الفصل الأول
نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع
Estimation Theory – Estimating a Population Parameters

مقدمة:

لاشك أن الهدف من دراسة العينات هو الوصول إلى بعض الحقائق عن المجتمع الذى سحبت منه العينة، والتقديرات التى يمكن استخلاصها من بيانات العينة كثيرة من أهمها الوسط الحسابى ($\overline{س}$) ونسبة حدث معين ($\hat{ل}$) ويتم استخدامهما فى تقدير معالم المجتمع المقابلة أى الوسط الحسابى للمجتمع (μ) ونسبة حدث معين فى المجتمع (ل).

ولاشك أن هناك احتمال لاختلاف القيم المحسوبة من العينة عن القيم الحقيقية للمجتمع، ويتوقف مقدار هذا الاختلاف على حجم العينة. والارتباط بين مقدار الاختلاف وحجم العينة ارتباطاً عكسياً.

ويتم تقدير معالم المجتمع إما بنقطة أو بفترة ثقة.

التقدير بنقطة Point Estimation

ويعنى أن أى تقدير يتم حسابه من خلال العينة يعتبر ممثلاً للقيمة الحقيقية المناظرة له فى المجتمع، بمعنى أن متوسط العينة ($\overline{س}$) يعتبر تقديراً لمتوسط المجتمع (μ)، وكذلك تباين العينة ($ع^{٢}$) يعتبر تقديراً لتباين المجتمع ($\delta^{٢}$) وبالمثل فإن نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$) تعتبر تقديراً لنسبة الحدث فى المجتمع (ل).

التقدير بفترة ثقة Confidence Interval Estimation

لاشك أن اعتبار أن متوسط العينة ($\overline{س}$) تقدير مناسب لمتوسط المجتمع (μ) أو ما أشرنا إليه بالتقدير بنقطة، يطرح تساؤلاً هاماً فماذا لو سحبنا عينة أخرى بنفس حجم العينة الأولى، وكان لها وسطاً حسابياً مختلفاً عن الوسط الحسابى للعينة الأولى، فأى المتوسطين يعتبر تقديراً مناسباً لمتوسط المجتمع، وبالطبع سيظل التساؤل مطروحاً لو سحبنا العديد من العينات المتساوية وحسبنا من خلالها الوسط الحسابى وكان لدينا المتوسطات: $\overline{س}_{١}$، $\overline{س}_{٢}$، $\overline{س}_{٣}$،...، $\overline{س}_{ن}$ فأى هذه المتوسطات يعتبر تقديراً مناسباً لمتوسط المجتمع (μ).

والإجابة على هذا التساؤل تكمن فى إيجاد حدود أو مدى أو فترة من القيم يمكن أن تقع بداخلها القيمة الحقيقية للمجتمع (μ) فبدلاً من أن نقول أن متوسط المجتمع يساوى قيمة معينة (وفقاً لأسلوب التقدير بنقطة) فإنه من الأفضل أن نقول أن متوسط المجتمع يقع بين قيمتين (حد أدنى وحد أعلى).

والوصول إلى قيمة هذين الحدين يكون من خلال نظرية النهاية المركزية.

أولاً: تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة ($\overline{س}$):

١- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (δ):

سبق أن أشرنا إلى أنه من خلال نظرية النهاية المركزية فإن القيمة المعيارية (ى) تحسب من خلال العلاقة:

$$ى = \frac{\overline{س} - \mu}{خ(\overline{س})} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}}$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعى المعيارى نجد أن المساحة المحصورة (الاحتمال) بين ى $\leq$ -١.٩٦، ى $\geq$ ١.٩٦ تساوى ٩٥% من المساحة الكلية أسفل المنحنى الطبيعى أى أن ح (-١.٩٦ $\leq$ ى $\leq$ ١.٩٦) = ٠.٩٥

أى أن $$\text{ح}\left(-\text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \le \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}} \le \text{ى}_{\frac{\propto}{2}}\right) = \text{١} - \propto$$

$$\text{ح}\left(-\text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \le \bar{\text{س}} - \mu \le \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{١} - \propto$$

$$\text{ح}\left(-\bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \le -\mu \le -\bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{١} - \propto$$

$$\text{ح}\left[-\left(\bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) \le -\mu \le -\left(\bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right)\right] = \text{١} - \propto$$

$$\text{ح}\left(\bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \ge \mu \ge \bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{١} - \propto$$

$$\boxed{\text{ح}\left(\bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}} \le \mu \le \bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = \text{١} - \propto}$$

وهذه العلاقة عبارة عن تقدير لمتوسط المجتمع (μ) بفترة ثقة أو درجة ثقة $\text{١} - \propto$

ويكون الحد الأدنى لفترة الثقة لمتوسط المجتمع $\bar{\text{س}} - \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}$

والحد الأعلى لفترة الثقة لمتوسط المجتمع $\bar{\text{س}} + \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}$

ويمكن أن نضع تقدير الوسط الحسابى للمجتمع فى الصورة التالية:

$$\boxed{\mu = \bar{\text{س}} \pm \text{ى}_{\frac{\propto}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}}$$

وهذه العلاقة تكون صحيحة فى الحالتين:

- أن يكون المتغير يتبع توزيعاً طبيعياً مهما كان حجم العينة.

- أن يكون المتغير يتبع توزيعاً آخر بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً ($ن \geq ٣٠$).

٢- تقدير متوسط المجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع):

إذا كان انحراف المجتمع (δ) مجهولاً يمكن استخدام الانحراف المعيارى للعينة (ع) لحساب الخطأ العشوائى لمتوسط العينة حيث:

$$ع = \sqrt{\frac{١}{ن - ١}\left(مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}\right)}$$

وهنا لابد أن نفرق بين حالتين:

١- إذا كان حجم العينة كبيراً ($ن \geq ٣٠$)

فإن التوزيع الاحتمالى لمتوسط العينة ($\overline{س}$) يعتبر توزيع طبيعى ومن ثم نستخدم القيمة المعيارية (ى) فى تقدير حدى الثقة لمتوسط المجتمع.

$$\boxed{\mu = \overline{س} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

٢- إذا كان حجم العينة صغيراً ($ن < ٣٠$):

فى هذه الحالة فإن التوزيع الاحتمالى لمتوسط العينة ($\overline{س}$) سوف يتبع توزيع (ت)، ومن ثم نستخدم القيمة المعيارية الجدولية (ت) بدلاً من القيمة (ى) لتقدير حدى الثقة لمتوسط المجتمع:

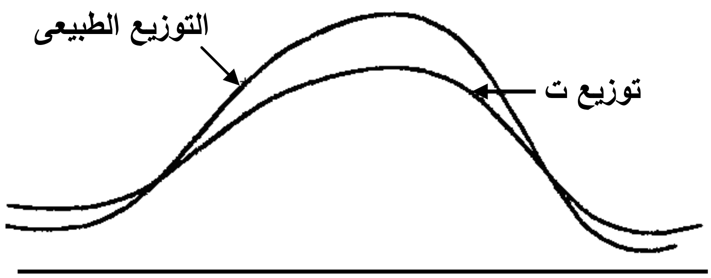
$$\boxed{\mu = \overline{س} \pm ت_{(ن - ١،\ \frac{\propto}{٢})} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

$ت_{(ن - ١،\ \frac{\propto}{٢})}$ هى قيمة ت الجدولية بدرجات حرية = ن-١ ونصف مستوى المعنوية.

وتجدر الإشارة إلى أن كل العلاقات السابقة لتقدير متوسط المجتمع خاصة بمجتمعات غير محدودة أو أن السحب مع الإحلال، وفى حالة المجتمعات المحدودة أو أن السحب بدون إحلال فإنه يتم ضرب الخطأ العشوائى (المقام) × معامل التصحيح $\sqrt{\frac{\text{ن} - \text{ن}}{\text{ن} - ١}}$ بشرط أن تكون $\frac{\text{ن}}{\text{ن}} \le ٠.٠٠٥$ وبالطبع فإنه من الضرورى أن نتعرف على توزيع (ت) بصورة موجزة.

توزيع (ت) Student – t distribution

وهو توزيع احتمالى لمتغير عشوائى متصل يشبه التوزيع الطبيعى حيث أن توزيع (ت) متماثل حول محوره الرأسى إلا أنه أكثر تسطحاً أى تفرطحاً ومن ثم تقع قمته أسفل قمة التوزيع الطبيعى، كما يتضح من الشكل التالى:



ويعتمد شكل توزيع (ت) على حجم العينة (ن) فكلما زاد حجم العينة (ن تقترب من ٣٠) كلما خفت حدة تفرطح المنحنى، وأخذ فى التحدب حتى يقترب من شكل المنحنى الطبيعى، وقد ثبت أن التوزيع الاحتمالى لتوزيع الأوساط الحسابية للعينات الصغيرة، فى حالة عدم معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع، له توزيع (ت) بشرط أن تكون المشاهدات الأصلية فى المجتمع لها توزيع طبيعى.

فإذا كان حجم العينة = ٢٥ فإن درجات الحرية = ٢٤

فإذا استخدمنا مستوى معنوية ∝ = ٥% مثلاً فإننا نحصل على قيمة $\text{ت}_{(٢٤،\ ٠.٠٢٥)}$ من الجدول أمام درجات حرية ٢٤ وتحت مستوى معنوية ٠.٠٢٥ (نصف مستوى المعنوية $\frac{\propto}{٢}$ أو تحت درجة ثقة ٠.٩٧٥ $\left(٩٥\% + .\frac{\propto}{٢}\right)$

$ت_{(٢٤، ٠.٠٢٥)} = ٢.٠٦٤$

ويلاحظ أن قيمة (ت) الجدولية تتناقص بزيادة درجات الحرية إلى أن تصل درجات الحرية إلى ∞ نجد أن قيمة (ت) الجدولية تساوى قيمة (ى) الجدولية. والدالة الاحتمالية لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية:

$$ح(س) = أ \left(١ + \frac{س^{٢}}{ن}\right)^{-\frac{ن+١}{٢}} \qquad -\infty \leq س \leq \infty$$

مثال (١): أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ طالب من الكلية فوجد أن متوسط عمر الطالب ٢٠ سنة، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر الطالب فى الكلية ٤ سنوات. المطلوب تقدير متوسط عمر الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ٥%.

الحـل

$\overline{س} = ٢٠ \qquad ن = ١٠٠ \qquad \delta = ٤ \qquad \propto = ٠.٠٥ \qquad ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ١.٩٦$

$$\text{متوسط عمر الطالب فى الكلية } (\mu) = \overline{س} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$$

$$= ٢٠ \pm ١.٩٦ \times \frac{٤}{\sqrt{١٠٠}}$$

$$= ٢٠ \pm ٠.٧٨٤$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط عمر الطالب فى الكلية= ٢٠ – ٠.٧٨٤ = ١٩.٢١٦سنة

والحد الأعلى لمتوسط عمر الطالب فى الكلية = ٢٠ + ٠.٧٨٤ = ٢٠.٧٨٤سنة

أى أن متوسط عمر الطالب فى الكلية يتراوح بين ١٩ سنة و٣شهور، ٢٠سنة و٩ شهور (تقريباً) بدرجة ثقة ٩٥%.

ومعنى ذلك أننا لو سحبنا ١٠٠ عينة وكل عينة مكونة من ١٠٠ طالب وحسبنا متوسط العمر فى كل عينة، وتم تقدير ١٠٠ فترة ثقة باستخدام متوسطات العينات المائة لوجدنا أن متوسط عمر الطالب فى الكلية (المجتمع) سيقع فى ٩٥ فترة ثقة من هذه الفترات المائة.

مثال (٢): سحبت عينة من ٢٠٠ طالب من طلبة إحدى الكليات العسكرية فوجد أن متوسط طول الطالب فى العينة ١٧٠سم بانحراف معيارى ١٥سم، المطلوب تقدير متوسط طول الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

$\overline{س} = ١٧٠$ ن = ٢٠٠   ع = ١٥ $\propto$ = ١% $ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢.٥٨$

متوسط طول الطالب فى الكلية $(\mu) = \overline{س} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

لاحظنا أننا استخدمنا التوزيع الطبيعى المعيارى (ى) لأن ن $\leq$ ٣٠

$= ١٧٠ \pm ٢.٥٨ \times \frac{١٥}{\sqrt{٢٠٠}}$

$= ١٧٠ \pm ٢.٧٤$

∴ الحد الأدنى لمتوسط طول الطالب فى الكلية = ١٧٠ – ٢.٧٤ = ١٦٧.٢٦سم

والحد الأعلى لمتوسط طول الطالب فى الكلية = ١٧٠ + ٢.٧٤ = ١٧٢.٧٤ سم

أى أن متوسط طول الطالب فى الكلية يتراوح بين ١٦٧.٢٦ سم، ١٧٣ سم بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): سحبت عينة عشوائية من ٢٥ شخص من مستخدمى مترو الأنفاق على خط معين، فوجد أن متوسط عدد أيام استخدامهم للمترو ٢٠ يوم شهرياً بانحراف معيارى ٧ أيام، المطلوب تقدير متوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً على هذا الخط بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

ن = ٢٥ $\bar{س}$ = ٢٠ ع = ٧ $\propto$ =٥% $ت_{(٢٤، ٠.٠٢٥)}$ =±٢.٠٦٤

انحراف المجتمع غير معلوم ∴ نستخدم توزيع (ت) حيث أن ن < ٣٠

متوسط عدد أيام الاستخدام (μ) = $\bar{س} \pm ت_{\left(ن - ١، \frac{\propto}{٢}\right)} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

$$= ٢٠ \pm ت_{(٢٤، ٠.٠٢٥)} \times \frac{٧}{\sqrt{٢٥}}$$

$$= ٢٠ \pm ٢.٠٦٤ \times \frac{٧}{\sqrt{٢٥}}$$

$$= ٢٠ \pm ٢.٨٩$$

الحد الأدنى لمتوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً= ٢٠ – ٢.٨٩ =١٧.١١يوم

والحد الأعلى لمتوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً =٢٠+٢.٨٩=٢٢.٨٩يوم

ومعنى ذلك أن متوسط عدد أيام استخدام المترو تتراوح بين ١٧ يوم، ٢٣ يوم شهرياً بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٤): مصنع لإنتاج اللمبات الكهربائية ينتج ١٠٠٠٠ لمبة فلوريسنت سنوياً تم سحب عينة منها حجمها ٥٠٠ لمبة وتم اختبار ساعات تشغيلها فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٥٠٠ ساعة بانحراف معيارى ٣٠٠ ساعة، ماذا تستنتج عن متوسط عمر اللمبة من إنتاج المصنع عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

ن=١٠٠٠٠ ن=٥٠٠ $\bar{س}$=١٥٠٠ ع = ٣٠٠ $\propto$=٠.٠١ $ى_{\frac{\propto}{٢}}$=±٢.٥٨

انحراف المجتمع غير معلوم، ن ≤ ٣٠، ∴ نستخدم توزيع ى

ونظراً لأن المجتمع محدود وحجم العينة = ٠.٠٥ من حجم المجتمع

$\left(\frac{٥٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠.٠٥\right)$ فإننا نستخدم معامل التصحيح للخطأ العشوائى.

$$\text{متوسط عمر اللمبة فى المصنع } (\mu) = \overline{س} \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\text{ن} - ن}{\text{ن} - ١}}$$

$$= ١٥٠٠ \pm ٢.٥٨ \times \frac{٣٠٠}{\sqrt{٥٠٠}} \times \sqrt{\frac{١٠٠٠٠ - ٥٠٠}{١٠٠٠٠ - ١}}$$

$$= ١٥٠٠ \pm ٢.٥٨ \times \frac{٣٠٠}{٢٢.٣٦} \times ٠.٩٧٥$$

$$= ١٥٠٠ \pm ٣٣.٧٥$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط عمر اللمبة فى المصنع

= ١٥٠٠ – ٣٣.٧٥ = ١٤٦٦.٢٥ ساعة

والحد الأعلى لمتوسط عمر اللمبة فى المصنع

= ١٥٠٠ + ٣٣.٧٥ = ١٥٣٣.٧٥ ساعة

أى أن متوسط عمر اللمبة فى المصنع يتراوح بين ١٤٦٦ ساعة، ١٥٣٤ساعة تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٥): تم اختيار عينة من رواد أحد المطاعم الشهيرة حجمها ٢٠ فرد فوجد أن متوسط الدخل الشهرى للفرد ٢٧٠٠ جنيه بانحراف معيارى ٥٠٠جنيه، ماذا تستنتج عن متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد هذا المطعم عند درجة ثقة ٩٥% علماً بأن عدد رواد المطعم فى ذلك اليوم بلغ ٢٥٠ فرد.

الحـل

ن = ٢٥٠   ن = ٢٠ $\overline{س}$=٢٧٠٠   ع = ٥٠٠ α = ٠.٠٥

انحراف المجتمع غير معلوم، ن < ٣٠ ∴ نستخدم توزيع ت

وحيث أن المجتمع محدود وحجم العينة ≤ ٠.٠٥ ∴ نستخدم معامل التصحيح للخطأ العشوائى.

متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد المطعم (μ)

$$= \bar{\text{س}} \pm \text{ت}_{(\text{ن}-١،\ \frac{\propto}{٢})} \times \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} \times \sqrt{\frac{\textbf{ن} - \text{ن}}{\textbf{ن} - ١}}$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢.٠٩ \times \frac{٥٠٠}{\sqrt{٢٠}} \times \sqrt{\frac{٢٥٠ - ٢٠}{٢٥٠ - ١}}$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢.٠٩ \times \frac{٥٠٠}{٤.٤٧٢} \times ٠.٩٦١$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢٢٤.٥٦$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط الدخل الشهرى

$= ٢٧٠٠ - ٢٢٤.٥٦ = ٢٤٧٥.٤٤$ جنيه

والحد الأعلى لمتوسط الدخل الشهرى

$= ٢٧٠٠ + ٢٢٤.٥٦ = ٢٩٢٤.٥٦$ جنيه

أى أن متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد المطعم يتراوح بين ٢٤٧٥، ٢٩٢٥ جنيه شهرياً بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٦): لدراسة متوسط عدد أفراد الأسرة فى إحدى المدن تم اختيار عينة من ١٠٠ أسرة فوجد أن متوسط عدد أفراد الأسرة ٥ أفراد بانحراف معيارى ٣ أفراد ماذا تستنتج عن متوسط عدد أفراد الأسرة فى هذه المدينة عند درجة ثقة ٩٩%.

الحل

$\text{ن} = ١٠٠ \qquad \bar{\text{س}} = ٥ \qquad \text{ع} = ٣ \qquad \propto = ٠.٠١ \qquad \text{ى}_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢.٥٨$

انحراف المجتمع غير معلوم، ن ≤ ٣٠، ∴ نستخدم توزيع ى

متوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة (μ) $= \bar{\text{س}} \pm \text{ى}_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}$

$$= ٥ \pm ٢.٥٨ \times \frac{٣}{\sqrt{١٠٠}}$$

$$= ٥ \pm ٠.٧٧٤$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة

= ٥ – ٠.٧٧٤ = ٤.٢٢٦ فرد

والحد الأعلى لمتوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة

= ٥ + ٠.٧٧٤ = ٥.٧٧٤ فرد

أى أن متوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة يتراوح بين ٤، ٦ أفراد تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%.

حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ):

إذا تصورنا أننا بصدد سحب عينة عشوائية بهدف حساب وسط حسابى $\overline{س}$ على ألا تختلف هذه القيمة ($\overline{س}$) عن القيمة الحقيقية للوسط الحسابى للمجتمع (μ) إلا بما لا يتعدى عدد معين من الدرجات وهو ما سبق أن أشرنا إليه بدرجة الدقة (د) وهذا يعنى أننا نود أن يؤدى حجم العينة الذى نختاره إلى عدم الاختلاف فى قيمة الوسط الحسابى للعينة ($\overline{س}$) عن الوسط الحسابى للمجتمع (μ) إلا بمقدار ±د، أى أن:

$$\mu = \overline{س} \pm د$$

وبمقارنة هذه العلاقة بعلاقة متوسط المجتمع (μ) خلال متوسط العينة ($\overline{س}$) أى الثقة لمتوسط المجتمع:

$$\mu = \overline{س} \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times خ(\overline{س})$$

فإن معنى ذلك أن:

$د = \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times خ(\overline{س})$ وقد سبق أن أشرنا إلى أنه :

١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:

$$\text{خ}(\overline{\text{س}}) = \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}$$

وهذا يعنى أن:

$$\text{د} = \pm \text{ى}_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}$$

$$\text{د}^{٢} = \text{ى}^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta^{٢}}{\text{ن}}$$

$$\boxed{\text{ن} = \frac{\text{ى}^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times \delta^{٢}}{\text{د}^{٢}}}$$

(ى) = ١.٩٦ عند درجة ثقة ٩٥%، ى = ٢.٥٨ عند درجة ثقة ٩٩%

($\delta^{٢}$) تباين المجتمع وإذا كان مجهولاً يمكن استخدام تباين العينة ($\text{ع}^{٢}$) بدلاً من $\delta^{٢}$ مع ملاحظة أن:

$$\boxed{\text{ع}^{٢} = \frac{١}{\text{ن} - ١}\left(\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}\right)}$$

(د) درجة الدقة فى التقديرات أو خطأ التقدير فى ($\overline{\text{س}}$) وهو خطأ يحدده الباحث مقدماً، وهو يختلف عن خطأ المعاينة خ($\overline{\text{س}}$) والذى يمثل الفرق بين متوسط عينة واحدة، ومتوسط المجتمع (مجهول غالباً) بينما درجة الدقة، كما سبق وأشرنا، فهى أقصى فرق مطلق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع من خلال عدد كبير جداً من العينات.

ن حجم العينة المقدر.

وإذا كنا نتوقع أن حجم العينة سيكون صغيراً (ن < ٣٠) فإنه يتم استخدام القيمة الجدولية (ت) بدلاً من القيمة (ى):

$$ن = \frac{ت^{2}_{(ن-1،\ \frac{\alpha}{2})} \times \delta^{2}}{د^{2}}$$

٢- إذا كان المجتمع محدوداً أو السحب بدون إحلال فإن:

$$خ(\overline{س}) = \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - 1}}$$

ومن ثم فإن:

$$د = \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - 1}}$$

$$د^{2} = \pm ى^{2}_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta^{2}}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - 1}$$

وبإجراء بعض العمليات الرياضية نصل إلى أن:

$$ن^{*} = \frac{ن}{1 + \frac{ن}{\mathbf{ن}}}$$

$$حيث\ ن = \frac{ى^{2}_{\frac{\alpha}{2}} \times \delta^{2}}{د^{2}}$$

مثال (١): أوجد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط الوزن لطلبة الكلية إذا كنا نرغب ألا يختلف هذا المتوسط عن المتوسط الحقيقى فى المجتمع بأكثر من ٣كجم وبدرجة ثقة ٩٥% إذا علمت أن الوزن متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى وتباينه ٥٠كجم.

الحـل

د = ٣ $\qquad$ ١ − α = ٩٥% $\qquad$ $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ = ±١.٩٦ $\qquad$ δ^2 = ٥٠

$$ن = \frac{ى^2_{\frac{\alpha}{2}} \times \delta^2}{د^2} = \frac{(١.٩٦)^2 \times (٥٠)^2}{(٣)^2} = ٢١ \text{ مفردة تقريباً}$$

ومعنى ذلك أنه إذا سحبنا عينة حجمها ٢١ مفردة فإننا نكون واثقين بدرجة ٩٥% أن متوسط وزن الطالب فى هذه العينة لن يختلف إلا بمقدار ±٣كجم عن متوسط الوزن الحقيقى فى المجتمع الذى سحبت منه العينة.

مثال (٢): مجتمع يتكون من ١٠٠٠٠ مفردة ما هو حجم العينة اللازم سحبه لتقدير الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير ($\overline{س}$) عن وحدتين وذلك بدرجة ثقة ٩٩%، علماً بأن الانحراف المعيارى فى عينة استطلاعية بلغ ١٠ وحدات.

