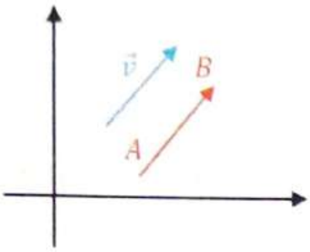
مراجعة في الأشعة

مفهوم الشعاع:

لتكن النقطتان B, A من المستوي (او الفراغ) نسمي الإنسحاب الذي ينقل A إلى B بالشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونرمز له بـ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

عناصره:



- الجهة: من A إلى B هو اتجاه الشعاع $\overrightarrow{AB}$
- المنحى: هو المستقيم (AB) او اي مستقيم يوازيه.
- طويلة الشعاع (نظيمه): طول القطعة $[AB]$ اي ان $\|\vec{u}\| = [AB]$

ملاحظة: يكون الشعاعان $\vec{v}, \vec{u}$ لهما نفس المنحى عندما يكونان متوازيان (مرتبطان خطيا).

****

اشعة مميزة

الشعاع الصفري:

رمزه $\vec{0}$ وهو شعاع تنطبق نهايته على بدايته أي له نفس البداية والنهاية: $\boxed{\|\overrightarrow{AA}\| = 0}$ $\boxed{\overrightarrow{AA} = \vec{0}}$

ملاحظة: إذا كان $\vec{D} = \vec{0}$ فإن $D = B$

الشعاعان المتساويان:

هما شعاعان لهما المنحى ذاته والطول ذاته والجهة ذاتها.

اي ان: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{لهما الجهة ذاتها} \\ \text{لهما المنحى ذاته } (\vec{u} \backslash\backslash \vec{v}) \\ \text{لهما الطول ذاته } (\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|) \end{cases}$

ملاحظة: إذا كان $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF}$ فإن $M = F$

الشعاعان المتعاكسان:

هما شعاعان لهما المنحى ذاته والطول ذاته وجهتين متعاكستين.

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}$ شعاعان متعاكسان فإن $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

⇐ (مجموع شعاعين متعاكسين يساوي الشعاع الصفري)

ملاحظة: ليس من الضروري أن يكون الشعاعان المتعاكسان أو المتساويان لهما نفس الأحرف أو يشتركان بحرف كما هو في حالة متوازي الأضلاع أو المكعب أو....

****

الارتباط الخطي

نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ غير الصفريين انهما مرتبطين خطياً إذا كان المستقيمين (AB),(CD) متوازيين. (لهما المنحى ذاته).

بعبارة أخرى

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ مرتبطان خطياً } \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{u} = k.\vec{v} \\ \text{او} \\ \vec{v} = \lambda.\vec{u} \end{pmatrix} : k, \lambda \in R$$

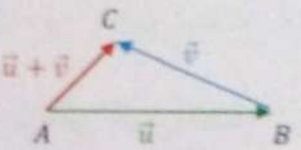
♦ $k \in R$: $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow$ ABC على استقامة واحدة

جدول توضيحي:

	المنحى	الطويلة	الجهة
الشعاعان المتساويان	✓	✓	✓
الشعاعان المتعاكسان	✓	✓	عكس الجهة
الشعاعان المرتبطان خطيا (متوازيان)	✓	ليس بالضرورة	ليس بالضرورة

جمع الأشعة

أشعة متعاقبة (علاقة شال)

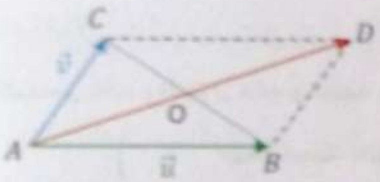


$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

او:

$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

أشعة لها نفس البداية

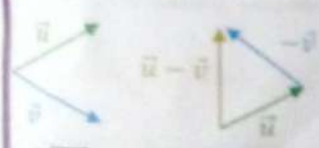


$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AO}$$

حيث $\overrightarrow{AD}$ قطر متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

طرح شعاعين

نحصل على حاصل طرح الشعاع $\vec{v}$ من $\vec{u}$ بجمع الشعاع $\vec{u}$ إلى الشعاع المعاكس للشعاع $\vec{v}$

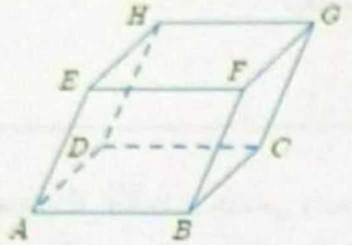


ملاحظات على طرح الأشعة:

♦ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

♦ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$

مثال اساسي:



ABCDEFGH متوازي السطوح:

اولاً: الأشعة البديلة:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{HD}$

$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG} \quad , \quad \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

ثانياً: مجموع شعاعين:

علاقة شال	قاعدة متوازي الأضلاع
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FH}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BG}$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

ثالثاً: مجموع شعاعين غير مشتركين بأية نقطة: لا بد هنا من استبدال الأشعة.

اثبت صحة كل من العلاقات التالية:

$\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HG}$ $L_1 = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FG}$ $= \overrightarrow{HG} = L_2$	$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AF}$ $L_1 = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$ $= \overrightarrow{AF} = L_2$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$ $L_1 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$ $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ شعاعين متعاكسين ومتساويين.

رابعاً: ثلاثة أحرف لها البداية ذاتها:

مجموع اشعة ثلاثة احرف في متوازي السطوح: هو قطر متوازي السطوح بدءاً من بداية الأشعة.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$$
$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FD}$$
$$\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BH}$$

أثبت صحة العلاقة:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$

$L_1 = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$

$= \overrightarrow{AG} = L_2$

خامساً: ثلاثة أقطار لها البداية ذاتها.

مجموع اشعة ثلاثة اقطار في متوازي السطوح: هو ضعفي قطر متوازي السطوح بدءاً من بداية الأشعة.

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AG}$$
$$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FD}$$
$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BH}$$

أثبت صحة العلاقة:

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AG}$

$L_1 = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}$

$= \overbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}} + \overbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}} + \overbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}$

$= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$

$= 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{AG}$

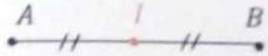
طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سيروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

ضرب شعاع بعدد حقيقي

ليكن $\vec{u}$ شعاع غير معدوم وليكن k عدد حقيقي غير معدوم.

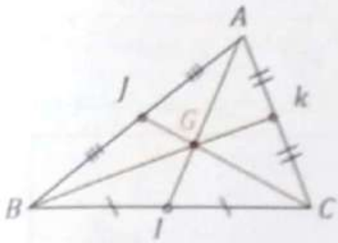
$k > 0$ فإن:	$k < 0$ فإن:
للشعاعين $\vec{u}$, $\overrightarrow{ku}$ نفس المنحى والجهة وطول $\overrightarrow{ku}$ يساوي جداء طول الشعاع $\vec{u}$ بالعدد k	للشعاعين $\vec{u}$, $\overrightarrow{ku}$ نفس المنحى وجهتين متعاكستين وطول الشعاع $\overrightarrow{ku}$ يساوي جداء طول الشعاع $\vec{u}$ بالعدد $\lvert k\rvert$

تطبيقات هندسية هامة:



1. منتصف قطعة مستقيمة $[AB]$: هي النقطة I التي تحقق العلاقة $\vec{A} = 2\overrightarrow{AI}$ او $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ وتتحقق الخواص الآتية:

$\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}}$ $\boxed{\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}}$ $\boxed{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}}$



2. مركز ثقل مثلث: Gمركز ثقل المثلث ABC

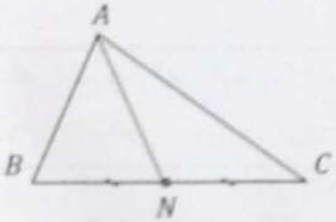
-1 نقطة تلاقي متوسطاته

-2 النقطة G التي تحقق:

$\boxed{\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}}$ $\boxed{\overrightarrow{GI} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GA}}$ $\boxed{\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}}$ $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}}$

-3 G تحقق علاقة مركز الأبعاد المتناسبة :

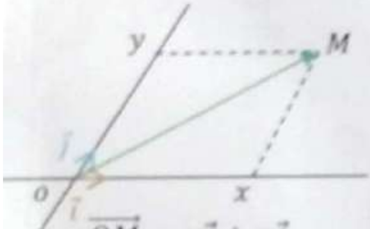
$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}}$



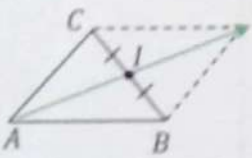
3. علاقة المتوسط في المثلث:

$\boxed{2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}$

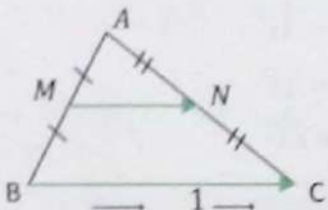
أشكال هندسية هامة:



$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



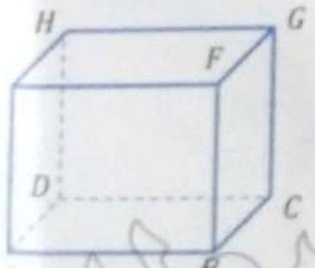
$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

تدريب:

ليكن لدينا المكعب $ABCDEFGH$ كما في الشكل والمطلوب:



1. أوجد كل شعاع يساوي الشعاع:

$\overrightarrow{AB} =\quad =\quad =$	$\overrightarrow{HD} =\quad =\quad =$
$\overrightarrow{AD} =\quad =\quad =\quad =$	$\overrightarrow{BG} =$
$\overrightarrow{DE} =$	$\overrightarrow{GE} =$
$\overrightarrow{BD} =$	

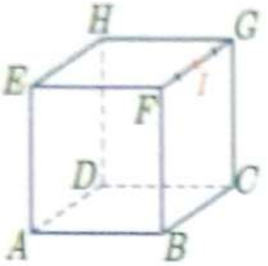
2. املأ الفراغات الآتية:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GH}=$	$\overrightarrow{DG}+\qquad=\vec{0}$
$\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{FD}=$	$\overrightarrow{HE}+\qquad=\vec{0}$
$\overrightarrow{BG}+\qquad=\vec{0}$	$\overrightarrow{GE}+\qquad=\vec{0}$

مثال:

$ABCDEFGH$ مكعب، و I منتصف الحرف $[FG]$

1. اثبت صحة العلاقة الآتية: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$



$$L_1=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}$$
$$=\overbrace{\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}}+\overrightarrow{CF}$$
$$=\overrightarrow{AF}+\underbrace{\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FB}}$$
$$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}=L_2$$

2. عين النقطة M التي تحقق كل من العلاقتين الآتيتين:

♦ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{AM}=\underbrace{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC'}}$$
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC'}$$

(C' نظيرة C بالنسبة لـ G)

إذاً: $M=C'$ لاحظ: (M لا تقع على رؤوس المكعب).

♦ $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$

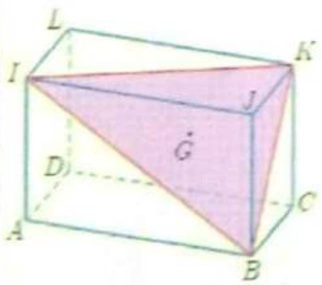
$$\underbrace{\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}}=\overrightarrow{AM}$$
$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}$$

إذاً، $I=M$

تدريب:

$ABCDIJkL$ متوازي سطوح وليكن G مركز ثقل المثلث BIk

اثبت ان النقاط D,G,J تقع على استقامة واحدة.



فكرة الحل:

لإثبات ان النقاط J,G,D على استقامة واحدة يجب أن نثبت ان $\overrightarrow{JG}, \overrightarrow{JD}$ مرتبطين خطياً.

بما أن G مركز ثقل المثلث BIk إذاً:

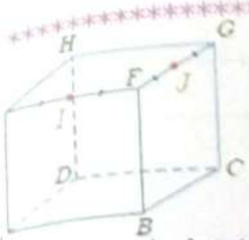
$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{Gk}=\vec{0}$$

حسب علاقة شال ندخل J:

$$\overbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}}+\overbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JI}}+\overbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{Jk}}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GJ}+\underbrace{\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{Jk}}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{JD}=3\overrightarrow{JG}$$

إذاً $\overrightarrow{JG},\overrightarrow{J}$ مرتبطين خطياً ويشتركان بنقطة J فالنقاط G,J,D على استقامة واحدة.

ملاحظة لحل المسائل: في مسائل وضع النقطة نحول مجموع الأشعة إلى شعاع واحد يشترك مع الشعاع في الطرف الآخر بنقطة ، ويمكن في هذه المسائل إيجاد نقطة جديدة (منتصف قطعة مستقيمة ، انسحاب نقطة ، نظيرة نقطة ......)



تدرب صفحة 16

1) $ABCDEFGH$ مكعب، I منتصف $[E]$، J منتصف $[FG]$

1. في كل من الحالات التالية، بين إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب وعلل إجابتك.

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$
$= \overrightarrow{AF}$

إذاً $F = M$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$
$= \overrightarrow{AG}$

إذاً $G = M$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$
$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DG}$
$= \overrightarrow{CG}$
$= \overrightarrow{AE}$

إذاً $E = M$

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CG}$
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC'}$
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC'}$

(C' نظيرة C بالنسبة لـ G)

إذاً $M = C'$ لاحظ: (M لا تقع على رؤوس المكعب).

$\boxed{5}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}\right)$
$= \frac{1}{2}(2\,\overrightarrow{AB})$
$= \overrightarrow{AB}$

إذاً $B = M$

2. في كل من الحالات الآتية حدد موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة.

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$
$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ}$
$= \overrightarrow{AJ}$

إذاً $J = N$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$
$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ}$
$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ}$
$= \overrightarrow{AJ}$

إذاً $J = N$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$= \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}} + \underbrace{\overrightarrow{GH}} + \overrightarrow{EI}$

$= \underbrace{\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}} + \overrightarrow{EI}$

$= \underbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI}}$

$= \overrightarrow{AI}$

إذاً $I = N$

3. في كل من الحالات الآتية عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً.

$\boxed{1}$ $\underbrace{\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA}}$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BJ}$

$\boxed{2}$ $\underbrace{\overrightarrow{BF}} + \overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

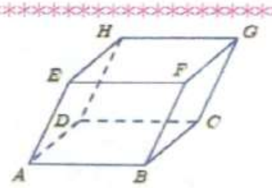
$= 2\overrightarrow{AI}$ حسب علاقة شعاع المتوسط

حيث I منتصف $[EF]$.

$\boxed{4}$ $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \underbrace{\overrightarrow{JF}}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$



2) $ABCDEFGH$ متوازي سطوح.

1. اثبت صحة المساواة الشعاعية في كل من الحالات الآتية:

$\boxed{1}$ $\underbrace{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF}} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$

$L_1 = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} = \vec{0} = L_2$

$\boxed{2}$ $\underbrace{\overrightarrow{ED}} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

$L_1 = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} = L_2$

$\boxed{3}$ $\underbrace{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

$L_1 = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{EB}$

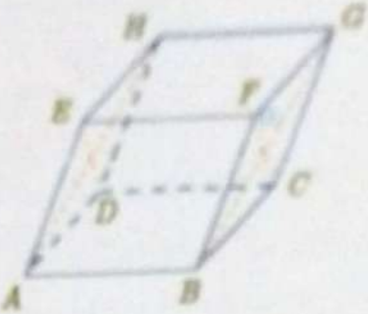
$= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EB} = \vec{0} = L_2$

$\boxed{4}$ $\underbrace{\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB}} + \underbrace{\overrightarrow{FG}} = \overrightarrow{FD}$

$L_1 = \underbrace{\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD}}$

$= \overrightarrow{FD} = L_2$

2. وضع النقاط R, Q, P بحيث يكون:



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

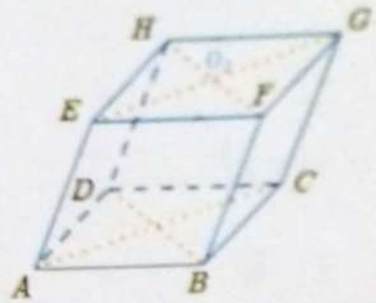
$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left[\underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}_{\downarrow}\right]$

$= \overrightarrow{AB} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}}_{\downarrow}$

$= \overrightarrow{AB} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}}_{\downarrow}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO_1}$; O_1 مركز الوجه $BCGF$;

$= \overrightarrow{AO_1} \Rightarrow P = O_1$



$\boxed{2}$ $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

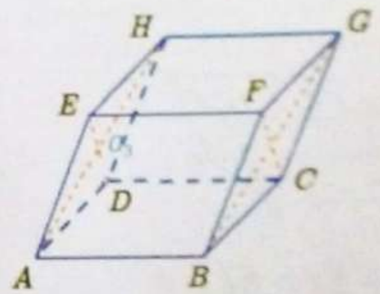
$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}_{\downarrow}\right] + \overrightarrow{AE}$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}_{\downarrow} + \overrightarrow{AE}$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}}_{\downarrow} + \overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{EO_2} + \overrightarrow{AE}$; O_2 مركز الوجه $EHGF$;

$= \overrightarrow{AO_2} \Rightarrow Q = O_2$



$\boxed{3}$ $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AE}}_{\downarrow} - \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\downarrow} - \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\downarrow}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{DO_3} + \overrightarrow{CD}$; O_3 مركز الوجه $ADHE$;

$= \overrightarrow{CO_3} \Rightarrow R = O_3$

3. عين شعاعاً يساوي $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$ واثبت ان هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع $\overrightarrow{AH}$

$\underbrace{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}}_{\rightleftarrows} + \overrightarrow{BF} = \underbrace{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}}_{\downarrow} + \overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

اي ان $\overrightarrow{D} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$ مرتبط خطياً بالشعاع $\overrightarrow{AH}$

4. اوجد شعاعاً يساوي $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$ واثبت ان هذا الشعاع يرتبط خطياً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$

$\underbrace{\overrightarrow{FE}} + \underbrace{\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}}$

$\underbrace{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC}}$

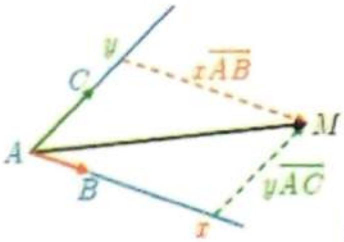
$\overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{DF}$

اي ان $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$ مرتبط خطياً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$

وائل زعترية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

مبرهنة (3):



C, B, A ثلاث نقاط ليست واقعة على استقامة واحدة عندئذ المستوي

(ABC)هو مجموعة النقاط M المعرفة بالعلاقة:

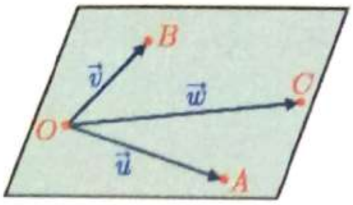
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad : x, y \in R$$

عندئذ $\vec{A}, \overrightarrow{AB}$ يوجهان المستوي (ABC).ونسمي $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ شعاعا توجيه في المستوي (ABC)

ملاحظة: يتعين مستو P بنقطة وشعاعين $\vec{v}, \vec{u}$ غير مرتبطين خطياً نسميهما شعاعا توجيه P

****

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:



نقول إن الأشعة $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجدت نقطة O

تجعل النقاط C, B, A, Oتقع في مستو واحد.بحيث :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v} \quad , \quad \overrightarrow{OC} = \vec{w}$$

نتيجة:

عندما يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً كانت الأشعة $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ مرتبطة خطياً

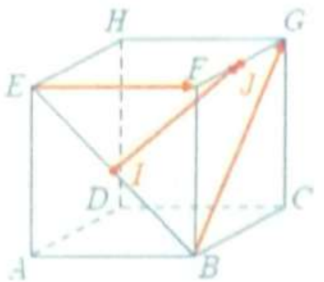
مبرهنة (4): هامة جداً:

$\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ ثلاثة أشعة نفرض ان $\vec{v}, \vec{u}$ ليسا مرتبطين خطياً عندئذ الأشعة $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان b, a يحققان $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

ملاحظة: تفيد المبرهنة (4) في:

1. إثبات الارتباط الخطي لثلاث أشعة.
2. إثبات أربع نقاط تنتمي إلى مستو واحد.
3. إيجاد معادلة مستو مار بثلاث نقاط.
4. إثبات انتماء (M) إلى مستو مار بثلاث نقاط C, B, A
5. إثبات تقاطع مستقيمين عُلم شعاعا توجيههما ومارين في نقطتين معلومتين.

تدريب:



$ABCDEFGH$مكعب. النقطة I منتصف $[BE]$ و J منتصف $[FG]$

اثبت ان الأشعة $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG}, \vec{I}$ مرتبطة خطياً.

نلاحظ ان $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG}$ متعامدان فهما غير مرتبطان خطياً.

ولنحاول كتابة$\overrightarrow{IJ}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG}$

طريقة اولى: لدينا Iمنتصف$[EB]$ وبالتالي حسب علاقة شعاع المتوسط:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IF} \\ &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{EF} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IE}}_{\vec{0}} \end{aligned}$$

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{EF}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

وحسب المبرهنة (4) الأشعة $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً.

طريقة ثانية: حسب علاقة شال نجد:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ} \cdots\cdots\cdots \boxed{1}$$

$$+\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ} \cdots\cdots\cdots \boxed{2}$$

$$2\overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + \underbrace{\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{GJ}}_{\vec{0}}$$

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

وحسب المبرهنة (4) الأشعة $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً.

تمرين:

نتأمل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(0,1,-1), B(1,0,0), C(-1,2,1), D(0,1,2)$ اثبت انتماء النقاط D,C,B,A إلى مستو واحد P

- لكي تنتمي النقاط D,C,B,A إلى مستو واحد يجب أن تكون الأشعة $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً.
- $\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}(-1,1,2)$, $\overrightarrow{AD}(0,0,3)$
- نلاحظ ان $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة فيوجد عددين b,a حقيقين يحققان:

$$\overrightarrow{AD} = a\ \overrightarrow{AB} + b\ \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\-a\\a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-b\\b\\2b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a-b\\-a+b\\a+2b\end{bmatrix}$$

$$a - b = 0 \cdots\cdots\cdots \boxed{1}$$
$$-a + b = 0 \cdots\cdots\cdots \boxed{2}$$
$$a + 2b = 3 \ldots\ldots\ldots \boxed{3}$$

نحل جملة المعادلتين $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ ونتحقق من صحة الحل بالتعويض في $\boxed{1}$:

$$\begin{aligned} & -a + b = 0 \\ + \quad & \underline{a + 2b = 3} \\ 3b = 3 \quad & \Rightarrow \quad b = 1 \ ,\ a = 1 \end{aligned}$$

نعوض في $\boxed{1}$ فنجد $1 - 1 = 0$ ومنه $0 = 0$ محققة إذاً: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

فالأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً ومنه النقاط D,C,B,A تقع في مستو واحد.

تدريب: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(5,1,2)$, $B(1,-5,0)$ والشعاعان $\vec{u}(3,-1,-1)$, $\vec{v}(2,3,1)$، d هو المستقيم المار بالنقطة A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجهاً له، و $\grave{d}$ هو المستقيم المار بالنقطة B ويقبل $\vec{v}$ شعاعاً موجهاً له. اثبت ان المستقيمين $\grave{d},d$ متقاطعان ثم عين C نقطة تقاطعهما.

♦لإثبات تقاطع المستقيمين $\grave{d},d$: نثبت ان d و $\grave{d}$ غير متوازيين ثم نثبت وقوعهما في مستوٍ واحد

اي يجب إثبات الإرتباط الخطي للأشعة: $\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}$:

حيث: $\vec{u}$ شعاع توجيه d، $A \in d$ ؛ $\vec{v}$ شعاع توجيه $\grave{d}$، $B \in \grave{d}$ ؛ $\overrightarrow{AB}(-4,-6,-2)$

♦$\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً $\left(\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{-1}{1}\right)$ لأن المركبات غير متناسبة.

فالشعاعان غير مرتبطين خطياً فالمستقيمين $d,\grave{d}$ ليسا متوازيين.

ولنبحث عن عددين حقيقين b,a يحققان:

$$\overrightarrow{AB} = a\ \vec{u} + b\ \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix}-4\\-6\\-2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-4\\-6\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3a+2b\\-a+3b\\-a+b\end{bmatrix}$$

$$3a+2b=-4 \quad \cdots\cdots\cdots \boxed{1}$$
$$-a+3b=-6 \quad \cdots\cdots\cdots \boxed{2}$$
$$-a+b=-2 \quad \cdots\cdots\cdots \boxed{3}$$

نحل جملة المعادلتين $\boxed{2}$ و$\boxed{3}$ ونتحقق من صحة الحل بالتعويض في $\boxed{1}$:

$$\begin{aligned}-a+3b&=-6\\ -a+\ b&=-2 \quad \text{بالطرح}\\ \hline 2b&=-4 \Rightarrow b=-2\ ,\ a=0\end{aligned}$$

نعوض في $\boxed{1}$ فنجد $3(0)+2(-2)=-4$ ومنه $-4=-4$ محققة إذاً: $\overrightarrow{AB} = 0\vec{u} - 2\vec{v}$

فالأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{A}$ مرتبطة خطياً. فالمستقيمين $d,\grave{d}$ متقاطعين.

إيجاد نقطة تقاطع $\grave{d},d$ ولتكن $C(x,y,z)$:

لدينا : $\overrightarrow{AB} = 0\vec{u} - 2\vec{v}$ **وحسب شال :**

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 0\vec{u} - 2\vec{v}$$

وبالمطابقة بين طرفي المساواة مع ملاحظة أن $\overrightarrow{AC}$, $\vec{u}$ مرتبطان خطياً و $\overrightarrow{CB},\vec{v}$ مرتبطان خطياً نجد أن:

$\left(\overrightarrow{AC} = 0\,\vec{u}\right.$ و $\left.\overrightarrow{CB} = -2\,\vec{v}\right)$ وبالتالي:

$$\begin{bmatrix}1-x\\-5-y\\-z\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1-x\\-5-y\\-z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-6\\-2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}1-x&=-4 \to x=5\\ -5-y&=-6 \to y=1\\ -z&=-2 \to z=2\end{aligned}\right\} \quad C(5,1,2)$$

تدرب صفحة 20

1) C, B, A ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ، أتكون الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطياً؟

بما أننا نستطيع كتابة $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ فالأشعة مرتبطة خطياً.

---

2) C, B, Aثلاث نقاط متمايزة من الفراغ، E نقطة تحقق $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$، F نقطة تحقق $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ أتقع النقاط F, E, C, B, A في مستو واحد؟

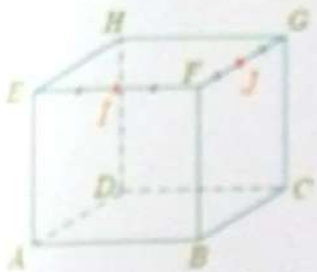
♦ $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ومنه النقاط E, C, B تقع على استقامة واحدة وبالتالي النقطة E تقع على المستقيم (BC)

♦ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ ومنه النقاط E, F, A تقع على استقامة واحدة وبالتالي النقطة E تقع على المستقيم (AF)

نستنتج مما سبق أن المستقيمان (BC) ، (AF) يتقاطعان في E ونعلم أنه من تقاطع مستقيمين يتعين مستوي وحيد يحويهما وبالتالي فالنقاط F, E, C, B, Aتقع في مستو واحد.

---

3) $ABCDEFGH$مكعب، I منتصف $[FE]$ و J منتصف $[FG]$



1. أتنتمي النقطة J إلى المستوي (ABI)

بما أن J واقعة على الحرف $[FG]$ العمودي على المستوي (ABI)

إذاً النقطة J لا تنتمي إلى هذا المستوي.

2. أتقع الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{AJ}$ في مستو واحد.

النقطة J لا تقع في المستوي (AIB) وبالتالي النقاط B, I, A, J لا تقع في مستوي واحد ومنه الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{AJ}$ لا تقع في مستوي واحد.

---

4) $ABCD$ رباعي وجوه و M هي النقطة الوحيدة المحققة للعلاقة: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ واستنتج أن M تنتمي إلى المستوي (ABC)

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

وحسب (المبرهنة 4) فإن M تنتمي للمستوي (ABC)

5) $ABCDEFGH$ مكعب.فيه M نقطة تحقق: $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$، و N نقطة تحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1. اثبت ان $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

(حسب علاقة شال)

$$L_2=\underbrace{\overrightarrow{EA}}_{\uparrow}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$=\overbrace{\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

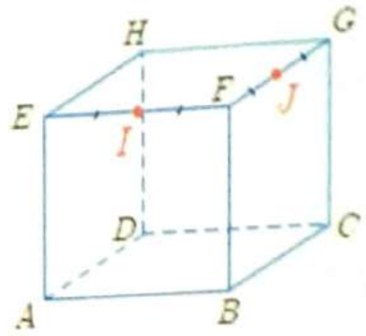
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{MN}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MN}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$=\overrightarrow{MN}+\frac{1}{3}\left(\underbrace{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$=\overrightarrow{MN}+\underbrace{\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}}$$

$$=\overrightarrow{MN}+\vec{0}=\overrightarrow{MN}=L_1$$



2. اتكون الأشعة $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطياً

من العلاقة السابقة:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HB}\right]$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\underbrace{\overrightarrow{DH}}_{\downarrow}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

$$\overrightarrow{MN}=\underbrace{\overrightarrow{EA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}}_{\downarrow}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

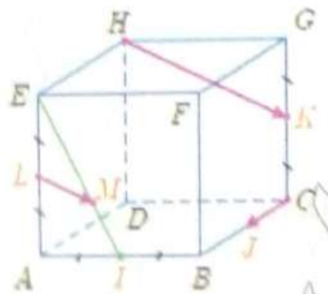
إذاً حسب المبرهنة (4) فالأشعة السابقة مرتبطة خطياً.

6) $ABCDEFGH$مكعب L,k,J,I هي بالترتيب منتصفات $[AE],[CG],[BC],[AB]$ولتكن M النقطة المحققةللعلاقة $3\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{EI}$

1. لماذا M هي مركز ثقل المثلث AEB

المثلث AEB فيه EI متوسط

من العلاقة السابقة $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$ $\Leftarrow$ فإن M نقطة تلاقي المتوسطات فهي مركز ثقل المثلث AEB



2. اتكون الأشعة $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{CJ}$, $\overrightarrow{Hk}$ مرتبطة خطيا؟

المثلث ABE فيه BL متوسط ومنه:

$$\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GK}$$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{LB}\xrightarrow{M\text{ مركز ثقل }AEB}\overrightarrow{LB}=3\overrightarrow{LM}\Rightarrow\overrightarrow{HK}=3\overrightarrow{LM}$$

و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{LM}$ مرتبطان خطيا فالأشعة $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{CJ}$, $\overrightarrow{Hk}$ مرتبطة خطيا.

تمهيد:

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم في الفراغ حيث:

- O مبدأ المعلم، و $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس أشعة الفراغ، ونقول إن بعد الفراغ يساوي (3) لأن عدد أشعة أي أساس فيه يساوي (3).
- أياً كانت النقطة $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ فإن: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$، ونسمي x فاصلة النقطة M، y ترتيبها، z علو أو راقم M

خواص الأشعة في الفراغ:

في معلم في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا الشعاعان: $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ والنقاط $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$ عندئذ:

- $k\vec{u} = (kx_1 , ky_1 , kz_1)$ حيث $k \in R$
- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2)$
- مركبات الشعاع $\vec{A}$ هي: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)$
- منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي النقطة: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2} , \frac{y_A+y_B}{2} , \frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- G مركز ثقل ABC عندئذ : $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3} , \frac{y_A+y_B+y_C}{3} , \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$
- النقطة D التي تجعل $ABCD$ متوازي الأضلاع تحقق : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

تدريب:

نتأمل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,2,-3)$, $B(-1,3,3)$, $C(4,-1,2)$ ولتكن D نقطة تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع. احسب إحداثيات D، ثم احسب إحداثيات I مركز متوازي الأضلاع.

يكون $ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

لدينا مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $\overrightarrow{AB}(-2,1,6)$

وبفرض إحداثيات النقطة D هي: $D(x,y,z)$ إذاً مركبات الشعاع $\overrightarrow{DC}$ هي:

$\overrightarrow{DC}(4 - x, -1 - y , 2 - z)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - x \\ -1 - y \\ 2 - z \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 4 - x = -2 & \to x = 6 \\ -1 - y = 1 & \to y = -2 \\ 2 - z = 6 & \to z = -4 \end{array}\right\} \quad D(6,-2,-4)$$

إحداثيات I مركز متوازي الأضلاع: هو منتصف قطره $[AC]$

$$I\left(\frac{4+1}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-3}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

****

تدرب صفحة 24

1) نتأمل النقاط:

$A(3,5,2)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,-2,2)$, $D(-2,5,1)$, $E(3,9,2)$, $F(8,13,3)$ في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ.

1. احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$

منتصف $[AB]$ هي: $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2},\ 2\ ,\dfrac{5}{2}\right)$

منتصف $[CD]$ هي: $\left(\dfrac{x_D+x_C}{2},\dfrac{y_D+y_C}{2},\dfrac{z_D+z_C}{2}\right)=\left(-1,\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

منتصف $[EF]$ هي: $\left(\dfrac{x_F+x_E}{2},\dfrac{y_F+y_E}{2},\dfrac{z_F+z_E}{2}\right)=\left(\dfrac{11}{2},11,\dfrac{5}{2}\right)$

2. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,,y_B-y_A\,,z_B-z_A)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\,(-1,-6,1)$$
$$\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,,y_D-y_C\,,z_D-z_C)\Rightarrow\overrightarrow{CD}\,(-2,7,-1)$$
$$\overrightarrow{EF}(x_F-x_E\,,y_F-y_E\,,z_F-z_E)\Rightarrow\overrightarrow{EF}\,(5,4,1)$$

3. عين إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي اضلاع.

حتى يكون $ABCK$ متوازي أضلاع يجب أن يتحقق $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}$، ولنفرض أن إحداثيات K هي $K(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)\quad;\quad\overrightarrow{KC}(-x,-2-y,2-z)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}-x=-1\\-2-y=-6\\2-z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=1\\y=4\\z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\quad K(1,4,1)$$

4. جد مركبات كل من الشعاعين:

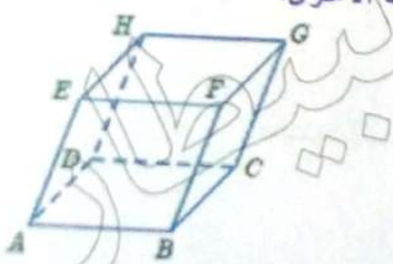
$$\begin{aligned}\vec{u}&=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}\\&=3(-1,-6,1)+2(-2,7,-1)\\&=(-3,-18,3)+(-4,14,-2)\\&=(-7,-4,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}&=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}\\&=2(-1,-6,1)-\frac{1}{2}(-2,7,-1)+3(5,4,1)\\&=(-2,-12,2)+\left(1,-\frac{7}{2},1\right)+(15,12,3)\\&=\left(14,-\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)\end{aligned}$$

---

2) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ، نعطي إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً وهي:

$A(2,1,-1)$, $B(1,3,-1)$, $C(-3,2,0)$, $E(3,-1,3)$ جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.



♦كون $ABCD$ متوازي أضلاع نجد أن: $\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\downarrow}=\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{\downarrow}$ حيث $D(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3-x\\2-y\\-z\end{bmatrix}\quad\left.\begin{matrix}x=-2\\y=0\\z=0\end{matrix}\right\}$$

فالنقطة $D(-2,0,0)$

♦كون $ABFE$ متوازي اضلاع نجد ان:

$\underbrace{\overrightarrow{AE}}_{\downarrow} = \underbrace{\overrightarrow{BF}}_{\downarrow}$ حيث $F(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-1\\y-3\\z+1\end{bmatrix} \quad \begin{rcases}x=2\\y=1\\z=3\end{rcases} \Rightarrow F(2,1,3)$$

♦من الشكل نجد ان:

$\underbrace{\overrightarrow{AE}}_{\downarrow} = \underbrace{\overrightarrow{CG}}_{\downarrow}$ حيث $G(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+3\\y-2\\z\end{bmatrix} \quad \begin{rcases}x=-2\\y=0\\z=4\end{rcases} \Rightarrow G(-2,0,4)$$

♦من الشكل نجد ان:

$\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\downarrow} = \underbrace{\overrightarrow{EH}}_{\downarrow}$ حيث $H(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix}-4\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-3\\y+1\\z-3\end{bmatrix} \quad \begin{rcases}x=-1\\y=-2\\z=4\end{rcases} \Rightarrow H(-1,-2,4)$$

---

3) لدينا في معلم للفراغ النقاط: $A(3,0,-1)$, $B(-2,3,2)$, $C(1,2,-2)$

1. جد إحداثيات النقطة I منتصف $[AB]$

$$I = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2. جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة لـ C

لتكن $D(x,y,z)$ وبما ان D نظيرة I بالنسبة لـ C فإن:

$$\underbrace{\overrightarrow{IC}}_{\downarrow} = \underbrace{\overrightarrow{CD}}_{\downarrow}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{-5}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-1\\y-2\\z+2\end{bmatrix}$$

$$\begin{rcases}x-1=\frac{1}{2}\\y-2=\frac{1}{2}\\z+2=\frac{-5}{2}\end{rcases} \quad \begin{rcases}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{5}{2}\\z=\frac{-9}{2}\end{rcases}$$ فالنقطة $D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$

3. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة

$$\underbrace{\overrightarrow{BM}}_{\downarrow} = \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\downarrow} + 3\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\downarrow}$$

بفرض $M(x,y,z)$ و منه

$$\begin{bmatrix}x+2\\y-3\\z-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\3\\3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x+2\\y-3\\z-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\3\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6\\6\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x+2\\y-3\\z-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-11\\9\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{rcases}x+2=-11\\y-3=9\\z-2=0\end{rcases} \begin{rcases}x=-13\\y=12\\z=2\end{rcases}$$ فالنقطة $M(-13,12,2)$

4. جد إحداثيات النقطة N التي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{NA} = 2\,\overrightarrow{NC}$

بفرض $N(x,y,z)$ و منه

$$\underbrace{\overrightarrow{NA}}_{\downarrow} = 2\,\underbrace{\overrightarrow{NC}}_{\downarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 3-x \\ -y \\ -1-z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1-x \\ 2-y \\ -2-z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-x \\ -y \\ -1-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2x \\ 4-2y \\ -4-2z \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 3-x = 2-2x \\ -y = 4-2y \\ -1-z = -4-2z \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=4 \\ z=-3 \end{matrix}\right\}$$

فالنقطة $N(-1,4,-3)$

---

4) لدينا النقطتان $B(5,-1,0), A(2,3,-2)$ جد إن امكن في كل حالة إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة.

$\boxed{1}$ $\underbrace{\overrightarrow{MA}}_{\downarrow} = 2\,\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\downarrow}$

بفرض $M(x,y,z)$ و منه

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} x=-4 \\ y=11 \\ z=-6 \end{matrix}\right\}$$

فالنقطة $M(-4,11,-6)$

$\boxed{2}$ $\underbrace{\overrightarrow{MA}}_{\downarrow} = \underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\downarrow}$

بفرض $M(x,y,z)$ و منه

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ 3-y \\ -2-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-x \\ -1-y \\ -z \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2-x = 5-x \\ 3-y = -1-y \\ -2-z = -z \end{matrix}\right\}$$

$2 = 5$ مرفوضة

$3 = -1$ مرفوضة

$-2 = 0$ مرفوضة

ومنه فلا يمكن تعيين النقطة M التي تحقق المساواة السابقة.

طريقة ثانية:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}}_{\downarrow} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

وهذا تناقض، ومنه فلا يمكن تعيين النقطة M التي تحقق المساواة السابقة.

$\boxed{3}$ $3\,\underbrace{\overrightarrow{BA}}_{\downarrow} + \underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\downarrow} = \underbrace{\vec{0}}_{\downarrow}$

بفرض $M(x,y,z)$ و منه

$$3\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5-x \\ -1-y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5-x \\ -1-y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4-x \\ 11-y \\ -6-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} x=-4 \\ y=11 \\ z=-6 \end{matrix}\right\}$$

فالنقطة $M(-4,11,-6)$

$\boxed{4}$ $\underbrace{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{BA}}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$

وهذا تناقض، إذاً لا يوجد نقطة M تحقق المساواة السابقة.

---

5) ايمكن تعيين b,a لتقع النقاط: $A(2,3,0)$ ، $B(3,2,1)$ ، $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة.

حتى تكون النقاط على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطياً.

$\overrightarrow{AM}(a-2,b-3,2)$, $\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$

فمركباتهما متناسبة.

$$\frac{a-2}{1}=\frac{b-3}{-1}=\frac{2}{1}\qquad \left.\begin{aligned}\frac{a-2}{1}&=2\\ \frac{b-3}{-1}&=2\end{aligned}\right\}\begin{aligned}a&=4\\ b&=1\end{aligned}$$

---

6) ايمكن تعيين a ليكون الشعاعان: $\vec{u}(2,a,5)$ ، $\vec{v}(,-2,a)$ مرتبطين خطياً؟

ليكن الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ مرتبطان خطياً يجب أن يتناسب مركباتهما:

$$\frac{2}{1}=\underbrace{\frac{a}{-2}=\frac{5}{a}}$$

$a^2=-10$ مستحيلة الحل

ومنه لا يمكن تعيين a

---

7) في كل من الحالات الآتية، بين إذا كانت النقاط C,B,A تقع على استقامة واحدة.

$\boxed{1}$ $C(2,0,-3)$, $B(0,2,4)$, $A(3,-1,2)$

$\overrightarrow{AB}(-3,3,2)$, $\overrightarrow{BC}(2,-2,-7)$

وحتى تكون النقاط على استقامة واحدة يجب أن يتحقق:

$$\frac{-3}{2}=\frac{3}{-2}=\frac{2}{-7}$$

وهذا غير محقق فالنقاط ليست على استقامة واحدة.

$\boxed{2}$ $C(0,-1,7)$, $B(-2,0,5)$, $A(-4,1,3)$

$\overrightarrow{AB}(2,-1,2)$, $\overrightarrow{BC}(2,-1,2)$

وحتى تكون النقاط على استقامة واحدة يجب أن يتحقق:

$$\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}=\frac{2}{2}$$

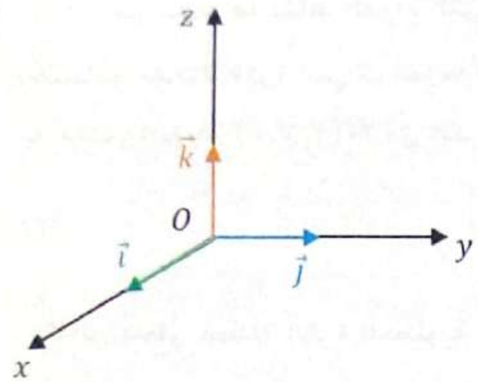
وهذا محقق فالنقاط على استقامة واحدة.

$\boxed{3}$ $C(1,-1,-3)$, $B(1,-1,4)$, $A(1,-1,0)$

$\overrightarrow{AB}(0,0,4)$, $\overrightarrow{BC}(0,0,-7)$

نلاحظ أن: $\overrightarrow{AB}=\frac{-4}{7}\overrightarrow{BC}$ فالنقاط على استقامة واحدة.

المسافة في الفراغ



المعلم المتجانس

نقول عن المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلم متجانس إذا تحقق الشرطان:

1. المستقيمات (OI) , (OJ) , (OK) متعامدة مثنى، حيث:

$$\overrightarrow{OI}=\vec{\imath} \qquad \overrightarrow{OJ}=\vec{\jmath} \qquad \overrightarrow{OK}=\vec{k}$$

2. $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|=1$

نظيم شعاع، المسافة بين نقطتين:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ليكن لدينا النقطتان $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ والشعاع $\vec{u}(a,b,c)$

♦ نظيم الشعاع $\vec{u}$ هو: $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

♦ طول القطعة المستقيمة $[AB]$: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

ملاحظة : دستور المسافة بين نقطتين لا يستخدم إلا إذا كان المعلم متجانساً

تدريب:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(2,3,2)$, $B(-2,-1,2)$, $C(-2,3,-2)$, $D\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)$

1. احسب أطوال AB , AC , AD , BC , BD , CD

$$AB=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2+(2-2)^2}=\sqrt{16+16+0}=4\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(-2-2)^2+(3-3)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{16+0+16}=4\sqrt{2}$$

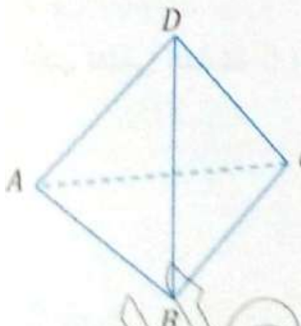
$$AD=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-2\right)^2+\left(\frac{2}{3}-3\right)^2+\left(\frac{-1}{3}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{49}{9}+\frac{49}{9}}=\frac{\sqrt{123}}{3}$$

$$BC=\sqrt{(-2+2)^2+(3+1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{0+16+16}=4\sqrt{2}$$

$$BD=\sqrt{\left(\frac{1}{3}+2\right)^2+\left(\frac{2}{3}+1\right)^2+\left(\frac{-1}{3}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{25}{9}+\frac{49}{9}}=\frac{\sqrt{123}}{3}$$

$$CD=\sqrt{\left(\frac{1}{3}+2\right)^2+\left(\frac{2}{3}-3\right)^2+\left(\frac{-1}{3}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{49}{9}+\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{123}}{3}$$

2. بين طبيعة وجوه رباعي الوجوه $ABCD$



♦ ABC مثلث متساوي الأضلاع لأن: $AB=AC=BC=4\sqrt{2}$

♦ DBC مثلث متساوي الساقين لأن: $CD=DB=\frac{\sqrt{123}}{3}$ وغير قائم لأنه لا يحقق فيثاغورث.

♦ ABD مثلث متساوي الساقين لأن: $AD=DB=\frac{\sqrt{123}}{3}$

وغير قائم لا يحقق فيثاغورث.

♦ ADC مثلث متساوي الساقين لأن: $AD=DC=\frac{\sqrt{123}}{3}$

وغير قائم لأنه لا يحقق فيثاغورث.

معادلة الكرة:

الكرة : هي مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة بعداً ثابتاً .

ولنستنتج معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها r:

أياً كانت النقطة $M(x, y, z)$ من الكرة فإن :

$$\Omega M = r$$
$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r$$

وبالتالي تعطى معادلة الكرة المطلوبة بالشكل:

$$\boxed{S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2}$$

تدريب:

نتامل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(1, 2, -4)$

1. اوجد معادلة الكرة S التي مركزها O ونصف قطرها يساوي (5).

أياً كانت $M(x, y, z)$ نقطة من الكرة عندئذ :

$$OM = 5$$
$$OM^2 = 25$$
$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = 25$$
$$S: x^2+y^2+z^2 = 25$$

2. اوجد معادلة للكرة $\grave{S}$ التي مركزها O وتمر بالنقطة A

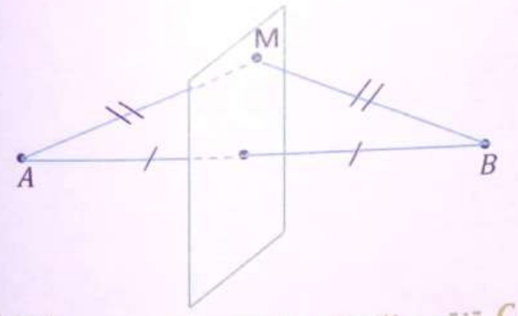
الكرة مركزها O وتمر من A فإن:

$$r^2 = OA^2 = (1-0)^2+(2-0)^2+(-4-0)^2$$
$$= 1+4+16 = 21$$
$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = 21$$
$$\grave{S}: x^2+y^2+z^2 = 21$$

المستوي المحوري لقطعة مستقيمة$[AB]$:

هو مجموعة النقاط Mالتي تبعد عن طرفي هذه القطعة المسافة نفسها.

$$MA = MB$$



تدريب:

لتكن النقطتان $A(-2, -1, 2)$, $B(-2, 3, -2)$ اثبت ان النقطة $C(2, 3, 2)$ تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

حتى تنتمي النقطة C إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يجب أن يتحقق:

$$CA = CB$$

$$CA = \sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2+(2-2)^2} = \sqrt{16+16+0} = 4\sqrt{2}$$
$$CB = \sqrt{(-2-2)^2+(3-3)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{16+0+16} = 4\sqrt{2}$$

ومنه $CA = CB$ فالنقطة C تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

****

تدرب صفحة 27

1) احسب نظيم $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ في كل من الحالات الآتية:

$\boxed{1}$ $\vec{w}(4,1,-2)$, $\vec{v}(4,-4,-2)$, $\vec{u}(2,-2,3)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+(3)^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(4)^2+(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+16+4} = 6$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{(4)^2+(1)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

$\boxed{2}$ $\vec{w} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+0+25} = \sqrt{26}$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{2+3+1} = \sqrt{6}$

---

2) فيما يأتي بين هل المثلث ABC قائم، هل هو متساوي الساقين؟ هل هو متساوي الأضلاع؟

1. في حالة $A(1,3,-1)$, $B(3,6,-2)$, $C(0,4,0)$

$AB = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$AC = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$BC = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

وحسب عكس فيثاغورث فإن: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فالمثلث قائم في A وهو غير متساوي الساقين وغير متساوي الأضلاع لأن أطوال أضلاعه مختلفة.

2. في حالة $A(1,3,-2)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-3,-1)$

$AB = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

$AC = \sqrt{25+36+1} = \sqrt{62}$

$BC = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$

فالمثلث متساوي الساقين وليس قائم لأنه لا يحقق عكس فيثاغورث.

---

3) لدينا النقطتان $A(5,2,-1)$, $B(3,0,1)$ بين اي النقاط C او D او E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

في حالة $C(-2,5,-2)$, $D(1,1,-3)$, $E(3,2,1)$

♦ حتى تنتمي النقطة $C(-2,5,-2)$ إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يجب ان يتحقق:

$CA = CB$

$$\left.\begin{aligned} CA &= \sqrt{49+9+1} = \sqrt{59} \\ CB &= \sqrt{25+25+9} = \sqrt{59} \end{aligned}\right\} \Rightarrow CA = CB$$

فالنقطة C تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

♦ حتى تنتمي النقطة $D(1,1,-3)$ إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يجب ان يتحقق:

$DA = DB$

$$\left.\begin{aligned} DA &= \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21} \\ DB &= \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21} \end{aligned}\right\} \Rightarrow DA = DB$$

فالنقطة D تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

◆ حتى تنتمي النقطة $E(3,2,1)$ إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يجب أن يتحقق:

$$\left.\begin{array}{l} EA = EB \\ EA = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} \\ EB = \sqrt{0+4+0} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow EA \neq EB$$

فالنقطة E لا تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

4) نتأمل النقاط $A(1,1,\sqrt{2})$ ، $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ و C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O

اثبت ان المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

C نظيرة A بالنسبة للمبدأ O فإن: $C(-1,-1,-\sqrt{2})$

نحسب أطوال أضلاع المثلث ABC:

$$AB = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + (-\sqrt{2}-1)^2 + (0-\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{2-2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{2}+1+2} = \sqrt{8}$$
$$AC = \sqrt{4+4+8} = 4$$
$$BC = \sqrt{(-1-\sqrt{2})^2 + (-1+\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2}-0)^2}$$
$$= \sqrt{1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2+2} = \sqrt{8}$$

وحسب عكس فيثاغورث $AC^2 = BC^2 + AB^2$ فإن ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

5) نتأمل النقاط $A(2,3,-1), B(2,8,-1), C(7,3,-1), D(-1,3,3), E(5,3,3)$ اثبت ان E, D, C, B تقع على كرة واحدة مركزها A

لإثبات أن النقاط E, D, C, B تقع على كرة واحدة مركزها A يجب أن يتحقق:

$$AB = AC = AD = AE$$

$$AD = \sqrt{9+0+16} = 5 \quad , \quad AB = \sqrt{0+25+0} = 5$$
$$AE = \sqrt{9+0+16} = 5 \quad , \quad AC = \sqrt{25+0+0} = 5$$

$AB = AC = AD = AE = 5 = R$ فالنقاط E, D, C, B تقع على كرة واحدة مركزها A

مركز الأبعاد المتناسبة

أولاً: مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين:

- **مبرهنة الوجود :**

لتكن لدينا النقطتان (A,α) , (B,β) تحققان $\alpha+\beta \neq 0$ عندئذ توجد نقطة وحيدة G تحقق:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β)

- **علاقة الإنشاء :**

لإنشاء G مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين (A,α) , (B,β) نطبق العلاقة:

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$$

- إذاً كل مركز ابعاد متناسبة للنقطتين B ,A هو نقطة من المستقيم (AB).

أي انه لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي اثبات ان احدى هذه النقاط هي مركز ابعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين.

- في حال كان $\alpha + \beta = 0$ فإن مركز الأبعاد غير موجود
- في حال كان $\alpha = \beta$ فإن مركز الأبعاد G هو منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$
- مبرهنة الاختزال :أياً كانت النقطة M من المستوي فإن :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}}$$

يستفاد من هذه المبرهنة في سؤال ماذا تمثل مجموعة النقاط

****

تدريب: عين عددين α ,β كي تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β) المحققة للعلاقة:

$$2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GB} - 3\left[\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right] = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$-3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

ومنه $(A,3)$, $(B,-1)$ حيث $\alpha = 3$, $\beta = -1$

تدريب: عين في كل من الحالات الآتية عددين α ,β يحققان الشرط المعطى:

1. A هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β),(C,γ)

طريقة 1: من الشكل $\beta + \gamma = 2$ ومن علاقة الإنشاء: $\overrightarrow{BA} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}\overrightarrow{BC}$ $6 = \frac{\gamma}{2} \times 2 \Rightarrow \gamma = 6$ $\Rightarrow \beta = -4$ ويمكن قسمة الأثقال على (2) فيكون : $\gamma = 3$ و$\beta = -2$	طريقة 2 : من الشكل نلاحظ أن : $6\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB} \overset{\div 2}{\Rightarrow}$ $3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ $3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ومنه $(C,3)$, $(B,-2)$

2. C هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β)

$$4\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{CA} \quad \overset{\div 2}{\Rightarrow}$$

$$2\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}$$

$$2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \quad \Rightarrow (B,2) \ , \ (A,1)$$

****

ثانياً: مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:

لتكن لدينا النقاط (A,α) ,(B,β) ,(C,γ) المحققة لـ $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ عندئذ:

-1 توجد نقطة وحيدة G تحقق: $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}}$

-2 أياً كانت M فإنها تحقق: $\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{M}}$

ملاحظة:

إن مركز ثقل المثلث ABC (نقطة تلاقي المتوسطات) هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,a) ، (B,a) ، (C,a) أي:

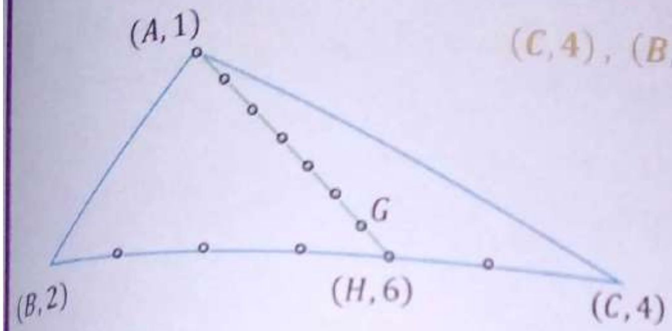
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

3- الخاصة التجميعية :

- إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$
- وكان H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) ، (B,β)
- **عندئذ:** G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)$.

4- حالة خاصة : إذا كان $\alpha+\beta=0$ عندئذٍ : المستقيمان $(BA),(CG)$ متوازيان.

5- النقاط A,B,C,G تقع في مستوٍ واحد



تدريب: انشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,4)$

♦ ننشئ H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2)$ ، $(C,4)$

حيث $(2+4\neq 0)$ فيكون $\overrightarrow{BH}=\frac{4}{6}\overrightarrow{BC}$

♦ ننشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(H,6)$ ، $(A,1)$

حيث $(6+1\neq 0)$ فيكون $\overrightarrow{AG}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AH}$

وحسب الخاصة التجميعية يكون G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(C,4)$ ، $(B,2)$

****

ثالثاً: مركز الأبعاد المتناسبة لأربع نقاط:

لتكن لدينا النقاط (A,α) ، (B,β) ، (C,γ) ، (D,k) حيث $(\alpha+\beta+\gamma+k\neq 0)$ عندئذ:

♦ توجد نقطة وحيدة G تحقق العلاقة: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+k\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

♦ أياً كانت M فانها تحقق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+k)\overrightarrow{MG}$

♦**الخاصة التجميعية :**

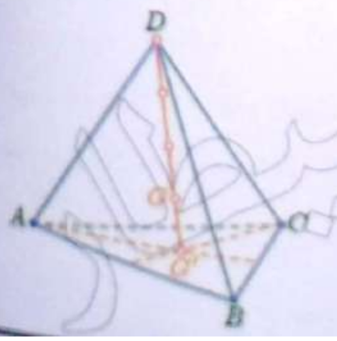
- G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) ، (B,β) ، (C,γ) ، (D,k)
- H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) ، (B,β) ، (C,γ)
- عندئذ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,k) ، $(H,\alpha+\beta+\gamma)$.

♦**وبعبارة اخرى :**

- H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$
- F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(D,k)$
- عندئذ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(H,\alpha+\beta)$ ، $(F,\gamma+k)$.

****

تدريب: $ABCD$ رباعي وجوه، اوجد G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$



♦ $\grave{G}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,1),(B,1),(A,1)$

ومنه $\grave{G}$ نقطة تلاقي المتوسطات ويكون $(\grave{G},3)$

♦G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين: $(\grave{G},3)$ ، $(D,1)$

وذلك حسب الخاصة التجميعية ومنه: $\overrightarrow{\grave{G}G}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\grave{G}D}$

ونسمي G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ وهي تقع على القطعة المستقيمة $[\grave{G}D]$

تدريب: $ABCD$ رباعي وجوه، مركز ثقله G، I منتصف $[AD]$

J منتصف $[BC]$ اثبت أن G, J, I تقع على استقامة واحدة.

- بما أن I منتصف $[AD]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين: $(D,1)$, $(A,1)$
- بما أن J منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين: $(C,1)$, $(B,1)$
- بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$, $(J,2)$ "حسب الخاصة التجميعية".

عندئذ G, J, I على استقامة واحدة.

****

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة:

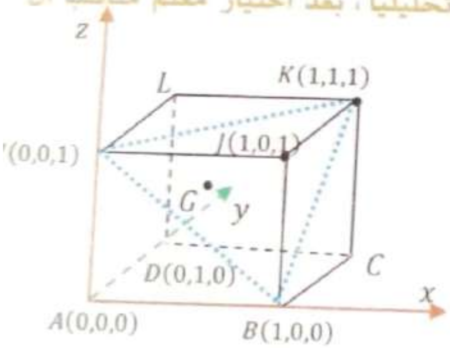
نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية: $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$

ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) عندئذ تعطى إحداثيات النقطة G بالصيغ:

$$x_G=\frac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}{\alpha+\beta+\gamma}\quad,\quad y_G=\frac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3}{\alpha+\beta+\gamma}\quad,\quad z_G=\frac{\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3}{\alpha+\beta+\gamma}$$

****

تدريب: ليكن $ABCDIJKL$ متوازي سطوح. وليكن G مركز ثقل المثلث BIK اثبت تحليلياً، بعد اختيار معلم مناسب أن النقاط J, G, D تقع على استقامة واحدة.



نختار المعلم: $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})$

لنوجد إحداثيات G:

بما أن G مركز ثقل المثلث BIK فهو مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط $(k,1)$, $(I,1)$, $(B,1)$

$$\left.\begin{aligned} &=\frac{(1)(1)+(1)(1)+(1)(0)}{3}=\frac{2}{3}\\ &=\frac{(1)(1)+(1)(0)+(1)(0)}{3}=\frac{1}{3}\\ &=\frac{(1)(1)+(1)(0)+(1)(1)}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}\quad G\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

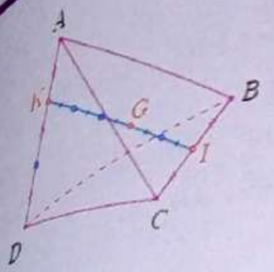
عندئذ مركبات الأشعة:

$\begin{cases}\overrightarrow{DJ}(1,-1,1)\\ \overrightarrow{DG}\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)\end{cases}$ نلاحظ أن $\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DJ}$ فهما مرتبطان خطياً ويشتركان بنقطة

فالنقاط J, G, D تقع على استقامة واحدة.

****

تدرب صفحة 31



1) بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور

عين الأعداد الأربعة d, c, b, a ليتحقق ما يأتي:

1. K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A, a) , (D, d)

من الشكل نجد:

$$(K,3) \leftarrow \begin{cases} a = 2 \\ d = 1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{KA} + 1\overrightarrow{KD} = \vec{0} \\ a\overrightarrow{KA} + d\overrightarrow{KD} = \vec{0} \end{cases}$$

2. I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B, b) , (C, c)

من الشكل نجد:

$$(I,2) \leftarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 1\,\overrightarrow{IB} + 1\,\overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{cases}$$

3. Gمركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A, a) , (B, b) , (C, c) , (D, d)

♦ بما أن $(K, 2)$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A, a) , (D, d) عندئذ:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{d}{a+d}\overrightarrow{AD}$$

$$1 = \frac{d}{2} \cdot 3 \qquad : a + d = 2 \implies \boxed{d = \frac{2}{3}}$$

$$\implies a + \frac{2}{3} = 2 \implies \boxed{a = \frac{4}{3}}$$

♦ بما أن $(I, 3)$منتصفBC فإن: $\left(B, \frac{3}{2}\right)$, $\left(C, \frac{3}{2}\right)$

أصبح لدينا: $a = \frac{4}{3}$, $d = \frac{2}{3}$, $c = \frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

وبضرب الأثقال بـ 6 نحصل على: $a = 8$, $d = 4$, $c = 9$, $b = 9$

---

2) عين مركز ثقل المثلث ABC في حالة $A(-4, -1, 2)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(6, 3, -5)$

بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$

$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} = \frac{-4-2+6}{3} = 0 \\ y_G &= \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} = \frac{-1+1+3}{3} = 1 \\ z_G &= \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c} = \frac{2+0-5}{3} = -1 \end{aligned}\right\} \quad \text{ومنه}\ G(0, 1, -1)$$

---

3) لدينا ثلاث نقاط في الفراغ Aو B و C

1. اثبت وجود نقطة وحيدة M تحقق: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

من العلاقة السابقة نلاحظ أن M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, -1)$ وبالتالي M هي نقطة وحيدة.

2. ما القول عن M عندما تكون C, B, A على استقامة واحدة ؟

من العلاقة السابقة :

$$\overrightarrow{MA} + \underbrace{\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{\downarrow} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \implies \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{MA} \implies \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AM}$$

وبما أن $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$ فإن النقاط A, M, C, B على استقامة واحدة.

3. ما القول عن الرباعي $ACBM$ عندما لا تقع C, B, A على استقامة واحدة؟

بما أن $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$ والنقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة فإن A, C, B, M رؤوس متوازي اضلاع.

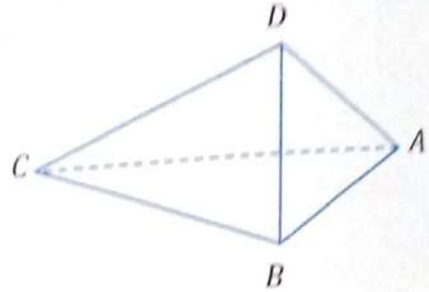
فالرباعي $ACBM$ متوازي اضلاع.

4) ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي (1)، لتكن L, K, J, I النقاط المعرفة بالعلاقات:

$$\overrightarrow{CL} = k\overrightarrow{CB}\ ,\ \overrightarrow{CK} = k\overrightarrow{CD}\ ,\ \overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$$

1. اثبت أن $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$ واستنتج أن النقاط الأربع L, K, J, I تقع في مستو واحد.

حسب علاقة شال يمكننا أن نكتب:



$$\blacklozenge\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$$

من الفرض :

$$= -k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}$$

$$= k\left[\underbrace{-\overrightarrow{AB}}_{\downarrow} + \overrightarrow{AD}\right]$$

$$= k\left[\underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}}_{\downarrow}\right]$$

$$\overrightarrow{IJ} = k\ .\ \overrightarrow{BD} \qquad \boxed{1}$$

$$\blacklozenge\ \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{Ck}$$

من الفرض :

$$= -k\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{CD}$$

$$= k\left[\underbrace{-\overrightarrow{CB}}_{\downarrow} + \overrightarrow{CD}\right]$$

$$= k\left[\underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}}_{\downarrow}\right]$$

$$\overrightarrow{LK} = k\ .\ \overrightarrow{BD} \qquad \boxed{2}$$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$

بما أن $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{Lk}$ فالشعاعان مرتبطان خطياً. إذاً النقاط L, K, J, I تقع في مستو واحد.

2. ما طبيعة الشكل الرباعي $IJKL$؟

بما أن $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ فالرباعي $IJKL$ متوازي أضلاع.

