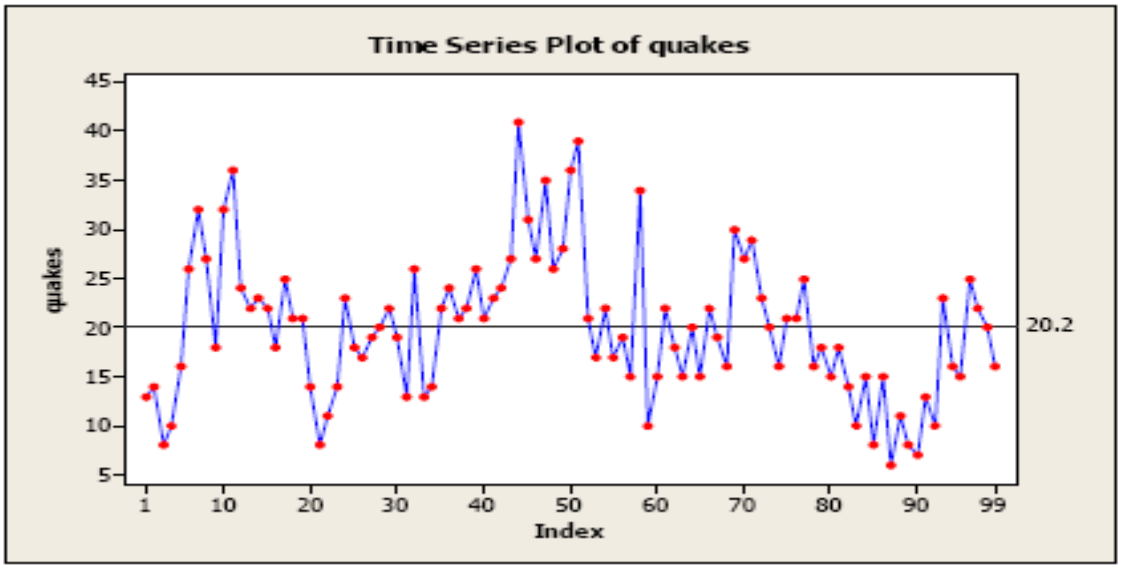
مقرر السلاسل الزمنية



المحاضرة (الخامسة)

لطلاب السنة الثالثة إحصاء رياضي

مدرس المقرر

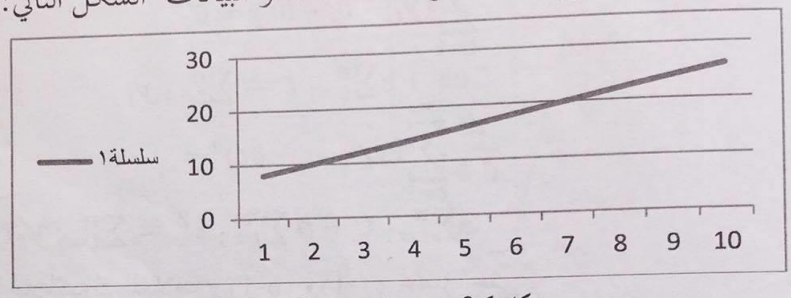
د . رفيف الحبيب

ومن الطرق المستخدمة أيضا لتقدير الاتجاه العام طريقة المربعات الصغرى التي تستخدم على نطاق واسع و سنشرحها بالتفصيل لاحقاً.

(11-1) نماذج الاتجاه العام للسلاسل Time Series Trends

1.النموذج الخطي Linear Model

نستخدم هذا النموذج عندما يكون يأخذ انتشار البيانات الشكل التالي:



شكل(1-3) انتشار السلسلة بشكل خطي

الشكل العام لهذا النموذج هو:

$$\hat{y}_t = a + bt \qquad (23\text{-}1)$$

حيث إن:

y_t السلسلة الزمنية (القيم الحقيقية) $\hat{Y}_t$: القيم المقدرة

a معامل ثابت

b معامل الانحدار

تخرج المعاملات السابقة باستخدام طريقة المربعات الصغرى

ordinary Least Square (OLS)

تنطلق طريقة المربعات الصغرى من العلاقة التالية:

$$\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2 \longrightarrow \min \qquad (24\text{-}1)$$

