سلسلة البكلوريا

((التحليل الرياضي))

تمارين

النهايات

مع الحل

تمارين إضافية وتدريبية لدرس النهايات

الثالث الثانوي العلمي

إعداد : أيهم الشاعر

Facebook: Aiyham Alshaer

aiyham1989@Gmail.com

1	$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$	2	$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2}$	3	$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$
4	$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$	5	$\lim_{x\to -2}\frac{\lvert x^3-4x\rvert}{x+2}$	6	$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$
7	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}$	8	$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$	9	$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}$
10	$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$	11	$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{x+\frac{\pi}{4}}$	12	$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$
13	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}$	14	$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$	15	$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2}$
16	$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-4x+1}{x^3-1}$	17	$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{x^2-1}$	18	$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}$
19	$\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\frac{x^2+3x}{x^2-x-6}$	20	$\lim_{x\to -\infty}x^3-x+1$	21	$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+1}-2x$
22	$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$	23	$\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x}{\sqrt{1-x}}$	24	$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}$
25	$\lim_{x\to +\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$	26	$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1-\sin x}$	27	$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$
28	$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$	29	$\lim_{x\to -\infty}-3x^2-2x+1$	30	$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$
31	$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$	32	$\lim_{x\to 0}\frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$	33	$\lim_{x\to -\infty}\frac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}$
34	$\lim_{x\to +\infty}\sin x+x$	35	$\lim_{x\to -\infty}1+\frac{\cos x}{x^2}$	36	$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{2+\sin x}$
37	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan x}$	38	$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}$	39	$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$
40	$\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$	41	$\lim_{x\to +\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$	42	$\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+3}$
43	$\lim_{x\to +\infty}\frac{xe^x}{x+1}$	44	$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-1}{x^2}$	45	$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{5x}$
46	$\lim_{x\to +\infty}(x-\ln 2x)$	47	$\lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{\ln x+x}$	48	$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan x}$

الحـــــل

1

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\frac{3-3}{9-6-3}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}$$

2

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2}=\frac{12-12}{2-2}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}3(x+2)=12$$

3

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=\frac{2-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\times\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{x-2-1}\times\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3}\times\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{1}{2}$$

4

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$$

5

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{|x^3-4x|}{x+2} = \frac{|-8+8|}{-2+2} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to -2} \frac{|x^3-4x|}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{|x(x-2)(x+2)|}{x+2} = \lim_{x\to -2} |x(x-2)| = |-2(-4)| = 8$$

6

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$$

7

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$$

8

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos 0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(1-\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{4}{x}\times\frac{x^2}{4}}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0\times 1 = 0$$

9

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = -\lim_{x\to 0} \tan \frac{x}{2} = \tan 0 = 0$$

10

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{\tan x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \quad : \quad =\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

11

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{x+\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x+\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x+\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(1)=\sqrt{2}$$

12

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=-2\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=-2(1)=-2$$

13

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{5x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\ \cos x}{\cos 3x\ \sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{4\cos^3 x-3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\cos^2 x-3}=\frac{1}{4-3}=1$$

14

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin(x-\pi)}{x-\pi}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=-1$$

15

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2}=\frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{2}=\frac{1+0-0}{2}=\frac{1}{2}$$

16

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x+1}{x^3-1}=\frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1-0+0}{1-0}=\frac{1}{1}=1$$

17

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{\infty}=0$$

18

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}}=1$$

19

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\frac{x^2+3x}{x^2-x-6}=\frac{4-6}{4+2-6}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

20

$$\lim_{x\to-\infty}x^3-x+1=-\infty+\infty$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to-\infty}x^3-x+1=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty(1-0+0)=-\infty$$

21

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-2x=\infty-\infty$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-2x\times\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-4x^2}{\sqrt{x^2+1}+2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-3\right)}{x^2\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}-3\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\frac{2}{x}\right)}=\frac{0-3}{\sqrt{0+0}+0}=\frac{-3}{0}=-\infty$$

22

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

23

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{1-x}}=\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}=\frac{-2}{0}=-\infty$$

24

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}=\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\times\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x^2-1-x^2+2}\times\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-0}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{2}{2}=1$$

25

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\infty\times 0$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

نفرض $t=\frac{1}{x}$ وبالتالي: $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\right)^2(1-\cos t)=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{4\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

