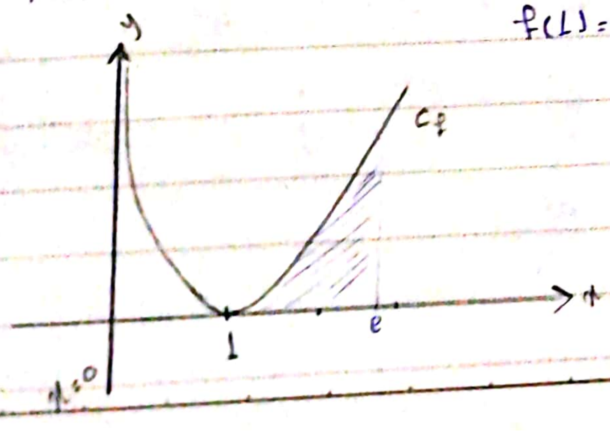
$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+1+\ln x=g(x)$

$\Rightarrow f'(x)\geq0\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\boxed{x=0}$

$g(0)=1$

x	0		1		+∞
f'	‖	−	0	+	
f	‖ ∞	↘	0	↗	∞

$f(1)=0$.



Subject :

ادرس اتجاه تغير f على I :

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2-2(x+1)(x+2)}{(x+1)^4}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x+1)[x+1-2x-4]}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{-x-3}{(x+1)^3} \lessgtr 0$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=-3} \rightarrow f(-3)=-\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ ∞	$\Vert$	∞ $\searrow$	0

$f(-3)=-\frac{1}{4}$ قيمة حدية صغرى محلية لـ f

عندما $x=3$

② $$f(x)-y_d=\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	$\Vert$	$+$	
الفرق		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
الوضع		C تحت d	d			C فوق d	

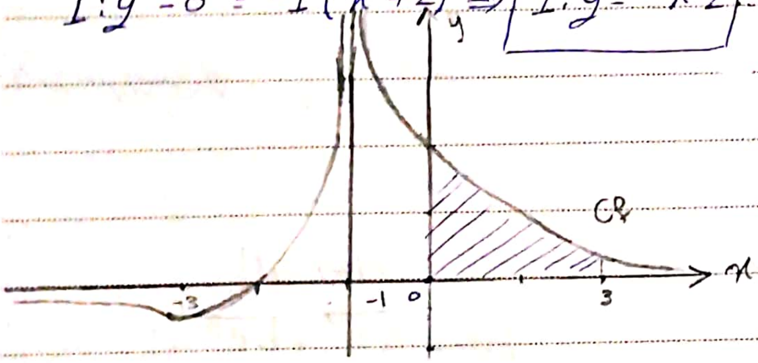
③ الحل

$x=-2 \rightarrow f(-2)=0$

$m=f'(-2)=-1$

$$T: y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$$

$$T: y-0=-1(x+2) \Rightarrow \boxed{T: y=-x-2}$$



← C يقطع $x'x$:

$f(x)=0$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

← C يقطع $y'y$:

$f(0)=2$

④ C يقع فوق $x'x$

$$S=\int_0^3 f(x)\,dx \Rightarrow S=\int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\frac{x+2}{(x+1)^2}=\frac{a}{(x+1)}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

$x+2=ax+a+b$

$x+2=ax+(a+b)$

$\boxed{a=1}$

$a+b=2 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$$S=\int_0^3 \frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$(x+1)^{-2}=\frac{(x+1)^{-1}}{-1}=\frac{-1}{(x+1)}$$

Subject : / /

f اشتقاقية ومعرفة ومستمرة على R

. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

y=1 مقارب أفقي لـ Cf بجوار -∞

. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

f اشتقاقيا:

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x} \geq 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} - e^{x} = 0$

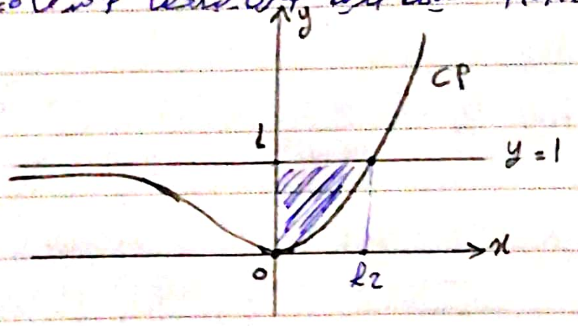
$e^{x}(e^{x}-1) = 0$ — $e^{x} \neq 0$ مستحيلة

$e^{x} = 1 \to \boxed{x=0}$

$f(0) = 0$

x	$-\infty$		0		∞
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

$f(0)=0$ قيمة صغرى محلية للتابع f عندما $x=0$



← احسب مساحة السطح بين C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $y=1$.