الحـل

ن = ١٠٠٠٠ $\quad$ د = ٢ $\qquad$ ع = ١٠ $\qquad$ ١−α=٩٩% $\quad$ $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ = ±٢.٥٨

وحيث أن المجتمع محدود فإن:

$$ن^* = \frac{ن}{١ + \frac{ن}{N}}$$

$$ن = \frac{ى^2_{\frac{\alpha}{2}} \times \delta^2}{د^2} = \frac{(٢.٥٨)^2 \times (١٠)^2}{(٢)^2} = ١٦٦ \text{ مفردة تقريباً}$$

ثم نقوم بعملية التصحيح لحجم العينة حيث أن المجتمع محدود

$$ن^* = \frac{١٦٦}{١ + \frac{١٦٦}{١٠٠٠٠}} = ١٦٣ \text{ مفردة تقريباً}$$

∴ حجم العينة اللازم = ١٦٣ مفردة.

ثانياً: تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$):

كما توصلنا لحدى فترة الثقة لمتوسط المجتمع (μ) باستخدام متوسط العينة ($\overline{س}$) يمكن أن نصل إلى حدى الثقة لنسبة حدث فى المجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$) كما يلى :

نسبة المجتمع = نسبة العينة ± القيمة المعيارية عند درجة ثقة ($1 - \propto$)

× الخطأ المعيارى للتقدير

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times خ(\hat{ل})$$

١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:

$$خ(\hat{ل}) = \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(1 - \hat{ل})}{ن}}$$

ومن ثم يصبح حدى الثقة لتقدير نسبة حدث فى المجتمع:

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(1 - \hat{ل})}{ن}}$$

٢- إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال فإن:

$$خ(\hat{ل}) = \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(1 - \hat{ل})}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - 1}}$$

ومن ثم فإن حدى الثقة لتقدير نسبة حدث فى المجتمع:

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(1 - \hat{ل})}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - 1}}$$

مثال (١): فى دراسة لمعرفة نسبة الأسر التى لديها جهاز فيديو فى إحدى المدن تم اختيار عينة من ٥٠٠ أسرة فوجد منها ٣٠٠ أسرة لديها جهاز فيديو، قدر بدرجة ثقة ٩٥% نسبة الأسر التى لديها جهاز فيديو فى هذه المدينة.

الحـل

ن = ٥٠٠ $\quad \hat{\text{ل}} = \frac{٣٠٠}{٥٠٠} = ٠.٦ \quad ١-\alpha = ٩٥\% \quad \text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} = \pm ١.٩٦ \quad$ ل=؟

$$\text{ل} = \hat{\text{ل}} \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}\,(١-\hat{\text{ل}})}{\text{ن}}}$$

$$= ٠.٦ \pm ١.٩٦ \times \sqrt{\frac{٠.٦ \times ٠.٤}{٥٠٠}}$$

$$= ٠.٦ \pm ٠.٠٤$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠.٦ − ٠.٠٤ = ٠.٥٦

الحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠.٦ + ٠.٠٤ = ٠.٦٤

ومعنى ذلك أن نسبة الأسر لديها جهاز فيديو فى هذه المدينة تتراوح بين ٥٦%، ٦٤% بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٢): فى دراسة أعدها اتحاد الإذاعة والتليفزيون لمعرفة نسبة المشاهدة لأحد البرامج الجماهيرية الهامة تم سحب عينة من ١٠٠٠ أسرة من مدينة القاهرة تبين منها أن ٧٠٠ أسرة تتابع هذا البرنامج، المطلوب تقدير نسبة الأسر التى تتابع هذا البرنامج فى مدينة القاهرة بدرجة ثقة ٩٩%.

الحـل

ن = ١٠٠٠ $\quad \hat{\text{ل}} = \frac{٧٠٠}{١٠٠٠} = ٠.٧ \quad ١-\alpha = ٩٩\% \quad \text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} = \pm ٢.٥٨ \quad$ ل=؟

$$\text{ل} = \hat{\text{ل}} \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}\,(١-\hat{\text{ل}})}{\text{ن}}}$$

$$= ٠.٧ \pm ٢.٥٨ \times \sqrt{\frac{٠.٧ \times ٠.٣}{١٠٠٠}}$$

$$= ٠.٧ \pm ٠.٠٤$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠.٧ − ٠.٠٤ = ٠.٦٦

والحد الأعلى فى المجتمع = ٠.٧ + ٠.٠٤ = ٠.٧٤

أى أن نسبة المشاهدين لهذا البرنامج فى مدينة القاهرة تتراوح بين ٦٦%، ٧٤% بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): لمعرفة نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة البالغ عددها ١٠٠٠٠ طالب تم سحب عينة من هؤلاء الطلبة حجمها ٢٠٠ طالب وجد من بينهم ٥٠ طالب حاصلون على تقدير جيد جداً أو ممتاز، قدر بدرجة ثقة ٩٥% نسبة الطلاب الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء.

الحـل

$$\text{ن} = ١٠٠٠٠،\ ن = ٢٠٠\quad \hat{ل} = \frac{٥٠}{٢٠٠} = ٠.٢٥\quad ١-\propto = ٩٥\%\quad ى = \pm ١.٩٦$$

$$\frac{ن}{\text{ن}} = \frac{٢٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠.٠٢$$ على الرغم من أن المجتمع محدود إلا أن

نسبة العينة < ٠.٠٥ وبالتالى يمكن إهمال معامل التصحيح.

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}\ (١ - \hat{ل})}{ن}}$$

$$= ٠.٢٥ \pm ١.٩٦ \times \sqrt{\frac{٠.٢٥ \times ٠.٧٥}{٢٠٠}}$$

$$= ٠.٢٥ \pm ٠.٠٦$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠.٢٥ – ٠.٠٦ = ٠.١٩

والحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠.٢٥ + ٠.٠٦ = ٠.٣١

أى أن نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة بالكلية تتراوح بين ١٩%، ٣١% بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٤): فى المثال السابق بفرض أنه تم سحب عينة من ٦٠٠ طالب وجد من بينهم ١٦٢ طالب حاصلون على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء المطلوب تقدير نسبة الحاصلين على هذا التقدير فى مادة الإحصاء بدرجة ثقة ٩٩%.

$$\mathbf{\text{ن}} = \text{١٠٠٠٠} \qquad \text{ن} = \text{٦٠٠} \qquad \hat{\text{ل}} = \frac{\text{١٦٢}}{\text{٦٠٠}} = \text{٠.٢٧} \qquad \frac{\text{ن}}{\mathbf{\text{ن}}} = \frac{\text{٦٠٠}}{\text{١٠٠٠٠}} = \text{٠.٠٦}$$

$$\text{١} - \propto = \text{٩٩\%} \qquad \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} = \pm \text{٢.٥٨}$$

المجتمع محدود ونسبة العينة > ٠.٠٠٥، ∴ نستخدم معامل التصحيح.

$$\text{ل} = \hat{\text{ل}} \pm \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}\,(\text{١} - \hat{\text{ل}})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - \text{١}}}$$

$$= \text{٠.٢٧} \pm \text{٢.٥٨} \times \sqrt{\frac{\text{٠.٢٧} \times \text{٠.٧٣}}{\text{٦٠٠}} \times \frac{\text{١٠٠٠٠} - \text{٦٠٠}}{\text{١٠٠٠٠} - \text{١}}}$$

$$\text{ل} = \text{٠.٢٧} \pm \text{٠.٠٤٥}$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠.٢٧ – ٠.٠٤٥ = ٠.٢٢٥

والحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠.٢٧ + ٠.٠٤٥ = ٠.٣١٥

ومعنى ذلك أن نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة تتراوح بين ٢٢.٥%، ٣١.٥% بدرجة ثقة ٩٩%.

حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل):

سبق أن توصلنا عند تحديد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع إلى أن:

درجة الدقة= القيمة المعيارية عند درجة ثقة ($\text{١} - \propto$) × الخطأ المعيارى للتقدير

$$\text{د} = \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \text{خ}(\hat{\text{ل}})$$

١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:

$$\text{خ}(\hat{\text{ل}}) = \sqrt{\frac{\text{ل}\,(١ - \text{ل})}{\text{ن}}}$$

$$\text{د} = \text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\text{ل}\,(١ - \text{ل})}{\text{ن}}}$$

$$\text{د}^{٢} = \text{ى}^{٢}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{\text{ل}\,(١ - \text{ل})}{\text{ن}}$$

$$\text{ن} = \frac{\text{ى}^{٢}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \text{ل}\,(١ - \text{ل})}{\text{د}^{٢}}$$

٢- إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال فإن:

$$\text{خ}(\hat{\text{ل}}) = \sqrt{\frac{\text{ل}\,(١ - \text{ل})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - ١}}$$

$$\text{د} = \text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\text{ل}\,(١ - \text{ل})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - ١}}$$

$$\text{د}^{٢} = \text{ى}^{٢}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{\text{ل}\,(١ - \text{ل})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - ١}$$

وبإجراء بعض العمليات الرياضية نصل إلى أن:

$$\text{ن}^{*} = \frac{\text{ن}}{١ + \frac{\text{ن}}{\mathbf{\text{ن}}}}$$

مع ملاحظة أن استخدام نسبة حدث فى المجتمع (ل) فى حساب حجم العينة يعتبر أمراً يصعب تحقيقه فى أغلب الأحوال، لذلك نفترض أن هذه النسبة ٠.٥ حتى نحصل على أكبر حجم للعينة.

وإذا كانت النسبة فى المجتمع تأخذ مدى معين كأن يكون من المتوقع عند دراسة مستوى الأمية فى مجتمع ما أن تتراوح بين ٢٠%، ٤٠%، فى هذه الحالة تؤخذ النسبة الأقرب إلى ٥٠% أى (ل = ٠.٤٠).

وتجدر الإشارة إلى أن هناك جداول تبين أقصى حجم ممكن للعينة بدلالة درجة الدقة المطلوبة للنسبة ل وبدلالة درجة الثقة ($1 - \alpha$).

مثال (١): إذا علمت أن عدد طلاب الكلية ٣٠٠٠٠ طالب، ما هو حجم العينة اللازم سحبها لتقدير نسبة الطلبة الذين يزيد عمرهم عن ٢٠ سنة إذا كان هناك اعتقاد بأن هذه النسبة تتراوح بين ١٥%، ٣٠% من طلبة الكلية، بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢% وبدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

ن = ٣٠٠٠٠ ل تتراوح بين ١٥%، ٣٠%

ل = ٠.٣٠ لأنها الأقرب إلى ٠.٥٠

د = ٠.٠٢ $1 - \alpha$ = ٩٥% $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ = ١.٩٦

$$ن = \frac{ى_{\frac{\alpha}{2}}^{2} \times ل\,(1 - ل)}{د^{2}} = \frac{(1.96)^{2} \times 0.3 \times 0.7}{(0.02)^{2}}$$

= ٢٠١٧ طالب

وحيث أن حجم المجتمع معلوم $\therefore$ لابد من إجراء عملية التصحيح لحجم العينة

$$ن^{*} = \frac{ن}{1 + \frac{ن}{\mathbf{ن}}} = \frac{2017}{1 + \frac{2017}{30000}} = 1890 \text{ طالب}$$

مثال (٢): ما هو حجم العينة اللازم سحبه من إحدى المدن لتقدير نسبة الأمية فيها بشرط أن تكون درجة الدقة فى هذه النسبة فى حدود ٣% وبدرجة ثقة ٩٩%.

الحـل

د = ٠.٠٠٣ ل = ٠.٥ (لأن نسبة المجتمع غير معلومة)

١ − ∝ = ٩٩% $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ = ٢.٥٨

$$ن = \frac{ى^{2}_{\frac{\alpha}{2}} \times ل\ (١ - ل)}{د^{2}} = \frac{(٢.٥٨)^{2} \times ٠.٥ \times ٠.٥}{(٠.٠٠٣)^{2}}$$

= ١٨٤٩ شخص

ثالثاً: تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين ($\mu_1 - \mu_2$)

يمكن إيجاد فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين من خلال سحب عينة من المجتمع الأول حجمها $ن_1$، ووسطها الحسابى $\overline{س}_1$ وعينة من المجتمع الثانى حجمها $ن_2$، ووسطها الحسابى $\overline{س}_2$، وباستخدام الفرق بين متوسطى العينتين يمكن تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين كما يلى:

الفرق بين متوسطى مجتمعين = الفرق بين متوسطى عينتين ± القيمة المعيارية عند درجة ثقة (١ − ∝) × الخطأ المعيارى

١− التباين للمجتمعين δ_1^2، δ_2^2 معلومين:

$$\mu_1 - \mu_2 = (\overline{س}_1 - \overline{س}_2) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\delta_1^2}{ن_1} + \frac{\delta_2^2}{ن_2}}$$

نستخدم القيمة المعيارية (ى) مهما كان حجم العينتين طالما كانت الظاهرة محل الدراسة تتبع التوزيع الطبيعى، وإذا كانت تتبع توزيعاً آخر نستخدم (ى) أيضاً بشرط أن $ن_1$، $ن_2$ ≥ ٣٠

٢- التباين للمجتمعين مجهولين:

فى هذه الحالة نستخدم التباين للعينين $ع_١^٢$ ، $ع_٢^٢$

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

نستخدم القيمة المعيارية (ى) بشرط أن تكون $ن_١$، $ن_٢ \geq ٣٠$.

إما إذا كانت $ن_١$، $ن_٢ < ٣٠$ فإننا نستخدم القيمة المعيارية (ت) بدلاً من (ى).

حيث $ت_{\left(ن_١ + ن_٢ - ٢،\ \frac{\alpha}{٢}\right)}$أى بدرجات حرية = مجموع العينتين -٢ ونصف مستوى المعنوية.

والعلاقات السابقة صحيحة طالما كان المجتمعان غير محدودين أو أن السحب منهما يتم مع الإحلال.

أما إذا كان المجتمعان محدودين أو أن السحب يتم بدون إحلال فإننا نستخدم معامل التصحيح:

$$\sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ٢}}$$ حيث $\mathbf{ن} = \mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢$ ، $ن = ن_١ + ن_٢$

ويمكن كتابته على الصورة التالية:

$$\frac{\mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢ - (ن_١ + ن_٢)}{\mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢ - ٢}$$

بشرط أن تكون:

$$\frac{ن_١ + ن_٢}{\mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢} \leq ٠.٠٥$$

مثال (١): فى دراسة لمعرفة متوسط استهلاك الكهرباء فى بعض مدن الجمهورية، تم سحب عينة من مدينة القاهرة حجمها ٢٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الأسرة ١٥٠ كيلووات شهرياً بانحراف معيارى ٥٠ كيلووات، وسحبت عينة من مدينة بنها حجمها ١٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الأسرة ٩٠كيلووات شهرياً بانحراف معيارى ٣٠ كيلووات. المطلوب، تقدير الفرق بين متوسطى استهلاك الأسرة من الكهرباء شهرياً بين المدينتين وبدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

القاهرة: $ن_١ = ٢٠٠$ ، $\overline{س}_١ = ١٥٠$ $ع_١ = ٥٠$

بنها : $ن_٢ = ١٠٠$ ، $\overline{س}_٢ = ٩٠$ $ع_٢ = ٣٠$

$ن_١، ن_٢ \geq ٣٠$ ∴ نستخدم القيمة المعيارية (ى)

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

$$= (١٥٠ - ٩٠) \pm ١.٩٦ \times \sqrt{\frac{(٥٠)^٢}{٢٠٠} + \frac{(٣٠)^٢}{١٠٠}}$$

$$= ٦٠ \pm ١.٩٦ \times ٤.٦٣٧$$

$$= ٦٠ \pm ٩.١$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٦٠ - ٩.١ = ٥٠.٩$ كيلووات

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٦٠ + ٩.١ = ٦٩.١$ كيلووات

ومعنى ذلك أن الفرق بين متوسط استهلاك الأسرة من الكهرباء شهرياً فى مدينة القاهرة ومتوسط استهلاك الأسرة فى مدينة بنها يتراوح بين ٥١، ٦٩ كيلووات تقريباً.

مثال (٢): فى دراسة لمعرفة متوسط عمر اللمبات الكهربائية فى بعض المصانع، تم سحب عينة من المصنع (أ) حجمها ٥٠٠ لمبة فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٣٠٠ ساعة، وسحبت عينة من المصنع (ب) حجمها ٤٠٠ لمبة فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٥٠٠ ساعة، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر اللمبة فى المصنع (أ) ٢٠٠ ساعة وفى المصنع (ب) ١٥٠ ساعة، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط عمر اللمبة فى المصنعين عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

المصنع (أ): $ن_١ = ٥٠٠$ ، $\overline{س}_١ = ١٣٠٠$ $\delta_١ = ٢٠٠$

المصنع (ب): $ن_٢ = ٤٠٠$ ، $\overline{س}_٢ = ١٥٠٠$ $\delta_٢ = ١٥٠$

تبايناً المجتمعين معلومان ∴ نستخدم القيمة المعيارية (ى)

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\delta_١^٢}{ن_١} + \frac{\delta_٢^٢}{ن_٢}}$$

$$= (١٣٠٠ - ١٥٠٠) \pm ٢.٥٨ \times \sqrt{\frac{(٢٠٠)^٢}{٥٠٠} + \frac{(١٥٠)^٢}{٤٠٠}}$$

$= ٢٠٠ \pm ٢.٥٨ \times ١١.٦٧٣$ لاحظ أننا نأخذ الفرق المطلق (+)

$= ٢٠٠ \pm ٣٠.١١$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ - ٣٠.١١ = ١٦٩.٨٩$ ساعة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ + ٣٠.١١ = ٢٣٠.١١$ ساعة

أى أن الفرق بين متوسطى عمر اللمبة فى المصنعين يتراوح بين ١٧٠ ساعة، ٢٣٠ ساعة، وذلك بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): المطلوب حل المثال السابق بفرض أن إنتاج المصنع (أ) من هذه اللمبات ١٠٠٠٠ لمبة وإنتاج المصنع (ب) منها ٧٠٠٠ لمبة.

الحـل

المجتمعان محدودان:

$\textbf{ن}_{١} = ١٠٠٠٠$ $\qquad$ $\textbf{ن}_{٢} = ٧٠٠٠$ $\qquad$ $\textbf{ن} = \textbf{ن}_{١} + \textbf{ن}_{٢} = ١٧٠٠٠$

$ن_{١} = ٥٠٠$ $\qquad$ $ن_{٢} = ٤٠٠$ $\qquad$ $ن = ن_{١} + ن_{٢} = ٩٠٠$

النسبة $\dfrac{٩٠٠}{١٧٠٠٠} = ٠.٠٥٣ \geq ٠.٠٥$ ∴ نستخدم معامل التصحيح

$$\mu_{١} - \mu_{٢} = (\overline{س}_{١} - \overline{س}_{٢}) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \sqrt{\frac{\delta_{١}^{٢}}{ن_{١}} + \frac{\delta_{٢}^{٢}}{ن_{٢}} \times \frac{\textbf{ن} - ن}{\textbf{ن} - ٢}}$$

$$= ٢٠٠ \pm ٢.٥٨ \sqrt{\frac{(٢٠٠)^{٢}}{٥٠٠} + \frac{(١٥٠)^{٢}}{٤٠٠} \times \frac{١٧٠٠٠ - ٩٠٠}{١٧٠٠٠ - ٢}}$$

$$= ٢٠٠ \pm ٢٩.٣$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ - ٢٩.٣ = ١٧٠.٧$ ساعة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ + ٢٩.٣ = ٢٢٩.٣$ ساعة

أى أن الفرق بين متوسط عمر اللمبة فى المصنعين يتراوح بين ١٧١، ٢٢٩ ساعة بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٤): فى دراسة لمعرفة متوسط درجات مادة الإحصاء لكل من الطلبة والطالبات سحبت عينة من الطلبة حجمها ٢٥ طالب فوجد أن متوسط درجاتهم فى مادة الإحصاء ١٦ درجة بانحراف معيارى درجة واحدة، وسحبت عينة من الطالبات حجمها ٢٠ طالبة فوجد أن متوسط درجاتهن فى مادة الإحصاء ١٤ درجة بانحراف معيارى درجتين، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط الدرجات فى مادة الإحصاء بين الطلبة والطالبات بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

الطلبة : $ن_1 = ٢٥$ ، $\overline{س}_1 = ١٦$ $ع_1 = ١$

الطالبات: $ن_2 = ٢٠$ ، $\overline{س}_2 = ١٤$ $ع_2 = ٢$

$ن_1$، $ن_2 < ٣٠$ وتباينا المجتمعين مجهولان، ∴ نستخدم توزيع (ت) بدلاً من التوزيع الطبيعى.

$$١ - \alpha = ٠.٩٥ \quad ت_{\left(ن_1 + ن_2 - ٢، \frac{\alpha}{٢}\right)} = ت_{(٤٣، ٠.٠٢٥)} = ٢.٠٢١$$

$$\mu_1 - \mu_2 = (\overline{س}_1 - \overline{س}_2) \pm ت_{(٤٣، ٠.٠٢٥)} \times \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$$

$$= (١٦ - ١٤) \pm ٢.٠٢١ \times \sqrt{\frac{(١)^2}{٢٥} + \frac{(٢)^2}{٢٠}}$$

$$= ٢ \pm ٢.٠٢١ \times ٠.٤٩ = ٢ \pm ١$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين = ٢ – ١ = ١ درجة واحدة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين = ٢ + ١ = ٣ درجات

أى أن الفرق بين متوسط درجات الطلبة والطالبات فى مادة الإحصاء يتراوح بين درجة واحدة وثلاث درجات بدرجة ثقة ٩٥%

مثال (٥): سحبت عينتان حجم كل منهما ١٠٠ عامل من مصنعين وكان توزيع هؤلاء العمال حسب فئات العمر كما يلى:

فئات العمر	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٥٠–	٥٥–٦٠	المجموع
عدد عمال المصنع (أ)	١٢	١٨	٣٨	٢٢	١٠	١٠٠
عدد عمال المصنع (ب)	٨	٢٢	٣٥	٢٧	٨	١٠٠

<u>المطلوب</u>: تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط عمر العامل فى المصنعين بدرجة ثقة ٩٩%.

الحـل

نبدأ أولاً بحساب كل من الوسط الحسابى والتباين لكل عينة

فئات	مراكز الفئات(س)	$ك_1$	س ك	$س^2ك_1$	$ك_2$	$س ك_2$	$س^2ك_2$
٢٠-	٢٥	١٢	٣٠٠	٧٥٠٠	٨	٢٠٠	٥٠٠٠
٣٠-	٣٥	١٨	٦٣٠	٢٢٠٥٠	٢٢	٧٧٠	٢٦٩٥٠
٤٠-	٤٥	٣٨	١٧١٠	٧٦٩٥٠	٣٥	١٥٧٥	٧٠٨٧٥
٥٠-	٥٢.٥	٢٢	١١٥٥	٦٠٦٣٧.٥	٢٧	١٤١٧.٥	٧٤٤١٨٠.٧٥
٥٥-٦٠	٥٧.٥	١٠	٥٧٥	٣٣٠٦٣٠	٨	٤٦٠	٢٦٤٥٠
المجموع		١٠٠	٤٣٧٠	٢٠٠٢٠٠	١٠٠	٤٤٢٢.٥	٢٠٣٦٩٣.٧٥

$$\overline{س}_1 = \frac{\text{مج س ك}_1}{\text{مج ك}_1} = \frac{٤٣٧٠}{١٠٠} = ٤٣.٧$$

$$ع_1^2 = \frac{1}{\text{مج ك}_1 - 1}\left(\text{مج س}^2\text{ ك}_1 - \frac{(\text{مج س ك}_1)^2}{\text{مج ك}_1}\right)$$

$$= \frac{1}{٩٩}\left(٢٠٠٢٠٠ - \frac{(٤٣٧٠)^2}{١٠٠}\right)$$

$$ع_1^2 = ٩٣.٢٤$$

$$\overline{س}_2 = \frac{\text{مج س ك}_2}{\text{مج ك}_2} = \frac{٤٤٢٢.٥}{١٠٠} = ٤٤.٢٢٥$$

$$ع_2^2 = \frac{1}{\text{مج ك}_1 - 1}\left(\text{مج س}^2\text{ ك}_2 - \frac{(\text{مج س ك}_2)^2}{\text{مج ك}_2}\right)$$

$$= \frac{1}{٩٩}\left(٢٠٣٦٩٣.٧٥ - \frac{(٤٤٢٢.٥)^2}{١٠٠}\right)$$

$$ع_2^2 = ٨١.٩١$$

$$\mu_1 - \mu_2 = (\overline{س}_1 - \overline{س}_2) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$$

$$= (٤٣.٧ - ٤٤.٢٢٥) \pm ٢.٥٨ \times \sqrt{\frac{٩٣.٢٤}{١٠٠} + \frac{٨١.٩١}{١٠٠}}$$

$$= ٠.٥٢٥ \pm ٣.٤١٤$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

= ٠.٥٢٥ – ٣.٤١٤ = ٢.٨٨٩ سنة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

= ٠.٥٢٥ + ٣.٤١٤ = ٣.٩٣٩ سنة

ومعنى ذلك أن الفرق بين متوسط العمر للعاملين فى المصنعين يتراوح بين ٣ سنوات، ٤ سنوات تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%.