26

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1-\sin x}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

27

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}$$

28

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{4}$$

29

$\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2-2x+1=-\infty+\infty$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^2-2x+1=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(-3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\infty(-3-0+0)=-\infty$$

30

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}\times\frac{\sin(x-1)}{x-1}=0\times1=1$$

31

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-5x+6)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x^2-5x+6)=20$$

32

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}=\frac{\pi}{-1}=-\pi$$

33

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}=\frac{5}{\infty-\infty}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}\times\frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{-x+\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5(-x+\sqrt{x^2+1})}{x^2-x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5(-x+\sqrt{x^2+1})}{-4}=-\frac{5}{4}(\infty)=-\infty$$

34

$\lim_{x\to+\infty}\sin x+x$ حسب مبرهنة الإحاطة

$$-1\le\sin x\le1$$

$$-1+x\le\sin x+x\le1+x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(-1+x)\le\lim_{x\to+\infty}(\sin x+x)\le\lim_{x\to+\infty}(1+x)$$

$$+\infty\le\lim_{x\to+\infty}(\sin x+x)\le+\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sin x+x=+\infty$$

35

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{\cos x}{x^2}$ حسب مبرهنة الإحاطة

$$-1\le\cos x\le 1$$
$$-\frac{1}{x^2}\le\frac{\cos x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$$
$$1-\frac{1}{x^2}\le 1+\frac{\cos x}{x^2}\le 1+\frac{1}{x^2}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\le\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x^2}\right)\le\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$1\le\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x^2}\right)\le 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{\cos x}{x^2}=1$$

36

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2+\sin x}$ حسب مبرهنة الإحاطة

$$-1\le\sin x\le 1$$
$$-1+2\le\sin x+2\le 1+2$$
$$\frac{1}{x}\le\frac{\sin x+2}{x}\le\frac{3}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x+2}{x}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)$$
$$0\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x+2}{x}\right)\le 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x+2}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2+\sin x}{x}}=\frac{1}{0}=+\infty$$

37

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}\times\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}}\times\cos x$$

$$=\frac{2(1)}{(1)}\times 1=2$$

38

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}$$

بوضع $x=\frac{\pi}{4}+t$

$$x\to\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad t\to 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{1+\cos 4\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos t+\cos\frac{\pi}{4}\sin t\right)^2}{1+\cos(\pi+4t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)^2}{1-\cos 4t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-2\times\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)^2}{1-\cos 4t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-(\cos^2 t+\sin^2 t+2\sin t\cos t)}{1-\cos 4t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-(1+2\sin t\cos t)}{1-\cos 4t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin t\cos t}{1-\cos 4t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin t\cos t}{1-(1-2\sin^2 2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin t\cos t}{2\sin^2 2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t\cos t}{(2\sin t\cos t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t\cos t}{4\sin^2 t\cos^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{4\sin t\cos t}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}=\lim_{t\xrightarrow{>}0}\frac{-1}{4\sin t\cos t}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}=\lim_{t\xrightarrow{<}0}\frac{-1}{4\sin t\cos t}=+\infty$$

أي أن ليس للدالة نهاية عند $\frac{\pi}{2}$

39

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$$

بوضع $x=\frac{\pi}{2}+t$

$$x\to\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad t\to 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{1-\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}}=\frac{1}{-1}=-1$$

40

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$

حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}4\times\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=4\times 0=0$$

41

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\infty\times 0$$

حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

42

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+3}=\frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(2-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

43

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\times e^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\times e^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\times e^x=\frac{1}{1+0}\times+\infty=+\infty$$

44

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-1}{x^2}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}\times\frac{e^x-1}{x}=+\infty\times1=+\infty$$

45

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{5x}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\frac{5}{3}\times3x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\times\frac{e^{3x}-1}{3x}=\frac{3}{5}\times1=\frac{3}{5}$$

46

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln 2x)=\infty-\infty$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln 2x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-2\frac{\ln 2x}{2x}\right)=+\infty(1-0)=+\infty$$

47

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\ln x+x}=\frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\ln x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\frac{\ln x}{x}+1}=\frac{-1}{0+1}=-1$$

48

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan x}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\times\cos x$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}\times\lim_{x\to0}\cos x=1\times1=1$$

انتهى حل تمارين النهايات

بالتوفيق للجميع