أولاً:

السؤال الأول:

نفرض القضية $E(n)$: " $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 " أو " $2^{3n}-1=7k$ "

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $2^{3(0)}-1=1-1=0=7(0)$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $2^{3n}-1=7k$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $2^{3(n+1)}-1=7k$ ؟

$$2^{3(n+1)}-1=2^{3n+3}-1=2^{3n}.2^3-1=(7k+1).8-1=56k+8-1=56k+7=7(8k+1)$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

السؤال الثاني:

لدينا $u_5=-21$ و $u_3=-11$ ومن العلاقة $u_n-u_m=(n-m)r$ نجد:

حساب r : $u_5-u_3=(5-3)r$

$$-21-(-11)=2r$$

$$2r=-10$$

$$r=-5$$

حساب u_0 : $u_0-u_3=(0-3)r$

$$u_0-(-11)=-3(-5)$$

$$u_0=15-11=4$$

السؤال الثالث:

$$u_n=\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1+0}{\infty+0}=0$$

وبالتالي المتتالية u_n متقاربة من الصفر.

السؤال الرابع:

$$S=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\ldots+20$$

$$S=\frac{1+2+3+4+5+..+80}{4}$$

$$S=\frac{1}{4}\underbrace{(1+2+3+4+5+..+80)}$$

مجموع حدود متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 1 والأخير 80 وعدد الحدود 80

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{a+\ell}{2}.n\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1+80}{2}.80\right)=\frac{1}{4}(81)(40)=810$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$u_0=-\frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1}=u_n^2+4u_n+2$$

1) نفرض القضية $E(n): -2\le u_n\le -1$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $-2\le u_0=-\frac{3}{2}\le -1$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $-2\le u_n\le -1$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $-2\le u_{n+1}\le -1$ ؟.

نفرض التابع $f(x)=x^2+4x+2$ وندرس اطراده

$$f'(x)=2x+4$$

$f'(x)=0$ أي أن $x=-2$ حيث $f(-2)=-2$ ومنه:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

من الفرض $-2\le u_n\le -1$ وبما أن التابع f متزايد على المجال $[-2,-1]$ فإن:

$$f(-2)\le f(u_n)\le f(-1)$$

$$-2\le u_{n+1}\le -1$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

2) $$u_{n+1}-u_n=u_n^2+4u_n+2-u_n=u_n^2+3u_n+2=(u_n+2)(u_n+1)$$

بما أن $u_n\ge -2$ فإن $u_n+2\ge 0$ من جهة أخرى بما أن $u_n\le -1$ فإن $u_n+1\le 0$

وبالتالي $(u_n+2)(u_n+1)\le 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\le 0$ وبالتالي المتتالية u_n متزايدة

3) بما أن المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$

$$x^2 + 4x + 2 = x$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x+2)(x+1) = 0$$

إما $x = -2$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة وحدها الأول $-\dfrac{3}{2}$

أو $x = -1$ مقبول ، وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -1$.

التمرين الثاني:

$$u_0 = 4 \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$$

1) $$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}$ ومنه $f'(x) = 0$ أي أن $x^2 = 4$ وبالتالي:

$x = 2$ حيث $f(2) = 2$ و $x = -2$ حيث $f(-2) = -2$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

التابع f متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$.

نفرض القضية $E(n): 2 < u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $2 < u_0 = 4$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $2 < u_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $2 < u_{n+1}$ ؟.

من الفرض $2 < u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ فإن:

$$f(2) < f(u_n)$$
$$2 < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

2) نفرض القضية $E(n): u_{n+1} < u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $u_1 = \frac{5}{2} < u_0 = 4$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_{n+1} < u_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+2} < u_{n+1}$ ؟.

من الفرض $u_{n+1} < u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ فإن:

$$f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

3) بما أن المتتالية u_n متناقصة تماماً و محدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة: $f(x) = x$

أي أن $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$ ومنه $\frac{x^2+4}{2x} = x$ وتكافئ $x^2 = 4$

إما $x = -2$ مرفوض لأن المتتالية محدودة من الأدنى بالعدد 2

أو $x = 2$ مقبول ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$ ،

<u>ثالثاً:</u>

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = 3u_n - 4$$

1)

$$u_1 = 3u_0 - 4 = 3(1) - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$u_2 = 3u_1 - 4 = 3(-1) - 4 = -3 - 4 = -7$$

نخمن أن المتتالية u_n متناقصة تماماً

ونثبت بالتدريج صحة القضية $E(n): u_{n+1} < u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $u_1 = -1 < u_0 = 1$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_{n+1} < u_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+2} < u_{n+1}$ ؟.