حيث إن $\hat{y}_t$: هي القيم المقدرة

y_t: القيم الحقيقية

بتعويض (23-1) في (24-1) نجد أن:

$$\sum_{t=1}^{n}(y_t - a - bt)^2 \quad (25\text{-}1)$$

باشتقاق العلاقة (25-1) بالنسبة لـ a و b على الترتيب ومساواة الناتج الى الصفر

نحصل على:

$$\frac{d}{d\,a}\sum_{t=1}^{n}(y_t - a - bt)^2 =$$

$$\sum_{t=1}^{n}(y_t - a - bt) = 0$$

$$na + b\sum_{t=1}^{n} t = \sum_{t=1}^{n} y_t \quad (26\text{-}1)$$

$$\frac{d}{d\,b}\sum_{t=1}^{n}(y_t - a - bt)^2 =$$

$$a\sum_{t=1}^{n} t + b\sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} y_t t \quad (27\text{-}1)$$

بالحلالمشترك للعلاقتين (1-6) و(1-7) نحصل على :

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t\,y_t - \sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} y_t/n}{\sum_{t=1}^{n} t^2 - (\sum_{t=1}^{n} t)^2/n} \quad (28\text{-}1)$$

أو

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})(y_t-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2} \quad (29\text{-}1)$$

أو

$$\hat{b} = \frac{\overline{ty} - \bar{t}\bar{y}}{s_t^{\,2}} \quad (30\text{-}1)$$

و

$$\hat{a} = \bar{y} - b\,\bar{t} \quad (31\text{-}1)$$

مثال (1-8): لدينا البيانات التالية التي تمثل صادرات أحدى الشركات من المواد الغذائية

y_t	25	30	45	50	44	60	80	90	100	105

المطلوب تمهيد السلسلة السابقة مستخدما النموذج الخطي.

الحل:

نشكل الجدول(1-7) وفقاً للقوانين (1-28)،(1-29)،(1-30)و (1-31) طبعاً تتم الحسابات بطريقة مبسطة وسهلة

جدول(1-7) حساب معاملات النموذج الخطي

	y_t	t	$(y_t - \bar{y})$	$(t - \bar{t})$	$(y_t - \bar{y}) * (t - \bar{t})$	$(t - \bar{t})^2$
	25	1	-37.9	-4.5	170.55	20.25
	30	2	-32.9	-3.5	115.15	12.25
	45	3	-17.9	-2.5	44.75	6.25
	50	4	-12.9	-1.5	19.35	2.25
	44	5	-18.9	-0.5	9.45	0.25
	60	6	-2.9	0.5	-1.45	0.25
	80	7	17.1	1.5	25.65	2.25
	90	8	27.1	2.5	67.75	6.25
	100	9	37.1	3.5	129.85	12.25
	105	10	42.1	4.5	189.45	20.25
مجموع	629	55	0	0	770.5	82.5

من القانون رقم (1-28) نجد أن: $\hat{b}=770.5/82.5=11.53$

ومن القانون رقم (1-31) نجد أن: $\hat{a}=9.34$

وبالتعويض في العلاقة(1-23) فإن النموذج يأخذ الشكل التالي:

$$\hat{y}_t=9.34+11.53\,t \qquad (32\text{-}1)$$

ولحساب القيم التقديرية للسلسلة وفقاً للنموذج المذكور نعوض في المعادلة (32-1) بالقيم t=1,2,3,... نجد أن:

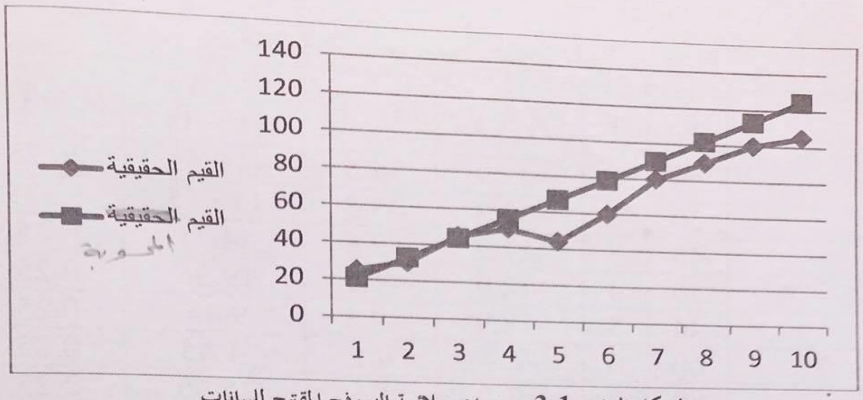
$\hat{y}_1=9.34+11.53*1=20.87$

$\hat{y}_2=9.34+11.53*2=32.40$

$\hat{y}_{10}=9.34+11.53*10=124.64$

جدول(1-8) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج

القيم الحقيقية y_t	القيم المحسوبة من النموذج $\hat{y}_t$
25	20.87
30	32.40
45	43.93
50	55.46
44	66.99
60	78.52
80	90.05
90	101.58
100	113.11
105	124.64

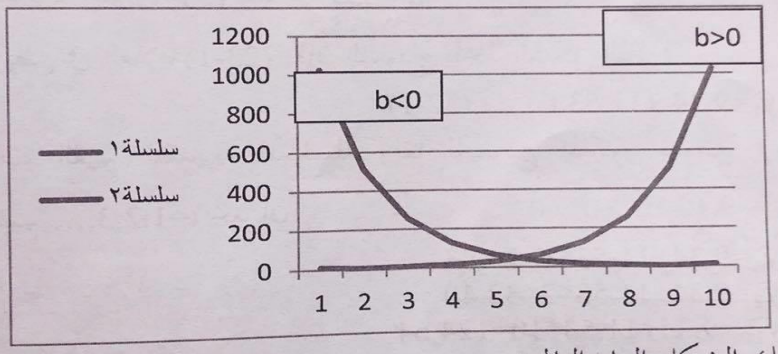


الشكل البياني (1-3) بين مدى ملائمة النموذج المقترح للبيانات

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وهذا يظهر من اقتراب الخط البياني للقيم المحسوبة من الخط البياني للقيم الحقيقية.

2.النموذج الأسي Exponential Model

نستخدم هذا النموذج عندما يكون انتشار البيانات يأخذ الشكل التالي:



يملك الشكل العام التالي:

$$y_t=ae^{bt} \quad (33\text{-}1)$$

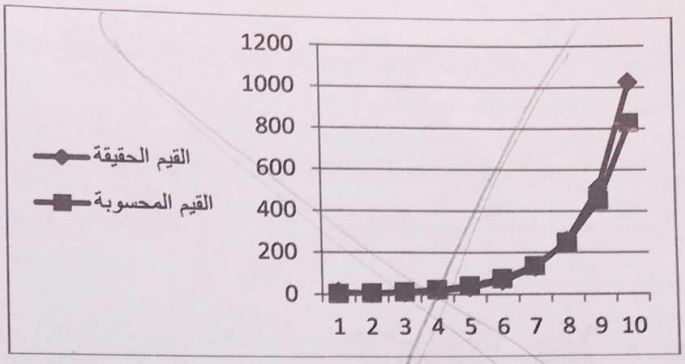
يجب أن يحول هذا النموذج الى الشكل الخطي وذلك لنتمكن من استخدام القوانين (28-1,29-1,30-1,31-1)

يتم التحويل بأخذ لوغاريتم الطرفين: $\text{Ln } y_t=\text{Ln } a+bt$

بوضع $\text{Ln } y_t=Y_t$ و $A=\text{Ln } a$ يصبح النموذج السابق كمايلي:

$$Y_t=A+bt$$

وهو شكل خطي يمكن إخراج معاملاته بواسطة طريقة المربعات الصغرى المشروحة سابقاً.



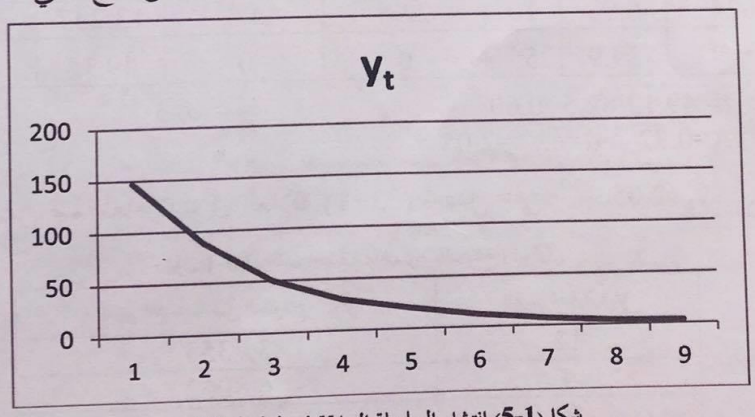
الشكل(1-4) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج الاسي

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وهذا يظهر من اقتراب الخط البياني للقيم المحسوبة من الخط البياني للقيم الحقيقية.