رابعاً: تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين ($ل_1 - ل_2$):

إذا كان لدينا مجتمعين ونود معرفة الفرق بين نسبة حدث معين فى المجتمعين نسحب عينة من المجتمع الأول حجمها $ن_1$، ونحسب نسبة الحدث فيها $\hat{ل}_1$، ونسحب عينة من المجتمع الثانى حجمها $ن_2$ ونحسب نسبة الحدث $\hat{ل}_2$ وبالتالى فإن حدى الثقة للفرق بين نسبتى حدث معين فى مجتمعين كما يلى:

$$ل_1 - ل_2 = (\hat{ل}_1 - \hat{ل}_2) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}_1(1-\hat{ل}_1)}{ن_1} + \frac{\hat{ل}_2(1-\hat{ل}_2)}{ن_2}}$$

مع ملاحظة استخدام معامل التصحيح $\sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ٢}}$ إذا كان المجتمعان محدودين أو أن السحب منهما يتم بدون إرجاع، حيث:

$\mathbf{ن} = \mathbf{ن}_1 + \mathbf{ن}_2$، $ن = ن_1 + ن_2$، ويشترط أن $\frac{ن_1 + ن_2}{\mathbf{ن}_1 + \mathbf{ن}_2} \leq ٠.٠٥$

مثال (١): لمعرفة نسبة الأمية فى بعض مدن الجمهورية سحبت عينة من ٣٠٠شخص من مدينة طنطا فوجد أن منها ٥٠ شخص أمياً، وسحبت عينة من ٢٠٠ شخص من مدينة المحلة الكبرى فوجد منها ٤٠ شخص أمياً، المطلوب تقدير فترة للفرق بين نسبة الأمية فى المدينتين بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

طنطا: $ن_١ = ٣٠٠$ $\qquad \hat{ل}_١ = \frac{٥٠}{٣٠٠} = ٠.١٧$

المحلة الكبرى : $ن_٢ = ٢٠٠$ $\qquad \hat{ل}_٢ = \frac{٤٠}{٢٠٠} = ٠.٢٠$

$١ - \propto = ٩٥\%$ $\qquad ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ١.٩٦$

$$ل_١ - ل_٢ = (\hat{ل}_١ - \hat{ل}_٢) \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}_١ (١-\hat{ل}_١)}{ن_١} + \frac{\hat{ل}_٢ (١-\hat{ل}_٢)}{ن_٢}}$$

$$= (٠.١٧ - ٠.٢٠) \pm ١.٩٦ \times \sqrt{\frac{٠.١٧ \times ٠.٨٣}{٣٠٠} + \frac{٠.٢٠ \times ٠.٨٠}{٢٠٠}}$$

$$= ٠.٠٣ \pm ١.٩٦ \times ٠.٠٣٥$$

$$= ٠.٠٣ \pm ٠.٠٧$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين نسبتى المجتمعين

$$= ٠.٠٣ - ٠.٠٧ = ٠.٠٤$$

والحد الأعلى للفرق بين نسبتى المجتمعين

$$= ٠.٠٣ + ٠.٠٧ = ٠.١٠$$

أى أن الفرق بين النسبتين يتراوح بين ٤% بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٢): لمعرفة نسبة الحاصلين على شهادة الثانوية العامة من المدارس الحكومية من طلبة السنة الأولى بالكلية نظامى وانتساب موجه سحبت عينة من طلبة النظامى حجمها ٥٠٠ طالب وجد من بينهم ٣٠٠ من طلبة المدارس الحكومية، وسحبت عينة من طلبة الانتساب الموجه حجمها ٣٥٠ طالب وجد منهم ١٥٠ طالب من المدارس الحكومية، فإذا علمت أن الطلبة المقبولين بالفرقة الأولى نظامى ٥٠٠٠ طالب، والمقبولين بالفرقة الأولى انتساب موجه ٤٠٠٠ طالب، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبة طلاب المدارس الحكومية الملتحقين بالفرقة الأولى نظامى وانتساب موجه بالكلية عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

نظامى: $\text{ن}_1 = 5000$ $\quad n_1 = 500$ $\quad \hat{p}_1 = \frac{300}{500} = 0.6$

انتساب موجه: $\text{ن}_2 = 4000$ $\quad n_2 = 350$ $\quad \hat{p}_2 = \frac{150}{350} = 0.43$

$\text{ن} = 9000 \quad n = 850$

المجتمعين محدودين ونسبة العينتين $\frac{n_1 + n_2}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} = \frac{850}{9000}$

$= 0.094 > 0.05$

∴ نستخدم معامل التصحيح، $\alpha = 0.01$، $z_{\frac{\alpha}{2}} = \pm 2.58$

$$p_1 - p_2 = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} \times \frac{\text{ن} - n}{\text{ن} - 2}}$$

$$= (0.60 - 0.43) \pm 2.58 \times \sqrt{\frac{0.60 \times 0.40}{500} + \frac{0.43 \times 0.57}{350} \times \frac{9000 - 850}{9000 - 2}}$$

$= 0.17 \pm 2.58 \times 0.033$

$= 0.17 \pm 0.08$

∴ الحد الأدنى للفرق بين نسبتى المجتمعين

$= 0.17 - 0.08 = 0.09$

والحد الأعلى للفرق بين نسبتى المجتمعين

$= 0.17 + 0.08 = 0.25$

أى أن الفرق بين نسبة طلبة المدارس الحكومية بين طلاب النظامى والانتساب الموجه بالفرقة الأولى فى الكلية يتراوح بين ٩%، ٢٥% بدرجة ثقة ٩٩%.

الفصل الثانى

إختبارات الفروض الإحصائية

Tests of Statistical Hypothesis

مقدمة :

ويطلق عليها البعض اختبارات المعنوية Significant Tests وقبل أن نتعرف على خطوات وأنواع اختبارات الفروض الإحصائية سنتعرف على بعض المصطلحات الهامة.

القرار الإحصائى Statistical Decision

قد يجد الباحث نفسه مضطراً لاتخاذ قرار بشأن أحد معالم المجتمع اعتماداً على ما يتوافر لديه من قياسات مشابهة من خلال عينة مسحوبة من هذا المجتمع، فمثلاً إذا كان متوسط عمر الطالب فى إحدى الكليات ٢٠ سنة، واخترنا عينة ووجدنا أن متوسط عمر الطالب ٢٢ سنة فيها مثلاً، هنا لابد من الإجابة على تساؤل حول الفرق الظاهر بين متوسط المجتمع (μ) ومتوسط العينة ($\overline{س}$)، هل هو راجع للصدفة أى فرق عشوائى ناتج عن استخدام أسلوب العينة، أم أن هذا الفرق جوهرى يرجع إلى عوامل وأسباب جوهرية وحقيقية.

والقرار المتخذ فى هذا الشأن يسمى القرار الإحصائى أما الخطوات أو الإجراءات التى تمكن الباحث من اتخاذ هذا القرار فهى اختبارات الفروض الإحصائية أو اختبارات المعنوية.

الفرض الإحصائى: Statistical Hypothesis

وهو عبارة عن تفسير أو تحديد مبدئى للمشكلة، وقد يكون هذا التفسير صحيحاً وقد يكون خاطئاً، وهذا التحديد المبدئى يعرف بالفرض العدمى Null Hypothesis ونشير إليه بالرمز ض$_{صفر}$ وغالباً ما تتم صياغة هذا الفرض على أساس أن الهدف من الاختبار هو رفض الفرض العدمى، فإذا كنا بصدد اختبار تأثير نوع معين من الدواء على نسبة شفاء المرضى بمرض معين فإن الفرض العدمى هو أن الدواء غير فعال أو ليس له تأثير، وإذا كنا بصدد اختبار تأثير الحملات الإعلانية على مبيعات منتج معين، فإن الفرض العدمى يصاغ على أساس، أنه لا تأثير لهذه الحملات على نسبة المبيعات من هذا المنتج.

ومن ثم فإن الفرض العدمى يقوم على أساس أن العينة التى سحبت من المجتمع هى عينة عشوائية ممثلة له وأن الاختلاف بين نتائج العينة والمجتمع هى اختلافات غير جوهرية أو غير معنوية وترجع إلى عوامل عشوائية راجعة لاستخدامنا لأسلوب العينة وأن هذه الاختلافات تتغير قيمتها واتجاهها (موجب/ سالب) بتغير العينات حتى تتلاشى أو تنعدم تلك الاختلافات فى حالة سحب عدد كبير جداً من العينات.

أما الفرض المقابل للفرض العدمى فيسمى الفرض البديل Alternative Hypothesis ويرمز له بالرمز ض$_{١}$ وهو تفسير مغاير أو معاكس للفرض العدمى.

وبعد تطبيق خطوات الاختبار الإحصائى نصل إلى قرار إما بقبول الفرض العدمى وهو ما يعنى ضمنياً رفض الفرض البديل، أو رفض الفرض العدمى وهو ما يعنى قبول الفرض البديل.

أداة الاختبار الإحصائى (المختبر الإحصائى) Test Statistic

لكى نصل إلى قرار إحصائى بشأن قبول أو رفض الفرض العدمى فإنه يلزم الاستعانة بوسيلة أو أداة أو علاقة رياضية تربط بين قيمة معلمة المجتمع التى نريد اختبارها وبين نظيرتها فى العينة، وهذه العلاقة عبارة عن متغير عشوائى له دالة كثافة احتمال مثل دالة ذو الحدين أو بواسون أو التوزيع الطبيعى أو ..

وبالتالى فإنه يمكن مقارنة المختبر الإحصائى (أداة الاختبار) مع القيمة الجدولية للتوزيع الاحتمالى الذى تتبعه هذه العلاقة، وقد سبق أن تعرضنا لتوزيعين معياريين هما التوزيع الطبيعى وقيمته المعيارية الجدولية هى (ى)، وتوزيع (ت) وقيمته المعيارية الجدولية هى (ت)، ومن ثم فإنه يمكن أن نطلق على أداة الاختبار الإحصائى أو المختبر الإحصائى لفظ (ى) أو (ت) المحسوبة والتى نقارنها بقيمة (ى) أو (ت) الجدولية.

ومن خلال هذه المقارنة يمكن أن نصل إلى قرار إحصائى بقبول أو رفض الفرض العدمى.

مستوى المعنوية Level of Significance

لابد أن يرتبط اتخاذ قرار القبول أو الرفض للفرض العدمى بحدود معينة للخطأ يمكن تحملها لأن هذا القرار يعتمد فى الأساس على بيانات عينة وهى عرضة للخطأ، وحدود الخطأ الشائعة الاستخدام هى ٥%، ١% ويطلق عليها البعض احتمالات الخطأ ويرمز لها بالرمز ($\propto$)، فالقول بأن مستوى المعنوية $\propto$ = ٥% معناه أن احتمال أن يتخذ الباحث قراراً خاطئاً هو ٥% وهذا يعنى أن الباحث سيكون واثقاً بنسبة ٩٥% أن قراره سيكون صحيحاً.

المنطقة الحرجة Critical Region

ويطلق عليها أيضاً منطقة الرفض وهى المساحة الاحتمالية التى تقابل مستوى المعنوية (∝) تحت المنحنى بحيث إذا وقعت قيمة المختبر الإحصائى (ى أو ت) داخل هذه المنطقة تم رفض الفرض العدمى، أما إذا وقعت تلك القيمة خارج هذه المنطقة أى فى منطقة القبول تم قبول الفرض العدمى.

والمنطقة الحرجة إما أن تقع فى أحد طرفى المنحنى (يمين أو شمال) أو تقع على طرفى المنحنى، وهذا يعتمد على نوع الاختبار الإحصائى والذى ينقسم إلى:

١- اختبار الطرفين Two Tailed Test

وفيه توزع المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض (∝) بالتساوى على طرفى المنحنى وتحسب القيمة المعيارية على أساس $\pm \text{ى}_{\frac{\propto}{2}}$ أو $\pm \text{ت}_{(\text{ن} - ١،\ \frac{\propto}{2})}$

٢- اختبار الطرف الأيمن Right Tailed Test

وفيه تقع المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض (∝) فى الطرف الأيمن من المنحنى الاحتمالى وتحسب القيمة المعيارية الموجبة $+ \text{ى}_{\propto}$ أو $+ \text{ت}_{(\text{ن}-١،\ \propto)}$.

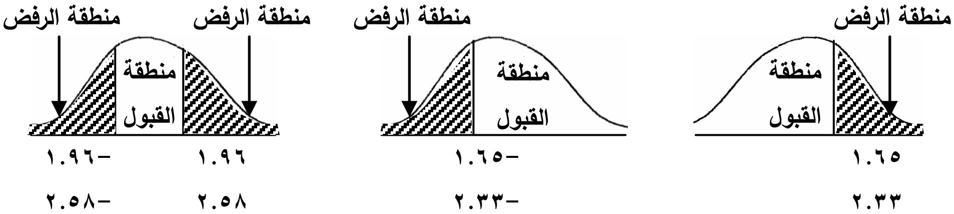
٣- اختبار الطرف الأيسر Left tailed test

وفيه تقع المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض (∝) أو فى الطرف الأيسر من المنحنى الاحتمالى وتحسب القيمة المعيارية السالبة $- \text{ى}_{\propto}$ أو $- \text{ت}_{(\text{ن}-١،\ \propto)}$.

والقيمة المعيارية الجدولية للتوزيع الطبيعى (ى) تختلف باختلاف نوع الاختبار ومستوى المعنوية كما يتضح من الجدول التالى:

مستوى المعنوية	اختبار طرف أيمن	اختبار طرف أيسر	اختبار الطرفين
α = ٥%	ى_{α} = +١.٦٥	ى_{α} = −١.٦٥	$\text{ى}_{\frac{\alpha}{2}}$ = ±١.٩٦
α = ١%	ى_{α} = +٢.٣٣	ى_{α} = −٢.٣٣	$\text{ى}_{\frac{\alpha}{2}}$ = ±٢.٥٨

وتتحدد هذه القيم المعيارية على شكل المنحنى فى الاختبارات الثلاثة كما يتضح من الأشكال التالية:



اختبار طرف أيمن   اختبار طرف أيسر   اختبار الطرفين

ويتوقف اختيار نوع الاختبار على طبيعة الفرض البديل، فإذا كنا نبحث فى تأثير دواء معين فإن الفرض العدمى يتمثل فى عدم تأثير هذا الدواء، ويأخذ الفرض البديل أحد الأشكال التالية:

١- للدواء تأثير إيجابى على نسبة شفاء المرضى (اختبار طرف أيمن).

١- للدواء تأثير سلبى على نسبة شفاء المرضى (اختبار طرف أيسر).

٢- للدواء تأثير على نسبة المرضى (اختبار طرفين) حيث لم يتحدد اتجاه التأثير.

خطوات الاختبار الإحصائى:

بعد استعراض المفاهيم الأساسية لاختبارات الفروض الإحصائية يمكن أن نلخص خطوات الاختبار فى الاتى:

١- تحديد الفرض العدمى المطلوب اختباره والفرض البديل له مع تحديد نوع الاختبار المناسب للفرض البديل، هل هو اختبار طرفين أم اختبار واحد وهل هو طرف أيمن أم أيسر.

٢- تحديد أداة الاختبار (المختبر الإحصائى) ونقصد بها قيمة (ى) أو (ت) المحسوبة من خلال البيانات المتوفرة عن المجتمع والعينة ثم تحديد التوزيع الاحتمالى للمختبر الإحصائى.

٣- تحديد مستوى المعنوية ($\propto$) ومنها نحدد المنطقة الحرجة (منطقة الرفض) ومنطقة القبول.

٤- مقارنة قيمة أداة الاختبار [ى أو ت المحسوبة] بالقيمة الجدولية للتوزيع الاحتمالى [ى أو ت الجدولية] فإذا وقعت القيمة المحسوبة فى منطقة الرفض نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل والعكس صحيح إذا وقعت القيمة المحسوبة فى منطقة القبول نقبل الفرض العدمى ونرفض الفرض البديل.

ونود أن نشير بإيجاز وقبل البدء فى التعرف على أنواع الاختبارات الإحصائية إلى أنه جرت العادة على أن يكون الفرض العدمى (ض.) فى صورة أن مؤشر المجتمع (μ أو ل) = قيمة معينة وأن الفرض البديل (ض$_{١}$) يكون أحد الصور التالية:

- أن مؤشر المجتمع (μ أو ل) $\neq$ هذه القيمة (اختبار طرفين).
- أن مؤشر المجتمع (μ أو ل) > هذه القيمة (اختبار طرف أيمن).
- أن مؤشر المجتمع (μ أو ل) < هذه القيمة (اختبار طرف أيسر).

ومع ذلك فهناك من يفضل أن يضع الفرض العدمى فى صياغة عكس صياغة الفرض البديل فمثلاً إذا كان الهدف اختبار أن دواء معين يزيد من نسبة شفاء المرضى، كان معنى ذلك أن الفرض البديل أن مؤشر المجتمع > قيمة معينة، وهنا يصاغ الفرض العدمى أن مؤشر المجتمع $\leq$ قيمة معينة وتجدر الإشارة إلى أن هذا الاختلاف لا يؤثر فى القرار الإحصائى ومن ثم فإننا سوف نتبع الأسلوب الأول أى وضع الفرض العدمى دائماً فى صيغة (=) بينما الفرض البديل إما أن يكون ($\neq$) أو (>) أو (<) حسب نوع الاختبار.

وسوف نعرض فيما يلى لأهم أنواع الاختبارات الإحصائية والتى يمكن أن نصفها كما يلى:

١- اختبارات تعتمد على عينة واحدة.

٢- اختبارات تعتمد على عينتين مستقلتين.

٣- اختبارات تعتمد على عينتين غير مستقلتين (القراءات المزدوجة).

وذلك فى الحالتين:

١- حجم العينة كبير ن $\geq$ ٣٠ Large sample size

٢- حجم العينة صغير ن < ٣٠ Small sample size

أولاً: الاختبارات التى تعتمد على عينة واحدة One Sample Tests

تهدف الدراسات الميدانية والتجارب المعملية إلى معرفة تأثير دواء معين أو نوع معين من السماد أو نوع معين من أغذية المرضى، أو نظام جديد للعمل أو المكافآت أو تأثير حملات إعلانية على مبيعات منتج معين أو .. ولتحقيق أى من هذه الأهداف يقوم الباحث باختيار عينة عشوائية من مجتمع الدراسة ثم إخضاعها للمؤثر الذى تهدف الدراسة إلى معرفة تأثيره على مفردات المجتمع، ثم يتم قياس

نتائج العينة ($\overline{س}$ أو $\hat{ل}$) ثم نقارن بين نتائج العينة ومؤثرات المجتمع (μ أو ل) وبالطبع سيكون هناك اختلاف بين متوسط العينة ($\overline{س}$) ومتوسط المجتمع (μ) وكذلك بين نسبة حدث ما فى العينة ($\hat{ل}$) ونسبة الحدث فى المجتمع (ل)، وهذا الاختلاف يمثل سبب إجراء الاختبار والمتمثل فى معرفة هل هذا الفرق (الاختلاف) يرجع إلى المؤثر الذى نبحث فى تأثيره، أم هو فرق عشوائى يرجع للصدفة. ويتحقق ذلك كما سبق وأشرنا من خلال خطوات الاختبار الإحصائى السابق الإشارة إليها. ونأتى إلى الاختبارات التى تتم من خلال عينة واحدة.

١- اختبار أن متوسط المجتمع يساوى قيمة معينة :

One Sample Test for Mean

وفى هذه الحالة لابد أن نفرق بين عدة حالات:

١/١ تباين المجتمع (أو الانحراف المعيارى δ) معلوم أم غير معلوم.

٢/١ العينة كبيرة (ن $\geq$ ٣٠) أم صغيرة (ن < ٣٠).

٣/١ الاختبار خاص بالطرفين أم اختبار طرف واحد (أيمن أم أيسر).

١/١ تباين المجتمع (δ^2) معلوم: Population Variance is Known

فى هذه الحالة نستخدم المختبر الإحصائى للتوزيع الطبيعى (ى):

$$\text{قيمة المختبر الإحصائى (ى المحسوبة)} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}}$$

طالما كان التوزيع الاحتمالى يتبع التوزيع الطبيعى ومهما كان حجم العينة، أما إذا كان التوزيع الاحتمالى يتبع توزيع آخر فيشترط أن يكون حجم العينة كبيراً ن $\geq$ ٣٠.

٢/١ تباين المجتمع (δ^2) غير معلوم:

Population Variance is Unknown

فى هذه الحالة نستخدم تباين العينة $ع^2$ بدلاً من تباين المجتمع ونستخدم التوزيع الطبيعى طالما كان حجم العينة كبيراً ن $\geq$ ٣٠ ومن ثم يصبح المختبر الإحصائى كما يلى:

$$\text{المختبر الإحصائى (ى المحسوبة)} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}}$$

أما إذا كان حجم العينة صغيراً (ن < ٣٠) فإننا نستخدم توزيع (ت) بدلاً من توزيع (ى) بشرط أن يكون التوزيع الاحتمالى للظاهرة محل الدراسة يتبع التوزيع الطبيعى، ومن ثم يصبح المختبر الإحصائى كما يلى:

$$\text{المختبر الإحصائى (ت المحسوبة)} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\delta \text{ أو ع}}{\sqrt{\text{ن}}}}$$

ثم نتابع خطوات الاختبار الإحصائى كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثـال (١): إذا كـان متوسط إنتـاج العامـل فـى أحـد المصـانع ٦٠ قطعـة يوميـاً بـانحراف معيـارى ١٥ قطعـة، تـم اختيـار عينـة مـن ١٠٠ عامـل وتـم إخضـاعهم لبرنامج تدريبى معين، وتبين بعد البرنامج أن متوسط إنتاج العامل منهم ٦٥ قطعة يومياً. هل تعتقد أن التدريب أدى إلى رفع إنتاجية العامل عند درجة ثقة ٩٥%.

الحـل

μ = ٦٠ ن = ١٠٠ $\bar{\text{س}}$ = ٦٥ $\propto$ = ٩٥%

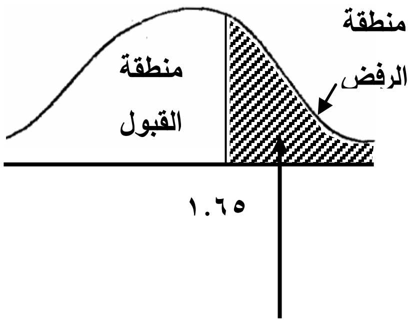
الفرض العدمى (ض.): μ = ٦٠

الفرض البديل (ض١): μ > ٦٠

اختبار طرف أيمن ى٠.٠٥ = ١.٦٥

انحراف المجتمع (δ) معلوم ن ≤ ٣٠

∴ نستخدم التوزيع الطبيعى (ى)



نحسب القيمة المعيارية (ى المحسوبة):

$$\text{(ى المحسوبة)} \quad \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}} = \frac{٦٥ - ٦٠}{\frac{١٥}{\sqrt{١٠٠}}} = ٣.٣٣$$

نحدد القيمة الجدولية $ى_{٠.٠٥}$ = ١.٦٥

وحيث أن ى المحسوبة > ى الجدولية ∴ تقع فى منطقة الرفض

وبالتالى نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل أى نقبل الفرض القائل بأن التدريب رفع من إنتاجية العامل بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٢): سحبت عينة من طلبة الكلية حجمها ١٥٠ طالب فوجد أن متوسط طول الطالب ١٦٥سم بانحراف معيارى ١٢سم، اختبر الفرض القائل بأن العينة مسحوبة من مجتمع متوسط طول الطالب فيه ١٦٧سم عند درجة ثقة ٩٩%.

