أوراق المراجعة الشاملة
الجلسة الامتحانية
الرياضيات (التحليل الرياضي)
2023 ← 2024 دورة أولى

ملاحظة: أوراق الجلسة تحاكي نمط الأسئلة في ورقة الامتحان

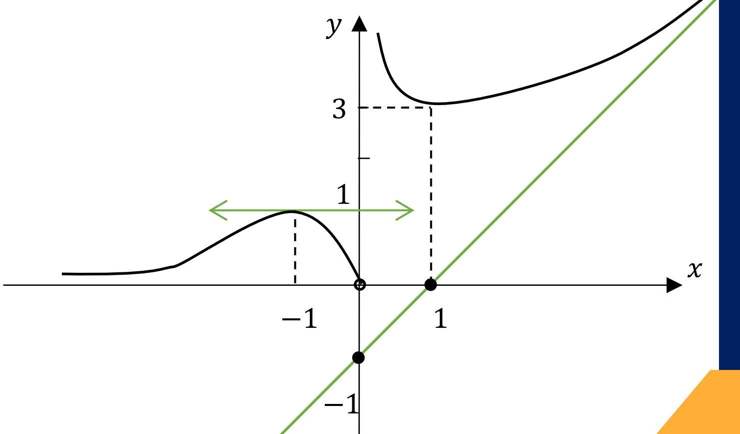
أولاً:

أجب عن الأسئلة التالية (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R \setminus \{0\}$ والمطلوب:

1. أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^{-1}} f(x)$
2. حدد القيم الحدية للخط C
3. اكتب معادلة المقارب المائل للخط C
4. أوجد معادلة كل مقارب أفقي للخط C
5. احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
6. أوجد حلول المتراجحة $f(x) > 0$
7. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$
8. أوجد $f'(-1), f(-1), f(1)$



الحل:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

2) $f(-1) = 1$ قيمة كبرى محلياً

$f(1) = 3$ قيمة صغرى محلياً

3) Δ مقارب مائل يمر بالنقاط:

$(0,-1)$, $(1,0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0+1}{1-0} = 1$$

$$\Delta: y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$$\Delta: y = x - 1$$

4) $d: y = 0$ مقارب أفقي منطبق على محور xx' في جوار $-\infty$

5) ميل المقارب المائل $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m = 1$

6) حلول المتراجحة $f(x) > 0$

$\Rightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

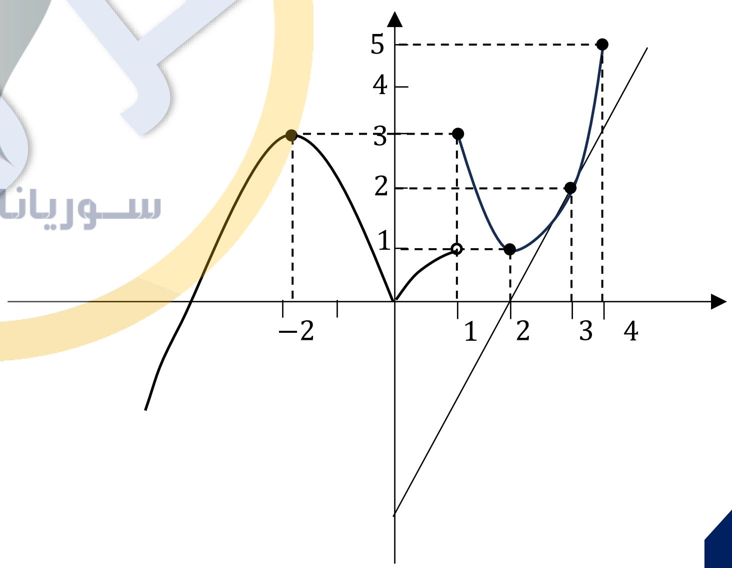
7) حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$ $[-1, 0[\cup]0, 1]$

8) $f(-1) = 1$, $f(1) = 3$, $f'(-1) = 0$

السؤال الثاني:

تأمل الرسم المجاور الخط البياني للتابع f C_f ثم أجب:

1. عين D_f ثم عين $F(D_f)$
2. ما عدد القيم الحدية
3. حدد ما للخط C من قيم حدية
4. هل f اشتقاقي عند (0)
5. هل f اشتقاقي عند (1)
6. احسب $f(-2)\ ,f'(-2)\ \ ,\ f(2)\ \ ,f'(2)$
7. احسب $f(3)$ ثم $f'(3)$ واكتب معادلة المماس Δ
8. احسب $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
9. أحسب مجموعة تعريف التابع $g(x) = \ln(f(x))$



الحل:

1) $D_f =]-\infty, 4]$

المستقر الفعلي: $f(D_f) =]-\infty, 5]$

2) عدد القيم الحدية (5)

3) $f(-2) = 3$ كبرى محلياً

$f(0) = 0$ صغرى محلياً

$f(1) = 3$ كبرى محلياً

$f(2) = 1$ صغرى محلياً

$f(4) = 5$ كبرى محلياً

4) f غير اشتقاقي عند (0)