مثال (1-10): لدينا البيانات التالية التي تمثل سلسلة زمنية والمطلوب تمهيد هذه السلسلة بواسطة النموذج الأسي:

y_t	243	147	89	50	30	20	12	7	4	3

برسم الخط البياني للسلسلة السابقة نجد أن البيانات تنتشر بشكل تابع أسي متناقص



شكل(1-5) انتشار السلسلة السابقة في المثال(1-10)

نشكل النموذج الأسي $y_t=ae^{bt}$

كما في المثال السابق نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\text{Ln } y_t = \text{Ln } a + bt$$

نضع $Y_t=\ln y_t$ و $\ln a=A$ فيصبح النموذج

$$Y_t=A+bt$$

وهو شكل خطي يمكن إيجاد عوامله من الجدول التالي بعد تطبيق القوانين (1-28,1-29,1-30,1-31)

جدول(1-11) حسابات قيم معاملات النموذج

	y_t	t	$Y_t=\ln y_t$	$Y_t.t$	t^2
	243	1	5.49	5.49	1
	147	2	4.99	9.98	4
	89	3	4.49	13.47	9
	50	4	3.91	15.65	16
	30	5	3.40	17.01	25
	20	6	3.00	17.97	36
	12	7	2.48	17.39	49
	7	8	1.95	15.57	64
	4	9	1.39	12.48	81
	3	10	1.10	10.99	100
مجموع	605	55	32.20	135.99	385

$\hat{b}=(135.99-55*32.20/10)/(385-(55)^2/10)=-0.498$

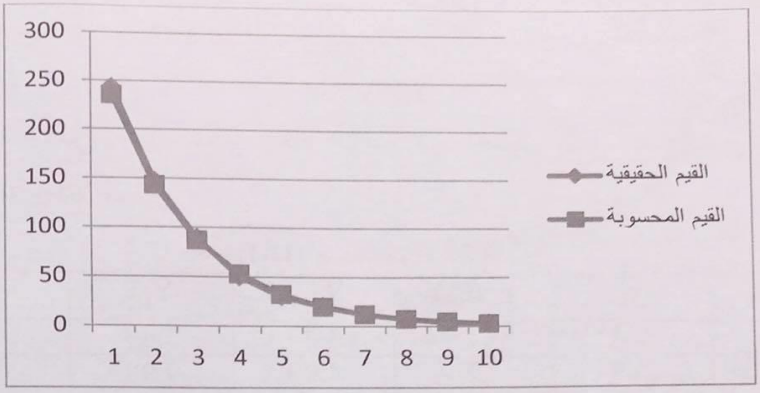
$A=\bar{Y}-b\bar{t}=5.96 \rightarrow \hat{a}=e^{5.96}=387.22$

ومنه فإن الشكل العام بعد تعويض قيم a و b في العلاقة(1-33) نجد :

$$\hat{y}_t=387.22e^{-0.498\,t}$$

جدول(1-12) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج

القيم المحسوبة	القيم الحقيقية
235.33	243
143.02	147
86.92	89
52.83	50
32.10	30
19.51	20
11.86	12
7.21	7
4.38	4
2.66	3



شكل(1-6) الخط البياني للقيم الحقيقية والمحسوبة

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وذلك للتقارب الكبير بين الخطين البيانيين للقيم المحسوبة والقيم الحقيقية