****

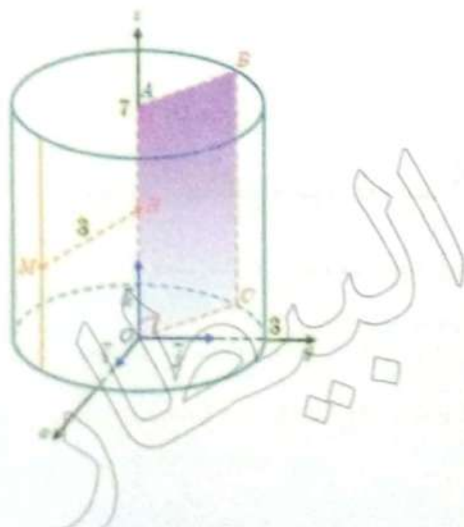
الأنشطة

تدرب: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(0, 0, 7)$ والمطلوب:

1) اوجد معادلة الأسطوانة المولدة من دوران الضلع $[BC]$ من المستطيل $OABC$ حول (OA) دورة كاملة بحيث $AB = 3$

2) اي من النقاط التالية تقع على الأسطوانة

$D(3,0,3), E(\sqrt{3}, \sqrt{6}, 4), F(1,3,1), K(\sqrt{3}, \sqrt{6}, 8)$



1) أياً كانت النقطة $M(x,y,z)$ من الضلع $[BC]$

وليكن H المسقط القائم لـ M على OZ فيكون $H(0,0,Z)$

و بالتالي : $HM = AB$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(Z-Z)^2}=3$$

تربيع الطرفين $x^2+y^2+0^2=9$

حيث Z يمثل ارتفاع الأسطوانة $\Rightarrow \boxed{x^2+y^2=9 \quad ; \ 0 \le Z \le 7}$

2) حتى تنتمي $D(3,0,3)$ للأسطوانة يجب أن تحقق معادلة الأسطوانة مع شرط Z.

نعوض D في معادلة الأسطوانة :

$$\begin{cases}(3)^2+0^2=9 & \text{محققة}\\ 0\le 3\le 7 & \text{محققة}\end{cases}$$

وبالتالي D تنتمي للأسطوانة.

- $E(\sqrt{3},\sqrt{6},4)$ نعوض في معادلة الأسطوانة

$$\begin{cases}\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2=9 & \text{محققة}\\ 0\le 4\le 7 & \text{محققة}\end{cases}$$

وبالتالي E تنتمي للأسطوانة

- $F(1,3,1)$ نعوض في معادلة الأسطوانة

غير محققة $(1)^2+(3)^2=9$ وبالتالي F لا تنتمي للأسطوانة

- $K(\sqrt{3},\sqrt{6},8)$

غير محققة $0\le 8\le 7$ وبالتالي K لا تنتمي للأسطوانة.

تذكرة في الأسطوانة:

1- معادلة اسطوانة محور دورانها $(O,\vec{k})$ مركزي قاعدتيها $\acute{O}(0,0,Z_{\acute{o}})$ و $A(0,0,Z_A)$

نصف قطر كل منها هو R ارتفاعها هو: $h=|Z_A-Z_{\acute{o}}|$ عندئذ:

معادلة الأسطوانة: $\boxed{x^2+y^2=R^2;\ Z_{\acute{o}}\le Z\le Z_A}$

2- معادلة اسطوانة محور دورانها $(O,\vec{j})$ مركزي قاعدتيها $\acute{O}(0,y_{\acute{o}},0)$ و $A(0,y_A,0)$

نصف قطرها R ارتفاعها هو: $h=|y_A-y_{\acute{o}}|$ عندئذ:

معادلة الأسطوانة: $\boxed{x^2+Z^2=R^2;\ y_{\acute{o}}\le y\le y_A}$

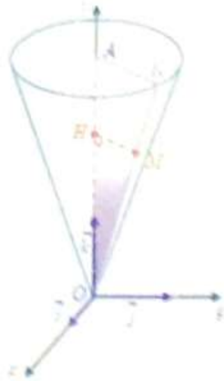
3- معادلة اسطوانة محور دورانها $(O,\vec{i})$ مركزي قاعدتيها $\acute{O}(x_{\acute{o}},0,0)$ و $A(x_A,0,0)$

نصف قطرها R ارتفاعها هو: $h=|x_A-x_{\acute{o}}|$ عندئذ:

معادلة الأسطوانة: $\boxed{y^2+Z^2=R^2;\ x_{\acute{o}}\le x\le x_A}$

تدريب: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(0,0,7)$ والمطلوب :

1) اوجد معادلة المخروط الناتج من دوران المثلث OAK القائم في A حول OZ دورة كاملة بحيث $AK=3$



أيا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من OK فيكون مسقطها على OZ هو $H(0,0,Z)$

من تشابه المثلثين $OHM\ ,OAB$:
$$\left.\begin{matrix}OAK\\OHM\end{matrix}\right) \Rightarrow \underbrace{\frac{OA}{OH}}_{①}=\underbrace{\frac{OK}{OM}}_{②}=\underbrace{\frac{AK}{HM}}_{③}$$

من ① و ③
$$\frac{7}{z}=\frac{3}{HM} \Rightarrow HM=\frac{3}{7}z \Rightarrow HM^2=\frac{9}{49}z^2$$
$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2=\frac{9}{49}z^2$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-\frac{9}{49}z^2=0 \quad ; \quad 0\le z\le 7}$$

****

تذكرة في المخروط :

1- محور الدوران $(O,\vec{k})$ رأسه $O(0,0,0)$ مركز قاعدته $A(0,0,z_A)$ نصف قطر قاعدته R , ارتفاعه $h=|z_A-z_O|$

عندئذ معادلة المخروط: $\boxed{x^2+y^2-\frac{R^2}{h^2}z^2=0 \quad ; \quad 0\le Z\le Z_A}$

2- محور الدوران $(O,\vec{j})$ رأسه $O(0,0,0)$ مركز قاعدته $A(0,y_A,0)$ نصف قطر قاعدته R , ارتفاعه $h=|y_A-y_O|$

عندئذ معادلة المخروط: $\boxed{x^2+z^2-\frac{R^2}{h^2}y^2=0 \quad ; \quad 0\le y\le y_A}$

3- محور الدوران $(O,\vec{i})$ رأسه $O(0,0,0)$ مركز قاعدته $A(x_A,0,0)$ نصف قطر قاعدته R , ارتفاعه $h=|x_A-x_O|$

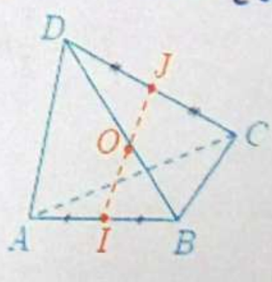
عندئذ معادلة المخروط: $\boxed{y^2+z^2-\frac{R^2}{h^2}x^2=0 \quad ; \quad 0\le x\le x_A}$

****

تمرينات ومسائل صفحة 35

1) $ABCD$ رباعي وجوه فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$

1. املأ الفراغ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\cdots\cdots+\overrightarrow{CD}$ واستنتج ان $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$



♦ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$

♦ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\underbrace{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}}_{\leftrightarrows}$
$$=\overrightarrow{AD}+\underbrace{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}}_{\downarrow}$$
$$=\overrightarrow{AD}+\quad\overrightarrow{CB}$$

2. بسط كلاً من $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$. استنتج ان $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$

$$\left.\begin{matrix}♦\ \underbrace{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}}_{\downarrow}+\overrightarrow{JC}\\ =\overrightarrow{AJ}\quad+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}\\ ♦\ \underbrace{\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}}_{\downarrow}+\overrightarrow{JD}\\ =\overrightarrow{BJ}\quad+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}\end{matrix}\right\}\xRightarrow{\text{الاستنتاج}}$$

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$$
$$+\quad \overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}$$
$$\underbrace{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}}_{2\overrightarrow{IJ}}+\underbrace{\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$
$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$

3. لدينا $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$ ،

استنتج أن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

♦ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

$$L_1=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$
$$=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}$$
$$=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}=2\overrightarrow{OI}=L_2$$

♦ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$

$$L_1=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$$
$$=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JD}$$
$$=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OJ}+\underbrace{\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}$$
$$=2\overrightarrow{OJ}=L_2$$

♦ الاستنتاج

بجمع العلاقتين طرفاً لطرف نجد +

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}&=2\overrightarrow{OI}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}&=2\overrightarrow{OJ}\end{aligned}\right\}$$
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\underbrace{2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}}_{\vec{0}}$$
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

4. لتكن k منتصف $[AD]$ و L منتصف $[BC]$ اثبت ان: $\overrightarrow{Ik}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ استنتج ان $IkJL$ متوازي اضلاع.

$[IK]$	$[LJ]$
قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث ABD فهي توازي الضلع الثالثة $[BD]$وتساوي نصف طولها. $\overrightarrow{Ik}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$	قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث BCD فهي توازي الضلع الثالثة $[BD]$وتساوي نصف طولها. $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

نستنتج ان :
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{Ik}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{LJ}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{Ik}=\overrightarrow{LJ}$$

فالشكل $IkJL$ متوازي اضلاع.

---

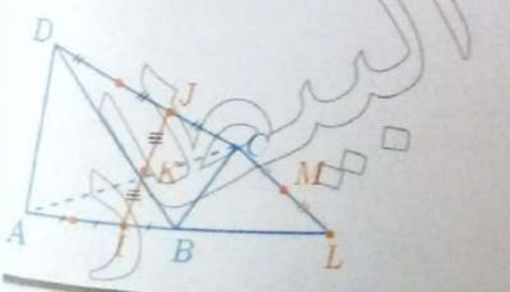
2) $ABCD$رباعي وجوه. وضّع على الشكل النقاط الآتية:

1. I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ ، $(B,2)$

بالتالي فإن : $1\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

وحسب علاقة الإنشاء يكون : $\overrightarrow{AI}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$



2. J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,2)$ ، $(D,1)$

بالتالي فإن : $2\overrightarrow{JC}+1\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$

3. k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,2)$ ، $(D,1)$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ ، $(B,2)$
J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,2)$ ، $(D,1)$ حسب الخاصة التجميعية

إذاً k مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ ، $(J,3)$ ومنه k منتصف $[IJ]$

4. L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ ، $(B,-2)$

بالتالي فإن : $\overrightarrow{LA}-2\overrightarrow{LB}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{AL}=\frac{-2}{1-2}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$$

5. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,-2)$ ، $(C,-1)$

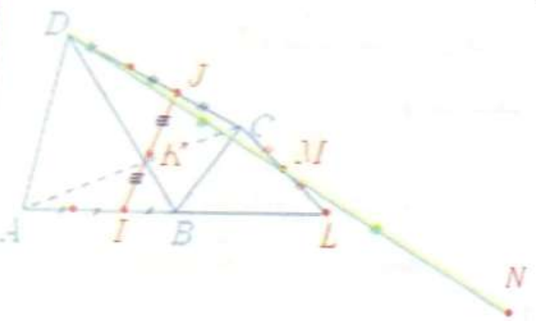
L هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ ، $(B,-2)$

إذاً حسب الخاصة التجميعية هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,-1)$ ، $(C,-1)$

$$-\overrightarrow{ML}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{LM}=\frac{-1}{-1-1}\overrightarrow{LC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{LC}$$

ومنه M منتصف $[CL]$



6. N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:
$(A,1)$ ، $(B,-2)$ ، $(C,-1)$ ، $(D,1)$

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,1)$، $(B,-2)$، $(C,-1)$

إذاً حسب الخاصة التجميعية فإن N هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(M,-2)$ ، $(D,1)$

$$1\overrightarrow{ND}-2\overrightarrow{NM}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{DN}=\frac{-2}{1-2}\overrightarrow{DM}\quad\Longrightarrow\quad\overrightarrow{DN}=2\,\overrightarrow{DM}$$

---

3) في المقولات الآتية، بين الصحيح من الخطأ معللاً إجابتك.

1. ABC مثلث، مهما كانت D من الفراغ كانت الأشعة $\overrightarrow{DA}$ ، $\overrightarrow{DB}$ ، $\overrightarrow{DC}$ مرتبطة خطياً.

المقولة خاطئة لأنه: إذا كانت D نقطة من المستوي (ABC) فالأشعة مرتبطة خطياً.

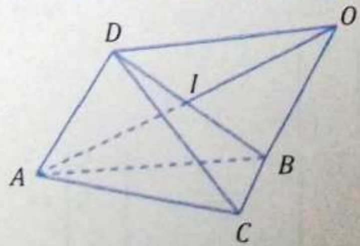
أما إذا كانت D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) فالأشعة غير مرتبطة خطياً لأنها لا تقع في مستوي واحد.

2. $ABCD$ رباعي الوجوه لتكن I النقطة المعرفة بالعلاقة: $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ عندئذ تقع I على احد حروف رباعي الوجوه.

$$2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}}$$

$$2\overrightarrow{IA}=\underbrace{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}}$$

$$2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{OA}\quad\Longrightarrow\quad\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$



حيث O هو الرأس المقابل للنقطة A في متوازي الأضلاع $ADOB$ وبما أن قطرا متوازي الأضلاع متناصفان فتكون I منتصف BD ومنتصف AO . فالمقولة السابقة صحيحة.

3. نتامل الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ نفترض ان اي شعاعين منها ليسا مرتبطين خطياً عندها تكون الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ غير مرتبطة خطياً.

المقولة خاطئة لأنه: إذا كانت D نقطة من المستوي (ABC) عندها تكون الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً.

4. النقاط $A(5,1,3)$, $B(2,-\sqrt{5},-2)$, $C(3,-3,3)$ متساوية البعد عن $k(2,0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} Ak = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \\ Bk = \sqrt{0+5+9} = \sqrt{14} \\ Ck = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \end{array}\right\} \Rightarrow Ak = Bk = Ck$$

فالمقولة صحيحة.

5. النقاط $C(4,0,0)$, $D(0,-2,0)$, $E(1,2,6)$, $F(5,1,1)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة التي طرفيها $A(4,-2,2)$, $B(2,2,0)$

حتى تنتمي النقطة C إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يجب أن يتحقق $CA = CB$ ومنه:

$$\left.\begin{array}{l} CA = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} \\ CB = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

C تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

حتى تنتمي النقطة D إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يجب أن يتحقق $DA = DB$ ومنه:

$$\left.\begin{array}{l} DA = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{20} \\ DB = \sqrt{4+16+0} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

D تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

حتى تنتمي النقطة E إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ يجب أن يتحقق $EA = EB$ ومنه:

$$\left.\begin{array}{l} EA = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41} \\ EB = \sqrt{1+0+36} = \sqrt{37} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

E لا تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ومنه المقولة خاطئة لا داعي لحساب بعد F عن B, A.

---

4) إثبات وقوع نقاط في مستو واحد:

نتامل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية: $A(2,0,1)$, $B(1,-2,1)$, $C(5,5,0)$, $D(-3,-5,6)$, $E(3,1,2)$

اثبت انتماء النقاط D, C, B, A إلى مستو واحد P وتبين إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

لكي تنتمي النقاط D, C, B, A إلى مستو واحد يجب ان تكون الأشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً أي (حسب المبرهنة 4):

لذلك نبحث عن عددين حقيقين α, β يحققان:

$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ بشرط $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$, $\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$, $\overrightarrow{AD}(-5,-5,5)$

نلاحظ ان: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن: $\left(\frac{-1}{3} \neq \frac{-2}{5}\right)$ ومنه:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\ \overrightarrow{AB} + \beta\ \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}-5\\-5\\5\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-5\\-5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\alpha\\-2\alpha\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\beta\\5\beta\\-\beta\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-5\\-5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\alpha+3\beta\\-2\alpha+5\beta\\-\beta\end{bmatrix}$$

$-\alpha + 3\beta = -5$ $\boxed{1}$

$-2\alpha + 5\beta = -5$ $\boxed{2}$

$-\beta = 5$ $\boxed{3}$

نحل جملة المعادلتين $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ ونتحقق من صحة الحل بالتعويض في $\boxed{1}$:

$$\left.\begin{matrix}-2\alpha + 5\beta = -5\\ -\beta = 5\end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = -5 \quad , \quad \alpha = -10$$

نعوض في $\boxed{1}$ $\quad -(-10) + 3(-5) = -5$

محققة $\quad -5 = -5$

إذاً: $\quad \overrightarrow{AD} = -10\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$

فالأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً، وبالتالي النقاط D, C, B, A تنتمي إلى مستو واحد P

♦ بيان أن النقطة E تنتمي إلى المستو P:

بالمثل حسب المبرهنة (4) نبحث عن عددين حقيقين β ,α يحققان:

$$\overrightarrow{AE} = \underbrace{\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}}_{\text{مما سبق}}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\alpha + 3\beta\\ -2\alpha + 5\beta\\ -\beta\end{bmatrix}$$

$-\alpha + 3\beta = 1$ $\boxed{1}$

$-2\alpha + 5\beta = 1$ $\boxed{2}$

$-\beta = 1$ $\boxed{3}$

نحل جملة المعادلتين $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ ونتحقق من صحة الحل بالتعويض في $\boxed{1}$:

$$\left.\begin{matrix}-2\alpha + 5\beta = 1\\ -\beta = 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = -1 \quad , \quad \alpha = -3$$

نعوض في $\boxed{1}$: $\quad -(-3) + 3(-1) = 1$

غير محققة $\quad 0 = 1$

$\boxed{\text{فالنقطة } E \text{ لا تنتمي للمستو } P}$

---

5) إثبات تقاطع مستقيمين:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$, $B(3,-3,-1)$ والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$, $\vec{v}(2,1,-3)$،
هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{u}$، $\acute{d}$ هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بالشعاع $\vec{v}$

اثبت أن المستقيمين d , $\acute{d}$ متقاطعان ثم عين I نقطة تقاطعهما.

- نثبت أن $d, \acute{d}$ ليسا متوازيين لذلك نثبت أن $\vec{u}, \vec{v}$ غير مرتبطين خطياً:

نلاحظ أن: $\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-2}{-3} \Leftarrow$ $\vec{u}, \vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

إذاً d , $\acute{d}$ ليسا متوازيان.

- نثبت أن d , $\acute{d}$ يقعان في مستو واحد:

♦ $A \in d$, $\vec{u}$ شعاع موجه لـ d

♦ $B \in \acute{d}$, $\vec{v}$ شعاع موجه لـ $\acute{d}$

لإثبات تقاطع مستقيمين:

1- نثبت أنهما غير متوازيين.

2- نثبت أنهما يقعان في مستو واحد.

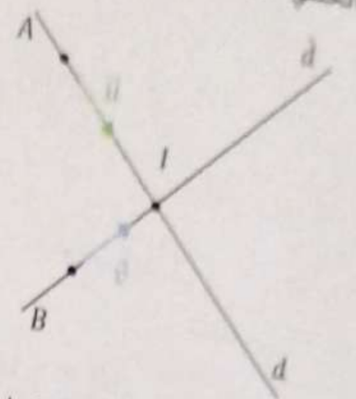
يجب إثبات الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ وذلك حسب المبرهنة (4) أي:

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta \\ \beta \\ -3\beta \end{bmatrix}$$

$$\alpha + 2\beta = 0 \quad \boxed{1}$$
$$\beta = -2 \quad \boxed{2}$$
$$-2\alpha - 3\beta = -2 \quad \boxed{3}$$



نحل جملة المعادلتين $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ ونتحقق من صحة الحل بالتعويض في $\boxed{3}$:

$$\left.\begin{matrix} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = -2 \quad , \quad \alpha = 4$$

نعوض في $\boxed{3}$ $\quad -2(4) - 3(-2) = -2$

محققة $\quad -2 = -2$

إذاً $\boxed{\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}}$ ومنه الأشعة $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ مرتبطة خطياً، فالمستقيمين $d, \grave{d}$ متقاطعان.

إيجاد نقطة تقاطع $d, \grave{d}$ ولتكن $I(x,y,z)$

لدينا : $\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$

حسب شال : $\underbrace{\overrightarrow{AI}} + \underbrace{\overrightarrow{IB}} = \underbrace{4\vec{u}} - \underbrace{2\vec{v}}$

وبالمطابقة بين طرفي المساواة مع ملاحظة ان $\overrightarrow{AI}, \vec{u}$ مرتبطان خطياً و $\overrightarrow{IB}, \vec{v}$ مرتبطان خطياً نجد أن:

$$\overrightarrow{AI} = 4\vec{u} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{IB} = -2\vec{v}$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{AI} = 4\vec{u}$$

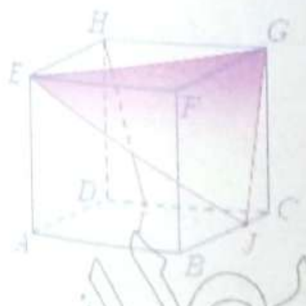
$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x-3 = 4 \\ y+1 = 0 \\ z-1 = -8 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 7 \\ y = -1 \\ z = -7 \end{matrix}\right\}$$

فتكون إحداثيات نقطة التقاطع $I(7,-1,-7)$

6) التوازي في الفراغ:



لنتأمل المكعب $ABCDEFGH$ ، النقطة I من الحرف $[CD]$ تحقق المساواة $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة J من $[BC]$ تحقق المساواة $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ اثبت ان المستقيم (HI) يوازي المستوي (EG)

لإثبات ان المستقيم (HI) يوازي (EGJ) يجب إثبات ان الأشعة $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EJ}$ تقع في مستو واحد اي مرتبطة خطياً.

نختار $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ معلم في الفراغ ولنوجد إحداثيات النقاط H, I, J, E, G:

$H(0,1,1)$, $I\left(\frac{1}{4},1,0\right)$, $J\left(1,\frac{3}{4},0\right)$, $E(0,0,1)$, $G(1,1,1)$

نلاحظ ان $\overrightarrow{EG}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{EJ}\left(1,\frac{3}{4},-1\right)$ غير مرتبطين خطياً لأن $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}\right)$

اي نبحث عن عددين حقيقين يحققان:

$$\overrightarrow{HI} = \alpha\overrightarrow{EG} + \beta\ \overrightarrow{EJ}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\\frac{3}{4}\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\\\frac{3}{4}\beta\\-\beta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\\alpha+\frac{3}{4}\beta\\-\beta\end{bmatrix}$$

$$\alpha+\beta = \frac{1}{4} \qquad \boxed{1}$$

$$\alpha+\frac{3}{4}\beta = 0 \qquad \boxed{2}$$

$$-\beta = -1 \qquad \boxed{3}$$

نحل جملة المعادلتين $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ ونتحقق من صحة الحل بالتعويض في $\boxed{1}$:

$$\left.\begin{matrix}\alpha+\frac{3}{4}\beta = 0\\ -\beta = -1\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \beta = 1 \quad , \quad \alpha = \frac{-3}{4}$$

$\frac{-3}{4}+1 = \frac{1}{4}$ نعوض في $\boxed{1}$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ محققة

ومنه $\boxed{\overrightarrow{HI} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EJ}}$ فالأشعة السابقة مرتبطة خطياً، إذاً المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)

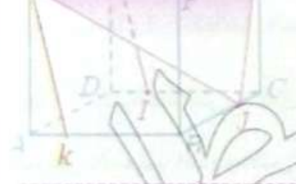
طريقة ثانية للحل:

المستوي (EGJ) يقطع المستويين المتوازيين $(ABCD)$, $(EFGH)$ بفصلين مشتركين متوازيين هما (JK) , (EG)

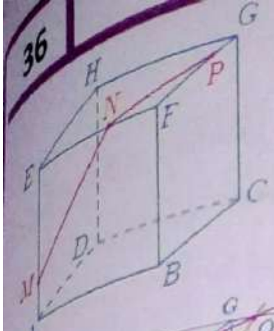
حيث K تنتمي للقطعة المستقيمة $[AB]$ وتحقق: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ (حسب تالس)

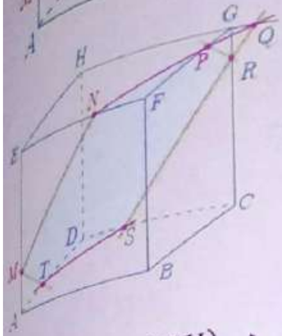
لدينا: $\overset{\Delta}{EAK}$ مثلث قائم في A و $\overset{\Delta}{HDI}$ مثلث قائم في D فيهما:

$$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{EK} \Leftarrow \begin{cases}\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD}\\ \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DI}\end{cases}$$



إذاً $(HI) \parallel (EK)$ و (EK) محتوى في المستوي (EGJ) وبالتالي (HI) يوازي المستوي (EGJ)





7) **مقطع مكعب بمستو:**

$ABCDEFGH$مكعب. P,N,M ثلاث نقاط من الأحرف $[AE]$ ، $[EF]$ ، $[FG]$بالترتيب، كما في الشكل المجاور.

يطلب إيجاد مقطع المكعب بالمستوي (MNP)

نعلم أنه عندما يقطع مستوٍ ما وجهين متقابلين من مكعب (كل وجهان متقابلان متوازيان) يكون الفصلان المشتركان الناتجان متوازيان.

نريد تعيين تقاطع المستوي (MNP)مع أوجه المكعب:

♦(MNP)مستوي يقطع الوجه $(DCGH)$ بفصلٍ مشترك سيوازي حتماً (MN) ولتعيين هذا الفصل يلزمنا نقطة تنتمي للمستوي (MNP) وللمستوي $(DCGH)$.

نمدد الضلع (HG) ونمدد الضلع (NP) فيتقاطعان خارج المكعب في نقطة Q، نلاحظ أن Q تنتمي لـ $(MNP\ ,DCGH)$ في آن واحد.

نرسم من Q مستقيماً يوازي (MN) فيقطع (CG) في R ويقطع (DC) في S، (SR) هو الفصل المشترك للمستويين $(MNP\ ,DCGH)$.

♦(MNP) مستوي يقطع الوجه $(ABCD)$بفصلٍ مشترك سيوازي حتماً (NP) ولتعيين هذا الفصل يلزمنا نقطة تنتمي للمستوي (MNP) وللمستوي $(ABCD)$.

نلاحظ أن S تحقق المطلوب، نرسم من S مستقيماً يوازي (NP) فيقطع (AD) في T، (ST) هو الفصل المشترك للمستويين $(MNP\ ,ABCD)$.

♦(MNP) مستوي يقطع الوجه $(BCGF)$ بفصل مشترك، نلاحظ أن هناك نقطتين هما P,R تنتميان للمستويين في آن واحد.

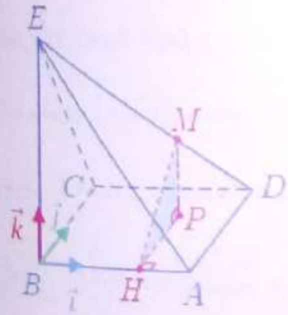
وبالتالي (PR) هو الفصل المشترك للمستويين $(MNP\ ,BCGF)$.

♦ (MNP) مستوي يقطع الوجه $(ADHE)$ بفصل مشترك، نلاحظ أنه هناك نقطتين هما $M\ ,T$ تنتميان للمستويين في آن واحد.

وبالتالي (MT) هو الفصل المشترك للمستويين $(MNP\ ,ADHE)$.

---

8) **حساب مسافة:**



$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$, $EB=4\sqrt{2}$ و$AB=4$. M نقطة من القطعة $[ED]$ تحقق $3\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DE}$ لتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي (ABC) وH المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB)

احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$

بما أن القاعدة مربع فإن $BC=BA$

نختار المعلم المتجانس $(B;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عندئذ تكون إحداثيات النقاط:

$A(4,0,0)$, $E(0,0,4\sqrt{2})$, $B(0,0,0)$, $D(4,4,0)$, $C(0,4,0)$

نفرض $M(x,y,z)$ ولدينا:

$$3\ \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$$

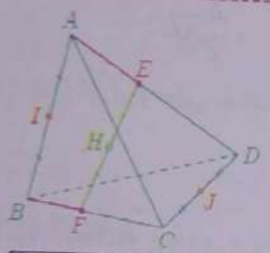
$$3\begin{bmatrix} x-4 \\ y-4 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x-12 \\ 3y-12 \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-12=-4 \\ 3y-12=-4 \\ 3z=4\sqrt{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=\frac{8}{3} \\ y=\frac{8}{3} \\ z=\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{array}\right\} \quad M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

- بما أن P المسقط القائم لـ M على المستوي $(ABCD)$ فإن $P\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0\right)$
- بما أن H المسقط القائم لـ P على المستقيم (BA) فإن $H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$
- أصبح لدينا $H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$, $M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$:

$$MH = \sqrt{0+\frac{64}{9}+\frac{32}{9}} = \sqrt{\frac{96}{9}} = \sqrt{\frac{16\times 6}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$



9) $ABCD$ رباعي وجوه، و a عدد حقيقي. I,J هما، بالترتيب، منتصفا $[AB]$ ، $[CD]$ و E,F نقطتان تحققان، العلاقتين: $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$ واخيراً H هي منتصف $[EF]$

اثبت أن I,J,H تقع على استقامة واحدة.

لدينا : $\overrightarrow{BF}=a\,\overrightarrow{BC}$ وبالمقارنة مع علاقة الإنشاء : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ حيث G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ نستنتج أن : F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,a),(B,1-a)$ وتكون $(F,1)$	لدينا : $\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AD}$ وبالمقارنة مع علاقة الإنشاء : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ حيث G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ نستنتج أن : E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,a),(A,1-a)$ وتكون $(E,1)$

- بما أن H منتصف القطعة (FE) فإن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(F,1),(E,1)$ وحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(C,a)\ ,\ (D,a)\ ,\ (B,1-a)\ ,\ (A,1-a)$$

- I منتصف (AB) فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-a),(A,1-a)$ وتكون $(I,2-2a)$
- J منتصف (CD) فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,a),(C,a)$ وتكون $(J,2a)$
- وبما أن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط D,C,B,A وحسب الخاصة التجميعية فإن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين J,I

إذاً J,I,H تقع على استقامة واحدة.

(1 C,B,A ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة في الفراغ و E,D نقطتان تحققان:

$$3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$$

1. اثبت ان النقاط E,D,C,B,A تقع في مستو واحد.

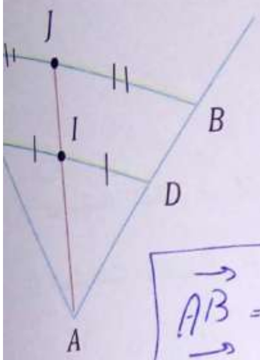
♦ $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$ ومنه النقاط A,C,E تقع على استقامة واحدة وبالتالي A نقطة تنتمي للمستقيم (CE)

♦ $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ ومنه النقاط A,D,B تقع على استقامة واحدة وبالتالي A تنتمي للمستقيم (DB)

نستنتج مما سبق أن المستقيمان (CE),(DB) يتقاطعان في A ونعلم أنه من تقاطع مستقيمين يمر مستوي وحيد

وبالتالي فالنقاط A,B,C,D,E تقع في مستو واحد.

2. لتكن I منتصف [CD] و J منتصف [BE] اثبت وقوع J,I,A على استقامة واحدة.



½

$$2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$$
$$2\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}(2\overrightarrow{AI})$$
$$2\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$$

إذاً J, I, A على استقامة واحدة

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AE} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}}$$

نلاحظ من الفرض:

$3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$
$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
	$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

من الشكل والفرض نجد:

♦ I منتصف CD فإن:

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$$
$$2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$$
$$2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\left[\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}}\right]$$
$$2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\left[2\overrightarrow{AJ}\right]$$
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

إذاً J,I,A على استقامة واحدة.

(11 ABCD رباعي وجوه و G,F,E هي نظائر A بالنسبة إلى منتصفات [BC], [CD], [DB] بالترتيب.

1. اثبت ان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$

نلاحظ من الشكل أن:

♦ ADFC متوازي أضلاع لأن قطراه [AF], [DC] متناصفان

ومنه : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$

♦ ABEC متوازي أضلاع لأن قطراه [AE], [BC] متناصفان

ومنه: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$

2. استنتج ان للقطعتين [FB], [DE] المنتصف نفسه.

لدينا مما سبق
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{DF}\\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BE}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$$

ومنه الرباعي DBEF متوازي أضلاع وبالتالي قطراه [DE], [FB] متناصفان، أي لهما المنتصف نفسه.

3. اثبت ان المستقيمات (CG), (DE), (BF) متلاقية في نقطة واحدة.

لدينا من الشكل ABGD متوازي أضلاع لأن قطراه [AG], [BD] متناصفان وبالتالي فإن:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG}$$

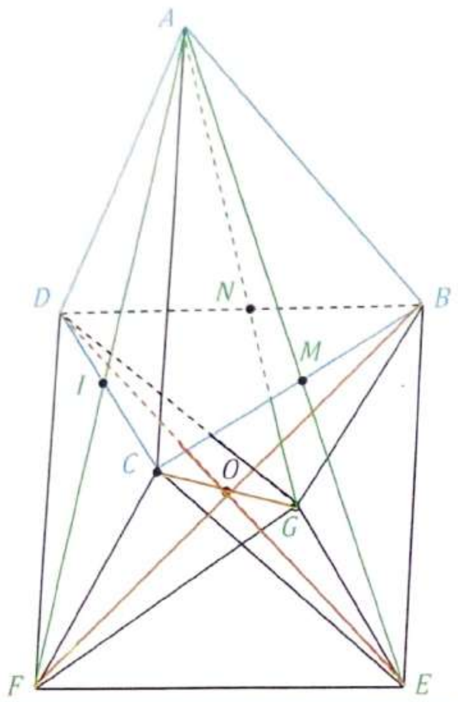
لكن: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$ لأن ADFC متوازي أضلاع

ومنه: $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BG}$

وبالتالي $CFGB$ متوازي اضلاع ومنه قطراه $[BF]$, $[CG]$ متناصفان

وبرهنا ان DE , BF انهما متناصفان وبالتالي اصبح لدينا

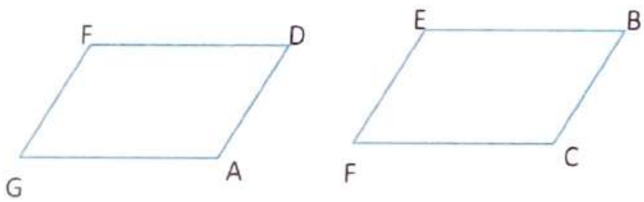
(BF) , (DE) , (CG) متلاقية (متقاطعة) في نقطة واحدة.