الحل

μ = ١٦٧ ن = ١٥٠ $\bar{س}$ = ١٦٥ ع = ١٢

انحراف العينة معلوم ولكن ن ≤ ٣٠ ∴ نستخدم التوزيع الطبيعى

الفرض العدمى ($ض_٠$): μ = ١٦٧

الفرض البديل ($ض_١$): $\mu \neq$ ١٦٧ اختبار طرفين

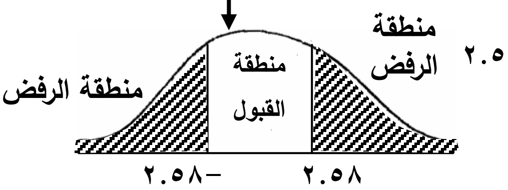
$\propto$ = ١% $ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm$ ٢.٥٨

تحسب القيمة المعيارية (ى المحسوبة):

$$\text{(ى المحسوبة)} = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{١٦٥ - ١٦٧}{\frac{١٢}{\sqrt{١٥٠}}} = -٢.٠٤$$

نحدد القيمة الجدولية (ى الجدولية):

$$ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢.٥٨$$



وحيث أن |ى| المحسوبة < |ى| الجدولية أى تقع فى منطقة القبول،

∴ نقبل الفرض العدمى ونرفض البديل أى نقبل بالفرض القائل بأن العينة مسحوبة من مجتمع متوسط طول الطالب فيه ١٦٧سم بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال(٣): إذا كان متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى إحدى المحافظات ٢٨ أردب بانحراف معيارى ٣ أردب تم استخدام نوع جديد من التقاوى المعالج بالهندسة الوراثية فى مساحة قدرها ٢٥ فدان فبلغ متوسط إنتاج الفدان ٣٢ أردب، اختبر الفرض القائل بأن نوع التقاوى الجديد أدى إلى زيادة إنتاجية الفدان بدرجة ثقة ٩٩% علماً بأن إنتاج الفدان من الذرة يتبع توزيعاً طبيعياً.

الحل

$\mu = ٢٨$ $\delta = ٣$ $ن = ٢٥$ $\bar{س} = ٣٢$ $\propto = ١\%$

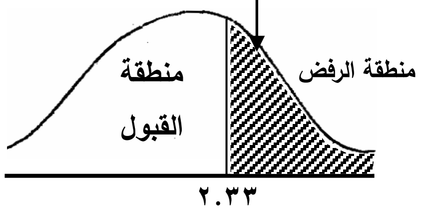
انحراف المجتمع معلوم نستخدم دالة التوزيع الطبيعى (ى)

الفرض العدمى (ض.): $\mu = ٢٨$

الفرض البديل (ض١): $\mu > ٢٨$ اختبار طرف أيمن

نحسب القيمة المعيارية (ى المحسوبة):

$$\text{(ى المحسوبة)} \quad \frac{\overline{\text{س}} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{\text{ن}}}} = \frac{٣٢ - ٢٨}{\frac{٣}{\sqrt{٢٥}}} = ٦.٦٧$$



نحدد قيمة ى الجدولية: ى = ١%

$ى_{\propto} = ٢.٣٣$

وحيث أن ى المحسوبة > ى الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل القائل بأن نوع التقاوى الجديد أدى إلى زيادة إنتاجية الفدان.

مثال (٤): فى دراسة لمعرفة متوسط الإنتاج المعيب فى أحد المصانع تبين أن متوسط إنتاج العامل منها يبلغ ٥ وحدات معيبة يومياً، تم إدخال تعديلات على الآلات بهدف تقليل نسبة الوحدات المعيبة وتم اختيار ٢٠ عامل عشوائياً للعمل على الآلات المعدلة تبين أن متوسط إنتاج العامل من الوحدات المعيبة ٣ وحدات بانحراف معيارى وحدتين. اختبر الفرض القائل بأن التعديل الذى طرأ على الآلات كان السبب فى انخفاض متوسط إنتاج العامل من الوحدات المعيبة يومياً عند مستوى معنوية ٥% علماً بأن توزيع الوحدات المعيبة يتبع التوزيع الطبيعى.

الحل

$\mu = ٥$ ن = ٢٠ $\overline{\text{س}} = ٣$ ع = ٢ $\propto = ٥\%$

انحراف المجتمع غير معلوم، ∴ نستخدم انحراف العينة ع وحيث أن:

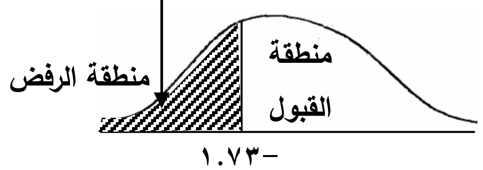
ن < ٣٠   ∴ نستخدم توزيع ت

الفرض العدمى (ض.): μ = ٥

الفرض البديل (ض$_{١}$): μ < ٥   اختبار طرف أيسر

نحسب القيمة المعيارية (ت المحسوبة):

$$(\text{ت المحسوبة}) = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{٣ - ٥}{\frac{٢}{\sqrt{٢٠}}} = -٤.٤٧$$



نحدد القيمة الجدولية (ت الجدولية): ت$_{(١٩، ٠.٠٥)}$ = −١.٧٣

| ت | المحسوبة > | ت | الجدولية   أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل القائل بأن التعديل الذى طرأ على الآلات أدى إلى انخفاض متوسط إنتاج العامل من الوحدات المعيبة بدرجة ثقة ٩٥%.

٢- اختبار أن نسبة حدث ما فى المجتمع (ل) تساوى قيمة معينة
One Sample Test for Proportion

بنفس الأسلوب السابق إذا تم سحب عينة وحساب نسبة حدث معين فيها ($\hat{ل}$) ومقارنة تلك النسبة بمثيلتها فى المجتمع (ل) سنجد أن هناك اختلاف، والاختبار هنا للتحقق من هذا الفرق أو الاختلاف هل هو عشوائى أى يرجع للصدفة نتيجة استخدامنا لأسلوب العينة، أم أنه فرق جوهرى وحتمى يرجع إلى المؤثر الذى نبحث من خلال الاختبار فى مدى تأثيره على مفردات المجتمع وذلك من خلال خطوات الاختبار الإحصائى، حيث:

الفرض العدمى (ض.): ل = قيمة معينة

الفرض البديل (ض$_1$): ل ≠ قيمة معينة   أو ل > قيمة معينة

أو ل < قيمة معينة

ثم نحسب قيمة المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$\boxed{\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{\text{ل}} - \text{ل}}{\sqrt{\dfrac{\text{ل}\,(1-\text{ل})}{\text{ن}}}}}$$

ثم نقارن بين (ى) المحسوبة، (ى) الجدولية ونستكمل خطوات الاختبار كما يتبين من المثال التالى:

مثال (١): إذا كانت نسبة المواليد الذكور فى إحدى المحافظات ٦٠% سحبت عينة من ٢٠٠ مولود عشوائياً وجد من بينها ١٤٠ مولود من الذكور، هل تعتقد أن هذه العينة ممثلة للمجتمع الذى سحبت منه عند درجة ثقة ٩٩%.

الحل

$$\text{ل} = 0.60 \qquad \hat{\text{ل}} = \frac{140}{200} = 0.70 \qquad \text{ن} = 200 \qquad \alpha = 1\%$$

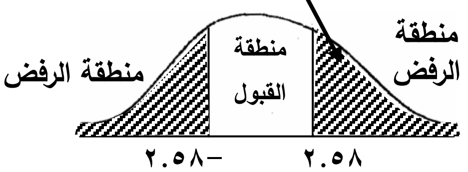
الفرض العدمى (ض$_0$): ل = ٠.٦٠

الفرض البديل (ض$_1$): ل ≠ ٠.٦٠   اختبار طرفين

نحسب قيمة المختبر الإحصائى:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{\text{ل}} - \text{ل}}{\sqrt{\dfrac{\text{ل}\,(1-\text{ل})}{\text{ن}}}} = \frac{0.7 - 0.6}{\sqrt{\dfrac{0.6 \times 0.4}{200}}} = 2.89$$

نحدد قيمة (ى) الجدولية: $\text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} = \pm 2.58$



وحيث أن |ى| المحسوبة > |ى| الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل أى أن هذه العينة لا تمثل المجتمع عند درجة ثقة ٩٩%.

ثانياً: الاختبارات التى تعتمد على عينتين مستقلتين

Two Independent Sample Tests

فى هذه الحالة يتم سحب عينتين مستقلتين حجمها $ن_{١}$، $ن_{٢}$ ومن خلالهما نحسب المتوسطين $\overline{س}_{١}$، $\overline{س}_{٢}$، أو $\hat{ل}_{١}$، $\hat{ل}_{٢}$ وبالطبع سنجد بينهما اختلاف قد يرجع إلى الصدفة أو العشوائية وقد يرجع إلى عوامل سببية، والاختبار الإحصائى هو المنوط بتفسير هذه الاختلافات سواء باختبار معنوية الفرق بين المتوسطين، أو باختبار معنوية الفرق بين النسبتين.

١- اختبار الفرق بين متوسطى مجتمعين:

Two Sample Test for Means

لما كان الاختبار يعتمد على معرفة تأثير عامل معين (مؤثر معين) فإنه من الضرورى أن يتم اختيار عينتين إحداهما من المجتمع الذى لم تخضع مفرداته لاختبار تأثير هذا العامل يكون حجمها $ن_{١}$، ونحسب من خلالها $\overline{س}_{١}$، $ع_{١}^{٢}$، ثم نختار عينة أخرى من المجتمع الذى خضعت مفرداته لاختبار تأثير هذا العامل حجمها $ن_{٢}$ ونحسب من خلالها $\overline{س}_{٢}$، $ع_{٢}^{٢}$، وقد يكون معلوماً لدينا تباين المجتمعين $\delta_{١}^{٢}$، $\delta_{٢}^{٢}$ ومن الطبيعى أنه إذا كنا نبحث فى تأثير هذا العامل فإن الفرض العدمى يقوم على أساس أن هذا العامل لا تأثير له بمعنى أنه لا يوجد فرق بين متوسطى المجتمعين أى أن:

الفرض العدمى (ض.): $\mu_{١} = \mu_{٢}$ أو أن $\mu_{١} - \mu_{٢} =$ صفر

أما الفرض البديل فيأخذ نفس الاتجاهات الثلاثة السابق الإشارة إليها أى أن:

الفرض البديل (ض$_1$):

$\mu_1 \neq \mu_2$ أو $\mu_1 < \mu_2$ أو $\mu_1 > \mu_2$

١/١ تباين المجتمعين معلوم:

فى هذه الحالة نستخدم دالة التوزيع الطبيعى المعيارى ونحسب قيمة المختبر الإحصائى:

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\dfrac{\delta_1^2}{ن_1} + \dfrac{\delta_2^2}{ن_2}}}$$

واستخدام هذه العلاقة مرتبط بنفس شروط استخدامها فى عينة واحدة.

٢/١ تباين المجتمعين غير معلوم:

كما سبق وأشرنا نستخدم تباين العينتين

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\dfrac{ع_1^2}{ن_1} + \dfrac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

وهى تخضع أيضاً لنفس شروط استخدامها فى عينة واحدة.

وبالمثل إذا كان حجم العينتين صغيراً ن$_1$، ن$_2$ < ٣٠ نستخدم القيمة المعيارية (ت):

$$ت \text{ المحسوبة} = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\dfrac{ع_1^2}{ن_1} + \dfrac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

ويمكن استخدام δ_1^2، δ_2^2 إذا كان توزيع الظاهرة يتبع توزيعاً غير التوزيع الطبيعى، ن$_1$، ن$_2$ < ٣٠ أيضاً.

ثم نستكمل خطوات الاختبار الإحصائى كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (١): لمعرفة متوسط إنتاج العامل فى أحد المصانع فى كل من الوردية الصباحية والوردية المسائية تم اختيار ١٠٠ عامل من كل وردية فكانت النتائج كما يلى:

- الوردية الصباحية: متوسط إنتاج العامل ٧٠ قطعة بانحراف معيارى ٥ قطع.
- الوردية المسائية: متوسط إنتاج العامل ٦٥ قطعة بانحراف معيارى ٤ قطع.

هل تعتقد أن هناك اختلاف حقيقى فى مستوى العمال فى الوردتين عند مستوى معنوية ١%.

الحل

العينة الأولى (الوردية الصباحية):

$\text{ن}_{١} = ١٠٠$ $\qquad$ $\overline{\text{س}}_{١} = ٧٠$ $\qquad$ $\text{ع}_{١} = ٥٠$

العينة الثانية (الوردية المسائية):

$\text{ن}_{٢} = ١٠٠$ $\qquad$ $\overline{\text{س}}_{٢} = ٦٥$ $\qquad$ $\text{ع}_{٢} = ٤$

تباين المجتمعين غير معلوم، ∴ نستخدم تباين العينتين وحيث أن $\text{ن}_{١}$، $\text{ن}_{٢} \geq ٣٠$ نستخدم التوزيع الطبيعى.

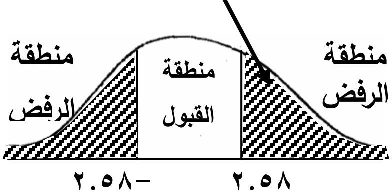
الفرض العدمى: $\mu_{١} = \mu_{٢}$

الفرض البديل: $\mu_{١} \neq \mu_{٢}$ $\qquad$ اختبار طرفين

$\propto = ٠.٠١$ $\qquad$ $\text{ى}_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢.٥٨$

نحسب المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\overline{\text{س}}_{١} - \overline{\text{س}}_{٢}}{\sqrt{\frac{\text{ع}_{١}^{٢}}{\text{ن}_{١}} + \frac{\text{ع}_{٢}^{٢}}{\text{ن}_{٢}}}} = \frac{٧٠ - ٦٥}{\sqrt{\frac{٢٥}{١٠٠} + \frac{١٦}{١٠٠}}} = ٧.٨$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: $\infty = ٠.٠١$ $\qquad$ $ى_{\frac{\infty}{٢}} = \pm ٢.٥٨$

وحيث أن |ى| المحسوبة > |ى| الجدولية، أى تقع فى منطقة الرفض.

∴ نرفض الفرض العدمى القائل بتساوى مستوى العمال فى الوردتين ونقبل الفرض البديل أى القائل بعدم تساوى مستوى العمال فى الوردتين.

أى أن هناك اختلاف حقيقى فى مستوى العمال فى الوردتين بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٢): لمعرفة الفرق بين متوسط وزن الديك ووزن الفرخة فى إحدى مزارع الدواجن تم سحب عينة عشوائية من ١٠٠ ديك فوجد أن متوسط وزن الديك ١.٥كجم بانحراف معيارى ٥٠٠ جرام، وسحبت عينة عشوائية من ١٠٠ فرخة تبين أن متوسط وزن الفرخة ١.٣كجم بانحراف معيارى ٢٥٠جرام. اختبر الفرض القائل بأن الديوك أكثر وزناً من الفراخ عند مستوى معنوية ٥%.

الحـل

الديوك: $ن_١ = ١٠٠$ $\quad$ $\overline{س}_١ = ١.٥$ $\quad$ $ع_١ = ٠.٥$

الفراخ: $ن_٢ = ١٠٠$ $\quad$ $\overline{س}_٢ = ١.٣$ $\quad$ $ع_٢ = ٠.٢٥$

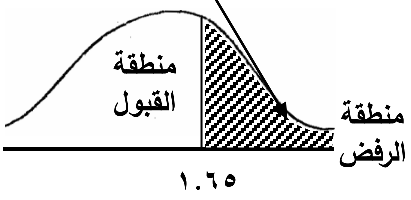
الفرض العدمى: $\mu_١ = \mu_٢$

الفرض البديل: $\mu_١ > \mu_٢$ $\qquad$ اختبار طرف أيمن

$\infty = ٠.٠٥$ $\qquad$ $ى_{٠.٠٥} = ١.٦٥$

نحسب المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\overline{س}_١ - \overline{س}_٢}{\sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}} = \frac{١.٥ - ١.٣}{\sqrt{\frac{(٠.٥)^٢}{١٠٠} + \frac{(٠.٢٥)^٢}{١٠٠}}} = ٣.٥٨$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: $ى_{٠.٠٥}$ = ١.٦٥

وحيث أن ى المحسوبة > ى الجدولية، أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى القائل بتساوى متوسط الوزن ونقبل الفرض البديل القائل بأن متوسط وزن الديوك أكبر من متوسط وزن الفراخ (الديوك أكثر وزناً من الفراخ) بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٣): لمعرفة الفرق بين متوسط درجات الطلبة والطالبات بالفرقة الثالثة بالكلية تم سحب عينة عشوائية من الطلبة حجمها ٢٢٠ طالب وجد أن متوسط درجاتهم فى مادة الإحصاء ١٤ درجة وتم سحب عينة عشوائية من الطالبات حجمها ١٨٠ طالبة وجد أن متوسط درجاتهم فى مادة الإحصاء ١٥ درجة هل تؤيد الفرض القائل بأن مستوى الطلبة أقل من مستوى الطالبات فى مادة الإحصاء عند مستوى معنوية ١% علماً بأن الانحراف المعيارى لدرجات مادة الإحصاء ٥ درجات.

الحل

الطلبة	: $ن_١$ = ٢٢٠	$\overline{س}_١$ = ١٤	$ع_١$ = ٥
الطالبات	: $ن_٢$ = ١٨٠	$\overline{س}_٢$ = ١٥	$ع_٢$ = ٥

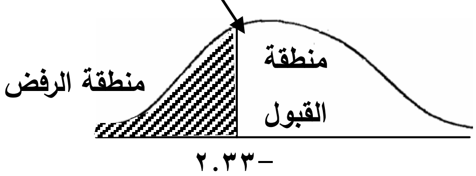
الفرض العدمى: $\mu_1 = \mu_2$

الفرض البديل: $\mu_1 < \mu_2$

مستوى الطلبة أقل من مستوى الطالبات   اختبار طرف أيسر

نحسب المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\overline{س}_١ - \overline{س}_٢}{\sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}} = \frac{١٤ - ١٥}{\sqrt{\frac{٢٥}{٢٢٠} + \frac{٢٥}{١٨٠}}} = -١.٢٤$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: $\alpha = ٠.٠١$ $ى_{٠.٠١} = -٢.٣٣$

وحيث أن |ى| المحسوبة > |ى| الجدولية، أى تقع فى منطقة القبول

∴ نقبل الفرض العدمى القائل بتساوى مستوى الطلبة والطالبات فى مادة الإحصاء ونرفض الفرض البديل القائل بأن مستوى الطلبة أقل من مستوى الطالبات فى مادة الإحصاء بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٤): لمعرفة الفرق بين متوسط وزن الأطفال الذين يعتمدون على الرضاعة الطبيعية، ومتوسط وزن الأطفال الذين يعتمدون على الرضاعة الصناعية، تم اختيار ٢٠ طفل من المجموعة الأولى بطريقة عشوائية فوجد أن متوسط وزن الطفل ٦كجم بانحراف معيارى ١كجم وتم اختيار ٢٥ طفل من المجموعة الثانية عشوائياً فوجد أن متوسط وزن الطفل ٧.٢كجم بانحراف معيارى ١.٣كجم هل تعتقد فى تأثير الرضاعة على وزن الطفل عند مستوى معنوية ٥% علماً بأن وزن الأطفال يتبع التوزيع الطبيعى.

الحل

المجموعة الأولى: $ن_١ = ٢٠$، $\overline{س}_١ = ٦$ ، $ع_١ = ١$

المجموعة الثانية: $ن_٢ = ٢٥$، $\overline{س}_٢ = ٧.٢$ ، $ع_٢ = ١.٣$

تباين المجتمعين غير معلوم، ∴ نستخدم تباين العينتين وحيث أن : $ن_١$، $ن_٢ < ٣٠$ نستخدم توزيع (ت).

الفرض العدمى (ض.): $\mu_١ = \mu_٢$ لا فرق فى متوسط الوزن

الفرض البديل (ض١): $\mu_١ \neq \mu_٢$ هناك فرق فى متوسط الوزن

(اختبار طرفين)

نحسب قيمة المختبر الإحصائى (ت المحسوبة):

$$\text{ت المحسوبة} = \frac{\bar{\text{س}}_{١} - \bar{\text{س}}_{٢}}{\sqrt{\frac{\text{ع}_{١}^{٢}}{\text{ن}_{١}} + \frac{\text{ع}_{٢}^{٢}}{\text{ن}_{٢}}}} = \frac{٦ - ٧.٢}{\sqrt{\frac{(١)^{٢}}{٢٠} + \frac{(١.٣)^{٢}}{٢٥}}} = -٣.٥$$

نحدد قيمة (ت) الجدولية: $\text{ت}_{(\text{ن}_{١}+\text{ن}_{٢}-٢، \frac{\alpha}{٢})} = \text{ت}_{٤٣،٠.٠٢٥} = \pm ٢.٠٢١$

|ت| المحسوبة > |ت| الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض.

∴ نرفض الفرض العدمى القائل بتساوى متوسط الوزن بين المجتمعين ونقبل الفرض البديل القائل بعدم تساوى متوسط الوزن بين المجتمعين أى نقبل بالفرض القائل بتأثير الرضاعة الصناعية على وزن الطفل بدرجة ثقة ٩٥%.

٢- اختبار الفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين:

Two Samples Tests for Proportions

لا يختلف هذا الاختبار عن الاختبار السابق (الفرق بين متوسطى مجتمعين) إلا فى شكل المختبر الإحصائى، حيث يتم سحب عينتين حجمهما $\text{ن}_{١}$، $\text{ن}_{٢}$ وحساب نسبة الحدث فيهما أى $\hat{\text{ل}}_{١}$، $\hat{\text{ل}}_{٢}$ ويقوم هذا الاختبار على فرض أنه لا فرق بين نسبتى الحدث فى المجتمعين:

أى أن الفرض العدمى (ض.): $\text{ل}_{١} = \text{ل}_{٢}$ أو أن $\text{ل}_{١} - \text{ل}_{٢} = \text{صفر}$

الفرض البديل ($\text{ض}_{١}$) فيأخذ إحدى الصور التالية:

$\text{ل}_{١} \neq \text{ل}_{٢}$ أو $\text{ل}_{١} > \text{ل}_{٢}$ أو $\text{ل}_{١} < \text{ل}_{٢}$

ونحسب قيمة المختبر الإحصائى للتوزيع الطبيعى (ى المحسوبة) من خلال العلاقة:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{ل}_{١} - \hat{ل}_{٢}}{\sqrt{\frac{ل_{١}\,(١-ل_{١})}{ن_{١}} + \frac{ل_{٢}\,(١-ل_{٢})}{ن_{٢}}}}$$

وإذا لم تكن النسبة فى المجتمعين معلومة ($ل_{١}$، $ل_{٢}$) فإننا نستخدم نسبة الحدث فى كل عينة بدلاً منها، ومن ثم تصبح قيمة المختبر الإحصائى كما يلى:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{ل}_{١} - \hat{ل}_{٢}}{\sqrt{\frac{\hat{ل}_{١}\,(١-\hat{ل}_{١})}{ن_{١}} + \frac{\hat{ل}_{٢}\,(١-\hat{ل}_{٢})}{ن_{٢}}}}$$

ثم نستمر فى خطوات الاختبار الإحصائى كما يتبين من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١): لمعرفة الفرق بين نسبة الأمية فى الريف والحضر تم سحب عينة من الريف حجمها ٢٠٠ شخص وجد منهم ٥٠ أمياً، وتم سحب عينة من الحضر حجمها ٣٠٠ شخص وجد منهم ٤٢ أمياً، فإذا علمت أن نسبة الأمية فى الريف ٤٠%، وفى الحضر ٣٠%، فهل تعكس نسبة الأمية فى العينتين ارتفاع نسبة الأمية فى الريف عن الحضر عند مستوى معنوية ١%.