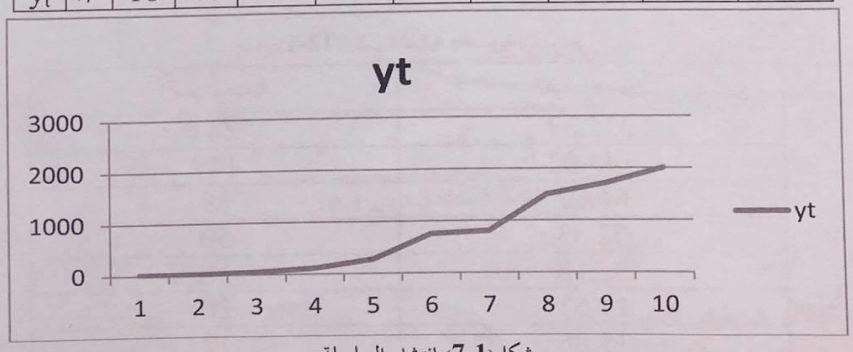
3.نموذج القوة Power Model

يستخدم هذا النموذج عندما تكون البيانات منتشرة كما في النموذج الاسيولكنها تلامس نهايتي الخط البياني للمحور الأفقي وإن الشكل العام لهذا النموذج هو:

$$y_t=at^b \quad (34\text{-}1)$$

مثال (1-11) لدينا البيانات التالية التي تمثل سلسلة زمنية والمطلوب تمهيد هذه السلسلة بواسطة نموذج القوة:

y_t	7	18	46	110	270	750	800	1500	1700	2000



شكل(1-7) انتشار السلسلة

من الشكل واضح أن الانتشار العام للسلسلة يوافق نموذج القوة المشار إليه أعلاه لتحويله الى الشكل الخطي نأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على:

$$Ln\ y_t = \ln a + b \ln t$$

نفرض $Y_t = \ln y_t$ ، $T = \ln t$ ، $A = \ln a$ فيصبح النموذج كمايلي:

$$Y_t = A + b\,T$$

جدول(1-13) حساب معاملات النموذج

y_t	Y_t	t	T	Y_tT	T^2
7	1.95	1	0.00	0.00	0.00
18	2.89	2	0.69	2.00	0.48
46	3.83	3	1.10	4.21	1.21
110	4.70	4	1.39	6.52	1.92
270	5.60	5	1.61	9.01	2.59
750	6.62	6	1.79	11.86	3.21
800	6.68	7	1.95	13.01	3.79
1500	7.31	8	2.08	15.21	4.32
1700	7.44	9	2.20	16.34	4.83
2000	7.60	10	2.30	17.50	5.30
مجموع	7201.00	54.62	55.00	15.10	95.66	27.65

$$\hat{b} = \frac{\sum Y.T - \sum Y \sum T/n}{\sum T^2 - (\sum T)^2/n} = \frac{(95.66 - 54.62 * 15.1/10}{27.65 - (15.1)^2/10} = 2.72$$

$$A = \overline{Y} - b\overline{T} = 1.35 \rightarrow \hat{a} = e^{1.35} = 3.87$$

بالتعويض في العلاقة (1-34) نجد أن:

$$\widehat{y_t} = 3.87 * t^{2.72}$$

شكل(1-8) الخط البياني للقيم الحقيقية والمحسوبة من الجدول(1-14)

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وذلك للتقارب الكبير بين الخطين البيانيين للقيم المحسوبة والقيم الحقيقية

جدول القيم الحقيقية والمحسوبة من النموذج السابق(1-34)

جدول(1-14) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج

القيم الحقيقية	القيم المحسوبة
7	235.33
18	143.02
46	86.92
110	52.83
270	32.10
750	19.51
800	11.86
1500	7.21
1700	4.38
2000	235.33

نرسم الخط البياني للقيم الحقيقية والمحسوبة:

4.نموذج النمو Growth Model

لا يختلف شكل البيانات الذي يخضع لهذا النموذج عن النموذج الأسي أو القوة كثيرا.

الشكل العام لهذا النموذج هو:

$$y_t=e^{a+bt} \qquad (35\text{-}1)$$

لتحويله الى الشكل الخطي يكفي أخذ لوغاريتم الطرفين

$$\text{Ln } y_t=a+bt$$

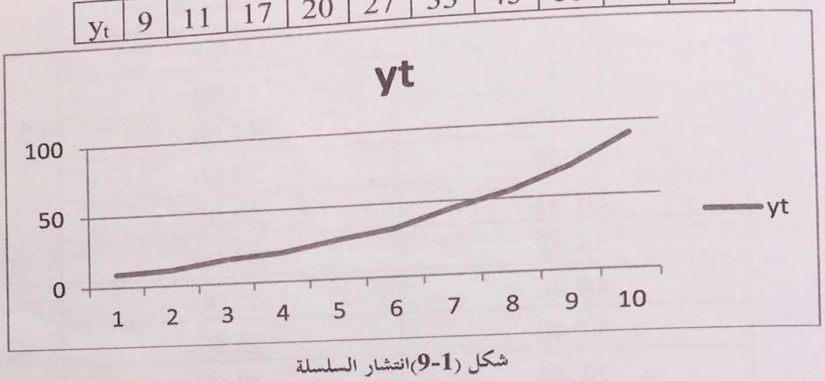
نضع $Y_t= \ln y_t$

ويصبح النموذج خطياً كمايلي:

$$Y_t=a+b\,t$$

مثال (1-12): لدينا البيانات التالية التي تمثل سلسلة زمني والمطلوب تمهيد هذه السلسلة بواسطة نموذج النمو:

y_t	9	11	17	20	27	33	45	55	70	91



شكل (1-9)انتشار السلسلة

من الشكل واضح بأن السلسلة تتبع نموذج النمو،نخرج معاملات النموذج

جدول(1-15) حساب معاملات النموذج

	y_t	Y_t	t	$Y_t.t$	t^2
	9	2.20	1	2.20	1.00
	11	2.40	2	4.80	4.00
	17	2.83	3	8.50	9.00
	20	3.00	4	11.98	16.00
	27	3.30	5	16.48	25.00
	33	3.50	6	20.98	36.00
	45	3.81	7	26.65	49.00
	55	4.01	8	32.06	64.00
	70	4.25	9	38.24	81.00
	91	4.51	10	45.11	100.00
مجموع	378.00	33.79	55.00	206.98	385.00

$$\hat{b}=\frac{\sum Y.t-\sum Y\sum t/n}{\sum t^2-(\sum t)^2/n}=\frac{(206.98-33.79*55/10}{385-(55)^2/10}=0.26$$

$$\hat{a}=\overline{Y}-b\overline{t}=1.97$$

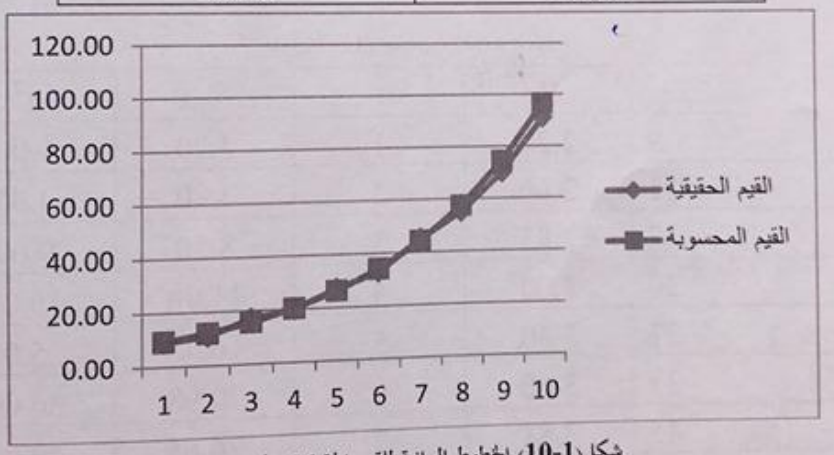
بالتعويض في العلاقة (1-35) نجد أن:

$$\hat{y_t}=e^{1.97+0.26\,t}$$

جدول القيم الحقيقية والمحسوبة من النموذج السابق.

جدول(1-16) القيم الحقيقية والمحسوبة بالنموذج

القيم الحقيقية	القيم المحسوبة
9.00	9.30
11.00	12.06
17.00	15.64
20.00	20.29
27.00	26.31
33.00	34.12
45.00	44.26
55.00	57.40
70.00	74.44
91.00	96.54



شكل(1-10) الخطوط البيانية للقيم الحقيقية والمحسوبة

من الشكل واضح بأن النموذج يمثل البيانات بشكل جيد وذلك للتقارب الكبير بين الخطين البيانيين للقيم المحسوبة والقيم الحقيقية

5.النموذج المركب Compound Model

هو أحد أشكال النماذج الأسية والشكل العام له هو

$$y_t=a(b)^t \qquad (36\text{-}1)$$

يحول الى الشكل الخطي بأخذ اللوغاريتم للطرفين