---

12) $ABCD$ رباعي وجوه و E هي نظيرة A بالنسبة إلى C .

G, F هما النقطتان اللتان تجعلان $EBCF$, $FDAG$ متوازي اضلاع.



1. اثبت ان $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$

$$L_2 = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}}$$
$$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG} = L_1$$

2. استنتج ان $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ ثم ان النقاط G, D, C, B تقع في مستو واحد.

لدينا من الطلب الأول $\overrightarrow{DG} = \underbrace{\overrightarrow{DA}} + \underbrace{\overrightarrow{DE}} + \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$$

بما أن $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطياً لأنهما حرفان في رباعي الوجوه.

ولدينا $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ إذاً حسب المبرهنة (4):

الأشعة $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطياً , فالنقاط G, D, C, B تقع في مستو واحد.

---

13) نتامل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط $A(3,2,1)$, $B(1,2,0)$, $C(3,1,-2)$

1. اثبت ان النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة.

$\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)$, $\overrightarrow{BC}(2,-1,-2)$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة $\left(\frac{-2}{2} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-2}\right)$

فالأشعة $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطياً.أي أن النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة.

2. عند أية قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC)

حتى تنتمي النقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC) نثبت ان الأشعة $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطياً وبما ان الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ ليسا … سنبحث عن عددين α, β حقيقيين يحققان:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{bmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta \\ -\beta \\ -2\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + 2\beta \\ -\beta \\ -\alpha - 2\beta \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -2\alpha + 2\beta = m - 3 & \boxed{1} \\ -\beta = -1 & \boxed{2} \\ -\alpha - 2\beta = 2 & \boxed{3} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{من } \boxed{2} \text{ و } \boxed{3}} \beta = 1 \ , \ \alpha = -4$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض في } \boxed{1}} -2(-4) + 2(1) = m - 3$$

$$8 + 2 = m - 3$$

$$\boxed{13 = m}$$

3. ما العلاقة بين x, y لتقع النقاط C, B, A ، $D(x,y,3)$ في مستو واحد.

حتى تقع النقاط D, C, B, A في مستو واحد سنبحث عن عددين حقيقيين β, α يحققان:

$$\overrightarrow{AD} = \underbrace{\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC}}_{\text{مما سبق}}$$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + 2\beta \\ -\beta \\ -\alpha - 2\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} x - 3 = -2\alpha + 2\beta & \boxed{1} & \\ y - 2 = -\beta & \boxed{2} & \rightarrow \boxed{\beta = 2 - y} \quad \boxed{I} \\ -\alpha - 2\beta = 2 & \boxed{3} & \rightarrow \alpha = -2\beta - 2 = -2(2 - y) - 2 \rightarrow \boxed{\alpha = 2y - 6} \quad \boxed{II} \end{array}$$

نعوض $\boxed{II}$ ، $\boxed{I}$ في $\boxed{1}$:

$$x - 3 = -2(2y - 6) + 2(2 - y)$$

$$x - 3 = -4y + 12 + 4 - 2y$$

$$\boxed{x + 6y - 19 = 0}$$

14) مجموعة نقاط:

لتكن ε مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقة:

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

1. اثبت ان النقاط $A(7,1,0)$ ، $B(5,0,0)$ ، $C(2,0,1)$ تنتمي إلى مجموعة ε

$$A(7,1,0) : \begin{cases} L_1 = 7 - 2(1) + 3(0) - 5 = 0 \\ L_2 = 0 \end{cases} \{ A \in \varepsilon$$

$B(5,0,0) : \begin{cases} L_1 = 5 - 2(0) + 3(0) - 5 = 0 \\ L_2 = 0 \end{cases} \{ B \in \varepsilon$

$C(2,0,1) : \begin{cases} L_1 = 2 - 2(0) + 3(1) - 5 = 0 \\ L_2 = 0 \end{cases} \{ C \in \varepsilon$

2. اثبت ان النقاط C, B, A تحدد مستوياً P

$\overrightarrow{AB}(-2,-1,0) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(-5,-1,1)$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة $\left(\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{-1}\right)$ ، فالشعاعان $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

اي أن النقاط C, B, A ليست على استقامة واحدة فهي تحدد مستوي P

3. a)اثبت ان مركبات الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y - 3z , y, z)$

$M(x, y, z)$

$\overrightarrow{BM}(x - 5, y, z)$

$x - 2y + 3z - 5 = 0$

$x - 5 = 2y - 3z$

$\overrightarrow{BM}(2y - 3z , y, z)$

b)استنتج ان $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$ ماذا يمكنك ان تستنتج من ذلك؟

نلاحظ أن:

$$\underbrace{(2y - 3z , y , z)}_{\overrightarrow{BM}} = y \underbrace{(2,1,0)}_{\overrightarrow{BA}} + z \underbrace{(-3,0,1)}_{\overrightarrow{BC}}$$

$$\overrightarrow{BM} = y\ \overrightarrow{BA} + z\ \overrightarrow{BC}$$

نستنتج أن الأشعة $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطياً.

وبالتالي النقاط M, C, B, A تقع في مستو واحد P.

4. بالعكس، اثبت ان اية نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي P تحقق المعادلة $x - 2y + 3z - 5 = 0$ ما هي المجموعة ε؟

بفرض M تنتمي إلى المستوي P فإنه يوجد عددين حقيقيين α, β يحققان:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\ \overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix} x - 7 \\ y - 1 \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x - 7 \\ y - 1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5\beta \\ -\beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x - 7 \\ y - 1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 5\beta \\ -\alpha - \beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$x - 7 = -2\alpha - 5\beta \quad \boxed{1}$

$y - 1 = -\alpha - \beta \quad \boxed{2}$

$z = \beta \quad \boxed{3} \rightarrow \boxed{2}$ نعوض $\boxed{3}$ في $\boxed{2}$ $\Rightarrow y - 1 = -\alpha - z$

$\boxed{\alpha = 1 - y - z} \quad \boxed{I}$

نعوض $\boxed{I}$ في $\boxed{1}$:

$x - 7 = -2(1 - y - z) - 5z$

$x - 7 = -2 + 2y + 2z - 5z \quad \Rightarrow \quad x - 2y + 3z - 5 = 0$

إذاً تنتمي النقطة M إلى المستوي P ولتكن مجموعة النقاط ε هي نفسها المستوي P.

15) نتأمل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيم d المار بالنقطة $A(2,0,5)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$ والمستقيم $\acute{d}$ المار بالنقطة $B(2,2,-1)$ والموجه بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$، هل $\acute{d},d$ متقاطعان؟ في حالة الإيجاب عين نقطة تقاطعهما.

❶ لنثبت اولاً ان $\vec{v},\vec{u}$ غير مرتبطان خطياً :

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة $\left(\frac{2}{1}\neq\frac{5}{2}\neq\frac{-1}{1}\right)$

فالشعاعان غير مرتبطين خطياً.

اي ان المستقيمين $d,\acute{d}$ ليسا متوازيان

❷ لنثبت ان $d,\acute{d}$ يقعان في مستو واحد:

نفرض وجود عددين حقيقين α ، β يحققان:

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\ \vec{u}\ +\beta\vec{v}$$

$$\begin{bmatrix}0\\2\\-6\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\2\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha\\5\alpha\\-\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\\2\beta\\\beta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\2\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha+\beta\\5\alpha+2\beta\\-\alpha+\beta\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{matrix}2\alpha+\beta=0 & \boxed{1}\\5\alpha+2\beta=2 & \boxed{2}\\-\alpha+\beta=-6 & \boxed{3}\end{matrix}$$

نحل جملة المعادلتين $\boxed{1}$ و$\boxed{3}$ للسهولة ونتحقق من صحة الحل بالتعويض في $\boxed{2}$:

$$\begin{aligned}&2\alpha+\beta=0\\ \boxed{-}\ &\underline{-\alpha+\beta=-6}\\ &3\alpha=6\Rightarrow\boxed{\alpha=2}\ ,\qquad\boxed{\beta=-4}\end{aligned}$$

بالتعويض في $\boxed{2}$: $5(2)+2(-4)=2$ ومنه $2=2$ محققة.

فالمستقيمين $d,\acute{d}$ يقعان في مستو واحد وهما غير متوازيين إذاً هما متقاطعان في نقطة ولتكن مثلاً I ومنه:

لدينا : $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-4\vec{v}$

حسب شال : $\underbrace{\overrightarrow{AI}}+\underbrace{\overrightarrow{IB}}=\underbrace{2\vec{u}}-\underbrace{4\vec{v}}$

وبالمطابقة بين طرفي المساواة مع ملاحظة أن $\overrightarrow{AI},\vec{u}$ مرتبطان خطياً و $\overrightarrow{IB},\vec{v}$ مرتبطان خطياً نجد أن:

$$\overrightarrow{AI}=2\,\vec{u}\quad\text{و}\quad\overrightarrow{IB}=-4\,\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AI}=2\ \vec{u}\qquad ;\qquad I(x,y,z)$$

$$\begin{bmatrix}x-2\\y\\z-5\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x-2\\y\\z-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\10\\-2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}x-2=4\\y=10\\z-5=-2\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x=6\\y=10\\z=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow I(6,10,3)$$

Scanned by CamScanner

16) جد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ ، $B(0,5,-1)$

بما ان C تقع على محور الفواصل فإن إحداثياتها $C(x,0,0)$

وحسب الفرض نجد:

$$AC = BC$$
$$AC^2 = BC^2$$
$$(x-2)^2 + 1 + 9 = x^2 + 25 + 1$$
$$x^2 - 4x + 4 - x^2 - 16 = 0$$
$$-4x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$$

فالنقطة $C(-3,0,0)$

---

17) ليكن α عدداً حقيقياً ولنتامل النقاط الثلاث $A(3,1,-3)$ ، $B(-1,5,-3)$ ، $C(-1,1,\alpha)$ اثبت ان المثلث ABC متساوي الساقين اياً كان α. ايمكن ان يكون متساوي الأضلاع.

نحسب أطوال أضلاع المثلث ABC:

$$AB = \sqrt{16+16+0} = 4\sqrt{2}$$
$$CB = \sqrt{0+16+(\alpha+3)^2} = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$$
$$CA = \sqrt{16+0+(\alpha+3)^2} = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$$

ومنه $CB = CA$ فالمثلث متساوي الساقين أياً كان $\alpha \in R$

وحتى يكون المثلث (ABC) متساوي الأضلاع يجب أن يكون:

$$CA = AB$$
$$\sqrt{16+(\alpha+3)^2} = 4\sqrt{2} \xrightarrow{\text{نربع}}$$
$$16 + (\alpha+3)^2 = 32$$
$$(\alpha+3)^2 = 16 \quad \begin{cases} \text{إما } \alpha + 3 = 4 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \text{او } \alpha + 3 = -4 \Rightarrow \alpha = -7 \end{cases}$$

---

18) نتامل النقطتين $A(2,1,0)$ ، $B(-1,4,2)$

1. اوجد نقطة متساوية البعد عن B, A

I منتصف القطعة $[AB]$ وهي متساوية البعد عن A ، B إذاً:

$$I\left(\frac{2-1}{2}, \frac{1+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

2. اوجد العدد الحقيقي λ الذي يجعل النقطة $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن B, A

بفرض $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A ، B ومنه $AC = BC$

$$AC^2 = BC^2$$
$$(1-2)^2 + (1-1)^2 + (0-\lambda)^2 = (1+1)^2 + (4-1)^2 + (2-\lambda)^2$$
$$1 + \lambda^2 = 4 + 9 + 4 - 4\lambda + \lambda^2$$
$$1 = 17 - 4\lambda$$
$$4\lambda = 16$$

ومنه $\lambda = 4$

3. اثبت ان $(M(x,y,z))$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $([AB])$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط $(3x-3y-2z+8=0)$

اي نقطة من المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ تكون متساوية البعد عن طرفي هذه القطعة "والعكس صحيح".

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة ما متساوية البعد عن B,A ومنه:

$$BM = AM$$

$$BM^2 = AM^2$$

$$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-8y+16+z^2-4z+4=x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2$$

$$6x-6y-4z+16=0 \quad \overset{\div 2}{\Rightarrow} \quad \boxed{3x-3y-2z+8=0}$$

$M \Leftrightarrow AM = BM$ تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$ وهو:

$$3x-3y-2z+8=0$$

---

19) بعد نقطة عن مستقيم:

نتأمل النقاط $A(2,3,0)$ ، $B(2,3,6)$ ، $M(4,-1,2)$ نهدف إلى حساب بعد M عن المستقيم (AB)

1. اثبت ان M لا تقع على المستقيم (AB)

لإثبات أن M لا تقع على المستقيم (AB) فيجب ان نثبت ان $\overrightarrow{MA}$ ، $\overrightarrow{MB}$ غير مرتبطين خطياً.

$$\overrightarrow{MA}(-2,4,-2) \quad , \quad \overrightarrow{MB}(-2,4,4)$$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{-2}{-2}=\frac{4}{4}\neq\frac{-2}{4}\right)$ فالشعاعين غير مرتبطين خطياً.

فالنقطة M لا تقع على المستقيم (AB)

2. اثبت ان لكل نقطة k من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(2,3,z)$

بما أن $k(x,y,z)$ تنتمي للمستقيم (AB) إذاً $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{Ak}$ مرتبطان خطياً أي:

$$\overrightarrow{Ak}=t.\overrightarrow{AB} \qquad ;t\in R$$

$$(x-2,y-3,z)=t.(0,0,6)$$

$$\left.\begin{aligned} x-2=0 &\Rightarrow x=2 \\ y-3=0 &\Rightarrow y=3 \\ &\ z=6.t \end{aligned}\right\} \Rightarrow k\left(2,3,\underset{\downarrow}{6t}\right) \quad k\ (2,3,z)$$

3. احسب Mk^2 بدلالة z

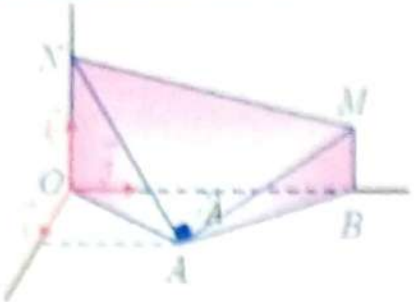
$$Mk^2=(2-4)^2+(3+1)^2+(z-2)^2$$
$$=20+(z-2)^2$$

4. عند اية قيمة للعدد z يكون Mk اصغر ما يمكن؟ حدد إذاً بعد M عن (AB)

يكون Mk أصغر ما يمكن عند: $z=2$

عندئذ: $Mk^2=20$

$$Mk=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$



(20) المسافات وحجم هرم:

n, m عددان حقيقيان موجبان يحققان $n > m > 0$

نتأمل النقاط $A(\sqrt{3}, 3, 0)$ ، $B(0, 6, 0)$

$M(0, 6, m), N(0, 0, n)$ في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

عين n, m ليكون المثلث MAN قائماً في A ويساوي حجم المجسم $AOBMN 5\sqrt{3}$

المثلث MAN قائم في A حيث:

$\overrightarrow{MN}(0, -6, n-m)$ ، $\overrightarrow{AM}\left(-\sqrt{3}, 3, m\right)$ ، $\overrightarrow{AN}\left(-\sqrt{3}, -3, n\right)$

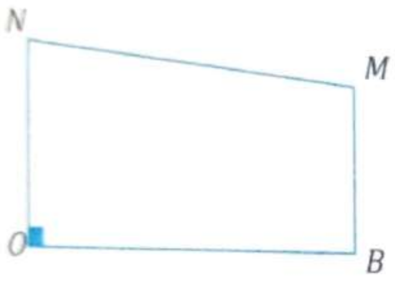
ومنه حسب فيثاغورث في المثلث القائم:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2$$

$$0 + 36 + (n-m)^2 = 3 + 9 + m^2 + 3 + 9 + n^2$$

$$36 + n^2 - 2nm + m^2 - 24 - m^2 - n^2 = 0$$

$$-2nm = -12 \Rightarrow \boxed{n.m = 6} \quad \cdots\cdots\cdots \boxed{1}$$



♦ لإيجاد حجم المجسم $AOBMN$ وراسه A:

القاعدة شبه منحرف قائم:

$$S_{OBMN} = \left(\frac{MB + NO}{2}\right) BO$$

حيث : $\overrightarrow{MB}(0,0,-m)$ ، $\overrightarrow{NO}(0,0,-n)$ ، $\overrightarrow{BO}(0,-6,0)$

$$MB = m \quad , \quad NO = n \quad , \quad BO = 6$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{m+n}{2}\right)(6) = 3(m+n)$$

♦ ارتفاع المجسم هو بعد A عن $OBMN$ ومنه:

$$h = A\grave{A} = \sqrt{3} \qquad ; \grave{A}(0,3,0)$$

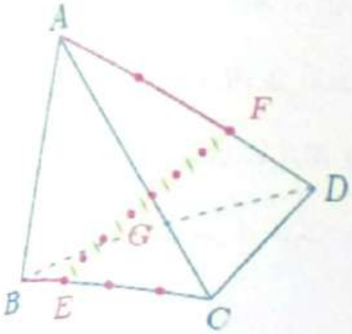
$$\Rightarrow v = \frac{1}{3} . S_{OBMN} . h$$

$$5\sqrt{3} = \frac{1}{3} . 3(m+n) . \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{5 = m+n} \cdots\cdots\cdots \boxed{2}$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين $\boxed{1}$ و$\boxed{2}$ نجد:

$$\left.\begin{array}{l} m \,.\, n = 6 \\ m + n = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad n = 3 \quad , \quad m = 2 \qquad ; \quad n > m > 0$$

(21 تتامل رباعي وجوه $ABCD$ ونقطتين F,E معرفتين وفق $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ اثبت ان G مركز
الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,3)$, $(C,1)$, $(D,2)$ يقع على $[EF]$ ثم عين النقطة G على $[EF]$.



♦ $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

فإن E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$, $(C,1)$

♦ $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

فإن F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(D,2)$

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,3)$, $(C,1)$, $(D,2)$

فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,4)$, $(F,3)$ إذاً فهي تقع على المستقيم (EF)

$$\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

(22 تتامل رباعي الوجوه $ABCD$ ونقطتين J,I معرفتين وفق:

$\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JD}$

1. ايمكن ان تنطبق إحدى النقطتين J,I على الأخرى.

لدينا $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JD}$

نفترض جدلاً أن I منطبقة على J أي $(I=J)$ وبالتالي يكون: $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ ① و $\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{ID}$ ②

بطرح العلاقتين ① و ② نجد:

$$\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{ID}$$
$$\overrightarrow{CA}=2(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID})$$
$$\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{DB}$$

فالشعاعان $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$ مرتبطان خطياً أي أن $[DB]$, $[CA]$ حرفان متوازيان في رباعي الوجوه وهذا مستحيل.

إذاً I لا تنطبق على J

2. اثبت انه اياً كانت النقطة M من الفراغ كان:

$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MJ}$

♦ $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$

لدينا $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ إذاً $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ومنه I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$, $(B,-2)$

واياً كانت M نقطة من الفراغ فإن:

$$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$$

♦ $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MJ}$

لدينا $\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{ID}$ إذاً $\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ ومنه J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,1)$, $(D,-2)$

واياً كانت M نقطة من الفراغ فإن:

$$\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MJ}$$

3. جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

لتكن G مركز ثقل المثلث BCD فانه (حسب مبرهنة الاختزال)ايا كانت M نقطة من الفراغ فان:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}\\ -\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=-3\overrightarrow{MG}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ نعوض في العلاقة السابقة :

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\|$$

$$3\|\overrightarrow{MG}\| = 3\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}}\right\|$$

$$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{GA}\|$$

ومجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\|\overrightarrow{GA}\|$

---

23) لدينا في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,-1,2)$, $B(-2,1,-2)$ نقرن بكل نقطة $M(x,y,z)$ من الفراغ،

المقدار $f(M)=MA^2+MB^2$

1. احسب $f(M)$ بدلالة z,y,x

$$f(M)=MA^2+MB^2$$
$$=(2-x)^2+(-1-y)^2+(2-z)^2+(-2-x)^2+(1-y)^2+(-2-z)^2$$
$$=4-4x+x^2+1+2y+y^2+4-4z+z^2+4+4x+x^2+1-2y+y^2+4+4z+z^2$$
$$f(M)=2x^2+2y^2+2z^2+18$$

2. اثبت ان مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M)=18$ مؤلفة من نقطة وحيدة.

$$f(M)=18$$
$$2x^2+2y^2+2z^2+18=18$$
$$2x^2+2y^2+2z^2=0 \quad \overset{\div 2}{\Longrightarrow}$$
$$x^2+y^2+z^2=0$$

فالمعادلة السابقة تؤلف نقطة وحيدة وهي $(0,0,0)$

3. اثبت ان مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M)=30$ كرة مركزها O اوجد نصف قطرها.

$$f(M)=30$$
$$2x^2+2y^2+2z^2+18=30$$
$$2x^2+2y^2+2z^2=12 \quad \overset{\div 2}{\Longrightarrow}$$
$$x^2+y^2+z^2=6$$

فالمعادلة السابقة تمثل معادلة كرة مركزها $O(0,0,0)$ نصف قطرها $r=\sqrt{6}$

4. اثبت انه وفق شرط على العدد الحقيقي k مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M) = k$ هي كرة مركزها O

$$f(M) = k$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 18 = k$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = k - 18$$

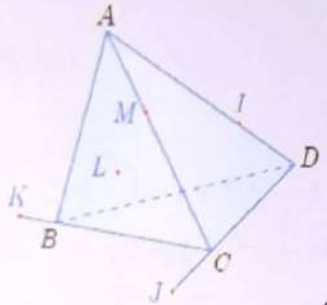
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(k - 18)$$

ندرس إشارة المقدار $\frac{1}{2}(k - 18)$

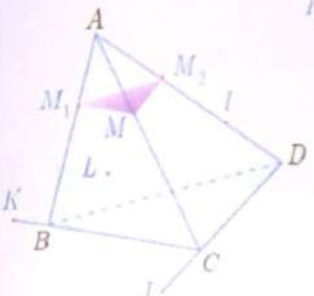
$$\frac{1}{2}(k - 18) = 0 \Rightarrow k = 18$$

k	$-\infty$	18	$+\infty$
$\frac{1}{2}(k-18)$	$-$	0	$+$
ما تمثله المعادلة	مجموعة خالية من النقاط	تمثل نقطة وحيدة $O(0,0,0)$	كرة مركزها $O(0,0,0)$ نصف قطرها $r = \sqrt{\frac{1}{2}(k-18)}$

24) نتأمل رباعي الوجوه $ABCD$



1. M نقطة من الحرف $[AC]$ جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي (BCD)



المستوي المطلوب المار من M ويوازي (BCD)

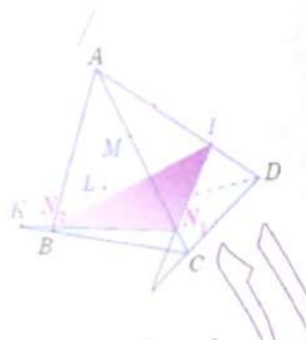
يقطع المستوي (ABC) بفصل مشترك يوازي (BC) وليكن (M_1M)

ويقطع المستوي (ADC) بفصل مشترك يوازي (CD) وليكن (MM_2)

ويقطع المستوي (ABD) بفصل مشترك يوازي (BD) وليكن (M_1M_2)

وبالتالي مقطع رباعي الوجوه هو المستوي (MM_1M_2)

2. I نقطة من الحرف $[AD]$, J نقطة من المستقيم (CD) و k نقطة من المستقيم (BC) عين مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (IJk)



♦ $\begin{cases} I \in (AD) \\ J \in (DC) \end{cases} \Rightarrow (IJ) \in (ADC)$

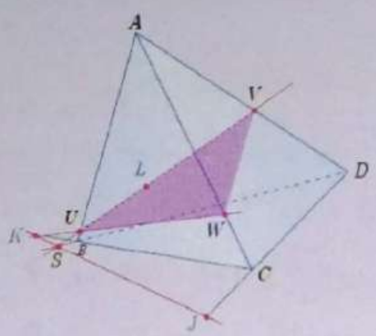
فإن (IJ) هو الفصل المشترك للمستوي ACD مع المستوي (IJk)

والمستقيم (IJ) يقطع AC في N_1

♦ $\begin{cases} k \in (BC) \\ N_1 \in (AC) \end{cases} \Rightarrow (kN_1) \in (ABC)$

فإن (kN_1) هو الفصل المشترك للمستوي ABC مع المستوي (IJk)

والمستقيم (kN_1) يقطع AB في N_2 , وبالتالي مقطع رباعي الوجوه هو المستوي (IN_1N_2)



3. L نقطة من المستوي (ABD) أوجد مقطع الرباعي الوجوه بالمستوي (kJL)

لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين (BD) , (Jk) من المستوي (BCD)

$$S \in (LJk) \Leftarrow \begin{cases} (Jk) \subset (LJk) \\ S \in (Jk) \end{cases}$$

$$S \in (ABD) \Leftarrow \begin{cases} S \in (BD) \\ (BD) \subset (ABD) \end{cases}$$

(ABD) , (LJk) هو الفصل المشترك للمستويين (SL) $\Leftarrow \begin{cases} L \in (LJk) \\ L \in (ABD) \end{cases}$

المستقيم (SL) يقطع (AB) , (AD) في نقطتين U , V على الترتيب والمستقيم (kU) يقطع (AC) في W وبالتالي

المستوي المطلوب هو (VUW)

---

25) نتامل مكعباً $ABCDEFGH$ والنقاط L, k, J, I منتصفات $[AE]$, $[BG]$, $[EG]$, $[AB]$ بالترتيب والنقطة M مركز

الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(G, 1)$, $(E, 1)$

1. اثبت ان M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها على هذه القطعة.

♦ I منتصف $[AE]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$, $(E, 1)$

♦ J منتصف $[BG]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B, 1)$, $(G, 1)$

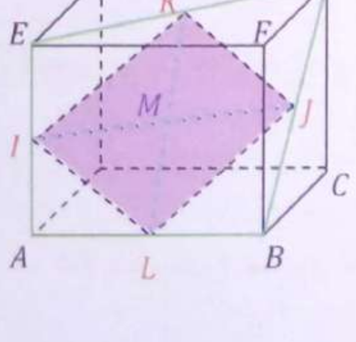
وبما أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(G, 1)$, $(E, 1)$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 2)$, $(J, 2)$ حسب الخاصة التجميعية إذاً $M \in [IJ]$

وبما أن I و J لهما نفس التثقيل إذاً M منتصف $[IJ]$.

2. اثبت ان M تنتمي إلى $[kL]$ وعين موضعها على هذه القطعة.

♦ k منتصف $[EG]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E, 1)$, $(G, 1)$

♦ L منتصف $[AB]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$, $(B, 1)$



وبما أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(G, 1)$, $(E, 1)$

فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L, 2)$, $(k, 2)$ إذاً $M \in [kL]$

وبما أن LK لهما نفس التثقيل إذاً M منتصف $[kL]$.

3. استنتج ان L, k, J, I تقع في مستو واحد وعين طبيعة الرباعي $ILJk$

M نقطة تقاطع المستقيمين (kL), (IJ) فإن المستقيمين يعينان مستو.

فالنقاط L, k, J, I تقع في مستو واحد.

والشكل الرباعي $ILJk$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان.

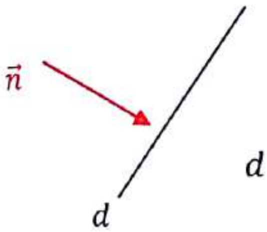
الجداء السلمي في الفراغ

الجداء السلمي في المستوي:

تذكرة في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ بفرض لدينا النقطتان $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ والشعاع $\vec{u}(x,y)$ والمستقيم d الذي معادلته $ax+by+c=0$ و منه :

- مركبات الشعاع $\vec{A}$ هي: $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1)$
- طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- طويلة الشعاع $\vec{u}$ هي: $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
- نقول إن $\vec{A}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا تحقق $\vec{u}=k.\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AB}=k.\vec{u}$ حيث $k\epsilon R$

معادلة المستقيم:



- تعطى معادلة المستقيم d في المستوي بالشكل : $\boxed{d: ax+by+c=0}$
- نسمي الشعاع $\vec{n}(a,b)$ الشعاع الناظم على d وهو كل شعاع عمودي على المستقيم d (يمكن إيجاد عدد لانهائي من النواظم على مستقيم)

- نسمي الشعاع $\vec{u}(-b,a)$ الشعاع الموجه لـ d وهو كل شعاع موازي أو **منطبق** على المستقيم d (يمكن إيجاد عدد لانهائي من الأشعة الموجهة للمستقيم)

حالات مستقيمين :

ليكن لدينا المستقيمان : $d: ax+by+c=0$ و $d': a'x+b'y+c'=0$

- $d\,,d'$ متوازيان $\Leftrightarrow$
  - $\vec{n}=\vec{n}'$ أي شعاع الناظم للمستقيم d هو نفسه شعاع الناظم للمستقيم d'
  - $\vec{u}=\vec{u}'$ أي شعاع الموجه للمستقيم d هو نفسه شعاع الموجه للمستقيم d'
- $d\,,d'$ متعامدان $\Leftrightarrow$
  - $\vec{u}=\vec{n}'$ أي شعاع الموجه للمستقيم d هو نفسه شعاع الناظم للمستقيم d'
  - $\vec{n}=\vec{u}'$ أي شعاع الناظم للمستقيم d هو نفسه شعاع الموجه للمستقيم d'

- بعد النقطة $A(x_1,y_1)$ عن المستقيم d :

$$dist\,(A,d)=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

****

العبارات المختلفة للجداء السلمي في المستوي:

1) في المستوي الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي:

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2]$$

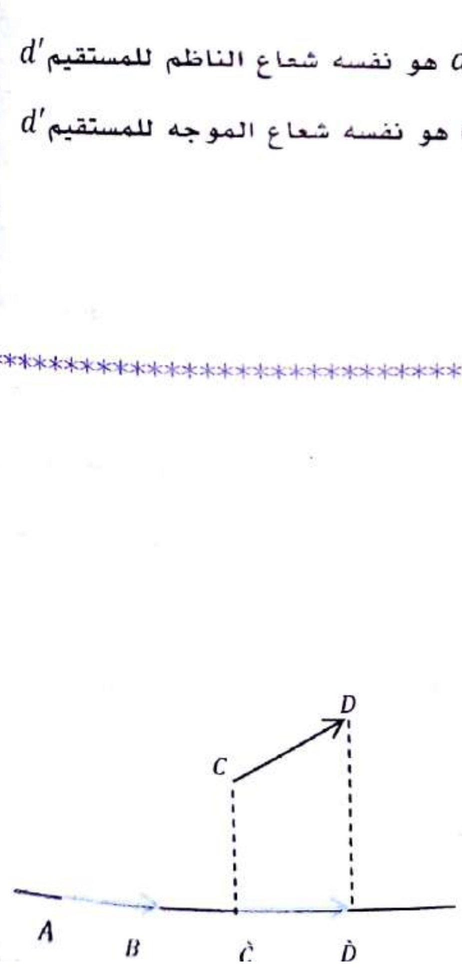
2) إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير معدومين كان:

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

3) في معلم متجانس إذا كان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(\grave{x},\grave{y})$ فإن:

$$\vec{u}.\vec{v}=x.\grave{x}+y.\grave{y}$$

4) **الإسقاط القائم :**



إذا كان $\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على المستقيم (AB) فإن:

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}.\overrightarrow{AB}$$

ملاحظات ونتائج هامة :

أياً كان الشعاعان $\vec{v}$ و $\vec{u}$ في المستوي فإن :

-1 $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدان $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

-2 $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متوازيان $\Leftrightarrow$

- $\vec{v}$ و $\vec{u}$ لهما الجهة ذاتها فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$
- $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعاكسين بالجهة فإن : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

-3 $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (مربع شعاع = مربع طويلته)

-4 الكتابة $\|\overrightarrow{AB}\|$ تكافئ الكتابة AB

****

خواص الأشعة في الجداء السلمي:

أياً كانت الأشعة $\vec{w},\vec{v},\vec{u}$ والأعداد الحقيقية a و b فإن:

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

2) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

3) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$

4) $(a.\vec{u}).(b.\vec{v}) = a.b(\vec{u}.\vec{v})$

ملاحظة:

إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ هذا لا يعني أن $\vec{v} = \vec{w}$ لكن $\vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{w} = 0$

$$\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w}) = 0$$

وهذا يكافئ أن الشعاعين $(\vec{u}),(\vec{v}-\vec{w})$ متعامدان.