من الفرض $u_{n+1} < u_n$

$$3u_{n+1} < 3u_n$$

$$3u_{n+1} - 4 < 3u_n - 4$$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

2)

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 3u_{n+1} - 4 - 3u_n + 4 = 3(u_{n+1} - u_n) = 3v_n$$

وبالتالي v_n هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = -1 - 1 = -2$

3) وحدها العام $v_n = v_0.q^n = -2(3)^n$

من جهة أخرى لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$-2(3)^n = 3u_n - 4 - u_n$$

$$2u_n = 4 - 2(3)^n$$

$$u_n = 2 - 3^n$$

4) 3^n هندسية أساسها $q = 3 > 1$ و بالتالي $\lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (2 - 3^n) = -\infty$$

وبالتالي المتتالية u_n متباعدة إلى $-\infty$.

5) $$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $v_0 = -2$ وعدد الحدود $n+1$

$$S_n = a.\frac{1-q^n}{1-q} = -2.\frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 1 - 3^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$$

انتهى حل النموذج الأول

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً:

السؤال الأول:

لدينا $u_3=-\frac{1}{4}$ و $u_5=-\frac{1}{16}$ ومن العلاقة $\frac{u_n}{u_m}=q^{n-m}$ نجد:

حساب q: $\frac{u_5}{u_3}=q^{5-3}$ ويكافئ $q^2=\frac{-\frac{1}{16}}{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$ وبالتالي:

إما $q=-\frac{1}{2}$ مرفوض لأن المتتالية عندها تصبح متناوبة وليست متناقصة أو $q=\frac{1}{2}$ مقبول

حساب u_0: $\frac{u_3}{u_0}=q^{3-0}$ ويكافئ $\frac{-\frac{1}{4}}{u_0}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ وبالتالي $u_0=-\frac{1}{4}.(8)=-2$

السؤال الثاني:

$$u_0=0 \text{ و } u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$$

نفرض القضية $E(n):0\le u_n\le 2$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $0\le u_0=0\le 2$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $0\le u_n\le 2$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $0\le u_{n+1}\le 2$ ؟

من الفرض $0\le u_n\le 2$ نجد $2\le 2+u_n\le 4$ وبالتالي $0<\sqrt{2}\le\sqrt{2+u_n}\le\sqrt{4}=2$ أي أن $0\le u_{n+1}\le 2$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

السؤال الثالث:

$u_n=\frac{3^n-5^n}{2^n+5^n}$: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)}{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^n$ هندسية أساسها $-1<q=\frac{3}{5}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$

$\left(\frac{2}{5}\right)^n$ هندسية أساسها $-1<q=\frac{2}{5}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac{0-1}{0+1}=-1$ أي أن المتتالية u_n متقاربة من -1.

السؤال الرابع:

التابع الممثل للمتتالية $u_n = 1-\frac{1}{n}$ هو $f(x)=1-\frac{1}{x}$ ومتزايد تماماً لأن $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$

فالمتتالية u_n متزايدة تماماً

التابع الممثل للمتتالية $v_n = 1+\frac{1}{n^2}$ هو $g(x)=1+\frac{1}{x^2}$ ومتناقص تماماً على المجال $]0,+\infty[$ لأن $g'(x)=-\frac{2}{x^3}>0$

فالمتتالية v_n متناقصة تماماً

من جهة أخرى $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n)=1-1=0$.

فالمتتاليتين u_n و v_n متجاورتين ونهايتهما المشتركة 1

ثانياً:

التمرين الأول:

1) بما أن $n \geq 1$ ومنه $n+1 \geq 2$

فإن $1 \leq \frac{1}{n}$ و $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}$ وبالتالي $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{2}$ أي $u_n \leq \frac{1}{2}$

من جهة أخرى بما أن $n(n+1)>0$ فإن $\frac{1}{n(n+1)}>0$ أي $u_n>0$

وبالتالي فإن $0<u_n \leq \frac{1}{2}$

2)
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$$
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}$$
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{an+a+bn}{n(n+1)}$$
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

بالمطابقة نجد $a=1$ و $a+b=0$ أي أن $b=-1$

وبالتالي يكون $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

(3

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

-- بالجمع نجد:

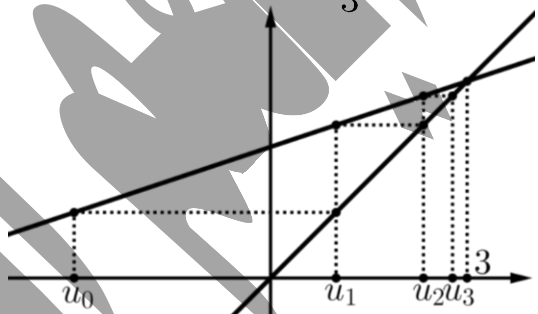
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

<u>التمرين الثاني:</u>

(1

$u_0 = -3$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$



نخمن أن المتتالية u_n متزايدة ونهايتها المحتملة هي 3

(2

نفرض القضية $E(n): u_{n+1} > u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_1 = 1 > u_0 = -3$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $u_{n+1} > u_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+2} > u_{n+1}$ ؟.

من الفرض $u_{n+1} > u_n$

$$\frac{1}{3}u_{n+1} > \frac{1}{3}u_n$$

$$\frac{1}{3}u_{n+1} + 2 > \frac{1}{3}u_n + 2$$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

3) نفرض القضية $E(n): u_n < 3$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $u_0 = -3 < 3$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $u_n < 3$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < 3$ ؟.

من الفرض $u_n < 3$

$$\frac{1}{3}u_n < 1$$

$$\frac{1}{3}u_n + 2 < 3$$

$$u_{n+1} < 3$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً و محدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة: $f(x) = x$

أي أن $\frac{1}{3}x + 2 = x$ ومنه $\frac{1}{3}x - x = -2$ وتكافئ $-\frac{2}{3}x = -2$ وبالتالي $x = 3$

ومنه $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$

ثالثاً:

$$u_{n+1} = \frac{-1+2u_n}{u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

1) نفرض القضية $E(n): 1 < u_{n+1} < u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $1 < u_1 = \frac{3}{2} < u_0 = 2$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $1 < u_{n+1} < u_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $1 < u_{n+2} < u_{n+1}$ ؟.

التابع $f(x) = \frac{-1+2x}{x}$ متزايد تماماً لأن $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

من الفرض $1 < u_{n+1} < u_n$

وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن: $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$$1 < u_{n+2} < u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

- لدينا $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية u_n متناقصة تماماً

  لدينا $1 < u_n$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأدنى فهي متقاربة .

2)

$$v_n=\frac{1}{u_n-1}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{\frac{-1+2u_n}{u_n}-1}=\frac{1}{\frac{-1+2u_n-u_n}{u_n}}=\frac{1}{\frac{u_n-1}{u_n}}=\frac{u_n}{u_n-1}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n}{u_n-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n-1}{u_n-1}=1$$

وبالتالي v_n حسابية أساسها $r=1$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=1$

3) وحدها العام $v_n=v_0+nr=1+n$

من جهة أخرى لدينا $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$

$$u_n-1=\frac{1}{v_n}$$

$$u_n=\frac{1}{v_n}+1$$

$$u_n=\frac{1}{1+n}+1=\frac{n+2}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=1$$

4)

$$u_n-2=\frac{n+2}{n+1}-2=\frac{n+2-2n-2}{n+1}=\frac{-n}{n+1}\le 0$$

أي أن $u_n\le 2$

وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2

ووجدنا سابقاً أن المتتالية u_n محدودة من الأدنى بالعدد 1

وبالتالي المتتالية u_n محدودة أي $1<u_n\le 2$

5)

$$u_n-v_n=\frac{n+2}{n+1}-(n+1)$$

$$u_n-v_n=\frac{n+2-(n+1)^2}{n+1}$$

$$u_n-v_n=\frac{n+2-n^2-2n-1}{n+1}$$

$$u_n-v_n=\frac{-n^2-n+1}{n+1}$$

$$-n^2-n+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=1-4(-1)(1)=5$$

$$n_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{5}}{-2}\approx 0.6 \quad \text{و} \quad n_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{-2}\approx -1.6$$

n	$-\infty$		-1.6		0.6		$+\infty$
$-n^2-n+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

من أجل $n\geq 1$ نجد أن $-n^2-n+1<0$

ولدينا $n+1>0$

و منه $\frac{-n^2-n+1}{n+1}<0$

أي أن $u_n-v_n<0$

وبالتالي $u_n<v_n$

انتهى حل النموذج الثاني

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً:

السؤال الأول:

$$u_n = \frac{n - 3\sin n}{n}$$

$$-1 \le \sin n \le 1$$

$$-3 \le -3\sin n \le 3$$

$$n - 3 \le n - 3\sin n \le n + 3$$

بما أن $n > 0$ فإن $\frac{n-3}{n} \le \frac{n-3\sin n}{n} \le \frac{n+3}{n}$ أي أن $\frac{n-3}{n} \le u_n \le \frac{n+3}{n}$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-3}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n} = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ حسب مبرهنة الإحاطة

وبالتالي المتتالية u_n متقاربة من الواحد.