5) f غير اشتقاقي عند (1) لأنه غير مستمر

6) $f(-2) = 3\quad ,f'(-2) = 0$

$f(2) = 1\quad ,f'(2) = 0$

7) $f(3) = 2\quad ,\quad f'(3) = m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

m ميل المماس Δ المار من $(2,0)\ ,(3,2)$

$$m = \frac{2-0}{3-2} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x-2)$$

$$\Delta: y = 2x - 4$$

8) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1\quad ,\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

السؤال الثالث:

تأمل الجدول التالي ثم أجب عن الأسئلة التالية:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

1. عين D_f
2. عدد في جدول القيم الحدية
3. عين كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C
4. هل يقبل C_f مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$
5. أوجد $f(3)\ ,f'(3)$
6. هل f اشتقاقي عند $(0)\ ,(3)$
7. اكتب معادلة كل مماس لأفقي

8 عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

9 أوجد $f([3, +\infty[)$

الحل:

1) $D_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

2) عدد القيم الحدية (2) وهي

$$f(\quad) = -2 \quad , f(3) = 2$$

3) $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على xx' في جوار $+\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي

4) في جوار $+\infty$ يقبل C_f مقارب أفقي لذلك لا يوجد مقارب مائل

5) $f(3) = 2 \quad , f'(3) = 0$

6) f غير اشتقاقي عند 0

f اشتقاقي عند (3)

7) $y = 2$ مماس أفقي

8) عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ يساوي حلين

9) $f([3, +\infty[) =]0, 2]$

السؤال الرابع:

حل المعادلة التفاضلية $2y + 3y' - 1 = 0$ التي تحقق أن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ يساوي (-1)

الحل:

المعادلة تكافئ $y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$

الحل هو مجموعة التوابع $y = f(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$

نشتق الحل:

$$y' = f'(x) = -\frac{2}{3}ke^{\left(-\frac{2}{3}\right)x}$$

نعوض $f'(0) = -1$ بالمشتق

ومنه $-\frac{2}{3}ke^{-\frac{2}{3}(0)} = -1 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

فالحل المطلوب هو:

$$y = f(x) = \frac{3}{2}e^{\left(-\frac{2}{3}\right)x} + \frac{1}{2}$$

السؤال الخامس:

C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0, 2[$ وفق:

$$f(x) = \ln(ax - bx^2)$$

عين العددين الحقيقيين b, a لكي يقبل مماساً أفقياً في النقطة $A(1, 0)$ منه

الحل:

$$A(1, 0) \in C \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(a - b) = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 1$$

$$\boxed{a = b + 1} \quad (1)$$

بما أن الخط C يقبل مماساً أفقياً $A(1, 0)$ فإن:

$$f'(1) = 0$$

f اشتقاقي علة المجال $]0, 2[$

$$f'(x) = \frac{a - 2bx}{ax - bx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a - 2b}{a - b} = 0 \qquad (a \neq b)$$

$$\Rightarrow \boxed{a - 2b = 0} \quad (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$b+1-2b=0$$

$$-b+1=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

نعوض في (1) فنجد: $\boxed{a=2}$

السؤال السادس:

(تعيين ثوابت من الرسم)

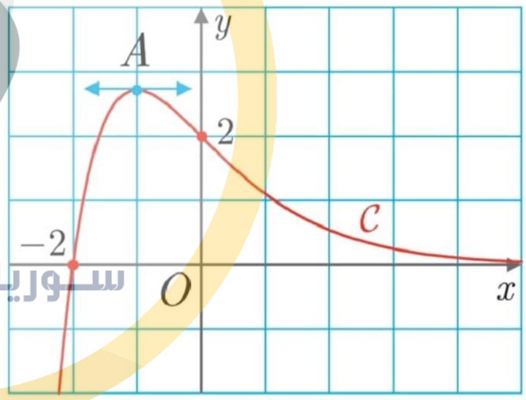
ليكن f تابع موضح بالرسم والعلاقة

$f(x)=(ax+b)e^{-x}$ حيث $b\,,a \in R$

1) اعماداً على الرسم أوجد b, a

2) أحسب $f'(x)$ واستنتج احداثيات A القيمة الكبرى

3) أثبت أن محور الفواصل مقارب للخط C في جوار $+\infty$



الحل:

من الرسم نجد أن C_f يمر بالنقاط $(-2\,,0)$ ، $(0,2)$

نعوض النقاط بالتابع لحساب $a\,,b$

$$f(-2)=0 \Rightarrow [-2a+b]\,e^{+2}=0$$

$$\Rightarrow\ -2a+b=0 \ldots (1)$$

$$f(0)=2 \Rightarrow [a(0)+b].e^{0}=2$$

$$b=2$$

نعوض في (1)

$$-2x+2=0 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+2)e^{-x}$$

$$f'(x)=1.e^{-x}+(-1)(x+2)e^{-x}$$

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}-2e^{-x}$$

$$f'(x)=\ -xe^{-x}-e^{-x}$$

$$f'(x)=(-1-x)e^{-x} \Rightarrow x=-1$$

$$f(-1)=(-1+2)e^{+1}=e$$

إذا احداثيات A $A(-1\,,e)$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ حالة عدم تعيين $+\infty\times 0$

الإزالة:

$$f(x)=x.e^{-x}+2e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+0=0$$

علماً أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C_f في جوار $+\infty$

السؤال السابع:

بين أن الخط C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\ln(2+e^{x})$$

يقبل مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يطلب تعيينها

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln(3+0)=\ln 3$$

$\Leftarrow$ C يقبل مقارب أفقي معادلته $y=\ln 3$ في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$\Leftarrow$ C لا يقبل مقارب أفقي في جوار $+\infty$

لدينا: $f(x)=\ln(3+e^{x})$

$$= \ln\left[e^x \cdot \left(\frac{3}{e^x}+1\right)\right]$$

$$= \ln e^x + \ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$$

$$= x + \ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$$

بفرض $d: y = x$ يكون:

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d) = \ln 1 = 0$$

$d: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

طلب إضافي: ادرس الوضع النسبي لـ C والمقارب المائل d

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$$

بما أن : $\frac{3}{e^x}+1 > 1$ فإن $\ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$

$\Rightarrow f(x) - y_d > 0 \Rightarrow$ d فوق C

السؤال الثامن:

بين أن الخط البياني C للتابع f المعرف على R يقبل مقارباً مائلاً d عينه وادرس الوضع النسبي للخط C والمقارب d في كل مما يلي:

1 $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

بفرض $d: y = x - 1$ حيث $f(x) - y_d = e^{-x}$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d) = +\infty$$

d ليس مقارب مائل في جوار $(-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$$

d مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

$$f(x) - y_d = e^{-2x} > 0$$

$\Leftarrow$ d فوق C

2 $f(x) = x + 2 + x.e^x$

بفرض $d: y = x + 2$ حيث:

$$f(x) - y_d = x \cdot e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d) = \lim_{x\to-\infty}(x \cdot e^x) = 0$$

$d: y = x + 2$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d) = \lim_{x\to+\infty}(x.e^x) = +\infty$$

$\Leftarrow$ d ليس مقارب مائل في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	d فوق C		d تحت C

نقطة مشتركة $(0,2)$

السؤال التاسع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4x+7}$$

1 اكتب x^2+4x+7 كثير حدود بالشكل القانوي

2 استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$ ثم ادرس وضع الخط C مع مقاربه

الحل:

1 x^2+4x+7

$x^2+4x+4-4+7$

$(x+2)^2+3$

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+3}$$

نتوقع وجود مقارب مائل معادلته $\Delta: y=x+2$

مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x+2)^2+3}-(x+2)$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{(x+2)^2+3-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+3}+(x+2)}$$

$$=\frac{+3}{\sqrt{(x+2)^2+3}+(x+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=\frac{3}{+\infty}=0$$

$\Delta: y=x+2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة وضع نسبي

$$\sqrt{(x+2)^2+3}>(x+3)$$

$$\sqrt{(x+2)^2+3}-(x+3)>0$$

$$f(x)-y_\Delta>0$$

إذا C فوق Δ $\forall x\in Df$

السؤال العاشر:

ليكن $g(x)=\ln x$ معرف على $I=]0,+\infty[$
احسب كلاً من $g(e)$ و$g'(x)$ و $g'(e)$ واستنتج:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$$

إذا علمت أن

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x-1}{x-e} & ; x\in]0,e[\cup]e,+\infty[\\ m+1\ ; & x\neq e\end{cases}$$

عين قيمة الوسيط m ليكون التابع f مستمر عند e

الحل:

$$g(e)=\ln e=1$$

g اشتقاقي على I ومشتقه:

$$g'(x)=\frac{1}{x}\Longrightarrow g'(e)=\frac{1}{e}$$

نعرف تابع معدل التغير:

$$t(x)=\frac{g(x)-g(e)}{x-e}$$

ومنه

$$t(x)=\frac{\ln x-1}{x-e}$$

$$\lim_{x\to e}t(x)=g'(e)$$

ومنه نستنتج:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{1}{e}$$

التابع مستمر عند e إذا وفقط إذا كان

$\lim_{x\to e}f(x)=f(e)$ ومنه $m=\frac{1}{e}-1$

السؤال الحادي عشر

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{1-e^x} & ; x\neq 0\\ m+1 & ; x=0\end{cases}$$

1. احسب نهاية f عند 0
2. ما قيمة m التي تجعل f مستمر على $\mathbb{R}$؟

الحل:

① $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{1-e^x}=\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{x}{1-e^x}$$

$$= \frac{2\sin 2x}{2x} \cdot \frac{x}{-(e^x - 1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(1)(-1) = 2$$

حيث $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1}$

② f مستمر على $]-\infty, 0[\,,]0, +\infty[$

يكون f مستمر على $\mathbb{R}$ إذا كان $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

أي $2 - $ وبالتالي $m = -3$

نهاية باستخدام تعريف التابع المشتق

السؤال الثاني عشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = \cos x$

1. احسب $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2. استنتج: $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$

الحل:

① $f'(x) = -\sin x$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

السؤال الثالث عشر:

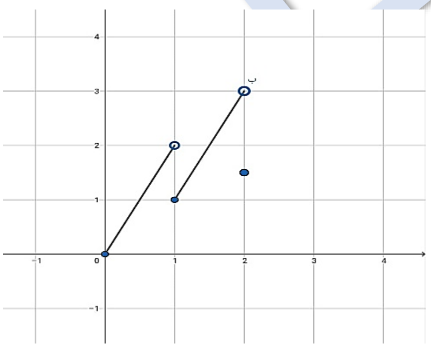
ليكن لدينا التابع $f(x) = 2x - E(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