الحل

الريف: $ل_{١} = ٠.٤٠$ $\quad \hat{ل}_{١} = \frac{٥٠}{٢٠٠} = ٠.٢٥ \quad ن_{١} = ٢٠٠$

الحضر: $ل_{٢} = ٠.٣٠$ $\quad \hat{ل}_{٢} = \frac{٤٢}{٣٠٠} = ٠.١٤ \quad ن_{٢} = ٣٠٠$

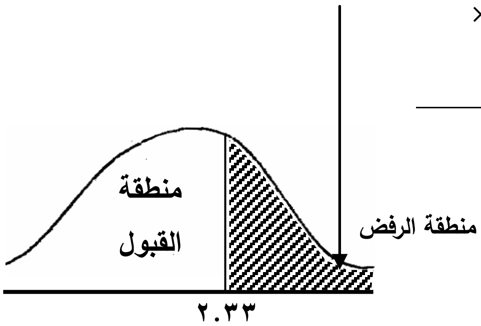
الفرض العدمى: (ض.): $ل_{١} = ل_{٢}$

الفرض البديل: (ض١): ل١ > ل٢   اختبار طرف أيمن

نحسب قيمة المختبر الإحصائى:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{\text{ل}}_{١} - \hat{\text{ل}}_{٢}}{\sqrt{\frac{\text{ل}_{١}\,(١ - \text{ل}_{١})}{\text{ن}_{١}} + \frac{\text{ل}_{٢}\,(١ - \text{ل}_{٢})}{\text{ن}_{٢}}}}$$

$$= \frac{٠.٢٥ - ٠.١٤}{\sqrt{\frac{٠.٤٠ \times ٠.٦٠}{٢٠٠} + \frac{٠.٣٠ \times ٠.٧٠}{٣٠٠}}} = ٢.٥٢$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: اختبار طرف أيمن $\propto$ = ٠.٠١

$\text{ى}_{٠.٠١}$ = ٢.٣٣

وحيث أن ى المحسوبة > ى الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى القائل بتساوى نسبة الأمية بين الريف والحضر ونقبل الفرض البديل القائل بأن نسبة الأمية فى الريف أعلى من الحضر، ومعنى ذلك أن العينتين تعكسان ارتفاع نسبة الأمية فى الريف عن الحضر بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٢): فى دراسة أعدها المركز القومى الأمريكى لقياس الرأى أخذت عينة من مدينة واشنطن حجمها ٥٠٠ ناخب فوجد أن نسبة المؤيدين لمرشح الحزب الجمهورى ٥٣%، وسحبت عينة من مدينة نيويورك حجمها ٣٠٠ ناخب وجد أن

نسبة المؤيدين لنفس المرشح ٥١%، اختبر الفرض القائل بأن هناك اختلافاً حقيقياً بين نسبة مؤيدى الحزب الجمهورى فى المدينتين بدرجة ثقة ٩٩%.

الحـل

واشنطن: $ن_{١} = ٥٠٠$ $\qquad \hat{ل}_{١} = ٠.٥٣$

نيويورك: $ن_{٢} = ٣٠٠$ $\qquad \hat{ل}_{٢} = ٠.٥١$

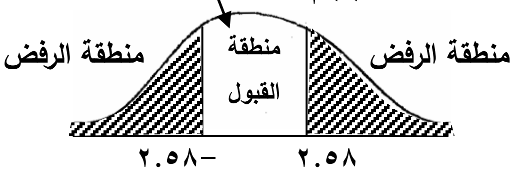
الفرض العدمى: (ض.): $ل_{١} = ل_{٢}$

الفرض البديل: (ض١): $ل_{١} \neq ل_{٢}$ اختبار طرفين

نحسب قيمة المختبر الإحصائى:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{ل}_{١} - \hat{ل}_{٢}}{\sqrt{\frac{\hat{ل}_{١}(١-\hat{ل}_{١})}{ن_{١}} + \frac{\hat{ل}_{٢}(١-\hat{ل}_{٢})}{ن_{٢}}}}$$

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{٠.٥٣ - ٠.٥١}{\sqrt{\frac{٠.٥٣ \times ٠.٤٧}{٥٠٠} + \frac{٠.٥١ \times ٠.٤٩}{٣٠٠}}} = ٠.٥٥$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: اختبار طرفين $\propto = ٠.٠١$

$ى_{٠.٠١} = \pm ٢.٥٨$

وحيث أن $|ى|$ المحسوبة $<$ $|ى|$ الجدولية أى تقع فى منطقة القبول

∴ نقبل الفرض العدمى القائل بتساوى نسبة المؤيدين لمرشح الحزب الجمهورى فى المدينتين ونرفض الفرض البديل القائل بعدم تساوى تلك النسبة بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): فى دراسة لمعرفة نسبة المدخنين بين طلبة وطالبات إحدى الجامعات تم اختيار عينة من الطلبة حجمها ٣٥٠ طالب فوجد أن نسبة المدخنين فيها ٤٥% وسحبت عينة من الطالبات حجمها ٢٥٠ طالبة فوجد أن نسبة المدخنات فيها ٤٠%، هل تؤيد الرأى القائل بأن نسبة المدخنات من طالبات الجامعة أقل من نسبة المدخنين من الطلبة بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

الطلبة: $\text{ن}_{١} = ٣٥٠$ $\qquad \hat{\text{ل}}_{١} = ٠.٤٥$

الطالبات: $\text{ن}_{٢} = ٢٥٠$ $\qquad \hat{\text{ل}}_{٢} = ٠.٤٠$

الفرض العدمى (ض.): $\text{ل}_{١} = \text{ل}_{٢}$

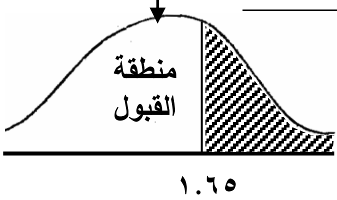
الفرض البديل (ض١): $\text{ل}_{١} > \text{ل}_{٢}$ اختبار طرف أيمن

(يمكن اعتباره طرف أيسر على أساس أن $\text{ل}_{٢} < \text{ل}_{١}$)

نحسب قيمة المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{\text{ل}}_{١} - \hat{\text{ل}}_{٢}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\text{ل}}_{١}\,(١-\hat{\text{ل}}_{١})}{\text{ن}_{١}} + \dfrac{\hat{\text{ل}}_{٢}\,(١-\hat{\text{ل}}_{٢})}{\text{ن}_{٢}}}}$$

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{٠.٤٥ - ٠.٤٠}{\sqrt{\dfrac{٠.٤٥ \times ٠.٥٥}{٣٥٠} + \dfrac{٠.٤٠ \times ٠.٦٠}{٥٠}}} = ١.٢٢$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: $\propto$ = ٠.٠٠٥ ى$_{\propto}$ = ١.٦٥

وحيث أن |ى| المحسوبة > |ى| الجدولية أى تقع فى منطقة القبول

∴ نقبل الفرض العدمى القائل بتساوى نسبة المدخنين من الطلبة والطالبات فى الجامعة ونرفض الفرض البديل القائل بأن نسبة المدخنات من الطالبات أقل من نسبة المدخنين من الطلبة بدرجة ثقة ٩٥%.

الخلاصة :

تحديد حجم العينة

↓

تحكمها معايير

[١]
درجة تجانس مفردات العينة

[٢]
درجة الدقة المطلوبة فى التقدير

[٣]
درجة الثقة أو مستوى الثقة فى التقدير الذى نحصل عليه من العينة

نظرية التقديرات
(تقدير معالم مجتمع)

[١]
تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة $\overline{س}$

↓

١- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (σ).

٢- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع).

٣- حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ).

[٢]
تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$)

↓

١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال.

٢- إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال.

٣- حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل).

[٣]
تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين ($\mu_١-\mu_٢$)

↓

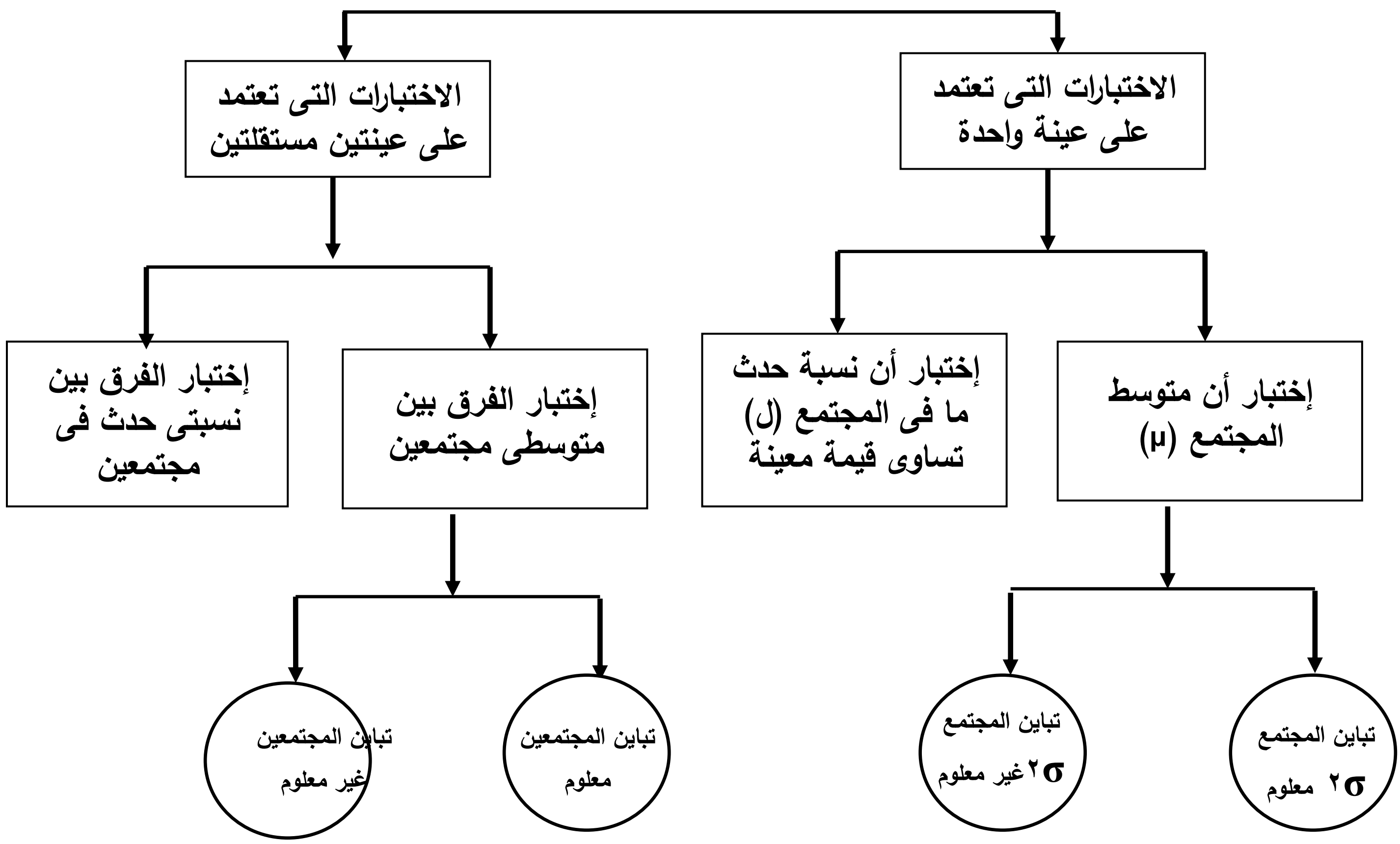
١- التباين للمجتمعين $\sigma_١^٢$ ، $\sigma_٢^٢$ معلومين

٢- التباين المجتمعى مجهولين.

[٤]
تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجمتعين (ل١ – ل٢)

الخلاصة

إختبارات الفروض الإحصائية



تمارين على التقديرات واختبارات الفروض الإحصائية

١- إذا كان طول الطالب فى جامعة القاهرة يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ١٦٥سم وانحراف معيارى ١٥سم، سحبت عينة عشوائية من ١٠٠ طالب فما هو احتمال أن يبلغ متوسط الطول فى العينة ١٧٠سم على الأكثر.

٢- إذا كان متوسط إنتاج الفدان من القمح فى إحدى المحافظات ١٥ أردب بانحراف معيارى ٥ أردب، فإذا كان إنتاج القمح يتبع توزيعاً طبيعياً، اختيرت عينة عشوائية من ٢٠ فدان، فما هو احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١٣، ١٨ أردب.

٣- إذا كانت المساحة المزروعة بالقطن فى إحدى المحافظات ١٠٠ ألف فدان، وكان متوسط إنتاج الفدان ١٥ قنطار بانحراف معيارى ٩ قنطار، تم اختيار عينة عشوائية من ١٠٠ فدان احسب ما يلى:

أ- احتمال أن يبلغ متوسط إنتاج الفدان ١٢ قنطار على الأقل.

ب- احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١٣، ١٥ قنطار.

جـ- المساحة من هذه العينة التى يتراوح متوسط إنتاج الفدان فيها بين ١٥، ١٨ قنطار.

د- متوسط إنتاج الفدان الذى يزيد عنه متوسط إنتاج ٧٥% من المساحة المنزرعة.

٤- إذا كانت المساحة المزروعة بقصب السكر فى إحدى محافظات الوجه القبلى ٥٠٠ ألف فدان، وكان متوسط إنتاج الفدان ١٠٠٠ قنطار بانحراف معيارى ٧٠٠ قنطار، تم اختيار عينة عشوائية من ٢٠٠ فدان، احسب ما يلى:

أ- احتمال أن يبلغ متوسط إنتاج الفدان ٩٠٠ قنطار على الأكثر.

ب- احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١١٠٠، ١٢٠٠ قنطار.

جـ- المساحة من هذه العينة التى يتراوح متوسط إنتاج الفدان فيها بين ٨٠٠ قنطار، ١١٠٠ قنطار.

د- متوسط إنتاج الفدان الذى يقل عنه متوسط إنتاج ٣٠% من المساحة المزروعة.

٥- إذا كانت نسبة الإنتاج المطابق للمواصفات فى أحد المصانع ٨٥% فإذا تم سحب عينة عشوائية من ١٠٠ وحدة من إنتاج المصنع احسب ما يلى:

أ- احتمال أن تبلغ نسبة الوحدات المطابقة للمواصفات فى العينة ٧٥% على الأقل.

ب- احتمال أن تتراوح نسبة الوحدات المطابقة للمواصفات فى العينة بين ٧٠%، ٨٥%.

جـ- عدد الوحدات بالعينة التى يتراوح نسبة الوحدات المطابقة بين ٨٠%، ٩٠%.

٦- أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ عامل من أحد المصانع فوجد أن متوسط العمر ٣٥ سنة بانحراف معيارى ١٥ سنة، فإذا علمت أن العمر يتبع توزيعاً طبيعياً ماذا تستنتج عن متوسط عمر العامل فى المصنع بدرجة ثقة ٩٥%.

٧- أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٥ عامل من أحد المصانع فوجد أن متوسط الدخل الشهرى للعامل ٣٠٠ جنيه بانحراف معيارى ١٠٠ جنيه، فإذا علمت أن توزيع الدخل يقترب جداً من التوزيع الطبيعى.

<u>المطلوب:</u> تقدير فترة ثقة لمتوسط الدخل الشهرى للعامل فى هذا المصنع عند مستوى معنوية ١%.

٨- فى التمرين السابق بفرض أن عدد عمال المصنع ٣٥٠ عامل أوجد نفس المطلوب بدرجة ثقة ٩٥%.

٩- أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٠ طالب من إحدى قاعات الامتحان فوجد أن متوسط طول الطالب ١٦٨سم، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى للطول فى الكلية ١٥سم، وأن توزيع الطول يقترب جداً من التوزيع الطبيعى. المطلوب تقدير متوسط طول الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ٥%.

١٠- فى التمرين السابق إذا علمت أن عدد الطلاب بقاعة الامتحان ٣٠٠ طالب، المطلوب تقدير متوسط طول الطالب بدرجة ثقة ٩٩%.

١١- فى دراسة لمعرفة متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى إحدى المحافظات أخذت عينة عشوائية من ١٠٠ فدان، فوجد أن متوسط إنتاج الفدان ٢٥ أردب، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لإنتاج الفدان من الذرة ٧ أردب، ماذا تستنتج عن متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى هذه المحافظة علماً بأن المساحة المزروعة بالذرة فى هذه المحافظة تبلغ ٥٠ ألف فدان (عند مستوى معنوية ١%).

١٢- فى دراسة لمعرفة متوسط إنتاج العامل فى مصانع السيراميك بمدينة السادس من أكتوبر سحبت عينة من ٣٠٠ عامل وجد أن متوسط الإنتاج اليومى للعامل يبلغ ٥٠ وحدة بانحراف معيارى ٣٠ وحدة. المطلوب تقدير متوسط إنتاج العامل فى مصانع السيراميك عند درجة ثقة ٩٩% علماً بأن عدد العمال فى تلك المصانع فى نفس مجال التخصص ٣ آلاف عامل.

١٣- أوجد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى إحدى المحافظات إذا كنا نرغب ألا يختلف هذا المتوسط عن المتوسط الحقيقى فى المجتمع بأكثر من ٣ أردب وبدرجة ثقة ٩٩%، إذا علمت أن إنتاج الفدان من الذرة يتبع توزيعاً طبيعياً تباينه ٢٢٥ أردب.

١٤- إذا كان إجمالى المساحة المزروعة قطن فى إحدى المحافظات ٥٠ألف فدان ما هو حجم العينة اللازم سحبه لتقدير متوسط إنتاج الفدان من القطن بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى التقدير عن ٢ قنطار للفدان وذلك بدرجة ثقة ٩٥% إذا علمت أن الانحراف المعيارى لإنتاج الفدان من القطن فى عينة استطلاعية يبلغ ٧ قنطار.

١٥- فى دراسة لمعرفة نسبة الطلبة فى الكلية الذين لديهم جهاز كمبيوتر تم سحب عينة بين ٣٠٠ طالب وجد منهم ١٢٠ طالب لديهم جهاز كمبيوتر، قدر بدرجة ثقة ٩٩% نسبة الطلبة الذين لديهم جهاز كمبيوتر فى الكلية.

١٦- سحبت عينة عشوائية من طلبة الكلية من الفرقة الأولى حجمها ٥٠٠ طالب وجد أن نسبة طلاب الانتساب الموجه بها ٢٠% ماذا تستنتج عن نسبة هؤلاء الطلاب فى الكلية بدرجة ثقة ٩٥% علماً بأن عدد طلاب الفرقة الأولى ١٠٠٠٠طالب.

١٧- سحبت عينة عشوائية من طلبة الكلية مكونة من ٤٠٠ طالب فوجد أن نسبة الطلاب القادمين من مدارس حكومية تبلغ ٧٠% ماذا تستنتج عن نسبة هؤلاء الطلاب فى الكلية بدرجة ثقة ٩٩% علماً بأن عدد طلاب الكلية ٢٨٠٠٠طالب.

١٨- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من مجتمع عدد مفرداته ١٠٠٠ شخص لتقدير نسبة الأمية بينهم إذا كان هناك اعتقاد بأن نسبة الأمية فى المجتمع تتراوح بين ٤٥%، ٦٠% بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢% وبدرجة ثقة ٩٩%.

١٩- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من الكلية لتقدير نسبة الطلاب القادمين من مدارس حكومية إذا كان هناك اعتقاد أن تلك النسبة فى الكلية تتراوح بين ٦٠%، ٨٠% بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢.٥% وبدرجة ثقة ٩٥%.

٢٠- أوجد المطلوب فى التمرين السابق بفرض أن عدد طلاب الكلية ٢٨٠٠٠ طالب.

٢١- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من المجتمع لتقدير نسبة المتزوجين بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٣% وبدرجة ثقة ٩٩%.

٢٢- فى دراسة حول متوسط استهلاك الفرد من مياه الشرب على مستوى الجمهورية تم سحب عينة من مدينة القاهرة حجمها ٥٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الفرد ٥٠ لتر يومياً بانحراف معيارى ٢٠ لتر، كما تم سحب عينة من مدينة بنها حجمها ٣٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الفرد ٣٠ لتر يومياً بانحراف معيارى ١٠لتر. المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى استهلاك الفرد من المياه يومياً بين المدينتين بدرجة ثقة ٩٩%.

٢٣- فى دراسة حول متوسط عمر الفرد من المترددين على ملاعب كرة القدم على مستوى الجمهورية تم سحب عينة من ٥٠٠ فرد من ستاد طنطا فوجد أن متوسط عمر الفرد ٢٧ سنة، وتم سحب عينة من ٥٠٠فرد من ستاد المحلة الكبرى فوجد أن متوسط عمر الفرد ٢٣ سنة فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر الفرد من المترددين على ملاعب كرة القدم ١٥ سنة، قدر بدرجة ثقة ٩٥% الفرق بين متوسطى عمر الفرد بين المدينتين.

٢٤- فى دراسة لمعرفة الفرق بين متوسط الدخل الشهرى للعامل فى مصنعين تم سحب عينة من ٢٥ عامل من كل مصنع فكان توزيعهم وفقاً لفئات الدخل الشهرى كما يلى:

فئات الدخل الشهرى	٢٠٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٦٠-	٢٨٠-٣٠٠	**المجموع**
عمال المصنع (أ)	٢	٥	٨	٧	٣	٢٥
عمال المصنع (ب)	١	٣	٧	١٠	٤	٢٥

قدر بدرجة ثقة ٩٩% الفرق بين متوسط الدخل الشهرى للعامل فى المصنعين.

٢٥- أوجد المطلوب فى التمرين السابق علماً بأن عدد العمال فى المصنع (أ) ٥٠٠ عامل وفى المصنع (ب) ٤٠٠ عامل.

٢٦- فى دراسة لمعرفة نسبة الإصابة بمرض البلهارسيا بين الفلاحين على مستوى الجمهورية سحبت عينة من ٥٠٠ فلاح فى محافظة المنوفية

وبإجراء التحاليل اللازمة تبين إصابة ٣٥٠ فلاح بالبلهارسيا وسحبت عينة من ٤٠٠ فلاح فى محافظة أسيوط وبإجراء التحاليل تبين إصابة ٢٦٠ فلاح بالبلهارسيا. المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبة الإصابة بمرض البلهارسيا فى المحافظتين بدرجة ثقة ٩٥%.

٢٧- فى دراسة لمعرفة نسبة الإصابة بالفشل الكلوى على مستوى الجمهورية بين الذكور والإناث سحبت عينة عشوائية من الذكور وأخرى من الإناث حجم كل منها ٥٠٠ من إحدى القرى فتبين أن عدد المصابين بالفشل الكلوى ١٢٠ من الذكور، ٨٠ من الإناث فإذا علمت أن عدد سكان القرية ١٠ آلاف نسمة، قدر بدرجة ثقة ٩٩% الفرق بين نسبة الإصابة بالفشل الكلوى بين الذكور والإناث فى هذه القرية.

٢٨- إذا كان متوسط استهلاك الأسرة من الكهرباء فى مدينة القاهرة يبلغ ١٠٠كيلووات بانحراف معيارى ٢٠كيلووات، ثم سحب عينة من ١٠٠ أسرة تبين أن متوسط استهلاك الأسرة ٢٠كيلووات، اختبر الفرض القائل بأن العينة لا تمثل المجتمع المسحوبة منه عند مستوى معنوية ١%.

٢٩- إذا كان متوسط استهلاك الفرد من مياه الشرب فى مدينة القاهرة يبلغ ٥٠لتر يومياً بانحراف معيارى ٢٠لتر وبعد تكثيف حملة إعلانية عن ترشيد استهلاك المياه، تم سحب عينة من ٢٠٠ فرد وجد أن متوسط استهلاك الفرد منهم من المياه ٤٠لتر يومياً، هل تؤيد الفرض القائل بأن نتائج العينة تؤكد على نجاح الحملة الإعلانية فى خفض استهلاك الفرد من المياه بدرجة ثقة ٩٥%.