السؤال الثاني:

$$u_0 = 7 \text{ و } u_{n+1} = 10u_n - 18$$

نفرض القضية $E(n): u_n = 5.10^n + 2$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 5.10^0 + 2 = 5 + 2 = 7$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $u_n = 5.10^n + 2$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} = 5.10^{n+1} + 2$ ؟

$$u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5.10^n + 2) - 18 = 5.10^{n+1} + 20 - 18 = 5.10^{n+1} + 2$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

السؤال الثالث:

$$u_n = \frac{6}{n^2 + 2n + 4}$$

$$u_n - 2 = \frac{6}{n^2+2n+4} - 2 = \frac{6 - 2n^2 - 4n - 8}{n^2+2n+4} = \frac{-2n^2 - 4n - 2}{n^2+2n+4} = \frac{-2(n^2+2n+1)}{n^2+2n+1+3} = \frac{-2(n+1)^2}{(n+1)^2+3}$$

بما أن $-2(n+1)^2 < 0$ و $(n+1)^2 + 3 > 0$

وبالتالي $\frac{-2(n+1)^2}{(n+1)^2+3} < 0$ أي أن $u_n - 2 < 0$

$$u_n < 2$$

وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2

السؤال الرابع:

$$u_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - ... - \frac{1}{2^n}$$

$$u_n = 2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}\right)}$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$ وعدد الحدود n وبالتالي:

$$u_n = 2 - a.\frac{1-q^n}{1-q} = 2 - \frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بما أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسية أساسها $-1 \le q = \frac{1}{2} \le 1$ ومنه $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

وبالتالي $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + ... + \frac{e}{n!}$$

1) نفرض القضية $E(n): \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $\frac{1}{1!} = 1 \le \frac{1}{2^{1-1}} = 1$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$ ؟.

لدينا $n \ge 1$ أي $n+1 \ge 2$ وبالتالي $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2}$ ...(1)

ومن الفرض لدينا $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ ...(2)

بما المقادير في المتراجحتين (1) و (2) موجبين تماماً فيمكن الجداء حد بحد

ومنه $\frac{1}{n+1}.\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{2^{n-1}}$ وبالتالي $\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

2)

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \dots + \frac{e}{n!} \le e + \underbrace{\frac{e}{1} + \frac{e}{2} + \frac{e}{2^2} + \dots + \frac{e}{2^{n-1}}}$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول e وعدد الحدود $n - 1 - 0 + 1 = n$ ، وبالتالي:

$$u_n \le e + e.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = e + 2e\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

لدينا $0 > -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ أي أن $2e\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 2e$ وبالتالي $u_n \le e + 2e\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3e$

$$u_n < 3e$$

وبالتالي فإن $3e$ حد راجح على المتتالية u_n

- من جهة أخرى لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{e}{(n+1)!} > 0$ أي أن المتتالية u_n متزايدة تماماً.

بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

<u>التمرين الثاني:</u>

1)

$$w_n = v_n - u_n$$
$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$
$$w_{n+1} = 3v_n + u_n - 3u_n - v_n$$
$$w_{n+1} = 2v_n - 2u_n = 2(v_n - u_n)$$
$$w_{n+1} = 2w_n$$

وبالتالي المتتالية w_n هندسية أساسها 2 وحدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 2$

وحدها العام $w_n = w_0.q^n = 2.2^n = 2^{n+1}$

1) نفرض القضية $E(n): v_n + u_n = 0$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $v_0 + u_0 = 1 - 1 = 0$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $v_n + u_n = 0$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $v_{n+1} + u_{n+1} = 0$ ؟

$$v_{n+1} + u_{n+1} = 3v_n + u_n + 3u_n + v_n$$
$$v_{n+1} + u_{n+1} = 4(u_n + v_n) = 4(0) = 0$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

3) وجدنا سابقاً أن $(1)\ldots\ v_n - u_n = w_n = 2^{n+1}$

و $(2)\ldots\ v_n + u_n = 0$

بجمع (1) و (2) نجد $2v_n = 2^{n+1}$ وبالتالي $v_n = 2^n$

ومنه $u_n = -v_n = -2^n$

ثالثاً:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2} \quad \text{و} \quad]-2,+\infty[$$

1) التابع f متزايد تماماً لأن $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$

2) a) $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ و $u_0 = 0$

نفرض القضية $E(n) : u_n < u_{n+1} \leq 1$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 0 < u_1 = \dfrac{1}{2} \leq 1$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $u_n < u_{n+1} \leq 1$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$ ؟.