$y = f(x) \Rightarrow e^{2x} + 2e^{x} \cancel{+1} = \cancel{1}$

$e^{x}(e^{x}-2) = 0$ → $e^{x} \neq 0$ مستحيلة

$e^{x} = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

C يقع تحت $y=1$

$S = \left[\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right]_0^3$

$S = (\ln 4 - \frac{1}{4}) - (0 - 1)$

$S = \ln 4 - \frac{1}{4} + 1$

$S = \ln 4 + \frac{3}{4}$ وحدة مساحة

مسألة (دول):

$f(x) = ae^{2x} + be^{x} + 1$

← عين a, b ليكون للتابع قيمة حدية $f(0)=0$.

$\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow A(0,0) \in C$

$0 = a + b + 1 \Rightarrow \boxed{a+b=-1}$ (1)

$\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2ae^{x} + be^{x}$

$\Rightarrow f'(0) = 0 \to \boxed{2a+b=0}$ (2)

من (1) و (2) نجد أنّ بالطرح

$\boxed{a=1} \to \boxed{b=-2}$

$f(x) = e^{2x} - 2e^{x} + 1 \Rightarrow f(x) = (e^{x}-1)^2$

← ادرس تغيرات f ونظم جدول وارسم C.

ject : / /

$$S = \int_0^{\ln 2} y - f(x)\, dx$$

$$S = \int_0^{\ln 2} -2e^{2x} + 2e^{x}\, dx$$

$$= \left[\frac{-1}{2} e^{2x} + 2e^{x} \right]_0^{\ln 2}$$

$$= \left(\frac{-1}{2} e^{\ln 4} + 2e^{\ln 2} \right) - \left(\frac{-1}{2} + 2 \right)$$

$$= -2 + 4 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

وحدة مساحة ....

← استنتج رسم C_g الخط البياني لـ

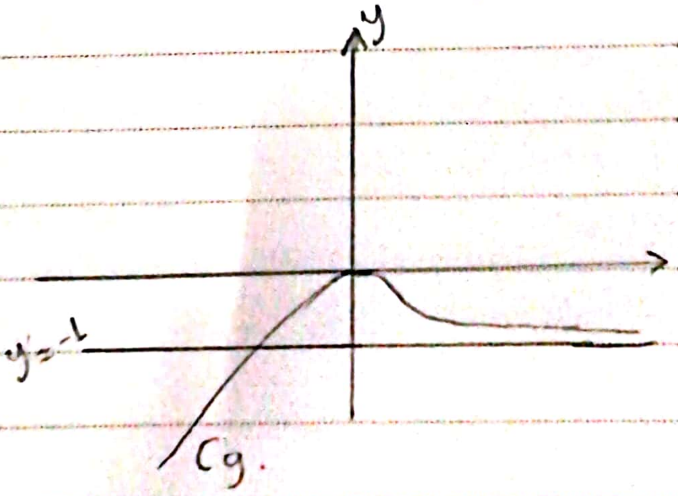
$$g(x) = e^{-2x}(-1 - e^{2x} + 2e^{x}).$$

$$= -2e^{-2x} - 1 + 2e^{-x}$$

$$= -(2e^{-2x} + 2e^{-x} + 1)$$

$$= -f(-x)$$

C_g نظير C_f بالنسبة لـ O المبدأ.