تذكرة في علاقة الكاشي

في مثلث ABC بفرض $BC = a$ ، $AC = b$ ، $AB = c$ عندئذ :

$$\boxed{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} \Longleftrightarrow \boxed{a^2 = b^2+c^2-2bc.\cos A}$$

****

تدريب:

نتأمل في معلم متجانس النقاط $A(0,1),B(5,4),M(m,0)$ حيث m عدد حقيقي.

-1 احسب $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ بدلالة m

-2 استنتج قيم m ليكون المثلث AMB قائم الزاوية في M.

1) $\overrightarrow{MA}(-m,1)$, $\overrightarrow{MB}(5-m,4)$

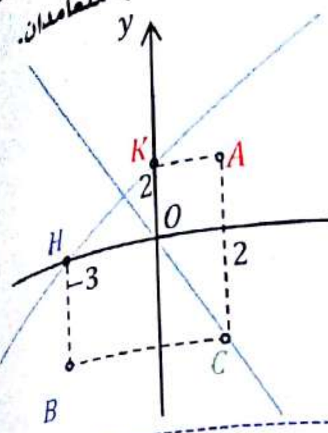
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (-m)(5-m)+(1)(4)$$
$$= -5m+m^2+4$$
$$= m^2-5m+4$$

2) حتى يكون المثلث AMB قائم في M يجب أن يتحقق

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$
$$m^2-5m+4 = 0$$
$$(m-4)(m-1) = 0$$

إما $m = 1$ أو $m = 4$

تدريب: نتأمل في معلم متجانس النقاط $C(2,-3), B(-3,-3), A(2,2)$: ولتكن H المسقط القائم للنقطة B على محور الفواصل و K المسقط القائم للنقطة A على محور التراتيب. اثبت ان المستقيمين $(HK),(OC)$ متعامدان.



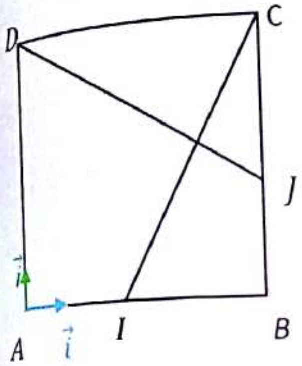
- H المسقط القائم للنقطة B على $X\acute{X}$ ومنه $H(-3,0)$
- K المسقط القائم للنقطة A على $Y\acute{Y}$ ومنه $K(0,2)$
- ومنه $\overrightarrow{OC}\ (2,-3)$ و $\overrightarrow{HK}\ (3,2)$ شعاعا توجيه

المستقيمين (OC) و (HK) على الترتيب ومنه حسب علاقة الجداء السلمي:

$$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{HK} = (2)(3) + (-3)(2) = 6 - 6 = 0$$

إذاً $(OC),(HK)$ متعامدان.

تدريب: $ABCD$ مربع طول ضلعه يساوي a فيه I,J هما على التوالي منتصفا ضلعيه $[CB]$, $[AB]$ اثبت ان المستقيمين $(CI),(DJ)$ متعامدان.



نختار المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j})$ فتكون إحداثيات النقاط الآتية كما يلي:

$$A(0,0),\quad B(a,0),\quad C(a,a),\ D(0,a),\ I\left(\frac{a}{2},0\right),\ J\left(a,\frac{a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CI}\left(-\frac{a}{2},-a\right),\quad \overrightarrow{DJ}\left(a,-\frac{a}{2}\right)$$

حسب علاقة الجداء السلمي:

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{DJ} = \left(-\frac{a}{2}\right)(a) + (-a)\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

فالمستقيمين $(CI),(DJ)$ متعامدان.

تدريب: ABC مثلث قائم في A، M منتصف $[BC]$، H موقع الارتفاع المرسوم من A . وليكن K,L المسقطين القائمين للنقطة H على $[AC],[AB]$ بالترتيب. اثبت تعامد المستقيمين $(KL),(AM)$

بما أن M منتصف $[BC]$ فإنه حسب علاقة المتوسط يكون:

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \qquad \div 2$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right]$$

نضرب بـ $\overrightarrow{KL}$:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{KL}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{KL}\right]$$

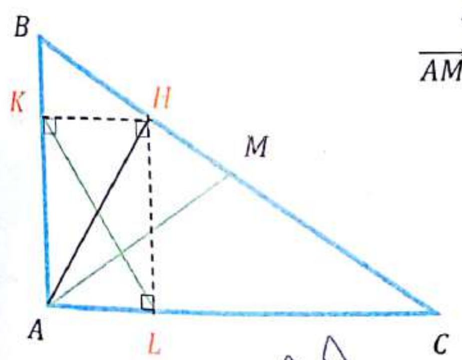
$\overrightarrow{KA}$ مسقط الشعاع $\overrightarrow{KL}$ على (AB)

$\overrightarrow{AL}$ مسقط الشعاع $\overrightarrow{KL}$ على (AC)

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AL}\right]$$

$\overrightarrow{KA}$ مسقط الشعاع $\overrightarrow{HA}$ على (AB)

$\overrightarrow{AL}$ مسقط الشعاع $\overrightarrow{AH}$ على (AC)



$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HA}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{HA}\left[\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{CB}}_{\text{من الفرض متعامدان}} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{KL} = 0$$

فالمستقيمين $(AM),(KL)$ متعامدان.

تدريب صفحة 50 نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$:

-1 احسب $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$, $\vec{w}.\vec{u}$ في الحالتين:

1) $\vec{w}=\frac{1}{3}\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$

$$\vec{u}.\vec{v}=(2)\left(\frac{1}{2}\right)+(-3)(5)=-14$$

$$\vec{v}.\vec{w}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+(5)(-2)=\frac{-59}{6}$$

$$\vec{w}.\vec{u}=\left(\frac{1}{3}\right)(2)+(-2)(-3)=\frac{20}{3}$$

2) $\vec{w}(5,2)$, $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},3\right)$, $\vec{u}(2,-1)$

$$\vec{u}.\vec{v}=(2)\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)(3)=-4$$

$$\vec{v}.\vec{w}=\left(-\frac{1}{2}\right)(5)+(3)(2)=\frac{7}{2}$$

$$\vec{w}.\vec{u}=(5)(2)+(2)(-1)=8$$

-2 اعط في الحالتين الآتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d:

1. $A(5,3)$ و $d:\ 2x+5y-5=0$

معادلة المستقيم المطلوب هي من الشكل

$\Delta:\ ax+by+c=0$

$d\perp\Delta \Leftrightarrow \vec{n_d}=\vec{u_\Delta}$: $\vec{n_d}(a,b)=(2,5)$

$(2,5)=\vec{u_\Delta}(-b,a)$

بالمطابقة نجد أن: $b=-2$, $a=5$

$\Delta:\ 5x-2y+c=0$

$A(5,3)\in\Delta \Rightarrow 5(5)-2(3)+c=0$

$c=-19$

معادلة المستقيم: $\Delta:\ 5x-2y-19=0$

2. $A(-1,2)$ و $d:\ x-3y+2=0$

معادلة المستقيم المطلوب هي من الشكل

$\Delta:\ ax+by+c=0$

$d\perp\Delta \Leftrightarrow \vec{n_d}=\vec{u_\Delta}$: $\vec{n_d}(a,b)=(1,-3)$

$(1,-3)=\vec{u_\Delta}(-b,a)$

بالمطابقة نجد أن: $b=-1$, $a=-3$

$\Delta:\ -3x-y+c=0$

$A(-1,2)\in\Delta \Rightarrow -3(-1)-(2)+c=0$

$c=-1$

معادلة المستقيم: $\Delta:\ -3x-y-1=0$

-3 اثبت في حالة اربع نقاط A , B , C , D من المستوي ان:

$$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=AB^2-BC^2+CD^2-DA^2$$

$$L_2=AB^2-BC^2+CD^2-DA^2$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2}_{\text{مطابقة}}+\underbrace{\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{DA}^2}_{\text{مطابقة}}$$

$$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$

$$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}).\overrightarrow{CA}$$

$$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\left[\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right]$$

$$=\overrightarrow{AC}\left[\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\right]=\overrightarrow{AC}\left[\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD}\right]$$

$$=\overrightarrow{AC}\left[\underline{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}}\right]=\overrightarrow{AC}(2\overrightarrow{DB})=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=L_1$$

-4 اعط في الحالتين الآتيتين بعد النقطة A عن المستقيم d :

- $A(-2,4)$ و $d:\ 2x+y-5=0$

$$dist(A,d)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2(-2)+1(4)-5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

- $A(-\sqrt{2},2)$ و $d:\ \sqrt{2}x-3y-1=0$

$$dist(A,d)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|\sqrt{2}(-\sqrt{2})-3(2)-1|}{\sqrt{2+9}}=\frac{9}{\sqrt{11}}$$

الجداء السلمي في الفراغ:

1. الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ في الفراغ هو العدد الحقيقي:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

2. إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير معدومين فإن:

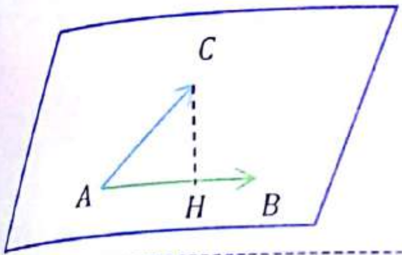
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

3. في معلم متجانس إذا كان الشعاعان $\vec{u}\,(x\,,y\,,z)$ ، $\vec{v}(\dot{x}\,,\dot{y}\,,\dot{z})$ فإن:

$$\vec{u}.\vec{v} = x.\dot{x} + y.\dot{y} + z.\dot{z}$$

4. الإسقاط القائم:

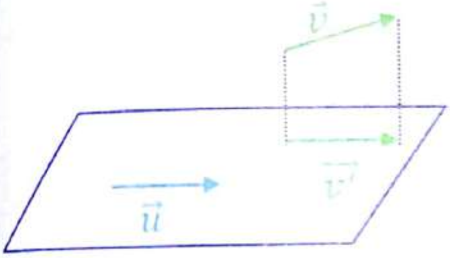
إذا كانت H هي المسقط القائم في المستوي P للنقطة C على المستقيم (AB) فإن:



$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$$

بعبارة أخرى :

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'}$ حيث $\vec{v}'$ المسقط القائم لـ $\vec{v}$ على مستوٍ يحوي $\vec{u}$ ولا يحوي $\vec{v}$



تدريب: نعطى معلم متجانس $(;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(1\,,0\,,0)$ ، $B(0\,,1\,,0)$ ، $C(0\,,0\,,1)$ ، $D\,(0\,,2\,,0)$ ، $E(1\,,1\,,1)$

والنقطة M منتصف $[AB]$ والمطلوب:

احسب: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CM}$

الحل:

- $\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CM}$:

M منتصف $[AB]$ ومنه $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

ونعلم أن $O(0,0,0)$

$\overrightarrow{OE}\,(1\,,1\,,1)$ ، $\overrightarrow{CM}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$

$$\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CM} = (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)(-1) = 0$$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\,(-1\,,1\,,0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1\,,0\,,1)$

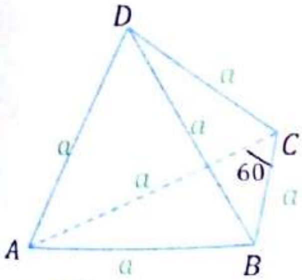
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1)(-1) + (1)(0) + (0)(1) = 1$$

- $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AE}(0\,,1\,,1)$ ، $\overrightarrow{AD}(-1\,,2\,,0)$

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = (0)(-1) + (1)(2) + (1)(0) = 2$$

تدريب:



$ABCD$ رباعي وجوه منتظم كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه (a) والمطلوب:

احسب: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

الحل :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\cos(D\hat{A}B)$$
$$= (a)(a)\cos 60$$
$$= a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(C\hat{A}B)$$
$$= (a)(a)\cos 60$$
$$= a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.[\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}]$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

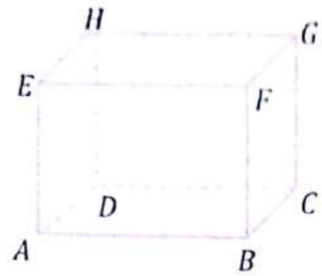
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

شال

تدريب: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه (a) والمطلوب :

احسب: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$

الحل:



❖ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$:

نلاحظ أن $\vec{A}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{AG}$ على المستوي $(AEHD)$ و أن $\overrightarrow{AE}$ هو المسقط القائم لـ $\overrightarrow{AH}$ على (AE) ومنه:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AH}$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$$
$$= AE^2 = a^2$$

❖ $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$:

نلاحظ أن $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EB}$ ومنه:

$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC} = \underbrace{\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EB}}_{\text{قطرا المربع متعامدان}} = 0$$

❖ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$:

نلاحظ أن $\overrightarrow{AE}$ هو المسقط القائم لـ $\overrightarrow{AF}$ على (AE)

ومنه:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$$
$$= AE^2 = a^2$$

❖ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$:

نلاحظ أن $\vec{C} = \overrightarrow{BE}$ وأن $\overrightarrow{AE}$ هو المسقط القائم لـ $\overrightarrow{BE}$ على (AE) فإن:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE}$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$$
$$= AE^2 = a^2$$

تدريب صفحة 53 :

-1 نعطى في هذه الفقرة معلماً $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

احسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\vec{v}.\vec{w}$ و $\vec{w}.\vec{u}$ في الحالتين:

2) $\vec{w}(1,0,1)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{2},-2,\frac{2}{3}\right)$, $\vec{u}\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{6},\frac{1}{2}\right)$

$$\vec{u}.\vec{v} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)(-2) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$
$$\vec{v}.\vec{w} = \left(\frac{1}{2}\right)(1) + (-2)(0) + \left(\frac{2}{3}\right)(1)$$
$$= \frac{1}{2} + 0 + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$
$$\vec{w}.\vec{u} = (1)\left(\frac{2}{3}\right) + (0)\left(-\frac{1}{6}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{3} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

1) $\vec{u}(1+\sqrt{2},\sqrt{3},0)$, $\vec{v}(1-\sqrt{2},0,-1)$ $\vec{w}(0,-\sqrt{3},1)$

$$\vec{u}.\vec{v} = \underbrace{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}_{\text{مطابقة}} + (\sqrt{3})(0) + (0)(-1)$$
$$= 1 - 2 + 0 + 0 = -1$$
$$\vec{v}.\vec{w} = (1-\sqrt{2})(0) + (0)(-\sqrt{3}) + (-1)(1) = -1$$
$$\vec{w}.\vec{u} = (0)(1+\sqrt{2}) + (-\sqrt{3})(\sqrt{3}) + (1)(0) = -3$$

-2 إذا علمت ان نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وان $\vec{u}.\vec{v} = -4$ فاحسب المقادير الآتية:

1) $\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v})$

$$\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u}.\vec{v}$$
$$= 25 - 4 = 21 \qquad ; \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

2) $\vec{v}.(\vec{u}-\vec{v})$

$$\vec{v}.(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}^2$$
$$= -4 - 9 = -13 \quad ; \vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2$$

3) $2\vec{u}.(\vec{v}-3\vec{u})$

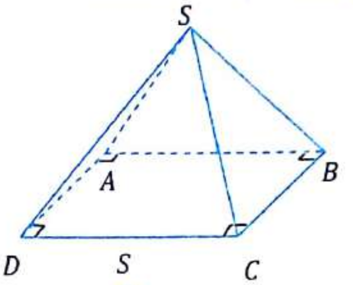
$$2\vec{u}(\vec{v}-3\vec{u}) = 2\underbrace{\vec{u}.\vec{v}} - 6\vec{u}^2$$
$$= 2(-4) - 6(25)$$
$$= -8 - 150 = -158$$

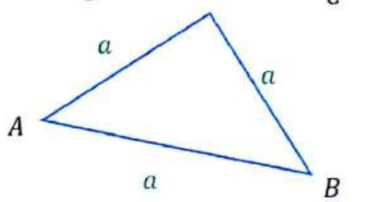
4) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-3\vec{v})$

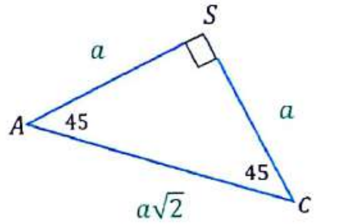
$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-3\vec{v}) = \vec{u}^2 - 3\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} - 3\vec{v}^2$$
$$= 25 - 3(-4) + (-4) - 3(9)$$
$$= 25 + 12 - 4 - 27 = 6$$

-3 نتامل هرماً $S - ABCD$ قاعدته مربع وراسه S وطول كل حرف من حروفه واضلاع قاعدته يساوي a

احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$







بما أن أطوال أحرف الهرم وأطوال أضلاع قاعدته متساوية وطولها (a) فكل وجه جانبي فيه مثلث متساوي الأضلاع وقياس كل زاوية من الأوجه الجانبية (60°)

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SB}\|.\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB})$$
$$= (a).(a)\cos(60^\circ) = (a^2)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$
$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SC}\|\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC})$$

نلاحظ أن $[AC]$ قطر المربع فطوله يساوي $\sqrt{2}a$

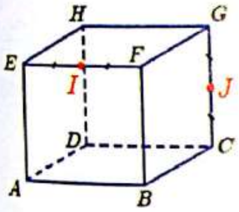
وحسب عكس فيثاغورث المثلث SAC قائم في S

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = (a).(a)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$$
$$= -\|\overrightarrow{AS}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC})$$
$$= -(a).(a\sqrt{2})\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -a^2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2$$

-4 $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه (a) فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$ احسب:

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD}$

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$



1) $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA}$:

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EA} = \|\overrightarrow{EI}\|.\|\overrightarrow{EA}\|.\cos(\overrightarrow{EI},\overrightarrow{EA})$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)(a).\cos(90^\circ) = 0$$

2) $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC}$:

نلاحظ أن $\overrightarrow{EI}$ عمودي على المستوي $(BFGC)$ فهو عمودي على $\overrightarrow{FC}$

أصبح الشعاعان $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{FC}$ متعامدان فإن:

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FC} = 0$$

4) $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA}$:

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IE} = -EI^2 = -\frac{a^2}{4}$$

3) $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ}$:

نلاحظ ان $\vec{E}$ عمودي على المستوي $(BFGC)$ فهو عمودي على $\overrightarrow{GJ}$.

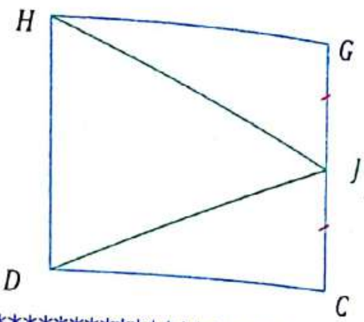
اصبح الشعاعان $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{GJ}$ متعامدان فإن:

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GJ} = 0$$

5) $\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD}$:

$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH}$ (حسب شال) , $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = (\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH}).(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD})$$
$$= \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{JC} + \underbrace{\overrightarrow{JG}.\overrightarrow{CD}}_{\text{متعامدان}} + \underbrace{\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{JC}}_{\text{تعامدان}} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{GJ} + 0 + 0 + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GH}$$
$$= -JG^2 + GH^2$$
$$= -\frac{a^2}{4} + a^2$$
$$= \frac{3a^2}{4}$$



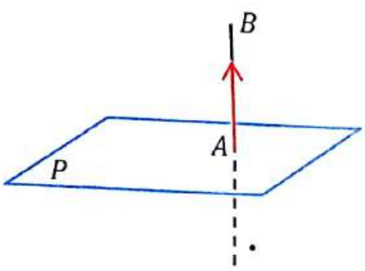
****

التعامد في الفراغ

الأشعة المتعامدة:

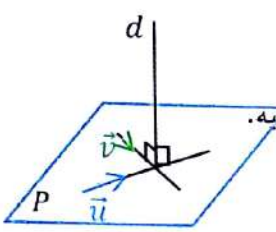
- يتعامد شعاعان $\vec{u}, \vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- في معلم متجانس إذا كان $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})$ فإن:

$\vec{u}$, $\vec{v}$ متعامدين $\Leftrightarrow x.\acute{x} + y.\acute{y} + z.\acute{z} = 0$



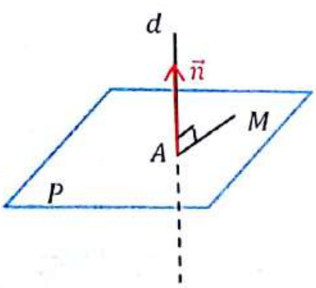
الشعاع الناظم على مستوي:

نقول عن الشعاع غير الصفري $\overrightarrow{AB}$ أنه شعاع ناظم على المستوي P إذا كان المستقيم (AB) عمودي على المستوي P .



تعامد مستقيم ومستوي:

- نقول عن مستقيم d أنه عمودي على مستوٍ P إذا كان عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه.
- لاحظ: الشعاعين $\vec{v}$, $\vec{u}$ غير مرتبطين خطياً
$d \perp \vec{v}$
$d \perp \vec{u}$
$\Rightarrow d \perp P$



ملاحظة هامة :

المستوي المار بالنقطة A ويقبل $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً هو مجموعة النقاط M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

تدريب: في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتامل النقطتين $B(2,4,1)$, $A(0,1,\frac{1}{2})$ ومستويا P يقبل $\vec{u}(1,-1,2)$, $\vec{v}(-3,2,0)$ شعاعين موجهين.

اثبت ان المستقيم (AB) عمودي على المستوي P.

الحل: حتى يكون المستقيم (AB) عمودي على المستوي P يجب أن يكون الشعاع الموجه للمستقيم (AB) وليكن $\overrightarrow{AB}$ عمودي على كلاً من $\vec{u}$, $\vec{v}$ بشرط $\vec{u}$, $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

- مركبات $\vec{u}$, $\vec{v}$ غير متناسبة $\left(\frac{-3}{1} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{0}{2}\right)$ أي أن $\vec{u}$, $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.
- الشعاع الموجه للمستقيم (AB) هو $\overrightarrow{AB}\left(2,3,\frac{1}{2}\right)$

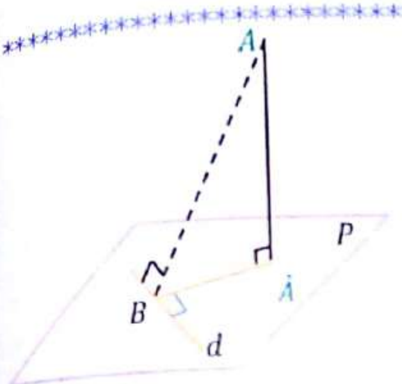
$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = (2)(1) + (3)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v} = (2)(-3) + (3)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) = 0$$

أصبح $\overrightarrow{AB}$ عمودي على كلاً من $\vec{u}$, $\vec{v}$, فالمستقيم (AB) عمودي على المستوي P .

****

تعامد مستقيمين (الأعمدة الثلاث):



بفرض A نقطة خارج P و d مستقيم محتوى في P فإن:

$$\left.\begin{array}{l} \acute{A} \text{ المسقط القائم للنقطة } A \text{ على } P \\ \acute{A}B \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp d$$

ملاحظة عامة :

لإثبات تعامد مستقيمين d_1 , d_2 يكفي ان نثبت تعامد شعاع توجيه المستقيم الأول مع شعاع توجيه المستقيم الثاني اي:

$$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = 0}$$

تدريب: ليكن لدينا المستقيم d الذي شعاع توجيهه $\vec{u}(3,1,-4)$ ولتكن النقطتين $A\left(1,-1,\frac{1}{4}\right)$, $B\left(2,-3,\frac{1}{2}\right)$

اثبت ان d عمودي على المستقيم (AB)

الحل: ليكون d عمودي على المستقيم (AB) يجب ان يكون $\overrightarrow{u_d}$, $\vec{A}$ متعامدان اي: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\left(1,-2,\frac{1}{4}\right) \\ \vec{u}\ (3,1,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d} = (1)(3) + (-2)(1) + \left(\frac{1}{4}\right)(-4) \\ = 3 - 2 - 1 = 0 \end{array}$$

إذاً d عمودي على المستقيم (AB)

تدريب ص 56: نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) بين فيما يلي بين إذا كان الشعاعان $\vec{u}$, $\vec{v}$ متعامدان او عين الوسيط α ليكون كذلك:

1. $\vec{v}\left(-\frac{2}{5},2,3\right)$, $\vec{u}\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{2}\right)(3)$$

$$= -\frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -2 \neq 0$$

فالشعاعان ليسا متعامدين.

2. $\vec{v}(-\sqrt{2},1,1)$, $\vec{u}(\sqrt{2},1+\sqrt{2},1-\sqrt{2})$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})(1) + (1-\sqrt{2})(1)$$

$$= -2 + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$$

فالشعاعان متعامدان

3. $\vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 3, \alpha\right) \; , \; \vec{u}\left(2, -\frac{1}{2}, 5\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2)\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)(3) + (5)(\alpha)$$

$$= -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 5\alpha = -\frac{23}{10} + 5\alpha$$

ليكون الشعاعان متعامدان يجب أن يتحقق:

$$-\frac{23}{10} + 5\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{23}{50}$$

4. $\vec{v}\left(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2}\right) \; , \; \vec{u}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\sqrt{3})(\alpha) + \left(\frac{1}{3}\right)(2\alpha) + (2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha + 1 = \left(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)\alpha + 1$$

ليكون الشعاعان متعامدين يجب أن يتحقق:

$$\left(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3} + \frac{2}{3}}$$

---

2) نتأمل النقطتين $A(2, -5, 1)$, $B(0, 2, 6)$ والمستقيم d المار بالنقطة $C(-2, 3, 1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. اثبت ان d عمودي على المستقيم (AB)

لدينا $\vec{u}(-4, 1, -3)$, $\overrightarrow{AB}(-2, 7, 5)$

حتى يكون d عمودي على المستقيم (AB) يجب أن يتحقق:

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = (-4)(-2) + (1)(7) + (-3)(5)$$

$$= 8 + 7 - 15 = 0$$

إذاً d , (AB) متعامدان

---

3) أطوال الأشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب $6, 8, 10$ ايكون الشعاعان $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدان.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(10)^2 - (6)^2 - (8)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[100 - 36 - 64] = 0$$

إذاً $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدان.

---

4) نتأمل شعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ ونفترض $(\vec{u}+\vec{v})$, $(\vec{u}-\vec{v})$ متعامدان اثبت ان للشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ الطول نفسه.

بما ان $(\vec{u}+\vec{v})$, $(\vec{u}-\vec{v})$ متعامدان فإن:

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = 0$$

$$\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$$

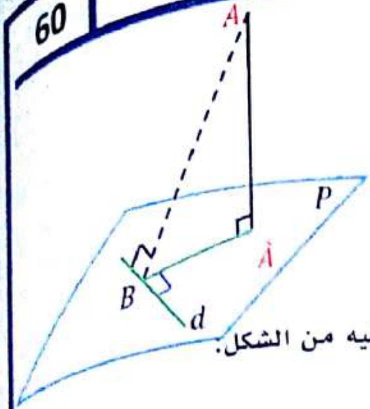
$$\vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

****

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

المعادلة الديكارتية لمستو



- معادلة المستوي P من الشكل:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

$(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$:

و $\vec{n}(a, b, c)$ شعاعاً ناظماً على المستوي P.

- معادلة المستوي المار بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ ويقبل $\vec{n}(a, b, c)$ شعاعاً ناظماً عليه من الشكل:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

مثال: نتأمل في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة $A(-3, 2, 1)$ والشعاع $\vec{n}(2, -4, 1)$ اعط معادلة للمستوي P المار بالنقطة A ويقبل $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً.

الحل: تنتمي النقطة $M(x, y, z)$ إلى المستوي P إذا وفقط إذا تحقق:

$$\vec{n} . \overrightarrow{AM} = 0$$

$$2(x + 3) - 4(y - 2) + 1(z - 1) = 0$$

$$2x - 4y + z + 13 = 0$$

بعد نقطة عن مستو:

في معلم متجانس لتكن $ax + by + cz + d = 0$ معادلة مستو P عندئذ يعطى بعد النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ عن المستوي P بالعلاقة:

$$dist(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

أوضاع مستويين:

ليكن لدينا المستويان : $Q:\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ $\quad P:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

ناظماهما $\overrightarrow{n_p}$, $\overrightarrow{n_Q}$ ومنه :

المستويان متوازيان	المستويان متقاطعان	المستويان متعامدان
$\overrightarrow{n_p}$ ، $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطان خطياً	$\overrightarrow{n_p}$ ، $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطياً	$\overrightarrow{n_P} . \overrightarrow{n_Q} = 0$

تدريب صفحة 59 : نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً :

1- $\vec{n}(1, -1, 0)$, $A(1, 0, 5)$

$$1(x - 1) - 1(y - 0) + 0(z - 5) = 0$$

$$\boxed{x - y - 1 = 0}$$

2- $\vec{n}(2, -3, -1)$, $A(\sqrt{2}, -2, 5)$

$$2(x - \sqrt{2}) - 3(y + 2) - 1(z - 5) = 0$$

$$\boxed{2x - 3y - z - 2\sqrt{2} - 1 = 0}$$

3- $\vec{n}\left(\frac{2}{3}, 4, -1\right)$, $A\left(\frac{1}{2}, 3, -1\right)$

$$\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4(y - 3) - 1(z + 1) = 0$$

$$\boxed{\frac{2}{3}x + 4y - z - \frac{40}{3} = 0}$$

4- $\vec{n}(\sqrt{3}, 2, 0)$, $A(0, -3, 0)$

$$\sqrt{3}(x - 0) + 2(y + 3) + 0(z - 0) = 0$$

$$\boxed{\sqrt{3}x + 2y + 6 = 0}$$

2) في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطة A موازياً للمستوي P .

ملاحظة: المستويان P، متوازيان فلهما نفس الناظم.

3- $P: x + y = 5$, $A(0,3,0)$

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q} = (1,1,0)$$

$$1(x-0) + 1(y-3) + 0(z-0) = 0$$

$$Q: \boxed{x + y - 3 = 0}$$

4- $P: 5x - 3y + 4z = 8$, $A(-1,2,-3)$

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q} = (5,-3,4)$$

$$5(x+1) - 3(y-2) + 4(z+3) = 0$$

$$Q: \boxed{5x - 3y + 4z + 23 = 0}$$

1- $P: 2x - y + 3z = 4$, $A(1,0,1)$

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q} = (2,-1,3)$$

$$2(x-1) - 1(y-0) + 3(z-1) = 0$$

$$Q: \boxed{2x - y + 3z - 5 = 0}$$

2- $P: z = 2$, $A(0,0,0)$

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q} = (0,0,1)$$

$$0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$Q: \boxed{z = 0}$$

---

3) ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$P: 7x + 3y - z - 1 = 0$, $Q: 6x - 11y - 9z - 5 = 0$, $R: 2x - 3y + 5z + 4 = 0$

$\overrightarrow{n_R}(2,-3,5)$, $\overrightarrow{n_Q}(6,-11,-9)$, $\overrightarrow{n_p}(7,3,-1)$

$$\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_R} = (7)(2) + (3)(-3) + (-1)(5)$$

$$= 14 - 9 - 5 = 0$$

فالمستويان R, P متعامدان.

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_R} = (6)(2) + (-11)(-3) + (-9)(5)$$

$$= 12 + 33 - 45 = 0$$

فالمستويان R, Q متعامدان.

$$\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q} = (7)(6) + (3)(-11) + (-1)(-9)$$

$$= 42 - 33 + 9 = 18 \neq 0$$

فالمستويان Q, P ليسا متعامدين.

---

4) في كل من الحالات الآتية بين إذا كان المستويان Q, P متقاطعين.

2. $P: 2x + y + 5 = 0$, $Q: 4x + 2y + z + 5 = 0$

$\overrightarrow{n_p}(2,1,0)$ $\overrightarrow{n_Q}(4,2,1)$

المركبات غير متناسبة لأن $\left(\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}\right)$

فالمستويان ليسا متوازيان فهما متقاطعان.

1. $P: x - y + z = 0$, $Q: x - y + z - 3 = 0$

$\overrightarrow{n_p}(1,-1,1)$ $\overrightarrow{n_Q}(1,-1,1)$

المركبات متناسبة لأن $\left(\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}\right)$

فالمستويان متوازيان وليسا منطبقين لأن P يمر من المبدأ و Q لا يمر من المبدأ.