٣٠- إذا كان متوسط إنتاج الفدان من قصب السكر ٩٠٠قنطار بانحراف معيارى ٣٠٠قنطار، تم تطبيق نظام جديد فى زراعة ٢٠فدان حيث تم تسوية الأرض بأشعة الليزر فوجد أن متوسط إنتاج الفدان ١٠٠٠قنطار، هل تؤيد الفرض القائل بأن النظام الحديث فى زراعة قصب السكر أدى إلى زيادة إنتاج الفدان عند مستوى معنوية ٥%.

٣١- إذا كان متوسط إنتاج الفدان من الأرض فى محافظة كفر الشيخ يبلغ ٣طن، تم استخدام نوع جديد من التقاوى فى زراعة ٢٥فدان فبلغ متوسط

إنتاج الفدان ٤.٥طن بانحراف معيارى ١.٥طن، هل تعتقد أن للنوع الجديد من التقاوى تأثير على إنتاج الفدان عند مستوى معنوية ١% علماً بأن إنتاج الأرز يتبع التوزيع الطبيعى.

٣٢- سحبت عينة من المترددين على أحد المراكز التجارية حجمها ٢٠فرد تبين أن متوسط مشتريات الفرد ٢٠٠جنيه بانحراف معيارى ٧٠جنيه، هل تؤيد الرأى القائل بأن هذه العينة مسحوبة من مجتمع متوسط مشتريات الفرد فيه ٢٥٠جنيه بدرجة ثقة ٩٥%. علماً بأن مبيعات المركز تتبع توزيعاً طبيعياً.

٣٣- إذا كانت نسبة الإصابة بالبلهارسيا فى إحدى القرى تبلغ ٣٥%، فإذا اخترنا عينة عشوائية من أهالى القرية حجمها ٥٠٠ فرد تبين أن منهم ٢٠٠ شخص مصابون بالبلهارسيا، هل تعتقد أن هذه العينة تمثل المجتمع الذى سحبت منه عند درجة ثقة ٩٩%.

٣٤- لمعرفة الفرق بين كفاءة العمال والعاملات فى إحدى شركات تصدر الموالح تم اختيار عينة من ٤٠ عامل وجد أن متوسط عدد الصناديق التى يعبئها العامل فى الساعة ٢٠صندوق بانحراف معيارى ٧ صناديق وتم سحب عينة من ٥٠ عاملة وجد أن متوسط عدد الصناديق التى تعبئها العاملة فى الساعة ٢٥ صندوق بانحراف معيارى ٨ صناديق، هل تؤيد الرأى القائل بأنه لا فرق بين كفاءة العامل والعاملة فى هذه الشركة عند مستوى معنوية ٥%.

٣٥- أوجد المطلوب فى التمرين السابق إذا علمت أن عدد العمال فى هذه الشركة ٢٠٠ عامل وعدد العاملات ٤٠٠.

٣٦- لمعرفة الفرق بين متوسط درجات الطلبة والطالبات بالفرقة الثالثة بالكلية فى مادة التكاليف تم سحب عينة من الطلبة من ١٥٠ طالب وجد أن متوسط درجاتهم فى مادة التكاليف يساوى ١٤ درجة، وسحبت عينة من الطالبات من ١٢٠ طالبة وجد أن متوسط درجاتهن فى مادة التكاليف ١٣درجة، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لدرجات مادة التكاليف يبلغ ٤درجات، هل تؤيد الفرض القائل بأن مستوى الطلبة أعلى من مستوى الطالبات فى مادة التكاليف عند مستوى معنوية ١%.

٣٧- لمعرفة الفرق بين وزن المواليد الذكور ووزن المواليد الإناث يوم ولادتهم تم تسجيل ٤٠ حالة ولادة فى أحد الأيام منها ٢٣ ذكور، ١٧إناث، فوجد أن متوسط وزن الذكور ٣.١كجم بانحراف معيارى ٠.٤كجم، وبلغ متوسط وزن الإناث ٢.٩كجم بانحراف معيارى ٠.٥كجم، هل تؤيد الرأى القائل بأن نوع المولود لا يؤثر فى وزنه عند الولادة بدرجة ثقة ٩٥%. علماً بأن وزن المولود يتبع توزيعاً طبيعياً.

٣٨- فى دراسة لمعرفة الفرق فى متوسط الوزن بين الطلبة والطالبات بشعبة اللغة الإنجليزية، تم سحب عينة من ٥٠٠ طالب فوجد أن متوسط وزن الطالب ٦٧كجم بانحراف معيارى ٨كجم وتم سحب عينة من ٤٠٠طالبة فوجد أن متوسط وزن الطالبة ٦١كجم بانحراف معيارى ٥كجم، هل تؤيد الفرض القائل بأن الطالبات أقل وزناً من الطلبة بدرجة ثقة ٩٩%.

٣٩- أوجد المطلوب فى التمرين السابق بفرض أن عدد طلاب شعبة اللغة الإنجليزية ٥٠٠طالب وعدد الطالبات ٧٠٠ طالبة.

٤٠- لمعرفة الفرق فى نسبة حضور المحاضرات بين الطلبة والطالبات تم سحب عينة من الطلبة حجمها ٢٠٠ طالب وجد أن نسبة الحضور بينهم ٦٥% وتم سحب عينة من الطالبات حجمها ١٥٠ طالبة وجد أن نسبة الحضور بينهن ٧٥%، هل تؤيد الفرض القائل بأن نسبة حضور الطلبة أقل من الطالبات عند مستوى معنوية ٥%.

٤١- إذا علمت أن نسبة حضور المحاضرات بين طلاب النظامى ٦٥% ونسبة الحضور من طلاب الانتساب الموجه ٦٠%، أخذت عينة عشوائية من طلبة النظامى حجمها ١٥٠ طالب فوجد أن نسبة الحضور فيها ٧٠% وأخذت عينة عشوائية من طلبة الانتساب الموجه حجمها ١٥٠ طالب فوجد أن نسبة الحضور فيها ٩٥%، فهل تعكس نسبة الحضور فى العينتين ارتفاع نسبة حضور طلبة النظامى عن طلبة الانتساب الموجه عند مستوى معنوية ١%.

٤٢- لمعرفة الفرق فى نسبة حضور المباريات بين جماهير الأهلى وجماهير الزمالك تم سحب عينة عشوائية من مشجعى النادى الأهلى حجمها ٥٠٠

مشجع وجد من بينهم ٣٥٠ مشجع يحضرون المباريات، وتم سحب عينة من مشجعى نادى الزمالك حجمها ٥٠٠ مشجع من بينهم ٢٧٠ مشجع يحضرون المباريات، هل تؤيد الرأى القائل بتساوى نسبة حضور جماهير الناديين للمباريات عند مستوى معنوية ٥%.

الباب السادس
الأرقام القياسية
Index Numbers

ويحتوى على :

الفصل الأول : الأرقام القياسية باستخدام المناسيب.

الفصل الثانى : الأرقام القياسية التجميعية.

الأهداف السلوكية :

بعد دراسة موضوع هذا الباب يجب أن يكون الدارس قادراً على أن:

١- يتعرف على أداة إحصائية لقياس التغيرات أو التقلبات فى قيمة متغير أو مجموعة من المتغيرات من فترة زمنية لأخرى أو من مكان لآخر.

٢- يتعرف على طرق تركيب الأرقام القياسية وطرق إيجاد الرقم القياسى باستخدام المناسيب البسيطة وطرق إيجاد الرقم القياسى باستخدام المناسيب المرجحة.

٣- يتعرف على طرق تركيب الأرقام القياسية التجمعية للأسعار البسيطة أو المرجحة بكميات سنة الأساس أو كميات سنة المقارنة أو الوسط الحسابى أو الوسط الهندسى للكميات أو الرقم القياسى الأمثل.

العناصر:

[١] الفصل الأول: الأرقام القياسية باستخدام المناسيب

١- الاعتبارات الواجب مراعاتها فى تركيب الأرقام القياسية.

٢- طرق تركيب الأرقام القياسية.

١/٢ الأرقام القياسية باستخدام المناسيب.

١/١/٢ الأرقام القياسية باستخدام المناسيب البسيطة.

٢/١/٢ الأرقام القياسية باستخدام المناسيب المرجحة.

[٢] الفصل الثانى: الأرقام القياسية التجميعية.

١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار.

٢- الأرقام القياسية التجميعية المرجحة.

١/٢ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير).

٢/٢ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة (رقم باش).

٣/٢ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنتى الأساس والمقارنة (رقم مارشال ادجورث).

٤/٢ الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر).

[٣] الخلاصة.

[٤] تمارين على الباب السادس.

الفصل الأول
الأرقام القياسية باستخدام المناسيب
Index Numbers of Relatives

مقدمة:-

ظهرت فكرة الأرقام القياسية تحقيقا للرغبة فى قياس التغير فى الأسعار على وجه الخصوص فى فترات زمنية متتالية، ثم اتسع نطاق استخدامها لتشمل قياس التغير فى الكميات أو التغير فى القيمة بين فترات زمنية متتالية.

ومن ثم فإن الرقم القياسى عبارة عن أداة إحصائية لقياس التغيرات أو التقلبات فى متغير أو مجموعة من المتغيرات ذات الصلة من فترة زمنية لأخرى أو من مكان لأخر.

وعلى الرغم من تعدد المجالات التى تستخدم فيها الأرقام القياسية فإن الأسعار مازالت هى أهم نواحى النشاط التجارى التى تطبق عليها هذه الأداة الإحصائية.

الاعتبارات الواجب مراعاتها فى تركيب الأرقام القياسية:-

مع الأخذ فى الاعتبار أن الاهتمام ينصب أساسا على دراسة التغير فى الأسعار فإن هناك مجموعة من الاعتبارات التى يجب مراعاتها فى تركيب (إعداد) الأرقام القياسية منها:-

١- **تحديد السلع التى يراد تتبع التغير فى أسعارها:** بمعنى تحديد المواصفات التجارية والتسويقية لكل سلعة وتحديد المصادر التى تؤخذ منها أسعار هذه السلع هل المنتجين أم تجار الجملة أم تجار التجزئة.

٢- **تحديد سنة الأساس: Base Year** أى تحديد السنة التى ينسب إليها التغير والتى يجب أن تكون عادية أى لم يحدث بها أى تغيرات عرضية حيث أننا

إذا نسبنا إلى سنة تتسم بالكساد فإننا سنحصل على رقم قياسى مرتفع جداً بالقياس إلى سنة الأساس، وبالعكس إذا نسبنا إلى سنة تتسم بالانتعاش فإننا سنحصل على رقم قياسى منخفض جداً.

ومن الضرورى مراعاة طول الفترة الزمنية بين سنة الأساس وسنة المقارنة لأننا قد نجد سلعاً قد اختفت وسلعاً أخرى ظهرت لم يكن لها وجود لابد من إدخالها، كما أن الأهمية النسبية للسلع تتغير بمرور الزمن.

٣- **إذا كنا بصدد تركيب رقم قياسى للأسعار** فإنه من الضرورى الاستمرار فى تجميع الأسعار على فترات منتظمة من بداية فترة الدراسة (تاريخ سنة الأساس) إلى نهاية الفترة المحددة للدراسة (تاريخ سنة المقارنة) مع مراعاة توحيد عملية القياس خلال فترة الدراسة.

٤- **اختبار أوزان الترجيح:**-بمعنى إعطاء أوزان ترجيحية لأسعار بعض السلع لكى نعبر عن أهميتها بالنسبة الأخرى فإذا كان ما ينفق على الطعام يعادل ٤ أمثال ما ينفق على الملبس فإنه لابد أن يعادل الوزن الذى نعطيه للطعام ٤ أمثال الوزن الذى يعطى للملبس.

٥- **مقارنة أسعار السلعة أو السلع فى الفترات المختلفة** بسعرها أو أسعارها فى سنة الأساس للاستدلال على التغيرات التى طرأت على هذه الأسعار.

طرق تركيب الأرقام القياسية:-

هناك طرق عديدة لتركيب الأرقام القياسية لكل منها مزاياه التى تتفق مع طبيعة البيانات المتوفرة وتتلاءم مع ظروف استخدامها وبصفة عامة فإنه أياً ما كانت الطريقة التى نستخدمها، سواء اعتمدنا على المقاييس البسيطة أو المرجحة فإن هناك مدخلين أساسين هما:-

- **استخدام المناسيب Relatives**
- **استخدام الأرقام التجميعية Aggregative Numbers**

وقبل أن نشرع فى بيان الأنواع المختلفة للأرقام القياسية لابد أن نضع تعريفاً بالرموز التى سوف نستخدمها:-

السعر فى سنة الأساس $ع_.$ السعر فى سنة المقارنة $ع_١$

الكمية فى سنة الأساس $ك_.$ الكمية فى سنة المقارنة $ك_١$

القيمة فى سنة الأساس $ق_. = ع_. \times ك_.$ القيمة فى سنة المقارنة $ق_١ = ع_١ \times ك_١$

المنسوب م الرقم القياسى ى

أولاً: الأرقام القياسية باستخدام المناسيب:-

المنسوب هو أبسط أنواع الأرقام القياسية، وهو مقياس للتغير فى قيمة ظاهرة فى سنة معينة (المقارنة) إلى قيمتها فى سنة سابقة (الأساس) كنسبة مئوية.

وهناك مناسيب عديدة: نتعرف عليها من خلال التقسيم التالى:-

فى حالة التعامل مع سلعة واحدة: Single Item

$$١- \text{منسوب سعر السلعة} = \frac{\text{سعر السلعة فى سنة المقارنة}}{\text{سعر السلعة فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$$

$$\boxed{\text{منسوب سعر السلعة (م)} = \frac{ع_١}{ع_.} \times ١٠٠ \quad \textbf{Price Relative}}$$

$$٢- \text{منسوب كمية السلعة} = \frac{\text{كمية السلعة فى سنة المقارنة}}{\text{كمية السلعة فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$$

$$\boxed{\text{منسوب كمية السلعة (م)} = \frac{ك_١}{ك_.} \times ١٠٠ \quad \textbf{Quantity Relative}}$$

$$٣- \text{منسوب قيمة السلعة} = \frac{\text{قيمة السلعة فى سنة المقارنة}}{\text{قيمة السلعة فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$$

منسوب قيمة السلعة (م) = $\frac{ق_1}{ق_0} \times ١٠٠$ **Value Relative**

٤- منسوب أجر العامل = $\frac{\text{أجر العامل فى سنة المقارنة}}{\text{أجر العامل فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$ **Wage Relative**

وهكـذا،،

مثال (١):- بفرض أن سعر سلعة معينة فى سنة ١٩٩٦ هو ٢٥٠ جنيه ثم أصبح ٢٨٠جنية فى سنة ١٩٩٧. احسب التغير النسبى الذى حدث فى سعر هذه السلعة.

الحـــل

$ع_0$ =٢٥٠ $ع_1$ = ٢٨٠

منسوب سعر السلعة (م)= $\frac{ع_1}{ع_0} \times ١٠٠$

م = $\frac{٢٨٠}{٢٥٠} \times ١٠٠$= ١١٢%

ومعنى ذلك أن سعر السلعة فى سنة ١٩٩٧ زاد بنسبة ١٢% عن سعرها فى سنة ١٩٩٦.

فى حالة التعامل مع مجموعة من السلع: Group of Items

إذا كان لدينا مجموعة من السلع عددها (ن) سلعة فإنه يمكن حساب عدد (ن) من المناسيب أى $م_1$،$م_2$، $م_3$....، $م_ن$ ومن ثم فإنه يمكن حساب الرقم القياسى للتغير فى أسعار هذه المجموعة السلعية باعتباره متوسطا لمناسيب أسعار هذه السلع وهذه المتوسطات إما أن تكون حسابية أو هندسية أو توافقية كما يمكن أن تكون بسيطة أو مرجحة.

١- الرقم القياسى باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب:-

$$\text{الرقم القياسى} = \frac{\text{مجموع المناسيب}}{\text{عددها}}$$

$$ى = \frac{م_١ + م_٢ + م_٣ + .. + م_ن}{ن}$$

$$\boxed{ى = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} م_ر}{ن}}$$

٢- الرقم القياسى باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب:-

$$ى = \sqrt[ن]{م_١ \times م_٢ \times م_٣ \times ..... \times م_ن}$$

$$\boxed{\text{لو } ى = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} \text{لو } م_ر}$$

٣- الرقم القياسى باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب:

$$ى = \frac{ن}{\frac{١}{م_١} + \frac{١}{م_٢} + \frac{١}{م_٣} + ... + \frac{١}{م_ن}}$$

$$\boxed{ى = \frac{ن}{\sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{م_ر}}}$$

الوسط التوافقى عبارة عن مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات المناسيب.

مثال (٢):- الجدول التالى يوضح أسعار ٤ سلع فى سنتى ١٩٨٧، ١٩٩٧:-

السلعة / السنة	أ	ب	جـ	د
١٩٨٧	٢٠	١٠٠	٤٥	٨
١٩٩٧	٦٠	٢٥٠	٩٠	٢٠

والمطلوب:-

حساب الرقم القياسى لأسعار هذه السلع باستخدام الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى لمناسيب الأسعار.

الحـل

نبدأ بحساب مناسيب الأسعار للسلع الأربع:-

منسوب سعر السلعة أ = $\frac{٦٠}{٢٠} \times ١٠٠ = ٣٠٠\%$

منسوب سعر السلعة ب = $\frac{٢٥٠}{١٠٠} \times ١٠٠ = ٢٥٠\%$

منسوب سعر السلعة جـ = $\frac{٩٠}{٤٥} \times ١٠٠ = ٢٠٠\%$

منسوب سعر السلعة د = $\frac{٢٠}{٨} \times ١٠٠ = ٢٥٠\%$

١- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب:-

$$ى = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} م_ر}{ن}$$

$$= \frac{٣٠٠ + ٢٥٠ + ٢٠٠ + ٢٥٠}{٤} = \frac{١٠٠٠}{٤} = ٢٥٠\%$$

٢- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب:-

$$لو\ ى = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} لو\ م_ر$$

$$لو\ ى = \frac{١}{٤} (لو٣٠٠ + لو٢٥٠ + لو\ ٢٠٠ + لو٢٥٠)$$

$$لو\ ى = \frac{١}{٤} (٢.٤٧٧ + ٢.٣٩٨ + ٢.٣٠١ + ٢.٣٩٨)$$

$$لو\ ى = \frac{١}{٤} (٩.٥٧٤)$$

لو ى = ٢.٣٩٧٥ وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم

∴ ى = ٢٤٧.٥%

٣- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب:-

$$ى = \frac{ن}{\sum_{ر=١} \frac{١}{م_ر}}$$

$$ى = \frac{٤}{\frac{١}{٣٠٠} + \frac{١}{٢٥٠} + \frac{١}{٢٠٠} + \frac{١}{٢٥٠}}$$

$$ى = \frac{٤}{٠.٠٠٣ + ٠.٠٠٤ + ٠.٠٠٥ + ٠.٠٠٤} = \frac{٤}{٠.٠١٦} = ٢٥٠\%$$

ثانياً: الأرقام القياسية باستخدام المناسيب المرجحة:-

إن الأرقام القياسية السابقة والخاصة بمتوسطات المناسيب أعطت نفس الدرجة من الأهمية لكل سلعة وهو ما قد يكون مخالفا للحقيقة والواقع، حيث تتفاوت الأهمية النسبية لكل سلعة، ومن ثم فإنه يفضل أن يعكس الرقم القياسى المحسوب هذه الحقيقة ومن الشائع استخدام قيمة السلعة فى سنة الأساس (ق.) أو

فـى سـنة المقارنـة ($\text{ق}_{١}$) أو الأهميـة النسـبية لهـا (و) كـأوزان لتـرجيح مناسـيب الأسعار.

وقيمة السلعة فى سنة الأساس $\text{ق}_{.} = \text{ع}_{.} \times \text{ك}_{.}$

وقيمة السلعة فى سنة المقارنة $\text{ق}_{١} = \text{ع}_{١} \times \text{ك}_{١}$

والأهمية النسبية (أو الأوزان النسبية) لابد ان يكون مجموعها = ١٠٠%

١- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة:

$$\text{الرقم القياسى} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب المناسيب} \times \text{أوزان الترجيح}}{\text{مجموع أوزان الترجيح}}$$

$$\boxed{\text{ى} = \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}_{.}\ \text{م}_{\text{ر}}}{\text{مج ق}_{.}}}$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة الأساس $\text{ق}_{.}$

أو $$\boxed{\text{ى} = \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}_{١}\ \text{م}_{\text{ر}}}{\text{مج ق}_{١}}}$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة المقارنة $\text{ق}_{١}$

أو $$\text{ى} = \boxed{\frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{و}\ \text{م}_{\text{ر}}}{\text{مج و}}}$$ باستخدام الأوزان النسبية و

٢- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة:-

$$\text{ى} = \sqrt[\text{مج ق}_{.}]{(\text{م}_{١})^{\text{ق}_{.}} \times (\text{م}_{٢})^{\text{ق}_{.}} \times (\text{م}_{٣})^{\text{ق}_{.}} \times \ldots \times (\text{م}_{\text{ن}})^{\text{ق}_{.}}}$$

$$\boxed{\text{لو ى} = \frac{١}{\text{مج ق}_{.}} \left(\sum_{\text{ر}=١} \text{ق}_{.}\ \text{لو م}_{\text{ر}} \right)}$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة الأساس $\text{ق}_{.}$

أو $ى = \sqrt[\text{مجـ ق}_1]{(م_1)^{ق_1} \times (م_2)^{ق_1} \times (م_3)^{ق_1} \times \dots \times (م_ن)^{ق_1}}$

$\boxed{لو\ ى = \frac{1}{\text{مجـ ق}_1} \left(\sum_{ر=1}^{ن} ق_1 \text{ لو } م_ر \right)}$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة المقارنة ق١.

أو $ى = \sqrt[\text{مجـ و}]{(م_1)^{و_1} \times (م_2)^{و_1} \times (م_3)^{و_1} \times \dots \times (م_ن)^{و_ن}}$

$\boxed{لو\ ى = \frac{1}{\text{مجـ و}} \left(\sum_{ر=1}^{ن} و \text{ لو } م_ر \right)}$ باستخدام الأوزان النسبية و

٣- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة:-

$\boxed{ى = \frac{\text{مجـ ق}_0}{\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{ق_0}{م_ر} \right)}}$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة الأساس ق.

أو $\boxed{ى = \frac{\text{مجـ ق}_1}{\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{ق_1}{م_ر} \right)}}$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة المقارنة ق١

أو $\boxed{ى = \frac{\text{مجـ و}}{\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{و}{م_ر} \right)}}$ باستخدام الأوزان النسبية و

مثال (٣):- فيما يلى بيان بأسعار مجموعة من السلع والكميات المنتجة منها فى سنتى ١٩٨٧، ١٩٩٧:-

السلعة	السعر		الكمية المنتجة	
	١٩٨٧	١٩٩٧	١٩٨٧	١٩٩٧
أ	١٢	١٨	٢١٠	٣٠٠
ب	١٨	٢٢	٥٢٠	٦٠٠
جـ	١٠	١٥	٤٦	٥٠
د	٢٠	٣٠	٨٨	١٠٠

<u>والمطلوب</u>:-

١- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس وكذلك المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة.

٢- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس وكذلك المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة.

٣- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس وكذلك المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة.