1. اكتب التابع f بعبارة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0, 2]$
2. ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0, 2]$
3. هل f مستمر على المجال $[0, 2]$
4. احسب نهاية التابع $g(x) = \frac{2x - E(x)}{x^2+1}$ عند $+\infty$

الحل:

$$① f(x) = \begin{cases} 2x & : \quad 0 \le x < 1 \\ 2x - 1 & : \quad 1 \le x < 2 \\ 2 & : \quad x = 2 \end{cases}$$

②



③ نلاحظ من الرسم:

f غير مستمر عند (1) فهو غير مستمر على $[0, 2]$

④ لدينا:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$-x + 1 > -E(x) \geq -x$$

$$x + 1 > 2x - E(x) \geq x$$

$$\frac{x+1}{x^2+1} > \frac{2x - E(x)}{x^2+1} \geq \frac{x}{x^2+1}$$

بما أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0 \, , \, \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - E(x)}{x^2+1} = 0$$

ثانياً

حل التمارين الآتية:

(60 أو 70 أو 80)

التمرين الأول:

لتكن $\{U_n\}_{n \geq 0}$ متتالية معطاة بالشكل:

$$U_n = 1 + \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^n}$$

1) أثبت بالتدريج أن $n \leq 3^n$

2) بالإستفادة من المتراجحة السابقة استنتج أن U_n عنصر راجح على $\left(\frac{5}{2}\right)$

3) استنتج أن U_n متقاربة

الحل:

1) نفرض القضية

$$E(n): n \leq 3^n$$

1) نثبت صحتها من أجل $n = 1$:

$E(1): 1 \leq 3^1$ محققة

2) نفرض أنها صحيحة من أجل n:

$$E(n): n \leq 3^n$$

3) نثبت صحتها من أجل $n + 1$:

نريد إثبات أن

$$E(n+1): n + 1 \leq 3^{n+1}$$

البرهان:

نطلق من الفرض $n \leq 3^n$

نضرب بـ 3

$$3n \leq 3^{n+1}$$

$\left\{ \begin{array}{c} n + 1 \leq 3n \\ \text{الطرف الصغير نصغرو} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{نبدل كل } 3n \\ \text{بـ } n+1 \end{array} \right\}$

$n + 1 \leq 3^{n+1}$ محققة

من (1) و (2) و (3) نجد أن $E(n)$ محققة

2)

$$U_n = 1 + \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^n}$$

نحسب الحدود من خلال المتراجحة

$$n \leq 3^n$$

$$1 \leq 3^1, 2 \leq 3^2, 3 \leq 3^3, 4 \leq 3^4$$

$$, \dots \dots \dots , n \leq 3^n$$

$$U_n \leq 1 + \frac{3^1}{5^1} + \frac{3^2}{5^2} + \frac{3^3}{5^3} + \cdots + \frac{3^n}{5^n}$$

$$U_n \leq 1 + \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

المجموع السابق مجموع لحدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{5}$

$$U_n \leq 1 + a\left[\frac{1 - q^n}{1 - q}\right]$$

$$a = \frac{3}{5}$$

$$q = \frac{3}{5}$$

$n =$ عدد الحدود

$$U_n \le 1 + \frac{3}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}\right]$$

$$U_n \le 1 + \frac{3}{5} * \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

$$U_n \le 1 + \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

لمعرفة العنصر الراجح نأخذ نهاية العلاقة الأخيرة

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)\right] = \frac{5}{2}$$

$$U_n \le 1 + \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) \le \frac{5}{2}$$

$$U_n \le \frac{5}{2}$$

إذاً $\frac{5}{2}$ عنصر راجح على U_n وهي محدودة من الأعلى:

3) ندرس اطراد U_n

$$U_n = 1 + \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^n}$$

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{5^1} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^n} + \frac{n+1}{5^{n+1}}$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{n+1}{5^{n+1}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{5^{n+1}} > 0$$

إذاً U_n متزايدة
U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

التمرين الثاني:

مهم جدا جدا:

نتأمل المتتاليات u_n, v_n حيث $n \ge 1$ لهما الشكل:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{4^n}$$

1) ادرس اطراد المتتالية u_n وأثبت أنها متزايدة

2) اكتب u_n بالشكل: $u_n = \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{5^n}\right]$

3) استنتج أن u_n متقاربة

4) ادرس اطراد v_n ثم استنتج أن u_n, v_n متجاورتان

الحل:

1) $$u_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5^{n+1}}$$

إذا u_n متزايدة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

2)

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{5^n}\right)^2$$

متتالية لمجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ لذا نكتب

$$u_n = a\left[\frac{1-q^K}{1-q}\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right]$$

$$u_n = \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} \cdot \left[1-\frac{1}{5^n}\right]$$

3) نحسب نهاية u_n

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{+\infty}\right] = \frac{1}{4}$$

حيث $q = 5 > 1$ $\lim_{x\to+\infty} 5^n = +\infty$

متقاربة

4) ادرس اطراد v_n

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4^n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{4}{u^{n+1}}$$

$$\frac{1}{5^{n+1}} - \frac{3}{4^{n+1}} = \frac{4^{n+1} - 3.5^{n-1}}{(4.5)^{n+1}}$$