---

5) احسب بعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي $P: 2x - y + 3z - 5 = 0$

وكذلك احسب بعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي $Q: y - z = 0$

$$dist(A,P) = \frac{|2(5) - 1(-3) + 3(4) - 5|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$

$$dist(B,Q) = \frac{|0(2) + 1(2) - 1(5) + 0|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

طارق سعد الدين 0955561648
خلدون سيروان 0932791896
... البيطار 0933756454

تمرينات ومسائل صفحة 64

1) نعطى معلماً متجانساً في المستوي:

1. بين ازواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$$\vec{S}\left(2,\frac{-4}{5}\right),\ \vec{t}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{5}\right),\ \vec{w}\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{5}\right),\ \vec{v}(-2,-5),\ \vec{u}(2,5)$$

نلاحظ من بعض الأشعة أنهما مرتبطة خطياً

$\vec{u} = -\vec{v}$ فهما متوازيان وليسا متعامدين ، $\vec{t} = -\vec{w}$ فهما متوازيان وليسا متعامدين

$\vec{S} = 4\vec{t}$ فهما متوازيان وليسا متعامدين ، $\vec{S} = -4\vec{w}$ فهما متوازيان وليسا متعامدين

$$\vec{v}.\vec{t} = (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-5)\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$$

فإن $\vec{t},\vec{v}$ متعامدان

$$\vec{u}.\vec{S} = (2)(2) + (5)\left(\frac{-4}{5}\right) = 0$$

فإن $\vec{u},\vec{S}$ متعامدان

$$\vec{u}.\vec{w} = (2)\left(-\frac{1}{2}\right) + (5)\left(\frac{1}{5}\right) = 0$$

فإن $\vec{u},\vec{w}$ متعامدان

$$\vec{v}.\vec{S} = (-2)(2) + (-5)\left(-\frac{4}{5}\right) = 0$$

فإن $\vec{S},\vec{v}$ متعامدان

$$\vec{v}.\vec{w} = (-2)\left(-\frac{1}{2}\right) + (-5)\left(\frac{1}{5}\right) = 0$$

فإن $\vec{w},\vec{v}$ متعامدان

$$\vec{u}.\vec{t} = (2)\left(\frac{1}{2}\right) + (5)\left(-\frac{1}{5}\right) = 0$$

فإن $\vec{u},\vec{t}$ متعامدان

2. في الحالتين الآتيتين، اكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة $[AB]$

-1 $A(4,1)$ ، $B(-1,2)$

طريقة اولى: بفرض $M(x,y)$ نقطة من محور القطعة $[AB]$ فإن:

$$AM = BM$$

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

نربع

$$(x-4)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2$$

$$x^2-8x+16+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2-4y+4$$

$$d: \boxed{-10x+2y+12=0}$$

طريقة ثانية: محور القطعة $[A]$ هو مستقيم مار من $I\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ منتصف $[AB]$ ويقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له:

$$d:\ ax+by+c=0$$

ناظم ، نقطة

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \left(\underbrace{-5}_{a},\underbrace{1}_{b}\right) \qquad I\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$-5x+y+c=0$$

$$I\in d \Rightarrow -\frac{15}{2}+\frac{3}{2}+c=0 \Rightarrow c=6$$

$$\Rightarrow \boxed{d:\ -5x+y+6=0}$$

-2 $A(-5,3)$ ، $B\left(-2,\frac{1}{3}\right)$

طريقة اولى: بفرض $M(x,y)$ نقطة من محور القطعة $[AB]$ فإن :

$$AM = BM$$

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}$$

نربع

$$(x+5)^2+(y-3)^2 = (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$x^2+10x+25+y^2-6y+9=x^2+4x+4+y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}$$

$$d: \boxed{6x-\frac{16}{3}y+\frac{269}{9}=0}$$

$$d:\ \underbrace{ax+by}_{\text{ناظم}}+c=0$$

طريقة ثانية:

نقطة

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=\left(\underbrace{3}_{a},\underbrace{\frac{-8}{3}}_{b}\right)$$

منتصف $[AB]$: $I\left(\frac{-7}{2},\frac{5}{3}\right)$

$$3x-\frac{8}{3}y+c=0$$

$$I\in d \Rightarrow 3\left(\frac{-7}{2}\right)-\frac{8}{3}\left(\frac{5}{3}\right)+c=0$$

$$-\frac{21}{\underbrace{2}_{(9)}}-\frac{40}{\underbrace{9}_{(2)}}+c=0$$

$$-\frac{189}{18}-\frac{80}{18}+c=0 \Rightarrow c=\frac{269}{18}$$

$$3x-\frac{8}{3}y+\frac{269}{18}=0 \qquad \boxed{\times 2}$$

$$d: \boxed{6x-\frac{16}{3}y+\frac{269}{9}=0}$$

3. نتأمل النقاط $A(-5,2)$, $B(1,-1)$, $C(-3,3)$, $E\left(\frac{-9}{4},-1\right)$
اتكون النقطة E متساوية البعد عن المستقيمات التي تؤلفها اضلاع المثلث ABC ؟

<u>إيجاد معادلة المستقيم (AB):</u>

الشعاع الموجه $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\,(6,-3)$
بالمطابقة مع $\vec{u}(-b,a)$ $\Rightarrow$ $a=-3$, $b=-6$

فالمعادلة من الشكل: $-3x-6y+c=0$

نعوض $A(-5,2)$ $\Leftarrow$ $-3(-5)-6(2)+c=0$ $\Leftarrow$ $\boxed{c=-3}$

$(AB):\ -3x-6y-3=0$ $\quad \div -3$

$(AB):\ \boxed{x+2y+1=0}$

إذاً بعد النقطة E عن المستقيم (AB) :

$$dist(E,AB)=\frac{\left|1\left(-\frac{9}{4}\right)+2(-1)+1\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{13}{4\sqrt{5}}$$

<u>إيجاد معادلة المستقيم (AC):</u>

$\vec{u}=\overrightarrow{AC}\,(2,1)$
بالمطابقة مع $\vec{u}(-b,a)$ $\Rightarrow$ $a=1$, $b=-2$

فالمعادلة من الشكل: $x-2y+c=0$

نعوض $A(-5,2)$ $\Leftarrow$ $-5-2(2)+c=0$ $\Leftarrow$ $\boxed{c=9}$

$(AC):\ \boxed{x-2y+9=0}$

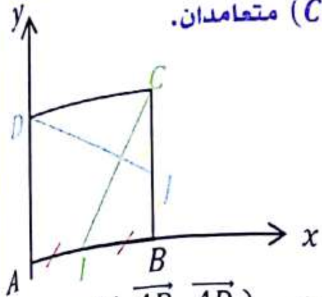
إذ بعد النقطة E عن المستقيم (AC) :

$$dist(E,AC)=\frac{\left|1\left(-\frac{9}{4}\right)-2(-1)+9\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{35}{4\sqrt{5}}$$

$dist(E\,,AB) \neq dist\,(E\,,AC)$ فالنقطة E غير متساوية البعد عن المستقيمات التي تؤلفها أضلاع المثلث ABC

ولاحظ انه لا داعي لإيجاد معادلة BC وحساب بعد E عنه.

2) $ABCD$ مربع I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$ اثبت ان المستقيمين (DJ) , (CI) متعامدان.



طريقة أولى: نختار معلم متجانس $(A,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD})$:

$B(1\,,0)\,,\; A(0\,,0)\,,\; D(0\,,1)$

$J\left(1\,,\frac{1}{2}\right)\,,\quad I\left(\frac{1}{2}\,,0\right)\,,\; C(1\,,1)$

$\overrightarrow{CI}\left(\frac{-1}{2}\,,-1\right)\,,\; \overrightarrow{DJ}\left(1\,,-\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{DJ} = \left(\frac{-1}{2}\right)(1) + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان فالمستقيمين (DJ) , (CI) متعامدين.

طريقة ثانية: نفرض طول ضلع المربع a:

الشعاعان متعامدان $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{DJ} = 0$

حسب شال

$L_1 = \underbrace{\overrightarrow{CI}}_{B}.\underbrace{\overrightarrow{DJ}}_{C}$

$= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI})(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ})$

$= \underbrace{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DC}}_{\text{متعامدان}} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}}_{\text{متعامدان}}$

$= \quad 0 \quad + \|\overrightarrow{CB}\|.\|\overrightarrow{CJ}\| + (-\|\overrightarrow{BI}\|.\|\overrightarrow{DC}\|) + 0$

$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$

و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان فالمستقيمين (DJ) , (CI) متعامدين.

---

3) نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ:

-1 بين في كل من الحالتين الآتيتين إذا كان الشعاعان $\vec{u}$, $\vec{v}$ متعامدين:

- $\vec{v}\left(\sqrt{2},\, \sqrt{3}\,,1\right)$, $\vec{u}\left(\sqrt{2}\,,\sqrt{3}\,,0\right)$

$\vec{u}.\vec{v} = (\sqrt{2})(\sqrt{2}) + (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + (0)(1) = 5 \neq 0$

فالشعاعان ليسا متعامدان.

- $\vec{v}\left(2\,,-\frac{3}{2}\,,1\right)$, $\vec{u}(1\,,-2\,,5)$

$\vec{u}.\vec{v} = (1)(2) + (-2)\left(-\frac{3}{2}\right) + (5)(1) = 10 \neq 0$

فالشعاعان ليسا متعامدان.

-2 نتأمل النقاط $A(4\,,1\,,-2)$, $B(-1\,,2\,,4)$, $C(0\,,2\,,-5)$, $D\left(1\,,-2\,,-\frac{7}{2}\right)$

ونعرف M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ احسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB}\,.\overrightarrow{CD}$

M منتصف $[AB]$ فإن إحداثياتها: $M\left(\frac{3}{2}\,,\frac{3}{2}\,,1\right)$

$\overrightarrow{AB}\,(-5\,,1\,,6)\,,\overrightarrow{AC}(-4\,,1\,,-3)\,,\overrightarrow{CD}\left(1\,,-4\,,\frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{DB}\left(-2\,,4\,,\frac{15}{2}\right)\quad,\quad \overrightarrow{MB}\left(-\frac{5}{2}\,,\frac{1}{2}\,,3\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-5)(-4) + (1)(1) + (6)(-3) = 3$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-5)(1) + (1)(-4) + (6)\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC} = (-2)(-4) + (4)(1) + \left(\frac{15}{2}\right)(-3) = \frac{-21}{2}$

$\overrightarrow{MB}\,.\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{5}{2}\right)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(-4) + (3)\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

-3 بين في كل من الحالات الآتية إذا كان المستويان P, Q متعامدين:

- Q: $y - 2z + 3 = 0$

P: $x - 3y + 2 = 0$

$\overrightarrow{n_Q}\,(0\,,1\,,-2)\quad,\quad \overrightarrow{n_P}\,(1\,,-3\,,0)$

$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = (1)(0) + (-3)(1) + (0)(-2) = -3$

فالمستويان P, Q ليسا متعامدين.

- Q: $x + 2y + z - 3 = 0$

P: $x + 2y - 5z + 7 = 0$

$\overrightarrow{n_Q}\,(1\,,2\,,1)\quad,\quad \overrightarrow{n_P}\,(1\,,2\,,-5)$

$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = (1)(1) + (2)(2) + (-5)(1) = 0$

فالمستويان P, Q متعامدين.

4- احسب في كل من الحالتين الآتيتين بعد النقطة A عن المستوي P:

- $P:\ 3x+y-\frac{1}{2}z+7=0\ ,\ A(5,-2,0)$

$$dist(A,P)=\frac{\left|3(5)+1(-2)-\frac{1}{2}(0)+7\right|}{\sqrt{9+1+\frac{1}{4}}}=\frac{20}{\sqrt{\frac{41}{4}}}=\frac{40}{\sqrt{41}}$$

- $P:\ x+y-2z+4=0\ ,\ A(0,\sqrt{2},1)$

$$dist(A,P)=\frac{\left|1(0)+1(\sqrt{2})-2(1)+4\right|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{6}}$$

---

4) مستويات متعامدة:

نتأمل في المعلم المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين الآتيتين : $A(1,-1,2)$, $B(2,0,4)$
والمستوي P الذي معادلته $x-y+3z-4=0$, جد معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A , B

- نفرض أن ناظم المستوي Q هو $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ بشرط أن a,b,c ليست جميعها أصفاراً
- ناظم المستوي P هو $\overrightarrow{n_P}(1,-1,3)$
- بما أن $P\perp Q$ فإن $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$: ① $\boxed{a-b+3c=0}$
- بما أن A , B نقطتان من Q فإن $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ حيث $\vec{A}(1,1,2)$: ② $\boxed{a+b+2c=0}$
- أصبح لدينا معادلتين بثلاث مجاهيل a,b,c وبما أنه يوجد عدد لا نهائي من أشعة النواظم على المستوي Q فيمكن اختيار قيمة لإحدى المركبات ولنضع $c=2$ ومنه:

$$\begin{aligned}&a-b+6=0\\ (+)\ &\underline{a+b+4=0}\\ &2a+10=0 \quad\Rightarrow\quad a=-5\ ,\quad b=1\end{aligned}$$

ومنه $\overrightarrow{n_Q}(-5,1,2)$ ومنه معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\overrightarrow{n_Q}$ ويمر بالنقطة $A(1,-1,2)$ هي:

$$Q:\ -5(x-1)+1(y+1)+2(z-2)=0$$

$$Q:\ \boxed{-5x+y+2z+2=0}$$

---

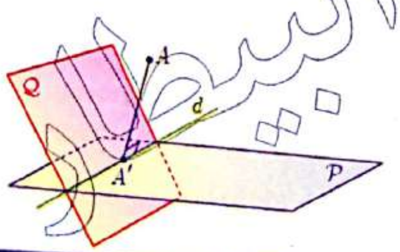
5) بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ:

في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويان P,Q:

$$P:\ 2x-y+z-4=0\quad,\quad Q:\ x+y+2z-5=0$$

اثبت تقاطع المستويين P , Q واحسب بعد A عن المستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك.

- لنثبت أولاً تقاطع المستويين P,Q : $\overrightarrow{n_P}(2,-1,1)$, $\overrightarrow{n_Q}(1,1,2)$
المركبات غير متناسبة $\left(\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{2}{1}\right)$ فالشعاعين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين.
- نلاحظ أن النقطة A لا تنتمي إلى المستويين P , Q وذلك لأنها لا تحقق معادلتيهما.
- نفرض أن $\acute{A}(\alpha,\beta,\gamma)$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d
ومنه فإن $\acute{A}(\alpha,\beta,\gamma)$ تنتمي للمستويين P , Q فهي تحقق معادلتيهما:
نعوض $\acute{A}$ في معادلة المستويين:



$$P:\ 2\alpha-\beta+\gamma-4=0 \quad ①$$
$$Q:\ \alpha+\beta+2\gamma-5=0 \quad ②$$

فإن $A.u = 0$ ، $A\acute{A}$ عمودي على d وبما ان d هو شعاع توجيه المستقيم $\vec{u}$

- ليكن $\vec{u}$ هو شعاع توجيه المستقيم d وبما ان $A\acute{A}$ عمودي على d ، فإن $A.u = 0$
- ليكن $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ حيث $B(x,y,z)$ ، $C(\acute{x},\acute{y},\acute{z})$ نقطتين من d
- بما ان C, B تقع على d فهي تنتمي لكل من المستويين P ، Q وبالتالي

$B(x,y,z)$ $\qquad$ $C(\acute{x},\acute{y},\acute{z})$

نختار من نقاط d مثلاً $x = 0$ ونعوض في P ، Q

$$-y + z - 4 = 0$$
$$y + 2z - 5 = 0$$
$$3z - 9 = 0$$
$$z = 3$$
$$y = -1$$
$$B(0,-1,3)$$

نختار من نقاط d مثلاً $x = 1$ ونعوض في P ، Q

$$2 - \acute{y} + \acute{z} - 4 = 0$$
$$1 + \acute{y} + 2\acute{z} - 5 = 0$$
$$3 + 3\acute{z} - 9 = 0$$
$$\acute{z} = 2$$
$$\acute{y} = 0$$
$$C(1,0,2)$$

ومنه شعاع توجيه المستقيم $\vec{u} = \overrightarrow{BC}(1,1,-1)$

$\overrightarrow{A\acute{A}}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{A\acute{A}}(\alpha - 3, \beta + 1, \gamma - 2)$:

$$(\alpha - 3)(1) + (\beta + 1)(1) + (\gamma - 2)(-1) = 0$$
$$\alpha + \beta - \gamma = 0 \quad ③$$

نكتب جملة المعادلات الثلاث التي حصلنا عليها:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma - 4 = 0 & ① \\ \alpha + \beta + 2\gamma - 5 = 0 & ② \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 & ③ \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ① و ③ نحصل على $3\alpha - 4 = 0$ ومنه $\boxed{\alpha = \frac{4}{3}}$ نعوض في ① و ② :

$$-\beta + \gamma - \frac{4}{3} = 0$$
$$\beta + 2\gamma - \frac{11}{3} = 0$$

$$3\gamma - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{5}{3}} \quad , \quad \boxed{\beta = \frac{1}{3}}$$

ومنه النقطة $\acute{A}\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ ، وبعد A عن الفصل المشترك للمستويين Q, P هو $A\acute{A}$

$$A\acute{A} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{42}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{42}}{3}}$$

---

6) تقاطع مستقيم مع مستو:

في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتامل نقطتين $A(2,-1,0)$ ، $B(-1,3,5)$ والمستوي P الذي يقبل معادلة $2x - 3y + z - 5 = 0$ اثبت ان المستقيم (AB) يقطع المستوي P وعين إحداثيات C نقطة التقاطع.

- لنثبت أولاً ان المستقيم (AB) والمستوي P ليسا متوازيين ، أي ان $\vec{n}(2,-3,1)$ ، $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ غير متعامدين
- $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = (2)(-3) + (-3)(4) + (1)(5) = -13 \neq 0$

فإن $\vec{n}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ليسا متعامدين وبالتالي P ، (AB) ليسا متوازيين.

- بفرض $C(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تقاطع (AB) و P فإن النقاط A ، B ، C على استقامة واحدة ومنه:

$$\overrightarrow{AC}(\alpha-2,\beta+1,\gamma) \quad : \quad \overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha-2\\ \beta+1\\ \gamma\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3k\\ 4k\\ 5k\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha-2&=-3k\\ \beta+1&=4\\ \gamma&=5k\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\alpha&=2-3k\\ \beta&=-1+4k\\ \gamma&=5k\end{aligned}$$

إذاً $C=(2-3k,-1+4k,5k)$ وهي تنتمي لـ P فهي تحقق معادلته:

$$2(2-3k)-3(-1+4k)+5k-5=0$$

$$4-6k+3-12k+5k-5=0$$

$$-13k=-2 \Rightarrow k=\frac{2}{13}$$

$$C\left(2-\frac{6}{13},-1+\frac{8}{13},\frac{10}{13}\right) \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)}$$

---

7) مستقيم عمودي على مستو: في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل نقطتين $A(2,5,3)$ ، $B(-1,0,-1)$ ومستوياً P يقبل $\vec{u}\ (1,1,-2)$ ، $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين. اثبت ان المستقيم (AB) عمودي على المستوي P.

- نلاحظ أن الشعاعين $\vec{v},\vec{u}$ من P غير مرتبطين خطياً لأن :المركبات غير متناسبة $\left(\frac{1}{3}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{-2}{-1}\right)$
- حتى يكون المستقيم (AB) عمودي على المستوي P يجب أن يكون عمودياً على شعاعين غير مرتبطين خطياً فيه.

لذلك لنثبت أن $\overrightarrow{AB}$ يعامد الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$: لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$

$\overrightarrow{AB}.\vec{u}=(-3)(1)+(-5)(1)+(-4)(-2)=0$ فإن $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{AB}$ متعامدان.

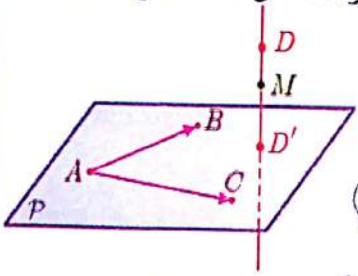
$\overrightarrow{AB}.\vec{v}=(-3)(3)+(-5)(-1)+(-4)(-1)=0$ فإن $\vec{v}$ ، $\overrightarrow{AB}$ متعامدان.

أصبح $\overrightarrow{AB}$ عمودي على الشعاعين الغير مرتبطين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذاً المستقيم (AB) عمودي على المستوي P.

---

8) المسقط القائم على مستو: في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $C(1,5,5)$ ، $B(0,0,1)$ ، $A(1,2,0)$ يطلب تعيين $\acute{D}$ المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على (ABC).

أولاً: نوجد معادلة (ABC) حتى تشكل النقاط A,B,C مستوياً ، ويجب أن تكون غير واقعة على استقامة واحدة.



$$\overrightarrow{AC}\ (0,3,5) \quad , \quad \overrightarrow{AB}\ (-1,-2,1)$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن $\left(\frac{0}{-1}\neq\frac{3}{-2}\right)$

وبالتالي A ، B ، C غير واقعة على استقامة واحدة.

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على (ABC) بشرط أن a,b,c ليست جميعها أصفاراً فيكون:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \Rightarrow \boxed{-a-2b+c=0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \Rightarrow \boxed{3b+5c=0} \quad (2)$$

نختار من النواظم على (ABC) الناظم الذي يكون فيه $c=3$ (للسهولة).

$$3b+15=0 \Rightarrow \boxed{b=-5}$$

نعوض في (1):

$$-a+10+3=0 \Rightarrow \boxed{a=13}$$

$$(ABC):13x-5y+3z+d=0$$

$\Rightarrow 0-0+3+d=0 \Rightarrow d=-3$

نعوض $B(0,0,1)$

$(ABC): 13x-5y+3z-3=0$

وبالتالي:

فيكون $\overrightarrow{D\grave{D}}$ مرتبط خطياً مع $\vec{n}$ فيكون:

$\overrightarrow{D\grave{D}} = k\vec{n} \;;\; k \in R$

بفرض $\grave{D}(x,y,z)$ فيكون:

$$\begin{pmatrix} x+11 \\ y-9 \\ z+4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = 13k-11 \\ y=-5k+9 \\ z=3k-4 \end{matrix}$$

بما ان $\grave{D}$ تنتمي إلى (ABC) فهي تحقق معادلته وبالتالي نعوض:

$13(13k-11)-5(-5k+9)+3(3k-4)-3=0$

$169k-143+25k-45+9k-12-3=0$

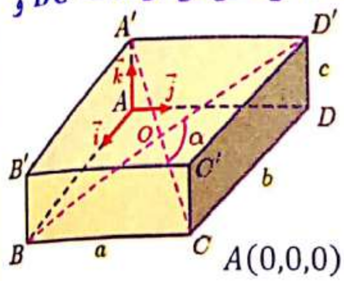
$203k-203=0 \Rightarrow \boxed{k=1}$

$$\left.\begin{matrix} x=13-11 \\ y=-5+9 \\ z=3-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\boxed{\grave{D}\,(2,4,-1)}}$$

---

9) $ABCD\grave{A}\grave{B}\grave{C}\grave{D}$ متوازي مستطيلات يتقاطع قطراه $[B\grave{D}],[C\grave{A}]$ في O نضع $\alpha = \widehat{CO\grave{D}}$ ونفترض ان $BC=a$ و $CD=b$ و $D\grave{D}=c$ نهدف في هذه المسالة إلى حساب $\cos\alpha$

نختار معلماً متجانساً $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{i}$ مرتبطين خطياً و $\overrightarrow{AD}$ و $\vec{j}$ مرتبطين خطياً وكذلك $\overrightarrow{A\grave{A}}$ و $\vec{K}$ مرتبطين خطياً .



1) أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه O

إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات هي : $A(0,0,0)$, $B(b,0,0)$, $C(b,a,0)$, $D(0,a,0)$

$\grave{A}(0,0,c)$, $\grave{B}(b,0,c)$, $\grave{C}(b,a,c)$, $\grave{D}(0,a,c)$

النقطة O هي منتصف $[\grave{A}C]$ ومنه :

$$O\left(\frac{0+b}{2},\frac{0+a}{2},\frac{c+0}{2}\right) \Rightarrow O\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$$

2) اثبت ان : $\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$ ادرس على وجه الخصوص حالة المكعب.

α هي الزاوية بين $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{O\grave{D}}$ ومنه

$$\overrightarrow{OC}\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{-c}{2}\right) \quad , \quad \overrightarrow{O\grave{D}}\left(\frac{-b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}} \quad , \quad \|\overrightarrow{O\grave{D}}\| = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}}$$

$$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{O\grave{D}} = \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{-b}{2}\right)+\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{-c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{O\grave{D}}}{\|\overrightarrow{OC}\|.\|\overrightarrow{O\grave{D}}\|} = \frac{\frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)}{\sqrt{\frac{b^2+a^2+c^2}{4}}.\sqrt{\frac{b^2+a^2+c^2}{4}}} = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

عندما يصبح متوازي المستطيلات مكعب فإن $a=b=c$ ومنه :

$$\cos\alpha = \frac{a^2-a^2-a^2}{a^2+a^2+a^2} = \frac{-a^2}{3a^2} = \frac{-1}{3}$$

10) في الحالتين الآتيتين احسب بعد A عن المستوي P:

- $A(1,2,-3)$ ، $P: 2x - y + z + 1 = 0$

$$dist(A,P) = \frac{|2(1) - 1(2) + 1(-3) + 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

- $A(-1,1,1)$ و P هو المستوي المار بالنقاط : $B(0,1,0)$ ، $C(-1,1,0)$ ، $D(-1,-2,-3)$

طريقة أولى : نوجد معادلة المستوي (BCD):

لنثبت أولا ان B , C , D تشكل مستوي:

$\overrightarrow{BD}(-1,-3,-3)$, $\overrightarrow{BC}(-1,0,0)$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-3} = \frac{0}{-3}\right)$ فالشعاعين غير مرتبطين خطياً فالنقاط تعين مستوي.

نوجد معادلة المستوي المار من C,B,D:

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على (DBC) عندئذ:

$\overrightarrow{BC}.\vec{n} = 0$

$-a + 0 + 0 = 0 \implies \boxed{a = 0}$

$\overrightarrow{BD}.\vec{n} = 0$

$-a - 3b - 3c = 0 \implies -3b - 3c = 0$

$\implies \boxed{b = -c}$

نختار من النواظم على (DBC) الناظم الذي يكون فيه $b = 1$ فيكون: $\boxed{c = -1}$

$\implies (DBC): \ y - z + d = 0$

نعوض $B(0,1,0)$:

$1 - 0 + d = 0 \implies \boxed{d = -1}$

$\implies (DBC): y - z - 1 = 0$

$$dist(A,BCD) = \frac{|0(-1) + 1(1) - 1(1) - 1|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

طريقة ثانية : لنثبت اولاً ان B , C , D تشكل مستوي:

$\overrightarrow{BD}(-1,-3,-3)$, $\overrightarrow{BC}(-1,0,0)$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-3} = \frac{0}{-3}\right)$ فالشعاعين غير مرتبطين خطياً فالنقاط تعين مستوي.

نفرض $\grave{A}(\alpha,\beta,\gamma)$ المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD) بشرط $A \notin (BCD)$ ومنه :

$\overrightarrow{A\grave{A}}(\alpha+1, \beta-1, \gamma-1)$

بما أن $(\grave{A})$ عمودي على (BCD) فهو عمودي على (BC) و (BD).

$\overrightarrow{A\grave{A}}.\overrightarrow{BC} = 0$

$(\alpha+1)(-1) + (\beta-1)(0) + (\gamma-1)(0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$

$\overrightarrow{A\grave{A}}.\overrightarrow{BD} = 0$

$(\alpha+1)(-1) + (\beta-1)(-3) + (\gamma-1)(-3) = 0$

$-\alpha - 1 - 3\beta + 3 - 3\gamma + 3 = 0$

$\boxed{\gamma = 2 - \beta}$

وبما أن $(\grave{A})$ عمودي على (BCD) فإن $(A\grave{A})$ عمودي على $(B\grave{A})$

$\overrightarrow{B\grave{A}}(\alpha, \beta-1, \gamma)$: $\quad \overrightarrow{A\grave{A}}.\overrightarrow{B\grave{A}} = 0$

$(\alpha+1)(\alpha) + (\beta-1)(\beta-1) + (\gamma-1)(\gamma) = 0$

$(\beta-1)^2 + (2-\beta-1)(2-\beta) = 0$

$(\beta-1)^2 + (1-\beta)(2-\beta) = 0$

$(\beta-1)[\beta - 1 - 2 + \beta] = 0$

$(\beta-1)(2\beta-3) = 0$

إما $\beta = 1 \Leftarrow \gamma = 1 \Leftarrow \overrightarrow{A\grave{A}}(0,0,0)$ مرفوض

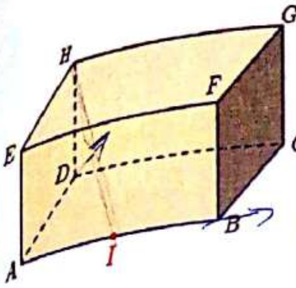
أو $\beta = \frac{3}{2} \Leftarrow \gamma = \frac{1}{2} \Leftarrow \overrightarrow{A\grave{A}}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

$$dist(A,BCD) = \left\|\overrightarrow{A\grave{A}}\right\| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

11) $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ ، $BC = GC = 1$ ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$

1) اعط معلماً متجانساً مبدؤه A ويمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات فيه ببساطة.

لناخذ معلماً متجانساً $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\vec{i} = \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ ، $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$



فتكون إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات هي:

$A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,1,0)$ $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(2,0,1)$

$\boxed{H(0,1,1)}$, $\boxed{G(2,1,1)}$, $I(1,0,0)$

2) اكتب معادلة للمستوي (IFH)

(IFH): $ax + by + cz + d = 0$: $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$

$I \in (IFH) \Rightarrow a + d = 0$ $\boxed{a = -d}$

$F \in (IFH) \Rightarrow 2a + c + d = 0$ $\boxed{c = d}$

$H \in (IFH) \Rightarrow b + c + d = 0$ $\boxed{b = -2d}$

ناخذ قيمة اختيارية $d = -1$ ومنه $a = 1$ ، $b = 2$ ، $c = -1$ ومنه:

(IFH): $\boxed{x + 2y - z - 1 = 0}$

3) احسب بعد G عن المستوي (IFH)

$$dist(G,(IFH)) = \frac{|1(2) + 2(1) - 1(1) - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

4) احسب بعد G عن المستقيم (IH) اينتمي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH) ؛

طريقة اولى: بفرض M نقطة من المستقيم (IH) وبالتالي فإن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,1-t)$و(H,t) حيث: $\boxed{\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IH} : \quad t \in R}$

$G(2,1,1)$

$(I,1-t)$ $(M,1)$ (H,t)

$I(1,0,0)$ $H(0,1,1)$

إذاً إحداثيات M هي:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{(1-t)(1)+(t)(0)}{t+1-t} = 1-t \\ y_M &= \frac{(1-t)(0)+(t)(1)}{t+1-t} = t \\ z_M &= \frac{(1-t)(0)+(t)(1)}{t+1-t} = t \end{aligned}\right\} M(1-t,t,t)$$

ولدينا $G(2,1,1)$ ، $\overrightarrow{GM}(-1-t, t-1, t-1)$

بما أن $\overrightarrow{GM}$ عمودي على $\overrightarrow{IH}$ فإن $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{IH} = 0$

لدينا $\overrightarrow{IH}(-1,1,1)$ و منه :

$(-1-t)(-1) + (t-1)(1) + (t-1)(1) = 0$

$1 + t + t - 1 + t - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$

$M\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GM}\left(\frac{-4}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

$$\|\overrightarrow{GM}\| = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

طريقة ثانية: بفرض النقطة $\acute{G}$ المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (IH) ومنه:

$$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{I\acute{G}}$$

لدينا $\overrightarrow{IG}(1,1,1)$ $\overrightarrow{IH}(-1,1,1)$

$(-1)(1) + (1)(1) + (1)(1) = \|\overrightarrow{IH}\|.\|\overrightarrow{I\acute{G}}\| \cos 0$

$1 = \sqrt{3}.\|\overrightarrow{I\acute{G}}\|(1)$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{I\acute{G}}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وحسب نظرية فيثاغورث في المثلث القائم $I\acute{G}G$:

$$\|\overrightarrow{G\acute{G}}\|^2 = \|\overrightarrow{IG}\|^2 - \|\overrightarrow{I\acute{G}}\|^2$$

$$= (\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{G\acute{G}}\| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

إذاً $\|\overrightarrow{G\acute{G}}\| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

12) في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ والمستويين Q,P

$P:\ x-y+z=o \quad , \quad Q:\ 3x+z-1=o$

احسب بعد A عن المستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويين Q,P

نلاحظ أولاً أن النقطة A لا تنتمي إلى كلاً من المستويين Q,P لأنها لا تحقق معادلتيهما.