الحــل

السلعة	مناسيب الأسعار ($م_ر$)	لو $م_ر$	قيمة السلعة فى سنة الأساس (ق.)	قيمة السلعة فى سنة المقارنة (ق١)
أ	١٥٠%	٢.١٧٦	٢٥٢٠	٥٤٠٠
ب	١٢٢%	٢.٠٨٦	٩٣٦٠	١٣٢٠٠
جـ	١٥٠%	٢.١٧٦	٤٦٠	٧٥٠
د	١٥٠%	٢.١٧٦	١٧٦٠	٣٠٠٠
المجموع			١٤١٠٠	٢٢٣٥٠

ق٠ مر	ق١ مر	ق٠ لو مر	ق١ لو مر	$\frac{\text{ق٠}}{\text{مر}}$	$\frac{\text{ق١}}{\text{مر}}$
٣٧٨٠٠٠	٨١٠٠٠٠	٥٤٨٣.٧٥	١١٧٥٠.٨٩	١٦.٨	٣٦
١١٤١٩٢٠	١٦١٠٤٠٠	١٩٥٢٨.٣٣	٢٧٥٣٩.٩٥	٧٦.٧	١٠٨.٢
٦٩٠٠٠	١١٢٥٠٠	١٠٠١.٠٠	١٦٣٢.٠٧	٣.٠٧	٥.٠
٢٦٤٠٠٠	٤٥٠٠٠٠	٣٨٢٩.٩٢	٦٥٢٨.٢٧	١١.٧٣	٢٠.٠
١٨٥٢٩٢٠	٢٩٨٢٩٠٠	٢٩٨٤٣	٤٧٤٥١.١٨	١٠٨.٣	١٦٩.٢

١- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس:-

$$\text{ى} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق٠ مر}}{\text{مجـ ق٠}} = \frac{١٨٥٢٩٢٠}{١٤١٠٠} = ١٣١.٤\%$$

٢- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة:-

$$\text{ى} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق١ مر}}{\text{مجـ ق١}} = \frac{٢٩٨٢٩٠٠}{٢٢٣٥٠} = ١٣٣.٥\%$$

٣- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس:-

$$\text{لو ى} = \frac{1}{\text{مجـ ق٠}} \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق٠ لو مر} \right)$$

$$\text{لو ى} = \frac{١}{١٤١٠٠} (٢٩٨٤٣)$$

لو ى = ٢.١١٦٥ وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم

ى= ١٣٠.٨%

٤- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة:

$$\text{لو ى} = \frac{1}{\text{مجـ ق}_1}\left(\sum_{ر=1}^{ن} \text{ق}_1 \text{ لو م}_ر\right)$$

$$\text{لو ى} = \frac{1}{22350}\left(47451.18\right)$$

لو ى = ٢.١٢٣١ وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم.

ى = ١٣٢.٨%.

٥- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس:

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ق}_0}{\sum_{ر=1}^{ن}\left(\frac{\text{ق}_0}{\text{م}_ر}\right)} = \frac{14100}{108.3} = 130.2\%$$

٦- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة:

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ق}_1}{\sum_{ر=1}^{ن}\left(\frac{\text{ق}_1}{\text{م}_ر}\right)} = \frac{22350}{169.2} = 132.1\%$$

مثال (٤):- تنتج إحدى الشركات نوع معين من السلع وتستخدم فى إنتاجه أربعة مكونات أساسية هى أ، ب، جـ ، د فإذا علمت أن أسعار هذه المكونات فى سنتى ١٩٨٥، ١٩٩٥ كانت كما يلى:-

السلعة	أ	ب	جـ	د
السعر فى سنة ١٩٨٥	٢٢	٣٠	٤٥	١٠٠
السعر فى سنة ١٩٩٥	٢٨	٣٥	٦٠	١٦٠

فإذا علمت أن هذه المكونات تمثل النسب التالية فى إنتاج هذه السلعة:
١٥% ، ٥٠% ، ١٠% ، ٢٥% على الترتيب.

المطلوب:-

١- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة.

٢- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة.

٣- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة.

الحــل

السلعة	**المناسيب ($م_ر$)**	**لو $م_ر$**	**أوزان الترجيح (و)**	**و$م_ر$**	**و لو $م_ر$**	$\frac{و}{م_ر}$
أ	%١٢٧	٢.١٠٤	%١٥	١٩٠٥	٣١.٥٦	٠.١١٨
ب	%١١٧	٢.٠٦٨	%٥٠	٥٨٥٠	١٠٣.٤١	٠.٤٢٧
جـ	%١٣٣	٢.١٢٤	%١٠	١٣٣٠	٢١.٢٤	٠.٠٧٥
د	%١٦٠	٢.٢٠٤	%٢٥	٤٠٠٠	٥٥.١٠	٠.١٥٦
المجموع			%١٠٠	١٣٠٨٥	٢١١.٣١	٠.٧٧٦

١- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة:-

$$\text{ى} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{و } \text{م}_{\text{ر}}}{\sum \text{و}} = \frac{١٣٠٨٥}{١٠٠} = ١٣٠.٨٥\%٢$$

٢- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة:-

$$\text{لو ى} = \frac{١}{\sum \text{و}} \left(\sum_{\text{ر}=1} \text{و لو } \text{م}_{\text{ر}}\right)$$

$$\text{لو ى} = \frac{١}{١٠٠} (٢١١.٣١) = ٢.١١٣١$$ وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم

ى = ١٢٩.٧٥%

٣- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة:-

$$\text{ى} = \frac{\sum \text{و}}{\sum_{\text{ر}=1} \frac{\text{و}}{\text{م}_{\text{ر}}}} = \frac{١٠٠}{٠.٧٧٦} = ١٢٨.٩\%$$

الفصل الثانى

الأرقام القياسية التجميعية

Aggregative Index Numbers

المقدمة:

لاشك أن استخدام المناسيب يتيح لنا التعرف على التغير الذى يطرأ على كل سلعة على حدة، بالإضافة إلى إمكان استخدام تلك المناسيب فى تركيب رقم قياسى لدراسة التغير على مستوى المجموعة السلعية ككل.

أما الأرقام القياسية التجميعية فإنها تتعامل مع المجموعات السلعية كوحدة واحدة مع إعطاء أهمية متساوية لكل مكوناتها (الأرقام البسيطة) أو ترجيحها بشكل يعكس تفاوت أهميتها النسبية (الأرقام المرجحة).

أولاً: الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار:-

Simple Aggregate Index Number:

يتميز هذا الرقم بالسهولة التامة حيث يتم تجميع أسعار السلع المكونة للمجموعة الخاضعة للدراسة فى كل من سنتى المقارنة والأساس وإيجاد النسبة المئوية بينهما بعد الضرب ×١٠٠.

أى أن

$$\boxed{ى = \frac{\text{مجـ ع}_{١}}{\text{مجـ ع}_{.}} \times ١٠٠}$$

ولاشك أن هناك قيودا على استخدام هذا الرقم من أهمها ضرورة تجانس وحدات القياس لمجموعة السلع.

ثانياً: الأرقام القياسية التجميعية المرجحة:-

Weighted Aggregate Index Numbers:

ويتم ترجيح أسعار السلع إما باستخدام كميات سنة الأساس (ك.) أو باستخدام كميات سنة المقارنة (ك١) أو باستخدام الوسط الحسابى أو الوسط الهندسى لكميات سنتى الأساس والمقارنة.

١- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير):-(Laspeyre's Index)

ويعتمد هذا الرقم على الكميات المتداولة من السلع فى سنة الأساس (ك.) ولهذا يعرف بطريقة سنة الأساس Base Year Method ويأخذ هذا الرقم الصيغة التالية:-

$$ى = \frac{\text{مجـ ع١ ك.}}{\text{مجـ ع. ك.}} \times ١٠٠$$

٢- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة (رقم باش): -: Pache’s Index

ويعتمد هذا الرقم على الكميات المتداولة من السلع فى سنة المقارنة (ك١) ولهذا يعرف بطريقة سنة المقارنة Given Year Method ويأخذ هذا لرقم الصيغة التالية:-

$$ى = \frac{\text{مجـ ع١ ك١}}{\text{مجـ ع. ك١}} \times ١٠٠$$

٣- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنتى الأساس والمقارنة (رقم مارشال إدجورث):- Marshal- Edgeworth Index

لاشك أن اعتماد رقم لاسبير على الكميات المتداولة من السلع فى سنة الأساس واعتماد رقم باش على الكمية المتداولة من السلع فى سنة المقارنة يفترض

معهما استمرار ثبات الكميات المتداولة من السلع كما هى خلال فترة الدراسة وهو افتراض يستبعد تأثير التغير فى أسعار السلع على الكميات المتداولة منها ومن ثم يؤدى إلى زيادة فى قيمة رقم لاسبير ونقص فى قيمة رقم باش. وعلاجا لهذه المشكلة اقترح (مارشال وإدجورث) استخدام الكميات المتداولة من السلع فى سنتى الأساس والمقارنة إما باستخدام الوسط الحسابى للكميات، أو الوسط الهندسى للكميات:-

٣/١ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الحسابى للكميات:

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_{1}\,(\text{ك}_{0} + \text{ك}_{1})}{\text{مجـ ع}_{0}\,(\text{ك}_{0} + \text{ك}_{1})} \times ١٠٠$$

٣/٢ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الهندسى للكميات:

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_{1}\,\sqrt{(\text{ك}_{0}\,\text{ك}_{1})}}{\text{مجـ ع}_{0}\,\sqrt{(\text{ك}_{0}\,\text{ك}_{1})}} \times ١٠٠$$

٤- الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر) :

Ideal Index Number (fisher's Index)

توصل إرفنج فيشر Irving Fisher إلى رقم قياسى يجمع بين رقمى لاسبير وباش وأطلق عليه الرقم القياسى الأمثل ويأخذ الصورة التالية:

$$\text{ى} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{1}\,\text{ك}_{0}}{\text{مجـ ع}_{0}\,\text{ك}_{0}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{1}\,\text{ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}\,\text{ك}_{1}}} \times ١٠٠$$

أو

$$\text{رقم فيشر} = \sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}} \times ١٠٠$$

مثـال (١): الجدول التـالى يوضـح أسعار وكميات المـواد المستخدمة فـى صـناعة إحدى السلع فى عامى ١٩٩٠، ١٩٩٥:

المواد	الأسعار		الكميات	
	١٩٩٠	**١٩٩٥**	**١٩٩٠**	**١٩٩٥**
أ	٣٠	٤٠	٢٠	٣٠
ب	١٥	٣٠	١٠	٢٠
جـ	٥	١٠	٧٥	٨٥
د	٨	٢٠	١٠٠	١٢٠

<u>والمطلوب:</u>

١ - الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار.

٢- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير)

٣- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة (رقم باش).

٤-الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الحسابى للكميات (رقم مارشال إدجورث)

٥-الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الهندسى للكميات (رقم مارشال – إدجورث).

٦-الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر).

الحـل

المواد	**ع$_{٠}$**	**ع$_{١}$**	**ك$_{٠}$**	**ك$_{١}$**	**ع$_{١}$ ك$_{٠}$**	**ع$_{٠}$ك$_{٠}$**	**ع$_{١}$ ك$_{١}$**	**ع$_{٠}$ ك$_{١}$**
أ	٣٠	٤٠	٢٠	٣٠	٨٠٠	٦٠٠	١٢٠٠	٩٠٠
ب	١٥	٣٠	١٠	٢٠	٣٠٠	١٥٠	٦٠٠	٣٠٠
جـ	٥	١٠	٧٥	٨٥	٧٥٠	٣٧٥	٨٥٠	٤٢٥
د	٨	٢٠	١٠٠	١٢٠	٢٠٠٠	٨٠٠	٢٤٠٠	٩٦٠
المجموع	٥٨	١٠٠	٢٠٥	٢٥٥	٣٨٥٠	١٩٢٥	٥٠٥٠	٢٥٨٥

ك. + ك١	ع١ (ك. + ك١)	ع. (ك. + ك١)	$\sqrt{}$ ك.ك١	ع١ $\sqrt{}$ ك.ك١	ع. $\sqrt{}$ ك.ك١
٥٠	٢٠٠٠	١٥٠٠	٢٤.٤٩٥	٩٧٩.٨	٧٣٤.٨
٣٠	٩٠٠	٤٥٠	١٤.١٤٢	٤٢٤.٣	٢١٢.١
١٦٠	١٦٠٠	٨٠٠	٧٩.٨٤٤	٧٩٨.٤	٣٩٩.٢
٢٢٠	٤٤٠٠	١٧٦٠	١٠٩.٥٤٥	٢١٩٠.٩	٨٧٦.٤
٤٦٠	٨٩٠٠	٤٥١٠	٢٢٨.٠٢٦	٤٣٩٣.٤	٢٢٢٢.٥

١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار:-

$$ى = \frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع.}} \times ١٠٠ = \frac{١٠٠}{٥٨} \times ١٠٠ = ١٧٢.٤\%$$

٢- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير):

$$ى = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك.}}{\text{مجـ ع.ك.}} \times ١٠٠ = \frac{٣٨٥٠}{١٩٢٥} = ٢٠٠\%$$

٣- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة (رقم باش):

$$ى = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع.ك}_1} \times ١٠٠ = \frac{٥٠٥٠}{٢٥٨٥} \times ١٠٠ = ١٩٥.٤\%$$

٤- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الحسابى للكميات (رقم مارشال- إدجورث):

$$ى = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ (ك.+ ك}_1\text{)}}{\text{مجـ ع. (ك.+ ك}_1\text{)}} \times ١٠٠ = \frac{٨٩٠٠}{٤٥١٠} \times ١٠٠ = ١٩٧.٣\%$$

٥- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الهندسى للكميات (رقم مارشال- إدجورث):

$$ى = \frac{\text{مجـ ع}_1 \sqrt{\text{(ك. ك}_1\text{)}}}{\text{مجـ ع.} \sqrt{\text{(ك. ك}_1\text{)}}} \times ١٠٠ = \frac{٤٣٩٣.٤}{٢٢٢٢.٥} \times ١٠٠ = ١٩٧.٧\%$$

٦- الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر):-

$$ى = \sqrt{\frac{\text{مج ع}_1\text{ك}_.}{\text{مج ع}_.\text{ك}_.} \times \frac{\text{مج ع}_1\text{ك}_1}{\text{مج ع}_.\text{ك}_1}} \times ١٠٠$$

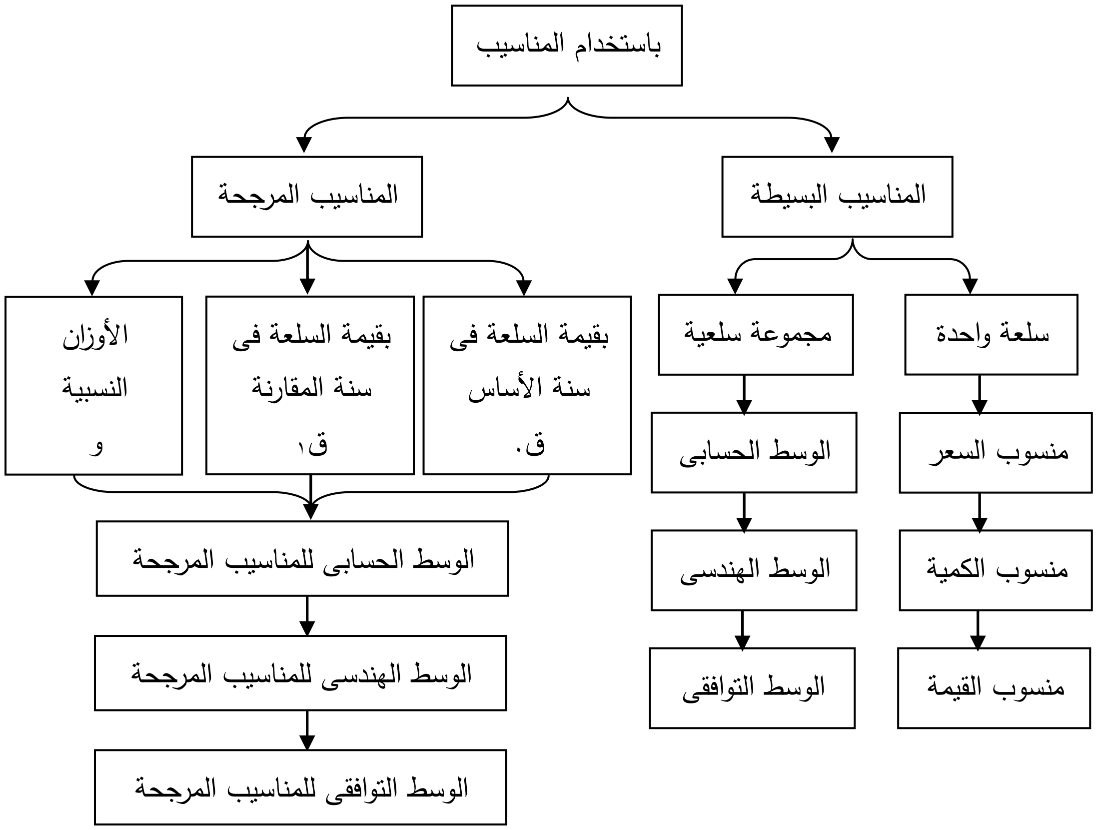
$$= \sqrt{\frac{٣٨٥٠}{١٩٢٥} \times \frac{٥٠٥٠}{٢٥٨٥}} \times ١٠٠$$

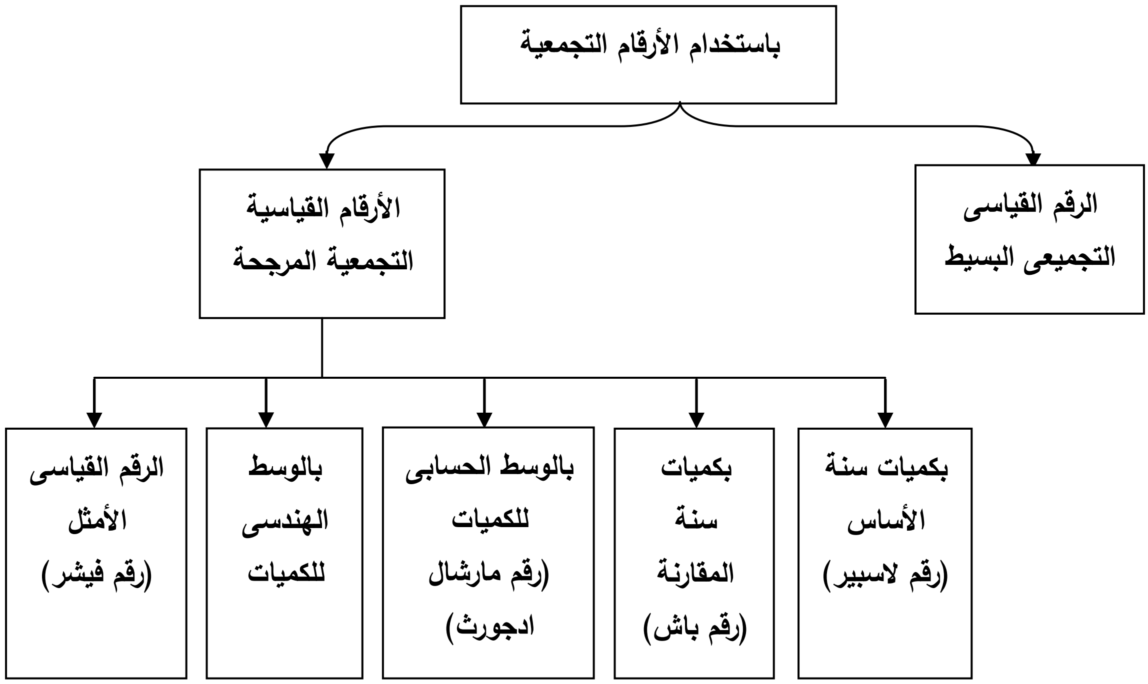
$$= \sqrt{٣.٩٠٧١٦} \times ١٠٠ = ١.٩٧٧ \times ١٠٠ = ١٩٧.٧\%$$

الخلاصـــــــة

الأرقام القياسية

طرق تركيب الأرقام القياسية :




باستخدام الأرقام التجمعية
الرقم القياسى التجميعى البسيط
الأرقام القياسية التجمعية المرجحة
بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير)
بكميات سنة المقارنة (رقم باش)
بالوسط الحسابى للكميات (رقم مارشال ادجورث)
بالوسط الهندسى للكميات
الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر)

تمارين على الأرقام القياسية

١) فيما يلى بيان بأسعار مجموعة من السلع والكميات المنتجة منها فى سنتى ١٩٨٥، ١٩٩٨:-

السلعة	السعر		الكمية المنتجة	
	١٩٩٥	١٩٩٨	١٩٩٥	١٩٩٨
أ	١٢	١٨	٢١٠	٣٠٠
ب	١٨	٢٢	٥٢٠	٦٠٠
جـ	١٠	١٥	٤٦	٥٠
د	٢٠	٣٠	٨٨	١٠٠

اعتبر سنة ١٩٩٥ هى سنة الأساس وأوجد الرقم القياسى للأسعار فى سنة ١٩٩٨ باستخدام:-

١- الوسط الحسابى للمناسيب.

٢- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة

٣- الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس.

٤- الرقم القياسى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس.

٥-الرقم القياسى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة.

٦- الرقم القياسى الأمثل.

٢) إذا علمت أن الرقم القياسى لأسعار سنة ١٩٩٠ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٨٠ هو ٢٥٠% وأن الرقم القياسى لأسعار سنة ١٩٩٥ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٨٠ هو ٣٠٠% أوجد الرقم القياسى لأسعار سنة ١٩٩٥ بالنسبة لأسعار ١٩٩٠ ثم أوجد نسبة التغير فى السعر.

٣) تتضمن المجموعة السلعية للحبوب أربعة سلع أساسية هى القمح والذرة والأرز والفول وقد توفرت لدينا البيانات التالية عن الأسعار والكميات المتداولة لهذه السلع:-

السلعة	القمح	الذرة	الأرز	الفول
السعر للطن عام ١٩٩٠	٥٠	٣٠	٦٠	٤٠
السعر للطن عام ١٩٩٥	٦٠	٤٥	٩٠	٥٠
الكميات بالمليون طن عام ١٩٩٥	٢	٣.٣	٢.٥	٠.٢٦

والمطلوب:– حساب الرقم القياسى لأسعار هذه المجموعة السلعية باستخدام رقم قياسى مناسب.

٤) توفرت لدينا بيانات عن السعر بالجنية والكمية المستخدمة (بالطن) لمستلزمات الإنتاج الداخلة فى إحدى الصناعات فكانت على النحو التالى:–

النوع	السعر		الكمية	
	١٩٩٠	١٩٩٥	١٩٩٠	١٩٩٥
أ	٢٧٠٠	٣٠٠٠	١٤٠	١٥٠
ب	٧٥٠٠	٩٠٠٠	٦٠	١٠٠
جـ	١٥٠٠	٢٢٠٠	١٠٠	١٥٠

المطلوب:-

١- حساب الرقم القياسى للأسعار المرجحة بالوسط الحسابى للكميات.

٢- حساب الرقم القياسى للأسعار المرجحة بالوسط الهندسى للكميات

٣- حساب الرقم القياسى الأمثل للأسعار.

٥) يقوم أحد المصانع بإنتاج أربعة سلع هى أ،ب،جـ،د وفيما يلى بيان بكميات الإنتاج والأسعار عن عامى ١٩٩٥، ١٩٩٨:–

السنة / السلعة	أ		ب		جـ		د	
	كمية	السعر	كمية	السعر	كمية	السعر	الكمية	السعر
١٩٩٥	٢٥٠	٦٠	٤٠٠	٨٠	٣٠٠	١٥٠	١٠٠	٢٥٠
١٩٩٨	٣٠٠	٩٠	٦٠٠	١٥٠	٥٠٠	٣٢٠	٢٢٠	٦٠٠

<u>والمطلوب</u>:-

١- حساب الرقم القياسى الأمثل للأسعار.

٢- حساب الرقم القياسى باستخدام الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار وذلك للسلعتين أ، ب فقط.

٣- حساب الرقم القياسى باستخدام الوسط الحسابى لمناسيب الكميات وذلك للسلعتين جـ، د فقط.