اذا v_n متناقصة

$$v_n - u_n = u_n = \frac{1}{4^n} - u_n = \frac{1}{4^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} [v_n - u_n] = \frac{1}{+\infty} = 0$$

اذا أصبح:

1 u_n متزايدة , v_n متناقصة

2 $\lim_{n \to +\infty} [v_n - u_n] = 0$

من 1 و 2 نجد ن المتتاليتان متجاورتان

علماً أن

$$\lim_{n \to +\infty} 4^n = +\infty \quad , q = 4 > 1$$

التمرين الثالث:

ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم وليكن n:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

1) عين a, b ليكون $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

2) بفرض $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim_{n \to +\infty} S_n$

الحل: نفرق الكسر

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)}$$

بالمطابقة وحذف المقام:

$$1 = a(n+1) + bn \ \ldots *$$

$$x \to -1 \Rightarrow 1 = -b$$

$$x \to 0 \Rightarrow 1 = a$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

وبالتالي: $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

لنحسب S_n:

بالجمع

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$$

التمرين الثالث:

لتكن $\{U_n\}_{n\geq 0}$ متتالية كما في الشكل:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+2U_n} \end{cases}$$

1) أثبت أن V_n حسابية وعين أساسها

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 1$$

2) عبر عن V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n

3) احسب المجموع بدلالة n:

$$S = \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + \cdots + \frac{1}{U_n}$$

الحل:

(1

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} + 1 = \frac{1}{\frac{U_n}{1+2U_n}} + 1$$

$$= \frac{1+2U_n}{U_n} + 1 = \frac{1+3U_n}{U_n}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1+3U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} - 1$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1+3U_n - 1 - U_n}{U_n}$$

$$= \frac{2U_n}{U_n} = 2$$

$$\boxed{V_{n+1} - V_n = 2 = r}$$

إذا V_n حسابية أساسها $r = 2$

(2 كتابة V_n بدلالة n:

$$V_n = V_0 + n * r$$

نحسب V_0

$$V_0 = \frac{1}{U_0} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 = 3$$

$$\boxed{V_n = 3 + 2n}$$

كتابة U_n بدلالة n:

نعلم أن

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 1 \rightarrow \frac{1}{U_n} = V_n - 1$$

$$\rightarrow U_n = \frac{1}{V_n - 1} = \frac{1}{2n+3-1} = \frac{1}{2n+2}$$

$$\boxed{U_n = \frac{1}{2n+2}}$$

(3

$$S = \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + \cdots + \frac{1}{U_n}$$

$\{n = n - 1 + 1 =$ عدد الحدود$\}$

$$S + n = \frac{1}{U_1} + 1 + \frac{1}{U_2} + 1 + \frac{1}{U_3} + 1 + \cdots + \frac{1}{U_n} + 1$$

$$S + n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

أصبح شكل المجموع مجموع حدود لمتتالية حسابية

$$V_1 = 2(1) + 3 = 5$$

$V_n = 2n + 3$, عدد الحدود $= n$

$$S + n = \frac{n}{2}[V_1 + V_n]$$

$$S + n = \frac{n}{2}[5 + 2n + 3]$$

$$= \frac{n}{2}(2n + 8)$$

$$= \frac{n}{2}(2)(n+4) = n(n+4)$$

$$S = n(n+4) - n$$

$$\boxed{S = n^2 + 3n}$$

التمرين الرابع:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1-2u_n}{2-u_n} \; ; n \geq 0 \end{cases}$$

1 أثبت أن التابع f متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$ حيث $f(x) = \frac{1+2x}{2+x}$

2 أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$

3 أثبت أن u_n متزايدة

4 برهن ان u_n متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

(1

$$f'(x) = \frac{2(2+x)-1(1+2x)}{(2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4+2x-1-2x}{(2+x)^2} = \frac{3}{(2+x)^2} > 0$$

اذا f متزايد على D_f دوماً

(2 نفرض القضية:

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 1$$

-1 نثبت صحة $E(n)$:

$0 \leq u_0 = 0 \leq 1$ محققة

-2 نفرض صحة $E(n)$:

$$0 \leq u_n \leq 1$$

-3 نثبت صحة $E(n+1)$

$E(n+1) \quad 0 \leq u_0 \leq 1$

البرهان: من الفرض

$$0 \leq u_n \leq 1$$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

$0 \leq u_{n+1} \leq 1$ محققة

من 1و2و3 نجد أن u_n محققة

(3 نفرض القضية $E(n): u_{n+1} \geq u_n$

-1 نثبت صحة $E(0)$

$u_0 = 0 \, , u_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad u_1 \geq u_0$ محققة

-2 نفرض صحة $E(n)$:

$$u_{n+1} \geq u_n$$

-3 نثبت صحة $E(n+1)$

أي نريد إثبات أن $U_{n+2} \geq u_n$

البرهان: من الفرض $u_{n+1} \geq u_n$

نصور $\quad f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$

$u_{n+1} \geq u_{n+1}$ محققة

من 1و2و3 نجد أن u_n متزايدة

-4 لحساب النهاية نحل المعادلة $f(x) = x$

$$\Rightarrow \frac{1+2x}{2+x} = x \Rightarrow x^2 + 2x = 2x + 1$$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ مرفوض

