التمرين الأول:

$$d' : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -t+2 \end{cases} \qquad d : \begin{cases} x = 3s+2 \\ y = -s-1 \\ z = s+1 \end{cases}$$

① أثبت أن d و d' متقاطعان ② جد إحداثيات نقطة التقاطع I.

الحل:

①

$\vec{u}(3,-1,1)$

$\vec{u'}(1,2,-1)$

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{2}$$

المركبات غير متناسبة فالمستقيمان d و d' إما متخالفان أو متقاطعان

نضع

$L_1 \ldots\; t+1 = 3s+2$

$L_2 \ldots\; 2t-3 = -s-1$

$L_3 \ldots\; -t+2 = s+1$

من L_1 : $t = 3s+1$

نعوض بـ L_2 :

$2(3s+1)-3 = -s-1$

$6s+2-3 = -s-1$

$7s = 0$

$s = 0$

نعوض بـ L_1 :

$t+1 = 3(0)+2$

$t = 1$

نعوض الآن في L_3 :

$-1+2 = 0+1$

$1 = 1$ محققة

إذن جملة المعادلات $\{L_1, L_2, L_3\}$ لها حل وحيد فالمستقيمان متقاطعان ولإيجاد I :

نعوض $t=1$ أو $s=0$

$I(2,-1,1)$

التمرين الثاني:

$P: x - y + z = 0$

$Q: 3x + z - 1 = 0$

① اكتب التمثيلات الوسيطية لفصلهما المشترك (Δ).

② احسب بعد النقطة $A(2,2,-1)$ عن (Δ).

---

① $x - y = -z \quad \dots\dots \; L_1$

$3x = -z + 1 \quad \dots\dots \; L_2$

من L_2: $\boxed{x = -\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}}$

$-3L_1 + L_2: \; 3y = 2z + 1$

$\boxed{y = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}}$

نفرض $3t = z$ حيث $t \in \mathbb{R}$ عندئذ:

$$(\Delta)\begin{cases} x = -t + \frac{1}{3} \\ y = 2t + \frac{1}{3} \\ z = 3t \end{cases}$$

②: نكتب معادلة المستوي R المار من A والعمودي على (Δ) أي:

$\vec{n}_R = \vec{u}_D(-1, 2, 3)$

$R: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$-(x-2) + 2(y-2) + 3(z+1) = 0$

$-x + 2y + 3z + 1 = 0$

نعوض (Δ) بـ (R):

$-(-t+\frac{1}{3}) + 2(2t+\frac{1}{3}) + 3(3t) + 1 = 0$

$t - \frac{1}{3} + 4t + \frac{2}{3} + 9t + 1 = 0$

$14t + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow 14t = -\frac{4}{3} \Rightarrow t = \frac{-4}{3\times 14} = \frac{-2}{21}$

تتمة التمرين الثاني : نعوض بـ (Δ)

$$x = -\left(\frac{-2}{21}\right) + \frac{1}{3} = \frac{2}{21} + \frac{7}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$y = 2\left(\frac{-2}{21}\right) + \frac{1}{3} = \frac{-4}{21} + \frac{7}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$z = 3\left(\frac{-2}{21}\right) = \frac{-2}{7}$$

$$A'\left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{-2}{7}\right)$$

التمرين الثالث : حل في $\mathbb{C}$:

يوجد طرق كثيرة

$$2Z_1 - Z_2 = -3 \quad \ldots (1)$$

$$2\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = -3 + 2i\sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

نأخذ المرافق لـ (2) :

$$2Z_1 + Z_2 = 3 - 2i\sqrt{3}$$

$$\boxed{Z_2 = 3 - 2i\sqrt{3} - 2Z_1}$$

نعوض بـ (1) :

$$2Z_1 - \left(3 - 2i\sqrt{3} - 2Z_1\right) = -3$$

$$2Z_1 - 3 + 2i\sqrt{3} + 2Z_1 = -3$$

$$4Z_1 = -2i\sqrt{3}$$

$$\boxed{Z_1 = -\frac{1}{2}i\sqrt{3}}$$

نعوض بـ (1) :

$$2\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) - Z_2 = -3$$

$$-i\sqrt{3} - Z_2 = -3$$

$$\boxed{Z_2 = 3 - i\sqrt{3}}$$

التمرين الرابع : حل في $\mathbb{C}$: $Z^2 = 5-12i$

الحل : Z هو الجذر التربيعي لـ $5-12i$:

$a=5$
$b=-12$

بفرض

$Z = x + iy$

$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+144} = 13 \quad \dots \quad L_1$

$x^2-y^2 = a = 5 \quad \dots \quad L_2$

$2xy = b = -12 \quad \dots \quad L_3$

$L_1+L_2 : \ 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x \in \{3,-3\}$

$L_1-L_2 : \ 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y \in \{2,-2\}$

من L_3 : $xy<0$ ومنه x و y من إشارتين متعاكستين

$\boxed{Z_1 = 3-2i}$

$\boxed{Z_2 = -3+2i}$

التمرين الخامس :

$A(1,2,4)$ $B(2,-1,3)$

$C(-2,1,1)$

① اثبت أن A و B و C لا تقع على استقامة واحدة .