نفرض أن $\grave{A}(\alpha,\beta,\gamma)$ هي المسقط القائم للنقطة A على d الذي هو الفصل المشترك للمستويين Q,P

ومنه $\grave{A}$ تنتمي إلى Q,P :

بالتعويض $\grave{A}(\alpha,\beta,\gamma)$ في P,Q نجد:

② $3\alpha+\gamma-1=0$

① $\boxed{\alpha-\beta+\gamma=0}$

لنوجد $\vec{u}=\overrightarrow{BC}$ شعاع توجيه المستقيم d ولإيجاده نحتاج إلى نقطتين C,B ولإيجاد النقطتين نختار قيمتين اختياريتين:

B

$x=0$

نعوض في $Q\ ,\ P$

$-y+z=0$

$z-1=0$

$z=1 \qquad y=1$

$B(0,1,1)$

C

$x=1$

نعوض في $Q\ ,\ P$

$1-y+z=0$

$z+2=0$

$z=-2 \qquad y=-1$

$C(1,-1,-2)$

اصبح شعاع توجيه المستقيم d هو : $\vec{u}=\overrightarrow{BC}(1,-2,-3)$

وبما أن $A\grave{A}$ عمودي على d فإن:

$\overrightarrow{A\grave{A}}.\overrightarrow{BC}=0 \qquad : \overrightarrow{A\grave{A}}(\alpha-2,\beta-2,\gamma+1)$

$(\alpha-2)(1)+(\beta-2)(-2)+(\gamma+1)(-3)=0 \Rightarrow \boxed{\alpha-2\beta-3\gamma-1=0}$ ③

أصبح لدينا المعادلات الثلاث الآتية:

$\alpha-\beta+\gamma=0$ ①

$3\alpha+\gamma-1=0$ ②

$\alpha-2\beta-3\gamma-1=0$ ③

② − ① $\Rightarrow \quad 2\alpha+\beta-1=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta=1-2\alpha}$ I

من ② $\Rightarrow \quad \boxed{\gamma=1-3\alpha}$ II

نعوض I و II في ③ :

$\alpha-2(1-2\alpha)-3(1-3\alpha)-1=0$

$\alpha-2+4\alpha-3+9\alpha-1=0$

$14\alpha=6 \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

$\beta=1-2\left(\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{7}$

$\gamma=1-3\left(\frac{3}{7}\right)=\frac{-2}{7}$

$\grave{A}\left(\frac{3}{7},\frac{1}{7},\frac{-2}{7}\right) \Rightarrow A\grave{A}\left(-\frac{11}{7},-\frac{13}{7},\frac{5}{7}\right)$

$dist(A,d)=\left\|\overrightarrow{A\grave{A}}\right\|=\sqrt{\left(\frac{-11}{7}\right)^2+\left(\frac{-13}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{121+169+25}{49}}=\frac{\sqrt{315}}{7}=\frac{3\sqrt{35}}{7}$

13) نتامل في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,1,2)$ والمستويين:

$$P:\ x+y-2z-1=0 \qquad Q:\ x+y+z=0$$

1. اثبت ان المستويين P، Q متعامدان.

$$\overrightarrow{n_P}(1,1,-2) \quad , \quad \overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=(1)(1)+(1)(1)+(-2)(1)=0$$

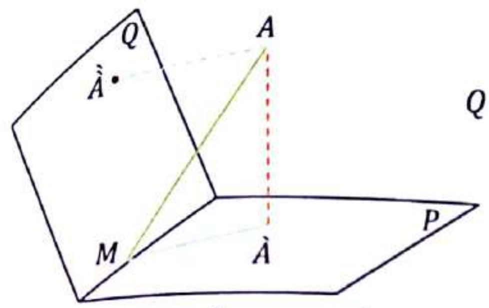
$rP(1,1,-2)$

الناظمين متعامدين فالمستويين P، Q متعامدين.

2. احسب بعد A عن كل من المستويين P، Q.

$$dist\ (A,P)=\frac{|1(2)+1(1)-2(2)-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$dist\ (A,Q)=\frac{|1(2)+1(1)+1(2)|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$



3. استنتج بعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين P، Q.

$\grave{A}$ المسقط القائم لـ A على المستوي P، $\grave{\grave{A}}$ المسقط القائم لـ A على المستوي Q

لاحظ: بما ان المستويان متعامدان فإن:

$$[A\grave{A}]=\frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{ولدينا} \quad [A\grave{\grave{A}}]=[M\grave{A}]=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

حسب فيثاغورث في المثلث القائم $A\grave{A}M$:

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2=\|\overrightarrow{A\grave{A}}\|^2+\|\overrightarrow{\grave{A}M}\|^2$$

$$=\frac{4}{6}+\frac{25}{3}=\frac{54}{6}=9 \Rightarrow \|\overrightarrow{AM}\|=3$$

---

14) في كل من الحالات الآتية، نعطى نقطتين A ، B والمعادلة الديكارتية لمستو P تيقن في كل حالة ان المستقيم (AB) ليس عمودياً على P ثم اعط معادلة للمستوي Q العمودي على P والمار بالنقطتين A ، B.

-1 $P:\ x+y+z=0$ ، $A(1,0,0)$ ، $B(0,1,1)$

- لإثبات عدم تعامد المستوي P مع المستقيم (AB) يكفي ان نبرهن ان $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{n_P}$ غير مرتبطين خطياً

$$\overrightarrow{n_P}(1,1,1) \quad , \quad \overrightarrow{AB}(-1,1,1)$$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\right)$ فالمستقيم (AB) ليس عمودياً على المستوي P.

إيجاد معادلة Q :

طريقة أولى: نفرض ان ناظم المستوي Q هو $\overrightarrow{n_Q}(,b,c)$ بشرط ان a,b,c ليست جميعها اصفاراً

- ناظم المستوي P هو $\overrightarrow{n_P}(1,1,1)$
- بما ان $P\perp Q$ فإن $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$

$$\boxed{a+b+c=0} \quad (1)$$

- بما ان A ، B نقطتان من Q فإن $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ حيث $\vec{A}(-1,1,1)$

$$\boxed{-a+b+c=0} \quad (2)$$

- اصبح لدينا معادلتين بثلاث مجاهيل a,b,c وبما انه يوجد عدد لا نهائي من اشعة النواظم على المستوي Q فيمكن اختيار قيمة لإحدى المركبات ولنضع $c=1$ ومنه:

$$\begin{array}{r} a+b+1=0 \\ \oplus\quad \underline{-a+b+1=0} \\ 2b+2=0 \end{array} \quad \Rightarrow b=-1 \ , \quad a=0$$

ومنه $\overrightarrow{n_Q}(0,-1,1)$ ومنه معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\overrightarrow{n_Q}$ ويمر بالنقطة $A(1,0,0)$ هي:

$$Q: -1(y)+1(z)=0$$

$$Q: \boxed{-y+z=0}$$

طريقة ثانية: لنفرض أن شكل معادلة المستوي Q : $ax+by+cz+d=0$

حيث $\vec{n}_Q(a,b,c)$ بشرط a,b,c ليست جميعها أصفاراً:

$$A\in Q \Rightarrow a+d=0 \quad ①$$
$$B\in Q \Rightarrow b+c+d=0 \quad ②$$

- من الفرض P، Q متعامدين فإن:

$$\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_Q}=0$$
$$a+b+c=0 \quad ③$$

أصبح لدينا ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل: من ① $d=-a$ نعوض في ② فنجد $b+c-a=0$

لدينا من ③

$$\begin{array}{r} b+c-a=0 \\ -\quad a+b+c=0 \\ \hline -2a=0 \end{array} \Rightarrow \boxed{a=0} \Rightarrow \boxed{d=0}$$

من ② $b+c+d=0$

$$b+c=0 \Rightarrow \boxed{b=-c}$$

أصبح شكل المعادلة Q: $by+cz=0$

$b\neq 0$: $by-bz=0$

نأخذ قيمة اختيارية $b=1$: $Q: \boxed{y-z=0}$

-2 $P: x+z=0$, $A(1,2,0)$ و $B(1,0,1)$

$$\overrightarrow{AB}(0,-2,1) \quad , \quad \overrightarrow{n_P}(1,0,1)$$

المركبات غير متناسبة فالمستقيم (AB) ليس عمودياً على المستوي P

إيجاد معادلة Q :

نفرض أن ناظم المستوي Q هو $\overrightarrow{n_Q}(\ ,b\ ,c)$

بشرط أن c,b,a ليست جميعها أصفاراً

- ناظم المستوي P هو $\overrightarrow{n_P}(1,0,1)$
- بما أن $P\perp Q$ فإن $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$

$$\boxed{a+c=0} \quad ①$$

- بما أن A , B نقطتان من Q فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_Q}=0$ حيث $\vec{A}(0,-2,1)$

$$\boxed{-2b+c=0} \quad ②$$

- أصبح لدينا معادلتين بثلاث مجاهيل a,b,c وبما أنه يوجد عدد لا نهائي من أشعة النواظم على المستوي Q فيمكن اختيار قيمة لإحدى المركبات ولنضع $c=2$ ومنه:

$$a+2=0 \Rightarrow a=-2$$
$$-2b+2=0 \Rightarrow b=1$$

ومنه $\overrightarrow{n_Q}(-2,1,2)$ ومنه معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\overrightarrow{n_Q}$ ويمر بالنقطة $A(1,2,0)$ هي:

$$Q: -2(x-1)+1(y-2)+2(z)=0$$

$$Q: \boxed{-2x+y+2z=0}$$

-3 $P: 2x+z-4=0$ $A(2,3,-1)$ و $B(1,1,1)$

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,2) \quad , \quad \overrightarrow{n_p}(2,0,1)$$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{2}{-1}\neq\frac{0}{-2}\neq\frac{1}{2}\right)$ فالمستقيم (AB) لا يعامد المستوي P

إيجاد معادلة المستوي Q :

نفرض ان ناظم المستوي Q هو $\vec{n_Q}(a,b,c)$

مشروط ان c,b,a ليست جميعها اصفاراً

- ناظم المستوي P هو $\vec{n_P}(2,0,1)$
- بما ان $P \perp Q$ فإن $\vec{n_P}.\vec{n_Q} = 0$

$$\boxed{2a + c = 0} \quad (1)$$

- بما ان B , A نقطتان من Q فإن $\vec{AB}.\vec{n_Q} = 0$ حيث $\vec{A}(-1,-2,2)$

$$\boxed{-a - 2b + 2c = 0} \quad (2)$$

- اصبح لدينا معادلتين بثلاث مجاهيل a,b,c وبما انه يوجد عدد لا نهائي من اشعة النواظم على المستوي Q فيمكن اختيار قيمة لإحدى المركبات ولنضع $c = 4$ ومنه:

$$2a + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2$$
$$2 - 2b + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 5$$

ومنه $\vec{n_Q}(-2,5,4)$ ومنه معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\vec{n_Q}$ ويمر بالنقطة $A(2,3,-1)$ هي:

$$Q:\ -2(x-2) + 5(y-3) + 4(z+1) = 0$$
$$Q:\ \boxed{-2x + 5y + 4z - 7 = 0}$$

---

15) نتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستويين Q , P:

$$Q:\ x + y + z + 1 = 0 \quad , \quad P:\ x - 2y + 3z - 5 = 0$$

1) علل كون المستويين P , Q متقاطعين. نرمز بالرمز d إلى فصلهما المشترك:

$$\vec{n_Q}(1,1,1) \quad , \quad \vec{n_P}(1,-2,3)$$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{1}\right)$ فالشعاعين غير مرتبطين خطياً فالمستويين P , Q متقاطعين.

2) اثبت ان d هو مجموعة النقاط $M\left(\frac{-5}{3}z + 1, \frac{2}{3}z - 2, z\right)$ عندما تتحول z في R.

d هو الفصل المشترك للمستويين P , Q

$$\begin{aligned} x + y + z + 1 &= 0 \\ (-)\quad x - 2y + 3z - 5 &= 0 \\ \hline 3y - 2z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = \frac{2}{3}z - 2}$$

نعوض في Q فنجد :

$$x + \frac{2}{3}z - 2 + z + 1 = 0$$

$$\boxed{x = -\frac{5}{3}z + 1}$$

اي ان المستقيم d هو مجموعة النقاط $M\left(\frac{-5}{3}z + 1, \frac{2}{3}z - 2, z\right)$ حيث $z \in R$.

3) أعط شعاعاً موجهاً للمستقيم d .

لإيجاد شعاعاً موجهاً للمستقيم d نحتاج الى نقطتين A ، B .

ولذلك نختار قيمتين لـ z ونعوض في P ، Q:

$$z = 0$$
$$x = -\frac{5}{3}(0) + 1 = 1$$
$$y = \frac{2}{3}(0) - 2 = -2$$
$$B(1,-2,0)$$

$$z = 3$$
$$x = -\frac{5}{3}(3) + 1 = -4$$
$$y = \frac{2}{3}(3) - 2 = 0$$
$$A(-4,0,3)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(5,-2,-3)$$

4) اكتب معادلة للمستوي R العمودي على كلاً من P ، Q ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$

R عمودي على كل من P ، Q فهو عمودي على فصلهما المشترك d

ومنه فإن $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ هو ناظم للمستوي R ومنه تكون معادلة المستوي R .

$$R: \quad 5x - 2y - 3z + d = 0$$
$$A \in R \Rightarrow \quad 5(2) - 2(5) - 3(-2) + d = 0$$
$$d = -6$$

معادلة المستوي R هي : $R: 5x - 2y - 3z - 6 = 0$

---

16) نتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$E(1,-1,1)$ ، $D(0,4,0)$ ، $C(4,0,0)$ ، $B(1,0,-1)$ ، $A(2,1,3)$

1. اثبت ان النقاط C ، D ، E ليست واقعة على استقامة واحدة .

$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$ و $\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{1}\right)$ فالشعاعين غير مرتبطين خطياً.

فالنقاط C ، D ، E ليست على استقامة واحدة .

2. اثبت ان المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE).

ليكون (AB) عمودي على المستوي (CDE) يجب أن يكون عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه.

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-1)(-4) + (-1)(4) + (-4)(0) = 0$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = (-1)(-3) + (-1)(-1) + (-4)(1) = 0$$

اصبح $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ فهو عمودي على المستوي (CDE).

---

17) نتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$D(3,3,-3)$ ، $C(1,-1,1)$ ، $B(4,-2,3)$ ، $A(2,4,3)$

1. اثبت ان النقاط A ، B ، C ليست واقعة على استقامة واحدة .

$\overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$ و $\overrightarrow{AB}(2,-6,0)$

المركبات غير متناسبة $\left(\frac{2}{-1} \neq \frac{-6}{-5} \neq \frac{0}{-2}\right)$ فالشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا فالنقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2. عين إحداثيات المسقط القائم $\acute{D}$ للنقطة D على المستوي (ABC) .

نوجد معادلة المستوي (ABC):

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على (ABC) بشرط ان c,b,a ليست جميعها أصفاراً فيكون:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0 \Rightarrow \boxed{2a-6b=0} \qquad (1)$$
$$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0 \Rightarrow \boxed{-a-5b-2c=0} \qquad (2)$$

نختار من النواظم على (ABC) الناظم الذي يكون فيه $\boxed{c=4}$ (للسهولة).

$$\begin{aligned}2a-6b&=0\\ -a-5b&=8 \quad \times 2\end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \begin{aligned}2a-6b&=0\\ -2a-10b&=16\end{aligned} \; +$$
$$-16b=16 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

نعوض في (1) فنجد: $\boxed{a=-3}$

$$(ABC): -3x-y+4z+d=0$$

نعوض $A(2,4,3)$ $\Rightarrow -6-4+12+d=0 \Rightarrow d=-2$

وبالتالي: $(ABC): -3x-y+4z-2=0$

فيكون $\overrightarrow{D\acute{D}}$ مرتبط خطياً مع $\vec{n}$ فيكون: $\overrightarrow{D\acute{D}}=k\vec{n}\ ;\ k\in R$

بفرض $\acute{D}(x,y,z)$ فيكون:

$$\begin{pmatrix}x-3\\y-3\\z+3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{aligned}x&=-3k+3\\ y&=-k+3\\ z&=4k-3\end{aligned}$$

بما ان $\acute{D}$ تنتمي إلى ABC فهي تحقق معادلته وبالتالي نعوض:

$$-3(-3k+3)-(-k+3)+4(4k-3)-2=0$$
$$9k-9+k-3+16k-12-2=0$$
$$26k-26=0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}x&=-3+3\\ y&=-1+3\\ z&=4-3\end{aligned} \Rightarrow \acute{D}(0,2,1)$$

---

18) نتامل في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $\Omega(2,-1,3)$ و $A(-1,0,1)$ نهدف إلى كتابة معادلة للكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A.

1- احسب ΩA

$$\Omega A=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$$

2- لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ احسب ΩM^2 بدلالة x, y, z

$$\Omega M^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$$

3 -اثبت ان « $M(x,y,z)$ نقطة من S » إذا وفقط إذا تحقق الشرط « $\Omega M^2=\Omega A^2$ » واستنتج معادلة الكرة المطلوبة.

الكرة: مركزها : Ω وتمر بالنقطة A فإن $\Omega A=R$.

و $M\in S$ فإن $\Omega M=R=\Omega A$ وهذا يكافئ الشرط $\Omega A^2=\Omega M^2$ ومنه معادلة الكرة

$$S:\quad (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$$

19) في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة للكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A

1. $\Omega(0,0,1)$, $A(1,1,1)$

$R = A\Omega = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{2})^2$

$S: \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$

2. $\Omega(0,5,-1)$ $A(1,-2,3)$

$R = \Omega A = \sqrt{1+49+16} = \sqrt{66}$

$S: \quad x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 66$

---

20) في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r

1. $\Omega(1,2,3)$, $r = 2$

$S: \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$

2. $\Omega(0,5,-1)$, $r = \sqrt{3}$

$S: \quad x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 3$

---

21) في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

.1 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0$

بالإتمام إلى مربع كامل :

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 2 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 + \underbrace{y^2 + 6y + 9}_{(y+3)^2} - 9 + z^2 - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 12 > 0$$

تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\,(1,-3,0)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{12}$

.2 $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2z + 26 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 + z^2 + 2z + 26 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 10x + 25}_{(x-5)^2} - 25 + y^2 + \underbrace{z^2 + 2z + 1}_{(z+1)^2} - 1 + 26 = 0$$

$$(x-5)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 0$$

تمثل نقطة وحيدة إحداثياتها $\Omega\,(5,0,-1)$

.3 $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0$

$$x^2 + x + y^2 + y + z^2 + z = 0$$

$$\underbrace{x^2 + x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + \underbrace{y^2 + y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + \underbrace{z^2 + z + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} > 0$$

تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

.4 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 5 = 0$

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4} - 4 + y^2 + z^2 + 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = -1 < 0$$

تمثل مجموعة خالية من النقاط.

---

22) في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطة $A(2, -2, 2)$

والمستوي $P: x + 2y + 3z = 5$ اكتب معادلة للكرة التي مركزها A ولمس المستوي P

الكرة تمس المستوي P فإن $r = dist(A, P)$

$$r = dist(A, P) = \frac{|1(2) + 2(-2) + 3(2) - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$S:\ (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{14}$$

---

23) في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2, 1, 2)$, $B(-2, 0, 2)$

1- أعط معادلة للمجموعة Σ المكونة من النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$$\overrightarrow{MA}\,(2-x, 1-y, 2-z) \quad , \quad \overrightarrow{MB}(-2-x, -y, 2-z)$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

$$(2-x)(-2-x) + (1-y)(-y) + (2-z)(2-z) = 0$$

$$-4 - 2x + 2x + x^2 - y + y^2 + (2-z)^2 = 0$$

$$x^2 + \underbrace{y^2 - y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + (z-2)^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{17}{4}$$

2- ما طبيعة المجموعة Σ

بما أن $\frac{17}{4} > 0$ فالمجموعة السابقة تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(0, \frac{1}{2}, 2\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$

---

24) نتأمل نقطتين مختلفتين A , B في الفراغ نضع $r = \frac{1}{2}AB$ ونعرف I منتصف $[AB]$.

1. اثبت انه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقق المساواة: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - r^2$

$$L_1 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{AI}) \qquad : \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$$

$$= MI^2 - IA^2 \qquad : IA^2 = r^2$$

$$= MI^2 - r^2 = L_2$$

2. اثبت ان مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MA}\ .\ \overrightarrow{MB} = 0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r وهي ايضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

من الفرض $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

من (1) $MI^2 - r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad MI^2 = r^2$

وهذا يعني ان مجموعة النقاط M التي تحقق العلاقة السابقة هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها MI ويكون $[AB]$ قطراً فيها.

وائل زعترية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتامل النقطتين $A(1,1,1)$, $B(0,-1,-1)$

1) اعط معادلة للمجموعة Σ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA = 2MB$

$$MA = 2MB$$
$$MA^2 = 4MB^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2 = 4[(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2]$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2 = 4[x^2+(1+y)^2+(1+z)^2]$$
$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2 = 4x^2+4+8y+4y^2+4+8z+4z^2$$
$$3x^2+3y^2+3z^2+2x+10y+10z+5 = 0$$
$$3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5 = 0 \qquad \div 3$$
$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2+\frac{10}{3}y+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3} = 0$$
$$\underbrace{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}_{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{1}{9}+\underbrace{y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}}_{\left(y+\frac{5}{3}\right)^2}-\frac{25}{9}+\underbrace{z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}}_{\left(z+\frac{5}{3}\right)^2}-\frac{25}{9}+\frac{5}{3}=0$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z+\frac{5}{3}\right)^2 = 4$$

2) ما طبيعة المجموعة ؟

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3}\right)$ ونصف قطرها $r = 2$

3) اعط معادلة للمجموعة P المكونة من النقاط $M(x,,y,z)$ التي تحقق $MA = MB$

$$MA = MB$$
$$MA^2 = MB^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2 = x^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2 = x^2+(1+y)^2+(1+z)^2$$
$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2 = x^2+1+2y+y^2+1+2z+z^2$$
$$-2x-4y-4z+1=0$$

4) ما طبيعة المجموعة P ؟

المجموعة P تمثل معادلة مستو وهو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

---

26) نتامل نقطتين مختلفتين A , B في الفراغ وعدداً موجباً غير معدوم k

نعرف Σ_k مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $AM = k.BM$

1) حالة $k = 1$

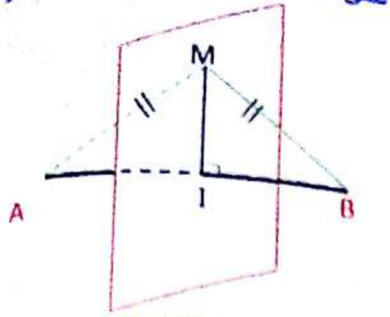
1.لتكن I منتصف AB اثبت ان:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) = \frac{MA^2-MB^2}{2}$$
$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$$

$\overrightarrow{MI} = \left(\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}{2}\right)$ لأن I منتصف AB

$$L_1 = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}$$
$$= \left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) = L_2$$
$$= \frac{MA^2-MB^2}{2} = L_3$$

2. استنتج ان Σ_1 هو المستوي P المار بمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ والعامودي على (AB) . (المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$).



بما ان $k = 1$ فإن $AM = BM$ ومنه فإن $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{MI}$ متعامدين ومنه :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MI} = 0$$

إذاً M تنتمي الى المستوي المار من منتصف $[AB]$ وعامودي على $\overrightarrow{AB}$

2) حالة $k \neq 1$:

1. لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و (B,k) ولتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(B,-k)$, اثبت ان :

$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{1-k^2}\cdot(\overrightarrow{MA} - k.\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB}) = \frac{MA^2 - k^2.MB^2}{1-k^2}$$

- I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و (B,k) و بالتالي أياً كانت النقطة M فإن :

$$\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MI} \quad \text{(مبرهنة الاختزال)}$$

$\div (1+k) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB}}{1+k} = \overrightarrow{MI}} \quad ①$$

J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-k)$ و بالتالي أياً كانت النقطة M فإن :

$$\overrightarrow{MA} - k\,.\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{MJ}$$

$\div (1-k) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\overrightarrow{MA} - k.\overrightarrow{MB}}{1-k} = \overrightarrow{MJ}} \quad ②$$

نضرب العلاقتين ① و ② :

$$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = \left[\frac{\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB}}{1+k}\right]\left[\frac{\overrightarrow{MA} - k.\overrightarrow{MB}}{1-k}\right] = \frac{MA^2 - k^2.MB^2}{1-k^2} = L_2$$

2. استنتج ان Σ_k هي الكرة S التي تقبل القطعة $[IJ]$ قطرا فيها .

لدينا $AM = k.BM,\ M \in \Sigma_k$ بالتعويض في (1) نجد : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

فإن M تنتمي إلى كرة قطرها $[IJ]$.

---

27) في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط

$A(4,0,-3)$, $B(2,2,2)$, $C(3,-3,-1)$, $D(0,0,-3)$

1) اعطِ معادلة للمستوي المحوري P_1 للقطعة المستقيمة $[AB]$

M_1 منتصف $[AB]$

$$M_1\left(3,1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB}(-2,2,5)$$

$$-2(x-3) + 2(y-1) + 5\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$P_1: \quad \boxed{-2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0}$$

2) اعط معادلة للمستوي المحوري P_2 للقطعة المستقيمة $[BC]$

$$\vec{n_2} = \overrightarrow{BC}(1,-5,-3)$$

M_2 منتصف $[BC]$

$$M_2\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$1\left(x-\frac{5}{2}\right)-5\left(y+\frac{1}{2}\right)-3\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$P_2: \quad \boxed{x-5y-3z-\frac{7}{2}=0}$$

3) اعط معادلة للمستوي المحوري P_3 للقطعة المستقيمة $[CD]$

$$\vec{n_3} = \overrightarrow{CD}(-3,3,-2)$$

M_3 منتصف $[CD]$

$$M_3\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-2\right)$$

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+3\left(y+\frac{3}{2}\right)-2(z+2)=0$$

$$P_3: \quad \boxed{-3x+3y-2z+5=0}$$

4) علل لماذا إذا تقاطعت المستويات P_3 , P_2 , P_1 في نقطة واحدة Ω كانت Ω مركزاً لكرة تمر بالنقاط D , C , B , A.

إذا تقاطعت المستويات المحورية السابقة في نقطة Ω فهي تحقق :

$$\boxed{\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D}$$

إذا Ω مركز الكرة المارة بالنقاط D , C , B , A.

5) بحل جملة من ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل اثبت ان المستويات P_3 , P_2 , P_1 تتقاطع في نقطة واحدة Ω.

$$P_1: \quad -2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0 \qquad \times -2 \quad \Rightarrow \quad 4x-4y-10z=13 \qquad (1)$$

$$P_2: \quad x-5y-3z-\frac{7}{2}=0 \qquad \times 2 \quad \Rightarrow \quad 2x-10y-6z=7 \qquad (2)$$

$$P_3: \quad -3x+3y-2z+5=0 \qquad \times -1 \quad \Rightarrow \quad 3x-3y+2z=5 \qquad (3)$$

من (1) نجد :

$$4x-4y=13+10z$$

$$\boxed{x-y=\frac{13+10z}{4}}$$

من (3) نجد :

$$3x-3y=5-2z$$

$$\boxed{x-y=\frac{5-2z}{3}}$$

وبالتالي:

$$\frac{13+10z}{4}=\frac{5-2z}{3}$$

$$4(5-2z)=3(13+10z)$$

$$20-8z=39+30z$$

$$38z = -19$$
$$z = -\frac{1}{2}$$

ومنه:
$$x - y = \frac{5 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}$$
$$x - y = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2 + y}$$

نعوض في (2):
$$2(2 + y) - 10y - 6\left(\frac{-1}{2}\right) = 7$$
$$2y + 4 - 10y + 3 = 7$$
$$-8y = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$x = 2 + 0 \Rightarrow x = 2$$

إذا النقطة $\Omega\left(2,0,\frac{-1}{2}\right)$ هي نقطة تقاطع المستويات P_1, P_2, P_3

6) احسب نصف قطر الكرة S المارة بالنقاط A , B , C , D

لدينا $\Omega\left(2,0,\frac{-1}{2}\right)$ ونختار مثلاً النقطة $D(0,0,-3)$

$$r = \Omega D$$
$$r = \sqrt{4 + 0 + \left(-3 + \frac{1}{2}\right)^2}$$
$$r = \sqrt{4 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2}$$
$$r = \sqrt{4 + \frac{25}{4}}$$
$$r = \sqrt{\frac{41}{4}}$$

7) اكتب معادلة للكرة S المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

أياً كانت $M(x,y,z)$ تنتمي للكرة فإن :

$$\Omega M = r$$
$$\Omega M^2 = r^2$$
$$S: \quad \boxed{(x-2)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}}$$

****

المستقيمات والمستويات في الفراغ

اولاً : مركز الأبعاد المتناسبة

① مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين :

1) مبرهنة الوجود :

بفرض A , B نقطتين وليكن α , β عددين يحققان $\alpha + \beta \neq 0$ عندئذٍ توجد نقطة وحيدة فقط G تحقق:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}}$$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β) .

2) علاقة الإنشاء: $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$

3) إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين A , B لهما نفس التثقيل فإن G منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

4) مبرهنة الاختزال: G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β) عندئذٍ أياً كانت M فإن :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}$$

5) إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-t)$, (B,t) عندئذٍ $\overrightarrow{AG} = t\,\overrightarrow{AB}$

****

تمرين ① : النقطتان A , B نقطتان مختلفتان عيّن في الحالات الآتية عددين α , β كي تكون النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β) .

$\boxed{1}$

$$2\overrightarrow{GB} - 3\underbrace{\overrightarrow{AB}} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{GB} - 3(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$$
$$2\underbrace{\overrightarrow{GB}} - 3\overrightarrow{AG} - 3\underbrace{\overrightarrow{GB}} = \vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\alpha = 3 \ , \ \beta = -1$$
$$(A,3) \ , \ (B,-1)$$

$\boxed{2}$

$$2\underbrace{\overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{GA} - 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) + \overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AG} + 2\,\underbrace{\overrightarrow{GB}} + \overrightarrow{GA} - 3\,\underbrace{\overrightarrow{GB}} = \vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\alpha = 1 \ , \ \beta = 1$$
$$(A,1) \ , \ (B,1)$$

تمرين ②: في الشكل الآتي التدريجات متساوية عبّر عن النقاط A , B , C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الآخرين .

A : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) , (C,γ) :

طريقة ① :

$$\overrightarrow{BA} = \frac{-3}{5}\underbrace{\overrightarrow{BC}}$$
$$5\overrightarrow{BA} = -3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$
$$\underline{-5\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BA}} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$-8\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$8\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$(B,8) \ , \ (C,-3)$$

طريقة ② :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{8}$$
$$8\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$$
$$8\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$(B,8) \ , \ (C,-3)$$

B : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) ، (C,γ) :

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$$
$$8\overrightarrow{AB}=3\,\underbrace{\overrightarrow{AC}}$$
$$-8\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\vec{0}$$
$$-8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$-5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$(A,5)$ ، $(C,3)$

طريقة ② :

$$\frac{BA}{BC}=\frac{3}{5}$$
$$5\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{BC}$$
$$5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$(A,5)$ ، $(C,3)$

عند وضع الأشعة ننتبه للإشارة

C : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) ، (B,β) :

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AC}=\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$3\overrightarrow{AC}=8\,\underbrace{\overrightarrow{AB}}$$
$$3\overrightarrow{AC}=8(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$$
$$\underbrace{-3\overrightarrow{AC}+8\overrightarrow{AC}}+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{AC}+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$-5\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{CA}-8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$(A,5)$ ، $(B,-8)$

طريقة ② :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{8}{5}$$
$$5\overrightarrow{CA}=8\overrightarrow{CB}$$
$$5\overrightarrow{CA}-8\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$(A,5)$ ، $(B,-8)$

تمرين ③: النقطتان A ، B نقطتان مختلفتان في الحالات الآتية عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t.\overrightarrow{AB}$

1) M : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-3)$ ، $(B,1)$:

طريقة ① : (حسب علاقة الإنشاء)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}.\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{-2}\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow t=\frac{-1}{2}$$

طريقة ② : (حسب مبرهنة الوجود)

$$-3\overrightarrow{MA}+\underbrace{\overrightarrow{MB}}=\vec{0}$$
$$\underbrace{-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}$$
$$2\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow t=\frac{-1}{2}$$

2) M : مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ ، $(B,5)$:

طريقة ① : (حسب علاقة الإنشاء)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}.\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow t=\frac{5}{6}$$

طريقة ② : (حسب مبرهنة الوجود)

$$\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$MA+5(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$$
$$\underline{\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MA}}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$6\overrightarrow{MA}=-5\overrightarrow{AB}$$
$$-6\overrightarrow{AM}=-5\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}\Rightarrow t=\frac{5}{6}$$

② مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط :

1) مبرهنة الوجود :

نتأمل ثلاث نقاط C , B , A وثلاثة أعداد حقيقية α , β , γ تحقق $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ عندئذٍ توجد نقطة وحيدة G تحقق:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ)

2) علاقة الإنشاء : $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}}$

من علاقة الإنشاء نستنتج ان الأشعة $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ مرتبطة خطياً, لأننا استطعنا كتابة العلاقة السابقة بالشكل :

$\overrightarrow{AG}=k\,.\overrightarrow{AB}+t\,.\overrightarrow{AC}$ (تسمى المعادلة السابقة معادلة المستوي المار من النقطة A والموجه بالشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$)

3) النقاط A و B و C و G تقع في مستو واحد .