$x = 1$ مقبول

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

التمرين الخامس:

لتكن $\{U_n\}_{n\geq0}$ معطاة بالعلاقة

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n{}^2 + 1) \end{cases}$$

1) أثبت أن $0 \leq U_n \leq +1$
2) ادرس اطراد متتالية
3) استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

الحل:

1) نفرض القضية:

$$E(n): 0 \leq U_n \leq +1$$

1. نثبت صحتها من أجل $n = 0$:

$$E(0): 0 \leq U_0 = \frac{1}{2} \leq +1$$

محققة

2. نفرض أنها صحيحة من أجل n:

$$E(n): 0 \leq U_n \leq +1$$

3. نثبت صحتها من أجل $n+1$:

نريد إثبات أن:

$$E(n+1): 0 \leq U_{n+1} \leq +1$$

البرهان:

من الفرض $0 \leq U_n \leq +1$

$$0 \leq U_n{}^2 \leq +1$$

$$1 \leq U_n{}^2 + 1 \leq 2$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(U_n{}^2 + 1) \leq 1$$

$$0 \leq U_{n+1} \leq +1$$

محققة من (1) و (2) و (3) نجد أن
$0 \leq U_n \leq +1$

2) لدراسة الإطراد نحسب أول ثلاث حدود:

$$u_0 = \frac{1}{2}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}(u_0{}^2 + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{8}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(u_1{}^2 + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + 1\right) = \frac{13}{16}$$

بتوحيد المقامات للمقارنة:

$$u_0 = \frac{8}{16}, u_1 = \frac{10}{16}, u_2 = \frac{13}{16}$$

نلاحظ أن المتتالية في تزايد نفرض قضية التزايد ونثبت بالتدريج

نعرف القضية $E(n)$:

$$E(n): U_{n+1} \geq U_n$$

1. نثبت أنها صحيحة من أجل $n = 0$

$$E(0): u_1 = \frac{5}{8} \geq u_0 = \frac{1}{2}$$

2. نفرض أنها صحيحة من أجل n

$$E(n): U_{n+1} \geq U_n$$

3. نثبت صحتها من أجل $n+1$

نريد إثبات أن

$$E(n+1): U_{n+2} \geq U_{n+1}$$

البرهان:

من الفرض:

$$U_{n+1} \geq U_n$$

$$U_{n+1}{}^2 \geq U_n{}^2$$

$$U_{n+1}{}^2 + 1 \geq U_n{}^2 + 1$$

$$\frac{1}{2}(U_{n+1}{}^2 + 1) \geq \frac{1}{2}(U_n{}^2 + 1)$$

$$U_{n+2} \geq U_{n+1}$$

محققة من (1) و (2) و (3) نجد أن
U_n متزايدة

3) أصبحت U_n متزايدة ومحددة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة
لحساب النهاية نحل المعادلة

$$f(x) = x$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + 1) = x$$

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=x$$
$$x^2+1=2x \to x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0 \longrightarrow \boxed{x=1}$$

إذاً

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} U_n=+1}$$

التمرين السادس:

ليكن f تابع معرف وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x(e^x-1)} & ;\ x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2} & ;\ x=0\end{cases}$$

1. ادرس نهاية التابع f عند $(x=0)$
2. هل f مستمر عند 0

الحل:

① $\lim_{x\to 0} f(x)=$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x(e^x-1)}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$
$$=\frac{x^2+1-1}{x.(e^x-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$=\frac{x}{(e^x-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$=\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1.\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$f(0)=\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f معطى بالعلاقة

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

معرف على المجال: $I=]-\infty\,,1[$

1. أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم أوجد عدد A يحقق:
$\forall x<A$ كان: $f(x)\in]1.99\,,2.01[$
2. احسب النهاية $\lim_{x\to-\infty} f\big(f(x)\big)$
3. أوجد $f'(x)$ واستنتج مشتق التابع g حيث:
$$g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$$
4. أوجد قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$

الحل:

① $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

$y=2$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$f(x)\in]1.99\,,2.01[$$

❖ ملاحظة: المجال $I=]a,b[$

مركز المجال: $c=\frac{a+b}{2}$

نصف قطر المجال: $r=\frac{b-a}{2}$

$f(x)\in]c-r\,,c+r[\ \Longrightarrow |f(x)-c|<r$

نحسب $c = \frac{2.01+1.99}{2} = 2$

$$r = \frac{2.01-1.99}{2} = \frac{0.02}{2} = 0.01$$

نطبق القانون: $|f(x)-c| < r$

$$|f(x)-2| < 0.01$$

$$\left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < 0.01$$

$$\left|\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{+3}{x-1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{+3}{|x-1|} < \frac{1}{100}$$

$x \longrightarrow -\infty$

$|x-1| = -x+1$

لأن $x-1<0$

$$\frac{3}{-x+1} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{-x+1}{3} > 100 \Longrightarrow -x+1 > 300$$

$$-x > 299 \Longrightarrow x < -299$$

$$A = -299$$

---

② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{1} = 5\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-\infty} f\big(f(x)\big) = 5$