من الفرض $u_n < u_{n+1} \leq 1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

$$u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

- لدينا $u_n < u_{n+1}$ وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً

لدينا $u_n \leq 1$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة:

$$f(x) = x$$

أي أن $\dfrac{2x+1}{x+2} = x$ ومنه $2x + 1 = x^2 + 2x$ وتكافئ $x^2 = 1$

إما $x = -1$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة وحدها الأول صفر.

أو $x = 1$ مقبول ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

$(b$

$$v_0=2 \quad \text{و} \quad v_{n+1}=f(v_n)=\frac{2v_n+1}{v_n+2}$$

نفرض القضية $E(n):1\le v_{n+1}<v_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $1\le v_1=\frac{5}{4}<v_0=2$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $1\le v_{n+1}<v_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $1\le v_{n+2}<v_{n+1}$ ؟.

من الفرض $1\le v_{n+1}<v_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$f(1)\le f(v_{n+1})<f(v_n)$$

$$1\le v_{n+2}<v_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

- لدينا $v_{n+1}<v_n$ وبالتالي المتتالية v_n متناقصة تماماً

لدينا $1\le v_n$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة:

$$f(x)=x$$

أي أن $\frac{2x+1}{x+2}=x$ ومنه $2x+1=x^2+2x$ وتكافئ $x^2=1$

إما $x=-1$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة محدودة من الأدنى بالعدد 1

أو $x=1$ مقبول ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=1$

$(c$ لدينا المتتالية u_n متزايدة تماماً و المتتالية v_n متناقصة تماماً

من جهة أخرى لدينا $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=1-1=0$

وبالتالي المتتاليتين u_n و v_n متجاورتين

انتهى حل النموذج الثالث

المتتاليات ونهاية متتالية

أولاً:

السؤال الأول:

لدينا $u_n=\dfrac{10^n}{n}$ ومن جهة أخرى لدينا $u_{n+1}=\dfrac{10^{n+1}}{n+1}$ وبالتالي:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{10^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{10^n}{n}}=\frac{10^n.10}{n+1}.\frac{n}{10^n}=\frac{10n}{n+1}$$

لدينا $n\geq 1$ ومنه $9n+n\geq 9n+1>n+1$ أي $10n>n+1$ وبالتالي $\dfrac{10n}{n+1}>1$ أي $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$

المتتالية u_n متزايدة تماماً

السؤال الثاني:

نفرض القضية $E(n):3n^2\geq(n+1)^2$ حيث $n\geq 2$

- نثبت صحة العلاقة $E(2)$ من أجل $n=2$: $12\geq 9$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n : $3n^2\geq(n+1)^2$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $3(n+1)^2\geq(n+2)^2$ ؟

$$3(n+1)^2=3(n^2+2n+1)=3n^2+6n+3\geq(n+1)^2+6n+3=n^2+2n+1+6n+3$$
$$=n^2+8n+4\geq n^2+4n+4=(n+2)^2$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

السؤال الثالث:

$$u_n=\frac{n+(-1)^n}{3n+1}$$
$$-1\leq(-1)^n\leq 1$$
$$n-1\leq n+(-1)^n\leq n+1$$

بما أن $3n+1>0$ فإن $\dfrac{n-1}{3n+1}\leq\dfrac{n+(-1)^n}{3n+1}\leq\dfrac{n+1}{3n+1}$ أي أن $\dfrac{n-1}{3n+1}\leq u_n\leq\dfrac{n+1}{3n+1}$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{3n+1}=\dfrac{1}{3}$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{3}$ حسب مبرهنة الإحاطة

وبالتالي المتتالية u_n متقاربة من العدد $\dfrac{1}{3}$

السؤال الرابع:

$$u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^2} \text{ و } u_{n+1} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \text{ و } v_{n+1} = u_{n+1}+\frac{1}{n+1}$$

$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}+\frac{1}{n+1}-u_n-\frac{1}{n}$$

$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n+1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}-\frac{1}{n}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

وبالتالي المتتالية v_n متناقصة تماماً

و $$\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

وبالتالي المتتاليتين u_n و v_n متجاورتين.