Subject :

ـ المسألة (02)

$g(x) = e^{x} + 2 - x$

← ادرس اطراد التابع g ثم استنتج مجموعة حلول $g(x) > 0$ واشتقاقي على R

$g'(x) = e^{x} - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow e^{x} - 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$g(0) = 3$

x	$-\infty$		0		∞
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	3	$\nearrow$	

$g > 0 \Leftarrow g(x) \geq 3 > 0$

← $f(x) = x + \frac{x-1}{e^{x}}$; R

اثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^{x}} g(x)$

$f'(x) = 1 + \frac{e^{x} - [e^{x}(x-1)]}{e^{2x}} = 1 + \frac{e^{x}(1 - x + 1)}{e^{2x}}$

$f'(x) = 1 + \frac{2-x}{e^{x}}$

$f'(x) = \frac{e^{x} + 2 - x}{e^{x}} = f'(x) = \frac{1}{e}(e^{x} + 2 - x)$

$f'(x) = \frac{1}{e^{x}} g^{x}$ ....♡

2ـ تغيرات + اثبت ان للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا في $]0, \frac{1}{2}[$

f معرف واشتقاقي ومستمر على R

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ حالة عدم تعين ؟

Subject : / /

$$f(x) = x + \frac{e^x\left[\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right]}{e^x}.$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

f قابل للاشتقاق على R.

$$f'(x) = \frac{1}{e^x}\, g(x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x}(e^x + 2 - x).$$

f متزايد تماماً.

x	$-\infty$	α	∞
f'	+	+	+
f	$-\infty$ ↗	0	↗ ∞

في المجال $]-\infty, \infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

$0 \in f(R) = R$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في R

$f(0) = -1 < 0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} > 0$

$\Big\}\ f(0) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$

أي α يقع ضمن المجال $]0, \frac{1}{2}[$

4- اثبت أن المستقيم Δ الذي معادلة $\Delta: y = x$ مقارب مائل.

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x - 1}{e^x}$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - y_\Delta) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ حالة عدم تعيين}$$

$$= \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

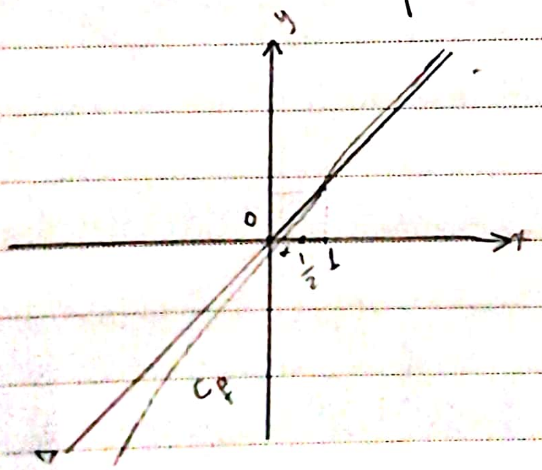
$\Leftarrow$ Δ مقارب مائل لـ C بجوار $+\infty$.

4 الوضع النسبي.

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x - 1}{e^x}$$

	$-\infty$	1	∞
$x - 1$	− −	0	+ +
e^x	+ +		+ +
الفرق	− −	0	+ +
الوضع	C تحت Δ		C فوق Δ

5- ارسم C و Δ.



6. احسب مساحة S بين المستقيمين

$x=0$ و $x=1$ والمحصور بين

C و المستقيم Δ.

Δ يقع فوق C :

$$S=\int_0^1 y_\Delta - f(x)\,dx$$

$$S=\int_0^1 x-\frac{x-1}{e^x}-x\,dx$$

$$S=\int_0^1 \frac{-x-1}{e^x}\,dx$$

$$S=\int_0^1 -xe^{-x}-e^{-x}\,dx$$

$$S=\int_0^1 e^{-x}(-1-x)\,dx$$ تجزئة

$u(x)=-1-x \longrightarrow u'(x)=-1$

$v'(x)=e^{-x} \longrightarrow v(x)=-e^{-x}$

$$S=\left[-(-1-x)e^{-x}\right]_0^1-\int e^{-x}\,dx$$

$$S=\left[(1+x)e^{-x}\right]_0^1+\left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$S=\left[e^{-x}(1+x+1)\right]_0^1$$

$$S=\left[e^{-x}(x+2)\right]_0^1$$

$$S=\left(\frac{1}{e}\times 3\right)-\left(1\times 2\right)$$

$$S=\frac{3}{e}-2 \Rightarrow S=\frac{3-2e}{e}$$ وحدة مساحة