---

③ $f'(x) = \frac{2(x-1)-(1)(2x+1)}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow g'(x) = (\sqrt{x})' \cdot f'(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -\frac{3}{[\sqrt{x}-1]^2}$$

$$g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)^2}$$

قانون التقريب الآلي:

$$x = \underbrace{a}_{\text{جزء صحيح}} + \underbrace{h}_{\text{جزء عشري}}$$

$$f(a+h) = f'(a)\cdot h + f(a)$$

$$x = 0.1 \Longrightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ h = 0.1 \end{array}$$

$$f(0.1) = f'(0)\cdot(0.1) + f(0)$$

$$f(0.1) = \left[\frac{-3}{(0-1)^2}\right](0.1) + \left[\frac{2(0)+1}{0-1}\right]$$

$$f(0.1) = -3(0.1) - 1$$

$$f(0.1) = -0.3 - 1 = -1.3$$

التمرين الثامن:

ليكن التابع f : $f(x) = \frac{1}{x}$ أثبت بالتدريج أن:

$n \geq 1$ أياً يكن $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

الحل:

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad : n \geq 1$$

نتحقق من صحة $E(1)$:

$$f^{(1)}(x) = \frac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}}$$

$$l_1 = f'(x) = -\frac{1}{x^2} = l_2$$

$E(1)$ محققة ....(1)

نفرض صحة $E(n)$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{..........} \ (2)$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

نريد اثبات أن:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$

الاثبات:

ننطلق من الفرض ونشتق طرفيه:

$$(f^n(x))' = \frac{0-(n+1)x^n(-1)^n n!}{(x^{n+1})^2}$$

$$\left(f^{(n+1)}(x)\right) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x^{2n+2})(x)^{-n}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$

ومنه $E(n+1)$ محققة ....(3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج صحة $E(n)$ أياً كان $n \geq 1$

السؤال التاسع:

أثبت صحة المتراجحة $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$

أيا كان $x > -1$

أثبت أن C_f , C_g حيث $g(x) = \frac{x}{1+x}$ و

$f(x) = \ln(1+x)$ المعرفان على $]-1,+\infty[$

يقبلان مماساً مشتركاً عند نقطة فاصلتها 0

الحل:

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0 \ \text{ومنه} \ h(x) \geq 0$$

حيث $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

لإثبات صحة المتراجحة $h(x) \geq 0$ أياً كانت $x > -1$

ندرس اطراد التابع h على المجال $]-1,+\infty[$ ومشتقه على هذا المجال

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \ \text{أي} \ h'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

نلاحظ أن إشارته من إشارة x وينعدم عندما

$x = 0$

$f(h) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من جدول اطراد التابع h أن $h(x) \geq 0 \Longrightarrow$

$\ln(x+1) - \frac{x}{1+x} \geq 0$ أياً كانت $x > -1$ وهي المتراجحة المطلوبة.

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

1 أوجد مجموعة التعريف f

2 أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3 أثبت أن الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل

4 ادرس تغيرات التابع f

5 اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها (0) منه

6 ارسم كل من d , Δ , T ثم ارسم C في المعلم ذاته

الحل:

1 f معرف عندما $e^{2x} - e^x + 1 > 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

$$D_f =]-\infty,+\infty[$$

②

$$f(x)-y_\Delta=\ln(e^{2x}-e^x+1)-\ln(e^{2x})$$

$$=\ln\left(\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^{2x}}\right)$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\ln 1=0$$

$\Delta: y=2x \Leftarrow$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

③ الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موزياً محور الفواصل اذا تحقق:

$$f'(x)=0$$

f اشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x-1}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2e^{2x}-e^x=0$$

$$e^x(2e^x-1)=0$$

حيث $e^x>0$ $\quad \Rightarrow 2e^x-1=0$

$$2e^x=1 \Rightarrow e^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1\ln\frac{1}{2}$$
$$=-\ln 2$$

وبالتالي C يقبل مماساً وحيداً موازياً لمحور الفواصل معادلته:

$$y=f(-\ln 2)=\ln\left(e^{-2\ln 2}-e^{-\ln 2}+1\right)$$

$$=\ln((2)^{-2}-(2)^{-1}+1)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)=\ln\frac{3}{4}$$

ومنه معادلة المماس $y=\ln\frac{3}{4}$

④ f معرف واشتقاقي على المجال $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\ln(e^{2x}-e^x+1))$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^{2x}+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right]$$

$$=+\infty+\ln 1=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x-1}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-\ln 2$$

$$f(-\ln 2)=\ln\frac{3}{4}$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ $y=f'(0)(x-0)+f(0)\ldots\ldots\ldots *$

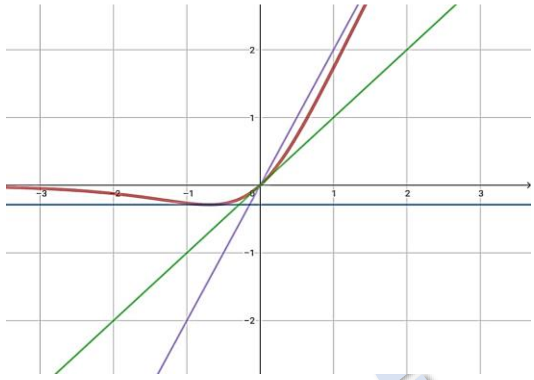
$$f(0)=\ln 1=0$$

$$f'(0)=1$$

نعوض في *

$$T: y=x$$

⑥



المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1[$ وفق: $f(x) = e^x + \ln(1-x)$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$g(x) = (1-x)e^x - 1$ والمطلوب:

1. ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \leq 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$
2. تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty, 1[$ ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
3. اكتب معادلة المستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$
4. في معلم متجانس ارسم المستقيم T ثم ارسم C الخط البياني للتابع f.