ثانياً:

التمرين الأول:

$$u_n = \frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+...+\frac{n}{5^n}$$

1) نفرض القضية $E(n): n \le 2^n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $0 \le 1$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $n \le 2^n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $n+1 \le 2^{n+1}$ ؟.

$$n+1 \le 2^n+1 \le 2^n+2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

2) $u_n=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots+\frac{n}{5^n}\le\frac{2}{5}+\frac{2^2}{5^2}+\frac{2^3}{5^3}+\frac{2^4}{5^4}+\ldots+\frac{2^n}{5^n}=\underbrace{\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\ldots+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $\frac{2}{5}$ وعدد الحدود $n-1+1=n$ ، وبالتالي:

$$u_n\le\frac{2}{5}.\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

لدينا $0<\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ومنه $-1<-\left(\frac{2}{5}\right)^n$ أي أن $1-\left(\frac{2}{5}\right)^n<1$ وبالتالي $\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)<\frac{2}{3}$ ، $u_n\le\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)<\frac{2}{3}$

$$u_n<\frac{2}{3}$$

وبالتالي فإن $\frac{2}{3}$ حد راجح على المتتالية u_n .

التمرين الثاني:

a و b و c ثلاث حدود متوالية في متتالية هندسية اساسها q أي أن:

$$a \text{ و } b=aq \text{ و } c=bq=aq^2 \quad \ldots(1)$$

$12a$ و $5b$ و $2c$ ثلاث حدود متوالية في متتالية حسابية متناقصة أي أن:

$$12a+2c=10b \quad \ldots(2)$$

نعوض (1) في (2) فنجد:

$$12a+2aq^2=10aq$$

بما أن $a\neq0$ نقسم على $2a$ فنجد:

$$6+q^2=5q$$

$$q^2-5q+6=0$$

$$(q-3)(q-2)=0$$

إما $q=3$ ومنه تكون حدود المتتالية الهندسية a و $b=3a$ و $c=9a$

و حدود المتتالية الحسابية $12a$ و $5b=5(3a)=15a$ و $2c=2(9a)=18a$ متزايدة ، إذا $q=3$ مرفوض.

أو $q=2$ ومنه تكون حدود المتتالية الهندسية a و $b=2a$ و $c=4a$

و حدود المتتالية الحسابية $12a$ و $5b=5(2a)=10a$ و $2c=2(4a)=8a$ متناقصة ، إذا $q=3$ مقبول.

ثالثاً:

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+3) \quad \text{و} \quad u_0=2$$

1) $$u_1=\frac{1}{2}(u_0+3)=\frac{1}{2}(2+3)=\frac{5}{2}$$

نخمن أن المتتالية u_n متزايدة تماماً

ونثبت بالتدريج صحة القضية $E(n): u_n < u_{n+1}$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $u_0=2<u_1=\frac{5}{2}$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $u_n < u_{n+1}$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < u_{n+2}$ ؟.

من الفرض $u_n < u_{n+1}$

$$u_n+3<u_{n+1}+3$$

$$\frac{1}{2}(u_n+3)<\frac{1}{2}(u_{n+1}+3)$$

$$u_{n+1}<u_{n+2}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

2) a) $$x=\frac{1}{2}(x+3)$$

وبالتالي حل المعادلة $2x=x+3$ و $\alpha=3$

b) $$v_n=u_n-\alpha=u_n-3$$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\alpha=u_{n+1}-3=\frac{1}{2}(u_n+3)-3=\frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}-3=\frac{1}{2}u_n-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(u_n-3)=\frac{1}{2}v_n$$

وبالتالي v_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=u_0-3=2-3=-1$

3) وحدها العام $$v_n=v_0.q^n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

من جهة أخرى لدينا $v_n=u_n-3$

$$u_n=v_n+3$$

$$u_n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسية أساسها $-1<q=\frac{1}{2}<1$ وبالتالي $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

أي أن $\lim_{n\to\infty}u_n=3-0=3$.

(4

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$S_n = v_0 + 3 + v_1 + 3 + v_2 + 3 + ... + v_n + 3$$

$$S_n = \underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n} + 3(n+1)$$

$$S_n = (-1).\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + 3(n+1)$$

$$S_n = -2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$$

$$S_n = -2 + \frac{2}{2^{n+1}} + 3n + 3$$

$$S_n = 3n + 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(3n+1) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = +\infty + 0 = +\infty$$

انتهى حل النموذج الرابع

المتتاليات ونهاية متتالية