المــلاحــق

جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٠.٠٠	٠.٥٠٠٠٠	٠.١٥	٠.٥٥٩٦٢	٠.٣٠	٠.٦١٧٩١
٠.٠١	٠.٥٠٣٩٩	٠.١٦	٠.٥٦٣٥٦	٠.٣١	٠.٦٢١٧٢
٠.٠٢	٠.٥٠٧٩٨	٠.١٧	٠.٥٦٧٤٩	٠.٣٢	٠.٦٢٥٥٢
٠.٠٣	٠.٥١١٩٧	٠.١٨	٠.٥٧١٤٢	٠.٣٣	٠.٦٢٩٣٠
٠.٠٤	٠.٥١٥٩٥	٠.١٩	٠.٥٧٥٣٥	٠.٣٤	٠.٦٣٣٠٧
٠.٠٥	٠.٥١٩٩٤	٠.٢٠	٠.٥٧٩٢٦	٠.٣٥	٠.٦٣٣٠٧
٠.٠٦	٠.٥٢٣٩٢	٠.٢١	٠.٥٨٣١٧	٠.٣٦	٠.٦٤٠٥٨
٠.٠٧	٠.٥٢٧٩٠	٠.٢٢	٠.٥٨٧٠٦	٠.٣٧	٠.٦٤٤٣١
٠.٠٨	٠.٥٣١٨٦	٠.٢٣	٠.٥٩٠٩٥	٠.٣٨	٠.٦٤٨٠٣
٠.٠٩	٠.٥٣٥٨٦	٠.٢٤	٠.٥٩٤٨٣	٠.٣٩	٠.٦٥١٧٣
٠.١٠	٠.٥٣٩٨٣	٠.٢٥	٠.٥٩٨٧٧	٠.٤٠	٠.٦٥٥٤٢
٠.١١	٠.٥٤٣٨٠	٠..٢٦	٠.٦٠٢٥٧	٠.٤١	٠.٦٥٩١٠
٠.١٢	٠.٥٤٧٧٦	٠.٢٧	٠.٦٠٦٤٢	٠.٤٢	٠.٦٦٢٧٦
٠.١٣	٠.٥٥١٧٢	٠.٢٨	٠.٦١٠٢٦	٠.٤٣	٠.٦٦٦٤٠
٠.١٤	٠.٥٥٥٦٧	٠.٢٩	٠.٦١٤٠٩	٠.٤٤	٠.٦٧٠٠٣

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٠.٤٥	٠.٦٧٣٦٤	٠.٦٥	٠.٧٤٢١٥	٠.٨٥	٠.٨٠٢٣٤
٠.٤٦	٠.٦٧٧٢٤	٠.٦٦	٠.٧٤٥٣٧	٠.٨٦	٠.٨٠٥١١
٠.٤٧	٠.٦٨٠٨٢	٠.٦٧	٠.٧٤٨٥٧	٠.٨٧	٠.٨٠٧٨٥
٠.٤٨	٠.٦٨٤٣٩	٠.٦٨	٠.٧٥١٧٥	٠.٨٨	٠.٨١٠٥٧
٠.٤٩	٠.٦٨٧٩٣	٠.٦٩	٠.٧٥٤٩٠	٠.٨٩	٠.٨١٣١٧
٠.٥٠	٠.٦٩١٤٦	٠.٧٠	٠.٧٥٨٠٤	٠.٩٠	٠.٨١٥٩٤
٠.٥١	٠.٦٩٤٩٧	٠.٧١	٠.٧٦١١٥	٠.٩١	٠.٨١٨٥٩
٠.٥٢	٠.٦٩٨٤٧	٠.٧٢	٠.٧٦٤٢٤	٠.٩٢	٠.٨٢١٢١
٠.٥٣	٠.٧٠١٩٤	٠.٧٣	٠.٧٦٧٣٠	٠.٩٣	٠.٨٢٣٨١
٠.٥٤	٠.٧٠٥٤٠	٠.٧٤	٠.٧٧٠٣٥	٠.٩٤	٠.٨٢٦٢٩
٠.٥٥	٠.٧٠٨٨٤	٠.٧٥	٠.٧٧٣٣٧	٠.٩٥	٠.٨٢٨٩٤
٠.٥٦	٠.٧١٢٢٦	٠.٧٦	٠.٧٧٦٣٧	٠.٩٦	٠.٨٣١٤٧
٠.٥٧	٠.٧١٥٦٦	٠.٧٧	٠.٧٧٩٣٥	٠.٩٧	٠.٨٣٣٩٨
٠.٥٨	٠.٧١٩٠٤	٠.٧٨	٠.٧٨٢٣٠	٠.٩٨	٠.٨٣٦٤٦
٠.٥٩	٠.٧٢٢٤٠	٠.٧٩	٠.٧٨٥٢٤	٠.٩٩	٠.٨٣٨٩١
٠.٦٠	٠.٧٢٥٧٥	٠.٨٠	٠.٧٨٨١٤	١.٠٠	٠.٨٤١٣٤
٠.٦١	٠.٧٢٩٠٧	٠.٨١	٠.٧٩١٠٣	١.٠١	٠.٨٤٣٧٥
٠.٦٢	٠.٧٣٢٣٧	٠.٨٢	٠.٧٩٣٨٩	١.٠٢	٠.٨٤٦١٤
٠.٦٣	٠.٧٣٥٦٥	٠.٨٣	٠.٧٩٦٧٣	١.٠٣	٠.٨٤٨٥٠
٠.٦٤	٠.٧٣٨٩١	٠.٨٤	٠.٧٩٩٥٥	١.٠٤	٠.٨٥٠٨٣

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
١.٠٥	٠.٨٥٣١٤	١.٢٥	٠.٨٩٤٣٥	٠.١٥	٠.٩٢٦٤٧
١.٠٦	٠.٨٥٥٤٣	١.٢٦	٠.٨٩٦١٧	١.٤٦	٠.٩٢٧٨٦
١.٠٧	٠.٨٥٧٦٩	١.٢٧	٠.٨٩٧٩٦	١.٤٧	٠.٩٢٩٢٢
١.٠٨	٠.٨٥٩٩٣	١.٢٨	٠.٨٩٩٧٣	١.٤٨	٠.٩٣٠٥٦
١.٠٩	٠.٨٦٢١٤	١.٢٩	٠.٩٠١٤٧	١.٤٩	٠.٩٣١٨٩
١.١٠	٠.٨٦٤٣٣	١.٣٠	٠.٩٠٣٢٠	١.٥٠	٠.٩٣٣١٩
١.١١	٠.٨٦٦٥٠	١.٣١	٠.٩٠٤٩٠	١.٥١	٠.٩٣٤٤٨
١.١٢	٠.٨٦٨٦٤	١.٣٢	٠.٩٠٦٥٨	١.٥٢	٠.٩٣٥٧٤
١.١٣	٠.٨٧٠٧٦	١.٣٣	٠.٩٠٨٢٤	١.٥٣	٠.٩٣٦٩٩
١.١٤	٠.٨٧٢٨٦	١.٣٤	٠.٩٠٩٨٨	١.٥٤	٠.٩٣٨٢٢
١.١٥	٠.٨٧٤٩٣	١.٣٥	٠.٩١١٤٩	١.٥٥	٠.٩٣٩٤٣
١.١٦	٠.٨٧٦٩٨	١.٣٦	٠.٩١٣٠٩	٠.١٥٦	٠.٦٢٩٤٠
١.١٧	٠.٨٧٩٠٠	١.٣٧	٠.٩١٤٦٦	١.٥٧	٠.٩٤١٧٩
١.١٨	٠.٨٨١٠٠	١.٣٨	٠.٩١٦٢١	١.٥٨	٠.٩٤٢٩٥
١.١٩	٠.٨٨٢٩٨	١.٣٩	٠.٩١٧٧٤	١.٥٩	٠.٩٤٤٠٨
١.٢٠	٠.٨٨٤٩٣	١.٤٠	٠.٩١٩٢٤	١.٦٠	٠.٩٤٥٢٠
١.٢١	٠.٨٨٦٨٦	١.٤١	٠.٩٢٠٧٣	١.٦١	٠.٩٤٦٣٠
١.٢٢	٠.٨٨٨٧٧	١.٤٢	٠.٩٢٢٢٠	١.٦٢	٠.٩٤٧٣٨
١.٢٣	٠.٨٩٠٦٥	١.٤٣	٠.٩٢٣٦٤	١.٦٣	٠.٩٤٨٤٥
١.٢٤	٠.٨٩٢٥١	١.٤٤	٠.٩٢٥٠٧	١.٦٤	٠.٩٤٩٥٠

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
١.٦٥	٠.٩٥٠٥٣	١.٨٥	٠.٨٤٩٦٧	٢.٠٥	٠.٩٧٩٨٢
١.٦٦	٠.٩٥١٥٤	١.٨٦	٠.٩٦٨٥٦	٢.٠٦	٠.٩٨٠٣٠
١.٦٧	٠.٩٥٢٥٤	١.٨٧	٠.٩٦٩٢٦	٢.٠٧	٠.٩٨٠٧٧
١.٦٨	٠.٩٥٣٥٢	١.٨٨	٠.٩٦٩٩٥	٢.٠٨	٠.٩٨١٢٤
١.٦٩	٠.٩٥٤٤٩	١.٨٩	٠.٩٧٠٦٢	٢.٠٩	٠.٩٨١٦٩
١.٧٠	٠.٩٥٥٤٣	١.٩٠	٠.٩٧١٢٨	٢.١٠	٠.٩٨٢١٤
١.٧١	٠.٩٥٦٣٦	١.٩١	٠.٩٧١٩٣	٢.١١	٠.٩٨٢٥٧
١.٧٢	٠.٩٥٧٢٨	١.٩٢	٠.٩٧٢٥٧	٢.١٢	٠.٩٨٣٠٠
١.٧٣	٠.٩٥٨١٨	١.٩٣	٠.٩٧٣٢٠	٢.١٣	٠.٩٨٣١٤
١.٧٤	٠.٩٥٩٠٧	١.٩٤	٠.٩٧٣٨١	٢.١٤	٠.٩٨٣٨٢
١.٧٥	٠.٩٥٩٩٤	١.٩٥	٠.٩٧٤٤١	٢.١٥	٠.٩٨٤٢٢
١.٧٦	٠.٩٦٠٨٠	١.٩٦	٠.٩٧٥٠٠	٢.١٦	٠.٩٨٤٦١
١.٧٧	٠.٩٦١٦٤	١.٩٧	٠.٩٧٥٥٨	٢.١٧	٠.٩٨٥٠٠
١.٧٨	٠.٩٦٢٤٦	١.٩٨	٠.٩٧٦١٥	٢.١٨	٠.٩٨٥٣٧
١.٧٩	٠.٩٦٣٢٧	١.٩٩	٠.٩٧٦٧٠	٢.١٩	٠.٩٨٥٧٤
١.٨٠	٠.٩٦٤٠٧	٢.٠٠	٠.٩٧٧٢٥	٢.٢٠	٠.٩٨٦١٠
١.٨١	٠.٩٦٤٨٥	٢.٠١	٠.٩٧٧٧٥	٢.٢١	٠.٩٨٦٤٥
١.٨٢	٠.٩٦٥٦٢	٢.٠٢	٠.٩٧٨٣١	٢.٢٢	٠.٩٨٦٧٩
١.٨٣	٠.٩٦٦٣٨	٢.٠٣	٠.٩٧٨٨٢	٢.٢٣	٠.٩٨٧١٣
١.٨٤	٠.٩٦٧١٢	٢.٠٤	٠.٩٧٩٣٢	٢.٢٤	٠.٩٨٧٤٥

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٢.٢٥	٠.٩٨٧٧٨	٢.٤٥	٠.٩٩٢٨٦	٢.٦٥	٠.٩٩٥٩٨
٢.٢٦	٠.٩٨٨٠٩	٢.٤٦	٠.٩٩٣٠٥	٢.٦٦	٠.٩٩٦٠٩
٢.٢٧	٠.٩٨٨٤٠	٢.٣٧	٠.٩٩٣٢٤	٢.٦٧	٠.٩٩٦٢١
٢.٢٨	٠.٩٨٨٧٠	٢.٣٨	٠.٩٩٣٤٣	٢.٦٨	٠.٩٩٦٣٢
٢.٢٩	٠.٩٨٨٩٩	٢.٤٩	٠.٩٩٣٦١	٢.٦٩	٠.٩٩٦٤٣
٢.٣٠	٠.٩٨٩٢٨	٢.٥٠	٠.٩٩٣٧٩	٢.٧٠	٠.٩٩٦٥٣
٢.٣١	٠.٩٨٩٥٦	٢.٥١	٠.٩٩٣٩٦	٢.٧١	٠.٩٩٦٦٤
٢.٣٢	٠.٩٨٩٨٣	٢.٥٢	٠.٩٩٤١٣	٢.٧٢	٠.٩٩٦٧٤
٢.٣٣	٠.٩٩٠١٠	٢.٥٣	٠.٩٩٤٣٠	٢.٧٣	٠.٩٩٦٨٣
٢.٣٤	٠.٩٩٠٣٦	٠.٢٥٤	٠.٩٩٤٤٦	٢.٧٤	٠.٩٩٦٩٣
٢.٣٥	٠.٩٩٠٦١	٢.٥٥	٠.٩٩٤٦١	٢.٧٥	٠.٩٩٧٠٢
٢.٣٦	٠.٩٩٠٨٦	٢.٥٦	٠.٩٩٤٧٧	٢.٧٦	٠.٩٩٧١١
٢.٣٧	٠.٩٩١١١	٢.٥٧	٠.٩٩٤٩٢	٢.٧٧	٠.٩٩٧٢٠
٢.٣٨	٠.٩٩١٣٤	٢.٥٨	٠.٩٩٥٠٦	٢.٧٨	٠.٩٩٧٢٨
٢.٣٩	٠.٩٩١٥٨	٢.٥٩	٠.٩٩٥٢٠	٢.٧٩	٠.٩٩٧٣٦
٢.٤٠	٠.٩٩١٨٠	٢.٦٠	٠.٩٩٥٣٤	٢.٨٠	٠.٩٩٧٤٤
٢.٤١	٠.٩٩٢٠٢	٢.٦١	٠.٩٩٥٤٧	٢.٨١	٠.٩٩٧٥٢
٢.٤٢	٠.٩٩٢٢٤	٢.٦٢	٠.٩٩٥٦٠	٢.٨٢	٠.٩٩٧٦٠
٢.٤٣	٠.٩٩٢٤٥	٢.٦٣	٠.٩٩٥٧٣	٢.٨٣	٠.٩٩٧٦٧
٢.٤٤	٠.٩٩٢٦٦	٢.٦٤	٠.٩٩٥٨٥	٢.٨٤	٠.٩٩٧٧٤

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٢.٨٥	٠.٩٩٧٨١	٣.٠٥	٠.٩٩٨٨٦	٣.٢٥	٠.٩٩٩٤٢
٢.٨٦	٠.٩٩٧٨٨	٣.٠٦	٠.٩٩٨٨٩	٣.٢٦	٠.٩٩٩٤٤
٢.٨٧	٠.٩٩٧٩٥	٣.٠٧	٠.٩٩٨٩٣	٣.٢٧	٠.٩٩٩٤٦
٢.٨٨	٠.٩٩٨٠١	٣.٠٨	٠.٩٩٨٩٧	٣.٢٨	٠.٩٩٩٤٨
٢.٨٩	٠.٩٩٨٠٧	٣.٠٩	٠.٩٩٩٠٠	٣.٢٩	٠.٩٩٩٥٠
٢.٩٠	٠.٩٩٨١٣	٣.١٩	٠.٩٩٩٠٣	٣.٣٠	٠.٩٩٩٥٢
٢.٩١	٠.٩٩٨١٩	٣.١١	٠.٩٩٩٠٦	٣.٣١	٠.٩٩٩٥٣
٢.٩٢	٠.٩٩٨٢٥	٣.١٢	٠.٩٩٩١٠	٣.٣٢	٠.٩٩٩٥٥
٢.٩٣	٠.٩٩٨٣١	٣.١٣	٠.٩٩٩١٣	٢.٣٣	٠.٩٩٩٥٧
٢.٩٤	٠.٩٩٨٣٦	٣.١٤	٠.٩٩٩١٦	٣.٣٤	٠.٩٩٩٥٨
٢.٩٥	٠.٩٩٨٤١	٣.١٥	٠.٩٩٩١٨	٣.٣٥	٠.٩٩٩٦٠
٢.٩٦	٠.٩٩٨٤٦	٣.١٦	٠.٩٩٩٢١	٣.٣٦	٠.٩٩٩٦١
٢.٩٧	٠.٩٩٨٥١	٣.١٧	٠.٩٩٩٢٤	٣.٣٧	٠.٩٩٩٦٢
٢.٩٨	٠.٩٩٨٥٦	٣.١٨	٠.٩٩٩٢٦	٣.٣٨	٠.٩٩٩٦٤
٢.٩٩	٠.٩٩٨٦١	٣.١٩	٠.٩٩٩٢٩	٣.٣٩	٠.٩٩٩٦٥
٣.٠٠	٠.٩٩٨٦٥	٣.٢٠	٠.٩٩٩٣١	٣.٤٠	٠.٩٩٩٦٦
٣.٠١	٠.٩٩٨٦٩	٣.٢١	٠.٩٩٩٣٤	٣.٤١	٠.٩٩٩٦٨
٣.٠٢	٠.٩٩٨٧٤	٣.٢٢	٠.٩٩٩٣٦	٣.٤٢	٠.٩٩٩٦٩
٣.٠٣	٠.٩٩٨٧٨	٣.٢٣	٠.٩٩٩٣٨	٣.٤٣	٠.٩٩٩٧٠
٣.٠٤	٠.٩٩٨٢	٣.٢٤	٠.٩٩٩٤٠	٣.٤٤	٠.٩٩٩٧١

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٣.٤٥	٠.٩٩٩٧٢	٣.٦٥	٠.٩٩٩٨٧	٣.٨٥	٠.٩٩٩٩٤
٣.٤٦	٠.٩٩٩٧٣	٣.٦٦	٠.٩٩٩٨٧	٣.٨٦	٠.٩٩٩٩٤
٣.٤٧	٠.٩٩٩٧٤	٣.٦٧	٠.٩٩٩٨٨	٣.٨٧	٠.٩٩٩٩٥
٣.٤٨	٠.٩٩٩٧٥	٣.٦٨	٠.٩٩٩٨٨	٣.٨٨	٠.٩٩٩٩٥
٣.٤٩	٠.٩٩٩٧٦	٣.٦٩	٠.٩٩٩٨٩	٣.٨٩	٠.٩٩٩٩٥
٣.٥٠	٠.٩٩٩٧٧	٣.٧٠	٠.٩٩٩٨٩	٣.٩٠	٠.٩٩٩٩٥
٣.٥١	٠.٩٩٩٧٨	٣.٧١	٠.٩٩٩٩٠	٣.٩١	٠.٩٩٩٩٥
٣.٥٢	٠.٩٩٩٧٨	٣.٧٢	٠.٩٩٩٩٠	٣.٩٢	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٣	٠.٩٩٩٧٩	٣.٧٣	٠.٩٩٩٩٠	٣.٩٣	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٤	٠.٩٩٩٨٠	٣.٧٤	٠.٩٩٩٩١	٣.٩٤	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٥	٠.٩٩٩٨١	٣.٧٥	٠.٩٩٩٩١	٣.٩٥	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٦	٠.٩٩٩٨١	٣.٧٦	٠.٩٩٩٩٢	٣.٩٦	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٧	٠.٩٩٩٨٢	٣.٧٧	٠.٩٩٩٩٢	٣.٩٧	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٨	٠.٩٩٩٨٣	٣.٧٨	٠.٩٩٩٩٢	٣.٩٨	٠.٩٩٩٩٧
٣.٥٩	٠.٩٩٩٨٣	٣.٧٩	٠.٩٩٩٩٢	٣.٩٩	٠.٩٩٩٩٧
٣.٦٠	٠.٩٩٩٨٤	٣.٨٠	٠.٩٩٩٩٣	٤.٠٠	٠.٩٩٩٩٧
٣.٦١	٠.٩٩٩٨٥	٣.٨١	٠.٩٩٩٩٣		
٣.٦٢	٠.٩٩٩٨٥	٣.٨٢	٠.٩٩٩٩٣		
٣.٦٣	٠.٩٩٩٨٦	٣.٨٣	٠.٩٩٩٩٤		
٣.٦٤	٠.٩٩٩٨٦	٣.٨٤	٠.٩٩٩٩٤		

جدول رقم (٢)

توزيع t-Distribution

∝ / د	٠.٠٠٥	٠.٠١	٠.٠٢٥	٠.٠٥	٠.١٠
١	٦٣.٦٥٧	٣١.٨٢١	١٢.٧٠٦	٦.٣١٤	٣.٠٧٨
٢	٩.٩٢٥	٦.٩٦٥	٤.٣٠٣	٢.٩٢٠	١.٨٨٦
٣	٥.٨٤١	٤.٥٤١	٣.١٨٢	٢.٣٥٣	١.٦٣٨
٤	٤.٦٠٤	٣.٧٤٧	٢.٧٧٦	٢.١٣٢	١.٥٣٣
٥	٤.٠٣٢	٣.٣٦٥	٢.٥٧١	٢.٠١٥	١.٤٧٦
٦	٣.٧٠٧	٢.١٤٣	٢.٤٤٧	١.٩٤٣	١.٤٤٠
٧	٣.٤٩٩	٢.٩٩٨	٢.٣٦٥	١.٨٩٥	١.٤١٥
٨	٣.٣٥٥	٢.٨٩٦	٢.٣٠٦	١.٨٦٠	١.٣٩٧
٩	٣.٢٥٠	٢.٨٢١	٢.٢٦٢	١.٨٣٣	١.٣٨٣
١٠	٣.١٦٩	٢.٧٦٤	٢.٢٢٨	١.٨١٢	١.٣٧١
١١	٣.١٠٦	٣.٧١٨	٢.٢٠١	١.٧٩٦	١.٣٦٣
١٢	٣.٠٥٥	٢.٦٨١	٢.١٧٩	١.٧٨٢	١.٣٥٦
١٣	٣.٠١٢	٢.٦٥٠	٢.١٦٠	١.٧٧١	١.٣٥٠
١٤	٢.٩٧٧	٢.٦٢٤	٢.١٤٥	١.٧٦١	١.٣٤٥
١٥	٢.٩١٧	٢.٦٠٢	٢.١٣١	١.٧٥٣	١.٣٤١
١٦	٢.٩٧١	٢.٥٨٣	٢.١٢٠	١.٧٤٦	١.٣٣٧
١٧	٢.٩٨٩	٢.٥٦٧	٢.١١٠	١.٧٤٠	١.٣٣٣
١٨	٢.٨٧٨	٢.٥٥٢	٢.١	٢.٧٣٤	١.٣٣٠
١٩	٢.٨٦١	٢.٥٣٩	٢.٠٩٣	١.٧٢٩	١.٣٢٨
٢٠	٢.٨٤٥	٢.٥٣٨	٢.٠٨٦	١.٧٢٥	١.٣٢٥
٢١	٢.٨٣١	٢.٥١٨	٢.٠٨٠	١.٧٢١	١.٣٢٣
٢٢	٢.٨١٩	٢.٥٠٨	٢.٠٧٤	١.٧١٧	١.٣٢١
٢٣	٢.٨٠٧	٢.٥٠٠	٢.٠٦٩	١.٧١٤	١.٣١٩
٢٤	٢.٧٩٧	٢.٤٩٢	٢.٠٦٤	١.٧١١	١.٣١٨
٢٥	٢.٧٨٧	٢.٤٨٥	٢.٠٦٠	١.٧٠٨	١.٣١٦
٢٦	٢.٧٧٩	٢.٤٧٩	٢.٠٥٦	١.٧٠٦	١.٣١٥
٢٧	٢.٧٧١	٢.٤٧٣	٢.٠٥٢	١.٧٠٣	١.٤١٤
٢٨	٢.٧٦٣	٢.٤٦٧	٢.٠٤٨	١.٧٠١	١.٣١٣
٢٩	٢.٧٥٦	٢.٤٦٢	٢.٠٤٥	١.٦٩٩	١.٣١١
٣٠	٢.٧٥٠	٢.٤٥٧	٢.٠٤٢	١.٦٨٧	١.٣١٠
٤٠	٢.٧٠٤	٢.٤٢٣	٢.٠٢١	١.٦٨٤	١.٣٠٣
٦٠	٢.٦٦٠	٢.٣٩٠	٢.٠٠٠	١.٦٧١	١.٢٩٦
١٢٠	٢.٦١٧	٢.٣٥٨	١.٩٨٠	١.٦٥٨	١.٢٨٩
∞	٢.٥٨٠	٢.٣٣٠	١.٩٦٠	١.٦٤٥	١.٢٨٢

الفهـــرس