الحل:

① $g(x) = (1-x)e^x - 1$

تابع معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x$$

$$g'(x) = -e^x + e^x - xe^x$$

$$g'(x) = -xe^x$$

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow -xe^x = 0$$

$$e^x > 0 \longrightarrow -x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

إذا من الجدول نلاحظ أن

$$\forall x \in D_f \longrightarrow g(x) < 0$$

② $f'(x) = e^x + \frac{-1}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(1-x)} = \frac{g(x)}{1-x}$$

دراسة تغيرات التابع f:

f معرف واشتقاقي على $]-\infty, 1[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} + \ln(+\infty)$$

$$= 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e^1 + \ln(0) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي

$$f'(x) = \frac{g(x)}{1-x} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(1-x)}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f(0) = e^0 + \ln(1-0) = 1$$

③ المماس T عند $x=0$

$$y_0 = f(0) = 1$$

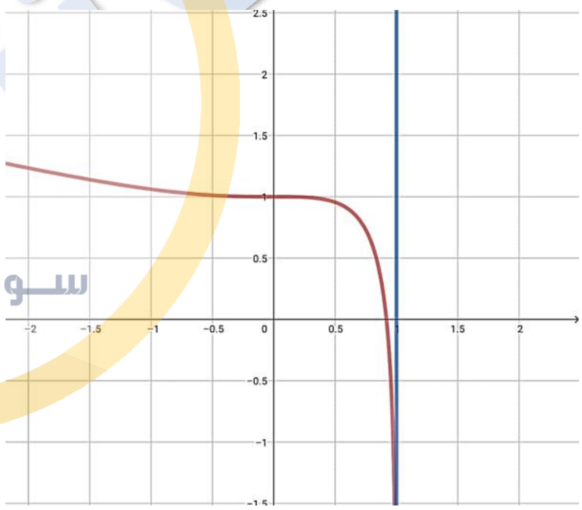
$$m = f'(0) = 0$$

إذاً T مماس أفقي معادلته

$$T: y = 1$$

④

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\nparallel$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\nparallel$



المسألة الثانية:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left[\frac{x}{x-1}\right]$$

① حدد D_f ثم احسب نهايات عند اطراف مجموعة التعريف وحدد المقاربات

② أثبت ا ن $\Delta: y = x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$, $+\infty$

③ ادرس وضع الخط C مع مقاربه Δ

④ ادرس تغيرات التابع f ثم حدد ما له من قيم حدية

⑤ ارسم الخط Δ و c_f في معلم متجانس

⑥ استنتج الخط C_g, C_k حيث:

$$g(x) = x + 3 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$K(x) = -x - 1 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

الحل:

1) $D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 + 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^1} f(X) = 1 + 1 + \ln +\infty = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي

$x = 1$ مقارب شاقولي

2) $$f(x) - y_\Delta = 2\ln\left[\frac{x}{x-1}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 2\ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y_\Delta = 2\ln(1) = 0$$

اذاً $\Delta: y = x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار

$-\infty$ و $+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي

$$f(x) - y_\Delta = 2\ln\left[\frac{x}{x-1}\right]$$

نقاش:

عندما $x \in]1\,,+\infty[$

$$x > x-1 \to \frac{x}{x-1}$$

$$2\ln\left[\frac{x}{x-1}\right] > \ln(1) = 0$$

إذا C_f فوق Δ $f(x) - y_\Delta > 0$

* وعندما $x \in]-\infty, 0[$ سالب

$$x > x-1 \to \frac{x}{x-1} < 1$$

$$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) < 0 \to f(x) - y_\Delta < 0$$

C تحت Δ

4) دراسة التغيرات

f معرف ومستمر واشتقاقي على D_f

$$f'(x) = 1 + 2\,\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$= 1 + \frac{-2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-x-2}{x(x-1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = 0 \to x = 2\,, x = -1$$

$$f(2) = 3 + 2\ln 2$$

$$f(-1) = -2\ln(2)$$

x	$-\infty$		-1		0	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$3+\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

6) $$g(x) = x + 1 + \ln\left[\frac{x}{x-1}\right] + 2$$

$$g(x) = f(x) + 2$$

اذا C_g ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u}(0,2)$

أو انسحاب بمقدار درجتين على محور oy^+

$$K(x) = -x - 1 - \ln\left[\frac{x}{x-1}\right] = -f(x)$$

اذا C_K ينتج عن C_f بتناظر مركزه O

إضافي: تعين ثوابت:

* ليكن $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$

1) عين الثوابت a, b كي يقبل التابع f مماساً أفقياً في نقطة $(2,2)$

2) أثبت أن $d: y = x-1$ مقارب مائل للخط C وادرس وضع الخط C مع مقاربه.