② اثبت أن معادلة المستوي (ABC) هي : $4x+3y-5z+10=0$

③ أكتب معادلة الكرة التي مركزها O وتمس المستوي (ABC) .

④ أكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة [AB] .

⑤ جد إحداثيات O' المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC)

---

① $\vec{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A) \Rightarrow \vec{AB}(1,-3,-1)$

$\vec{AC}(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A) \Rightarrow \vec{AC}(-3,-1,-3)$

$\frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{-1}$ المركبات غير متناسبة فالشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطياً فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة .

(تحدد مستوي (ABC))

② نعوض إحداثيات A في معادلة (ABC)

$4(1)+3(2)-5(4)+10=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

وكذلك نعوض إحداثيات B :

$4(2)+3(-1)-5(3)+10=0 \Rightarrow 0=0$ محققة

وكذلك نعوض إحداثيات C :

$4(-2)+3(1)-5(1)+10=0 \Rightarrow 0=0$

③ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=5$

$r=dist(o,(ABC))$

$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\frac{|4\times 0+3\times 0-5\times 0+10|}{\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}}$

$=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$A(1,2,4) \quad B(2,-1,3)$ 4

ناظم المستوي: $\vec{n} = \vec{AB}(1, -3, -1)$ (a, b, c)

نفرض M_0 منتصف $[AB]$: إذا M_0 نقطة من المستوي المحوري لـ $[AB]$

$$M_0\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$M_0\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{4+3}{2}\right) \Rightarrow M_0\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$a(x-x_{M_0}) + b(y-y_{M_0}) + c(z-z_{M_0}) = 0$$

$$1\left(x-\frac{3}{2}\right) - 3\left(y-\frac{1}{2}\right) - 1\left(z-\frac{7}{2}\right) = 0$$

$$x - \frac{3}{2} - 3y + \frac{3}{2} - z + \frac{7}{2} = 0$$

$$x - 3y - z + \frac{7}{2} = 0$$

5 نكتب التمثيلات الوسيطية للمستقيم d المار من $O(0,0,0)$ والعمودي على المستوي (ABC) أي:

$$\vec{u}_{(d)} = \vec{n}_{(ABC)}(4, 3, -5)$$

$$d \begin{cases} x = x_0 + at = 0 + 4t \\ y = y_0 + bt = 0 + 3t \\ z = z_0 + ct = 0 - 5t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

نعوض في معادلة (ABC) :

$$4(4t) + 3(3t) - 5(-5t) + 10 = 0$$

$$50t = -10 \Rightarrow t = -\frac{1}{5}$$

نعوض بـ d

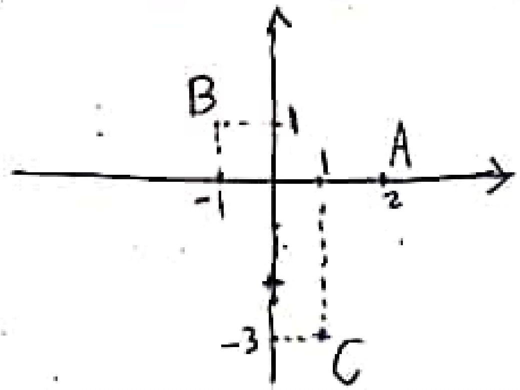
$$\left.\begin{aligned} x &= 4\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{-4}{5} \\ y &= 3\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{-3}{5} \\ z &= -5\left(\frac{-1}{5}\right) = 1 \end{aligned}\right\} O'\left(-\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}, 1\right)$$

التمرين السادس:

لتكن النقاط A، B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$a=2 \quad b=-1+i \quad c=1-3i$

① ضع النقاط A، B و C في $(O,\vec{u},\vec{v})$



② أحسب الأعداد العقدية التي تمثل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$

$Z_{\overrightarrow{AB}} = b-a = -3+i$

$Z_{\overrightarrow{AC}} = c-a = -1-3i$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = c-b = 2-4i$

③ اثبت أن A، B و C ليست واقعة على مستوي واحد.

إحدى الطرق: $\overrightarrow{AB}(-3,1) \quad \overrightarrow{AC}(-1,-3)$

$\frac{-3}{-1} \neq \frac{+1}{-3}$

المركبات غير متناسبة والشعاعان $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطياً والنقاط A، B و C ليست على استقامة واحدة.

④ جد قيمة $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-3+i}{-1-3i} \times \frac{-1+3i}{-1+3i}$$

$$= \frac{3-9i-i-3}{1+9}$$

$$= \frac{-10i}{10} = -i$$

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg(-i)$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$$

فالمثلث ABC قائم في A.

كذلك نأخذ طويلة الطرفين

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = |-i|$$

$$\frac{|b-a|}{|c-a|} = 1$$

$$\frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC$$

فالمثلث متساوي الساقين.

$Z_M - Z_A = k(Z_C - Z_A)$ $Z_M - 2 = 3(1-3i-2)$ $Z_M - 2 = 3-9i-6$ $Z_M = -1-9i$	⑤ جد العدد العقدي الممثل للنقطة M صورة النقطة C وفق التحاكي الذي مركزه A ونسبته $k=3$
$b = -1 + i$ $r = \lvert b\rvert = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$ $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$ $b = r e^{i\theta} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$	⑥ اكتب العدد العقدي b بالشكل الأسي