لإثبات وقوع اربع نقاط في مستو واحد يكفي أن تكون إحدى هذه النقاط هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاث المتبقية.

4) إذا كانت $\alpha=\beta=\gamma$ فإن G هي مركز ثقل المثلث ABC

****

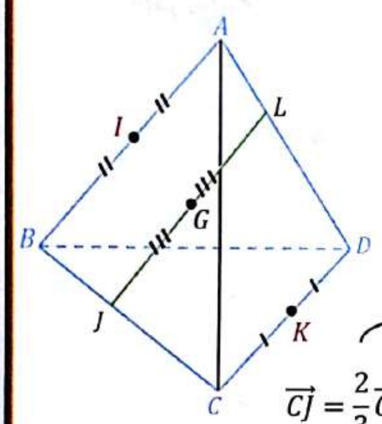
تمرين ①: $ABCD$ رباعي وجوه , I , K منتصفا الحرفين $[CD]$, $[AB]$

و J و L نقطتان معرفتان بالعلاقتين :

$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

و اخيراً G هي منتصف $[JL]$

اثبت أن النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة .



$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

بالمقارنة مع علاقة الإنشاء $\overrightarrow{AL}=\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\overrightarrow{AD}$

إذاً L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$, $(D,1)$

ومنه $(L,3)$

$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

بالمقارنة مع علاقة الإنشاء $\overrightarrow{CJ}=\frac{\beta}{\gamma+\beta}\overrightarrow{CB}$

إذاً J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$, $(B,2)$

ومنه $(J,3)$

بما أن G منتصف $[JL]$ فإن G مركز ابعاد متناسبة للنقطتين $(L,3)$ و $(J,3)$

و حسب الخاصة التجميعية G مركز ابعاد متناسبة للنقاط :

$(D,1)$, $(C,1)$, $(B,2)$, $(A,2)$

بما أن I منتصف $[AB]$ فإن I مركز ابعاد متناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,2)$.

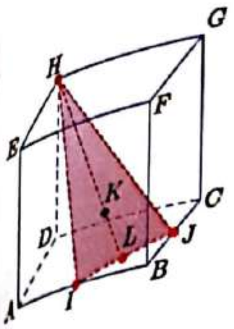
و بما أن K منتصف $[CD]$ فإن K مركز ابعاد متناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$.

حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,2)$, $(I,4)$

إذاً النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة .

تمرين ② : $ABCDEFGH$ مكعب , I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$ بالترتيب و K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

اثبت وقوع النقاط H,K,J,I في مستو واحد .



من الفرض لدينا I منتصف $[AB]$ $\Leftarrow$ I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,1)$

و J منتصف $[BC]$ $\Leftarrow$ J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,1)$ و $(C,1)$

و بما ان K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

اي K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $\overbrace{(B,1)و(B,1)}$ و $(C,1)$ و $(H,1)$

و حسب الخاصة التجميعية : K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,2)$ و $(J,2)$ و $(H,1)$

إذاً النقاط H,K,J,I تقع في مستوٍ واحد .

تدرب صفحة 80 :

① النقطتان A , B نقطتان مختلفتان , في الحالات الآتية عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$

1) Mمركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-2)$ و $(B,1)$

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{-1}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = -1.\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{t=-1}$$

طريقة ② :

$$-2\overrightarrow{MA} + \underbrace{\overrightarrow{MB}} = \vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{t=-1}$$

2) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,3)$

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{t=\frac{3}{5}}$$

طريقة ② :

$$2\overrightarrow{MA} + 3\underbrace{\overrightarrow{MB}} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} + 3[\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}] = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$5\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$-5\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB} \quad \div -5$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{t=\frac{3}{5}}$$

② اعط في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β)

1) $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

طريقة ① :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta=2\\ \alpha+\beta=7\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\beta=2\\ \alpha=5\end{array}$$

طريقة ② :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\underbrace{\overrightarrow{AB}}$$
$$7\overrightarrow{AM}=2[\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}]$$
$$7\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}$$
$$5\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$-5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=5\quad,\quad\beta=2$$

2) $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

طريقة ① :

$$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\left.\begin{array}{l}\beta=-1\\ \alpha+\beta=2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\beta=-1\\ \alpha=3\end{array}$$

طريقة ② :

$$2\overrightarrow{AM}+\underbrace{\overrightarrow{AB}}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=3\quad,\quad\beta=-1$$

3) $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

طريقة ① :

$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$$
$$-\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$$
$$\left.\begin{array}{l}\beta=-3\\ \alpha+\beta=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\beta=-3\\ \alpha=4\end{array}$$

طريقة ② :

$$\overrightarrow{MA}-3\underbrace{\overrightarrow{AB}}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}-3[\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}]=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=4\quad,\quad\beta=-3$$

---

③ في الشكل الآتي التدريجات متساوية . عبّر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين .

1)

A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(B,\beta)$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$$
$$5\,\overrightarrow{AB}=3\,\overrightarrow{AC}$$
$$5\,\overrightarrow{AB}-3\,\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

و بالتالي A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,-3),(B,5)$

B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\gamma),(A,\alpha)$

$$\frac{BA}{BC}=\frac{3}{2}$$
$$2\,\overrightarrow{BA}=-3\,\overrightarrow{BC}$$
$$2\,\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

عند وضع الأشعة ننتبه للإشارة

و بالتالي B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(C,3),(A,2)$

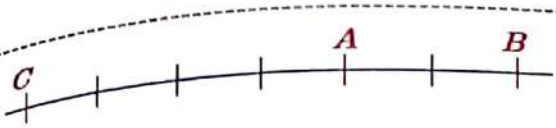
C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β)

$$\frac{CA}{CB}=\frac{5}{2}$$

$$2\,\overrightarrow{CA}=5\,\overrightarrow{CB}$$

$$2\,\overrightarrow{CA}-5\,\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

و بالتالي C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$, $(B,-5)$



2)

B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (C,γ)

$$\frac{BA}{BC}=\frac{2}{6}$$

$$6\,\overrightarrow{BA}=2\,\overrightarrow{BC}$$

$$6\,\overrightarrow{BA}-2\,\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

و بالتالي B مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,6)$, $(C,-2)$

A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) , (C,γ)

$$\frac{AB}{AC}=\frac{2}{4}$$

$$4\,\overrightarrow{AB}=-2\,\overrightarrow{AC}$$

$$4\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

و بالتالي A مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$, $(C,2)$

C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) , (B,β)

$$\frac{CB}{CA}=\frac{6}{4}$$

$$4\,\overrightarrow{CB}=6\,\overrightarrow{CA}$$

$$4\,\overrightarrow{CB}-6\,\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

و بالتالي C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-6)$, $(B,4)$

---

④ نتأمل مثلثاً ABC في كل حالة مما يأتي، جد عددين x و y بحيث $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$

1) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

طريقة ① :

من علاقة الإنشاء :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=1\,.\overrightarrow{AB}+1\,.\overrightarrow{AC}$$

$$x=1\ ,\ y=1$$

طريقة ② :

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C

$$-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$ (شال)

$$-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$-\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=1\,.\overrightarrow{AB}+1\,.\overrightarrow{AC}$$

$$x=1\ ,\ y=1$$

2) M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$

طريقة ① :

من علاقة الإنشاء :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\,.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\,.\overrightarrow{AC}$$

$$x=\frac{1}{6}\quad,\quad y=\frac{1}{3}$$

طريقة ② :

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\ (\text{شال})$$

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$$

$$3\underbrace{\overrightarrow{MA}}+\underbrace{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{AB}+2\underbrace{\overrightarrow{MA}}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$6\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$$

$$-6\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$x=\frac{1}{6}\quad,\quad y=\frac{1}{3}$$

---

⑤ نتأمل مثلثاً ABC , في كل حالة مما يلي جد الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) .

1) $\boxed{\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}}$

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right)$$

$$\underbrace{\overrightarrow{BM}}=\underbrace{\overrightarrow{BM}}+\overrightarrow{MA}-\underbrace{\overrightarrow{BM}}-\overrightarrow{MC}$$

$$-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$(A,1),(B,1),(C,-1)$$

2) $\boxed{\overrightarrow{AM}=2\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}$

$$\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)-\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AM}}=2\,\underbrace{\overrightarrow{AM}}+2\,\overrightarrow{MB}-\underbrace{\overrightarrow{AM}}-\overrightarrow{MC}$$

$$0\,\overrightarrow{AM}+2\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$0\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$(A,0),(B,2),(C,-1)$$

---

3) $\boxed{\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AM}}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AM}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$\left(A,\frac{1}{2}\right),(B,1),\left(C,\frac{1}{2}\right)$$

4) $\boxed{\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}$

$$\overrightarrow{CM}=3\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}\right)+2\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$$

$$\underbrace{\overrightarrow{CM}}=3\,\underbrace{\overrightarrow{CM}}+3\overrightarrow{MA}+2\,\underbrace{\overrightarrow{CM}}+2\overrightarrow{MB}$$

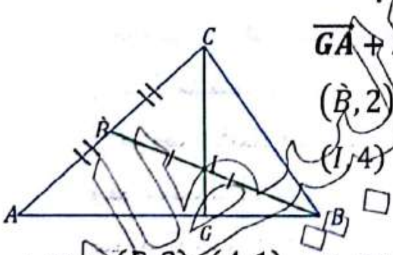
$$4\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

$$-4\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

$$(A,3),(B,2),(C,-4)$$

---

⑥ انطلاقاً من الشكل المجاور , جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ) و استنتج λ التي تحقق : $\overrightarrow{GA}+\lambda\overrightarrow{GB}=\vec{0}$



$\grave{B}$ منتصف $[AC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(C,1)$ وتكون $(\grave{B},2)$

I منتصف $[B\grave{B}]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\grave{B},2)$, $(B,2)$ وتكون $(I,4)$

و منه $(I,4)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,1)$

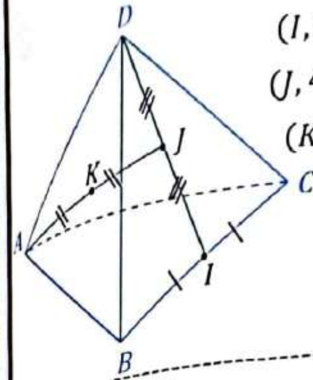
بما أن G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (AB) فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$, $(B,2)$ عندئذ :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{GA}+2\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}\\ \overrightarrow{GA}+\lambda\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}\end{array}\right\}\Longrightarrow\boxed{\lambda=2}$$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

⑦ انطلاقاً من الشكل المجاور ، جد الأمثال α و β و γ و δ

لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) .



لدينا I منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(C,1)$ و منه $(I,2)$

لدينا J منتصف $[DI]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$, $(I,2)$ و منه $(J,4)$

لدينا K منتصف $[AJ]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,4)$, $(J,4)$ و منه $(K,8)$

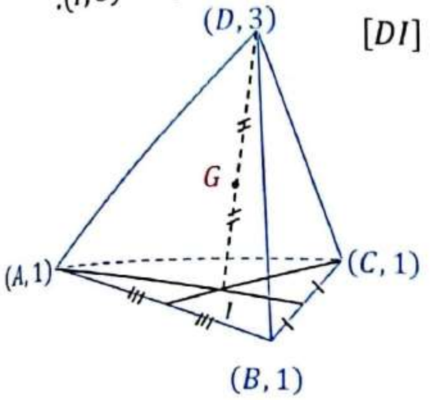
عندئذ حسب الخاصة التجميعية يكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$(D,2),(C,1),(B,1),(A,4).$

ABCD⑧ رباعي وجوه، استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

1) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,3),(C,1),(B,1),(A,1)$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1),(C,1)$ وهو مركز ثقل المثلث ABC ومنه $(I,3)$.



- لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3),(D,3)$ وهو منتصف $[DI]$

- وليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

عندئذ حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$(D,3),(C,1),(B,1),(A,1)$

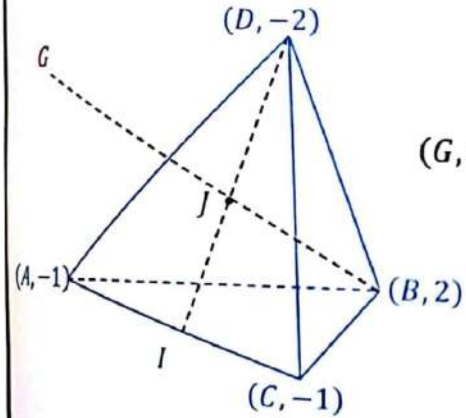
2) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,-2),(C,-1),(B,2),(A,-1)$

- لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-1),(C,-1)$

و هي منتصف $[AC]$ ويكون $(I,-2)$

- و لتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,-2),(I,-2)$

وهو منتصف $[DI]$ ويكون $(J,-4)$

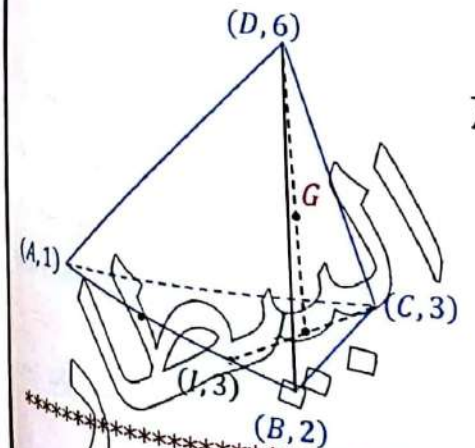


- و لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2),(J,-4)$ ومنه $(G,-2)$

- حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

D,C,B,A ويحقق:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{-4}{-2}\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BJ}$$



3) G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,6),(C,3),(B,2),(A,1)$

- I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(B,2)$ ويحقق $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

- J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3),(C,3)$

ومنه J منتصف $[IC]$ ويكون $(J,6)$

- G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,6),(D,6)$

وهو منتصف $[DJ]$ ويكون $(G,12)$

عندئذ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط D,C,B,A منتصف $[DJ]$

***

ثانياً : التمثيلات الوسيطية

التمثيل الوسيطي لمستقيم :

بفرض d مستقيم معرف بنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ و بشعاع موجّه $\vec{u}(a,b,c)$ ، تنتمي النقطة $M(x,y,z)$ إلى d

إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$$\overrightarrow{AM} = t\,.\vec{u} \qquad ;t \in R$$

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = t\,.\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{bmatrix} \qquad ;t \in R$$

أي أن : $z - z_0 = ct \quad , \quad y - y_0 = bt \quad , \quad x - x_0 = at$

$$\Rightarrow \; d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \qquad ;t \in R$$

تسمى المعادلات السابقة المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار بالنقطة A و الموجه بالشعاع $\vec{u}$.

تمرين ①: أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة $A(2,-1,3)$ ويقبل شعاعاً موجّهاً $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

الحل : d يمر بالنقطة $A(2,-1,3)$ و يقبل شعاع موجّه $\vec{u}(2,-3,1)$

$$d: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -3t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad ;t \in R$$

تمرين ② : أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطتين $A(2,1,1)$ ، $B(-1,1,2)$.

الحل : d يمر بالنقطتين B, A فهو يقبل شعاع موجّه $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-3,0,1)$ و نختار النقطة A عندئذٍ :

$$d: \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \qquad ;t \in R$$

تمرين ③: أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة $A(-1,2,1)$.

و يوازي المستقيم $\;:t \in R \quad \grave{d}: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 1 \\ z = -2t \end{cases}$.

الحل : $d \backslash\backslash \grave{d}$ عندئذٍ : $\vec{u} = \vec{u}'(1,1,-2)$ و يمر بالنقطة A عندئذٍ :

$$d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases} \qquad ;t \in R$$

****

التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة و لنصف مستقيم :

بفرض $A(x_0,y_0,z_0)$ ، $B(x_1,y_1,z_1)$ نقطتين من الفراغ و لنضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(a,b,c)$:

- عندئذ القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق :

$$[AB]:\begin{cases}x=at+x_0\\ y=bt+y_0\\ z=ct+z_0\end{cases}\quad : t\in[0,1]$$

- نصف المستقيم $[AB)$ الذي مبدؤه A و يمر بالنقطة B هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق :

$$[AB):\begin{cases}x=at+x_0\\ y=bt+y_0\\ z=ct+z_0\end{cases}\quad : t\in[0,+\infty[$$

تمرين : نتامل النقطتين $A(2,1,0)$ ، $B(3,2,-1)$ **اعط تمثيلاً وسيطياً لكل من :**

1) **القطعة المستقيمة** $[AB]$.

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ و يمر من A عندئذ :

$$[AB]:\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\\ z=-t\end{cases}\quad : t\in[0,1]$$

2) **نصف المستقيم** $[AB)$.

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ و يمر من A عندئذ :

$$[AB):\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\\ z=-t\end{cases}\quad : t\in[0,+\infty[$$

3) **نصف المستقيم** $[BA)$:

$\vec{u}'=\overrightarrow{BA}(-1,-1,1)$ و يمر من A :

$$[BA):\begin{cases}x=-t+2\\ y=-t+1\\ z=t\end{cases}\quad : t\in[0,+\infty[$$

****

أوضاع مستقيمين في الفراغ

- **متوازيين**
- **متقاطعين**
- **متخالفين**

المستقيمان المتوازيان: نوجد متجه توجيه المستقيم الأول والثاني $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ ويجب أن يكونا مرتبطين خطياً ولا يوجد نقاط مشتركة بين المستقيمين .

المستقيمان المتقاطعان: نثبت عدم الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}$ ثم نكتب L_2,L_1 بالشكل الوسيطي ونحصل على ثلاث معادلات بمجهولين S,t نحل المعادلتين 1و2 ونعوض الحل في 3 ويجب أن يحقق المعادلة 3

المستقيمان المتخالفان: نثبت عدم الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}$ ثم نكتب L_2,L_1 بالشكل الوسيطي ونحصل على ثلاث معادلات بمجهولين S,t نحل المعادلتين 1و2 ونعوض الحل في 3 وإذا لم تحقق 3 فالمستقيمين متخالفين.

تدرب صفحة 84 :

نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① اعط معادلة وسيطية للمستقيم d :

1) المستقيم d يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ و موجه بالشعاع $\vec{u}(0,1,-1)$.

$$d:\begin{cases}x=-1\\y=t+2\\z=-t\end{cases}\quad :t\in R$$

2) $d=(AB)$ حيث : $A(2,1,-1)$, $B(3,-1,1)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,-2,2)$ و يمر من A :

$$d:\begin{cases}x=t+2\\y=-2t+1\\z=2t-1\end{cases}\quad :t\in R$$

---

② نتامل النقطتين $A(-2,1,0)$, $B(2,3,1)$ اعط تمثيلاً وسيطياً لكل من :

1) المستقيم (AB): $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ و يمر من A :

$$(AB):\begin{cases}x=4t-2\\y=2t+1\\z=t\end{cases}\quad :t\in R$$

2) القطعة المستقيمة $[AB]$: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ و يمر من A :

$$[AB]:\begin{cases}x=4t-2\\y=2t+1\\z=t\end{cases}\quad :t\in[0,1]$$

3) نصف المستقيم $[AB)$: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(4,2,1)$ و يمر من A :

$$[AB):\begin{cases}x=4t-2\\y=2t+1\\z=t\end{cases}\quad :t\in[0,+\infty[$$

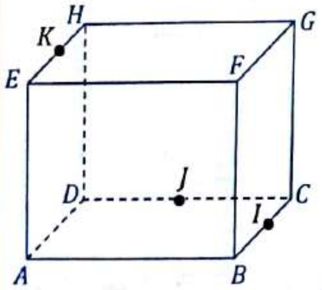
4) نصف المستقيم $[BA)$: $\vec{u}'=\overrightarrow{BA}(-4,-2,-1)$ و يمر من A :

$$[BA):\begin{cases}x=-4t-2\\y=-2t+1\\z=-t\end{cases}\quad :t\in[0,+\infty[$$

---

③ $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه (1) فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[EH]$

نتامل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) اعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ) .

لنوجد إحداثيات النقاط F,J,I,K :

$$F(1,0,1)\ ,J\left(\frac{1}{2},1,0\right)\ ,I\left(1,\frac{1}{2},0\right)\ ,K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$$

(FJ)

$\vec{u}'=\overrightarrow{FJ}\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)$

$$(FJ):\begin{cases}x=-\frac{1}{2}s+1\\y=s\\z=-s+1\end{cases}\quad :s\in R$$

(IK)

$\vec{u}=\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$

$$(IK):\begin{cases}x=-t\\y=\frac{1}{2}\\z=t+1\end{cases}\quad :t\in R$$

2) ايتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ؟ هل تقع النقاط I و J و K و F في مستو واحد ؟

$\begin{cases}\overrightarrow{IK}(-1,0,1)\\ \overrightarrow{FJ}\left(-\frac{1}{2},1,-1\right)\end{cases}$ غير مرتبطين خطياً فإن المستقيمين غير متوازيين .

بالحل المشترك لجملة المعادلتين نجد ان :

$$-\frac{1}{2}s+1=-t \qquad ①$$

$$s=\frac{1}{2} \qquad ②$$

$$-s+1=t+1 \qquad ③$$

بالحل المشترك للمعادلتين ② و ③ نجد ان $s=\frac{1}{2}$, $t=\frac{-1}{2}$, نعوض هذا الحل في ① فنجد :

$$\left.\begin{aligned}L_1&=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{3}{4}\\ L_2&=-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow L_1\neq L_2$$

فالمستقيمين متخالفين .

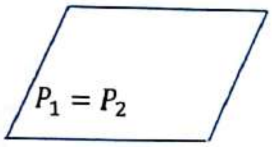
و بالتالي النقاط الأربعة I و K و J و F لا يمكن أن تقع في مستو واحد .

****

أوضاع مستويين

$$S:\begin{cases}P_1 \ :a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & :(1)\\ P_2 \ :a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & :(2)\end{cases}$$

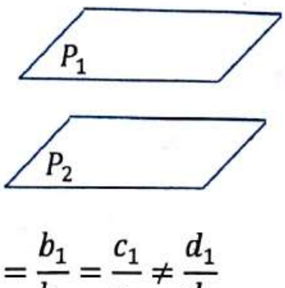
المستويان منطبقان



$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$

حلول الجملة S كل ثلاثية (x,y,z) تكون حلاً للمعادلة (1) أو (2)

المستويان متوازيان ومختلفان



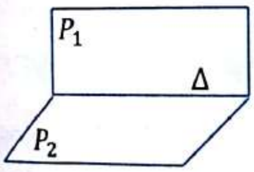
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$

أو

$\vec{n}_2$, $\vec{n}_1$ مرتبطان خطياً

ليس للجملة S حلول

المستويان متقاطعان



$\vec{n}_2$, $\vec{n}_1$ غير مرتبطين خطياً

حلول الجملة (S) هي نقاط Δ وهو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ حيث (x,y,z) هي حلول (S)

****

تمرين : تتامل المستويين :

$$P_1: 2x - y - z + 2 = 0$$

$$P_2: x + 2y - z + 1 = 0$$

تيقن ان هذين المستويين متقاطعان ثم جد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d

الحل : $\overrightarrow{n_1}(2,-1,-1)$ و $\overrightarrow{n_2}(1,2,-1)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويان متقاطعان

$$\begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z = -2 + y & :① \\ \boxed{-} \\ x - z = -1 - 2y & :② \end{cases}$$

$$\boxed{x = -1 + 3y}$$

نعوض في ②

$$-1 + 3y - z = -1 - 2y$$

$$\boxed{z = 5y}$$

بفرض $y = t$ و بذلك نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة الفصل المشترك d :

$$d: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} \quad : t \in R$$

****

أوضاع مستقيم و مستو

$$P: ax + by + cz + d = 0$$

و

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي d في معادلة المستوي P ونميز :

- المعادلة مستحيلة الحل فإن: $\boxed{P \backslash\backslash d}$ ، $n_P \perp u_d$
- المعادلة محققة من أجل أي قيمة لـ t $(0 = 0)$: $\boxed{d \text{ محتوى في } P}$
- المعادلة محققة من أجل قيمة واحدة لـ t فإن: $\boxed{d \text{ قاطع لـ } P}$

****

تدرب صفحة 87 :

نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

① في الحالات الآتية تحقق من تقاطع P_1 , P_2 و أعط تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك .

1) $P_1: x + y = 2$, $P_2: x + z = 1$

$\overrightarrow{n_1}(1,1,0)$
$\overrightarrow{n_2}(1,0,1)$ الناظمين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين .

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ z = 1 - x \end{cases}$$

باختيار $x = t$ نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة الفصل المشترك d :

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad : t \in R$$

2) $P_1: -x+y+z=3$ ، $P_2: 2x-y+2z=1$

$\vec{n_1}(-1,1,1)$
$\vec{n_2}(2,-1,2)$ الناظمين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين .

$$\begin{cases} -x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=3-z & ① \\ \boxed{+} \\ 2x-y=1-2z & ② \end{cases}$$

$$\boxed{x=4-3z}$$

نعوض في ① نجد :

$$-4+3z+y=3-z$$

$$\boxed{y=7-4z}$$

باختيار $z=t$ نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة الفصل المشترك :

$$d: \begin{cases} x=-3t+4 \\ y=-4z+7 \\ z=t \end{cases} \quad : t \in R$$

---

② في الحالات الآتية اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' و بيّن إذا كان $d \backslash\backslash d'$ او كان d منطبقاً على d' .

1) $: t \in R$ $\quad d: \begin{cases} \boldsymbol{x=t} \\ \boldsymbol{y=-t} \\ \boldsymbol{z=2t-1} \end{cases}$ ، $\quad d': \begin{cases} \boldsymbol{3x-y-2z=1} \\ \boldsymbol{x-y-z=0} \end{cases}$

$\vec{n_1}(3,-1,-2)$
$\vec{n_2}(1,-1,-1)$ الناظمين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك d' .

$$\begin{cases} 3x-y-2z=1 & ① \\ x-y-z=0 & ② \end{cases} \xRightarrow{\text{بالطرح}} 2x-z=1 \Rightarrow \boxed{z=2x-1}$$

نعوض في ② :

$$x-y-2x+1=0$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-x+1}$$

باختيار $x=s$ نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة الفصل المشترك d' :

$$d': \begin{cases} x=s \\ y=-s+1 \\ z=2s-1 \end{cases} \quad : s \in R$$

أصبح لدينا : $\vec{u}(1,-1,2)$
$\vec{u'}(1,-1,2)$ شعاعا توجيه المستقيمان مرتبطان خطياً عندئذٍ : $d \backslash\backslash d'$

لنبحث فيما إذا كان d , d' منطبقان و ذلك بحل جملة معادلات d مع معادلات d' حلاً مشتركاً :

$$\begin{cases} s=t & ① \\ -s+1=-t & ② \\ 2s-1=2t-1 & ③ \end{cases}$$

نعوض ① في ② : $-s+1=-s$

$1=0$ مستحيلة $\Leftarrow$ d,d' متوازيان و غير منطبقان

---

2) $d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = t + 1 \end{cases} : t \in R$ و $d: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$

$\vec{n_1}(1,1,-2)$
$\vec{n_2}(1,-1,-2)$ الناظمين غير مرتبطين خطياً فالمستويين متقاطعين بفصل مشترك d' :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 + 2z & ① \\ \boxed{+} \\ x - y = 5 + 2z & ② \end{cases}$$

$$2x = 8 + 4z$$

$$\boxed{x = 4 + 2z}$$

نعوض في ①

$$4 + 2z + y = 3 + 2z$$

$$\boxed{y = -1}$$

باختيار $z = s$ نحصل على التمثيل الوسيطي لمعادلة المستقيم d' :

$$d': \begin{cases} x = 2s + 4 \\ y = -1 \\ z = s \end{cases} : s \in R$$

اصبح لدينا : $\vec{u}(2,0,1)$ ، $\vec{v}'(2,0,1)$ شعاعا توجيه المستقيمان مرتبطان خطياً فهما متوازيان $d \backslash\backslash d'$

لنبحث فيما إذا كان d , d' منطبقان :

$$\begin{cases} 2s + 4 = 2t - 1 & ① \\ -1 = 2 & ② \\ s = t + 1 & ③ \end{cases}$$

نجد في المعادلة ② تناقض , إذاً d و d' ليسا منطبقان , إذاً : $d \backslash\backslash d'$.

---

③ في الحالات الآتية اثبت تقاطع d مع المستوي P وعيّن إحداثيات نقطة التقاطع .

1) $d = (AB)$ حيث : $A(-1,2,3)$, $B(1,2,-1)$, $P: x + y + z = 1$

لنوجد أولاً معادلة d :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(2,0,-4)$ و نختار A :

$$d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases} : t \in R$$

$\vec{n}_P(1,1,1)$, $\vec{u}_d(2,0,-4)$

$\vec{n} . \vec{u} = 2 + 0 - 4 = -2 \neq 0$

و هذا يثبت ان $d = (AB)$ و P متقاطعان .

نعوض معادلات d في P :

$$2t - 1 + 2 - 4t + 3 = 1 \quad \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 2 \\ y = 2 \\ z = -4\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

نقطة التقاطع
$I(2,2,-3)$

2) d يمر بالنقطة $A(2,-1,0)$ و يوجهه الشعاع $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ و $P:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{6}=1$

لنوجد اولاً المعادلة الوسيطية لـ d : للسهولة نضرب معادلة P بـ 6 :

$$d:\begin{cases}x=t+2\\y=-2t-1\\z=0\end{cases} \quad , \quad 3x+2y-z=6$$

$$\vec{n}_P(3,2,-1) \;,\; \vec{u}_d(1,-2,0)$$

$$\vec{n}.\vec{u}=3-4+0=-1\neq 0$$

و هذا يثبت ان d و P متقاطعان .

نعوض معادلات d في P :

$$3(t+2)+2(-2t-1)-0=6$$

$$3t+6-4t-2=6 \Rightarrow \boxed{t=-2}$$

$$\begin{cases}x=-2+2=0\\y=4-1=3\\z=0\end{cases} \Rightarrow$$ نقطة التقاطع $I(0,3,0)$

---

④ في الحالات الآتية , ادرس تقاطع المستقيم d و المستوي P .

1) $t\in R$: $d:\begin{cases}x=2t-1\\y=t\\z=1-3t\end{cases}$ و $P: x-y+z=1$

$$\vec{n}_P(1,-1,1) \;,\; \vec{u}_d(2,1,-3)$$

$$\vec{n}.\vec{u}=2-1-3=-2\neq 0$$

و هذا يثبت ان d و P متقاطعان .

نعوض معادلات d في P :

$$2t-1-t+1-3t=1 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}x=2\left(\frac{-1}{2}\right)-1=-2\\ y=-\frac{1}{2}\\ z=1-3\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow$$ نقطة تقاطع d مع P $I\left(-2,-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

---

2) $d:\begin{cases}x=s+1\\y=2s+1\\z=8s-3\end{cases}$, $P: 2x+3y-z=0$

$$\vec{n}_P(2,3,-1) \;,\; \vec{u}_d(1,2,8)$$

$$\vec{n}.\vec{u}=2+6-8=0$$

إما أن يكون المستقيم يوازي المستوي او محتوى فيه. وبتعويض المعادلات الوسيطية لـ d في P نجد :

$$2s+2+6s+3-8s+3=0$$

$8=0$ مستحيل

اي ان $d\parallel P$ ولا يوجد نقاط مشتركة بينهما .

****

اوضاع ثلاث مستويات

متوازية

- النواظم مرتبطة خطياً مثنى مثنى
- جملة المعادلات الثلاثة مستحيلة الحل (لا توجد نقاط مشتركة)

حالة خاصة: (المستويات منطبقة)

- النواظم مرتبطة خطياً مثنى مثنى.
- لجملة المعادلات عدد غير منته من الحلول.

متقاطعة

بنقطة وحيدة

- النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى
- يوجد للجملة حل وحيد $I(x,y,z)$

بفصل مشترك (مستقيم)

- النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى
- يوجد لجملة المعادلات عدد غير منته من الحلول.
- نوجد مجهولين بدلالة المجهول الثالث ونكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم الذي هو الفصل المشترك.

****

ملاحظة: في حالة ثلاثة مستويات اثنان منها متوازيان تكون الجملة مستحيلة الحل اي لا يوجد نقاط مشتركة بين المستويات الثلاثة معاً.

تمرين: ادرس تقاطع المستويات:

$$\begin{cases} p_1: \quad x+y-2z=-1 \\ p_2: \quad 3x+y-z=-1 \\ p_3: -2x-2y+4z=1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{n_1}(1,1,-2) \quad , \quad \overrightarrow{n_2}(3,1,-1) \quad , \quad \overrightarrow{n_3}(-2,-2,4)$$

نلاحظ أن: $\overrightarrow{n_3}=-2\overrightarrow{n_1}$ مرتبطان خطياً اي p_1 و p_3 متوازيان.

ومنه لا يوجد نقاط مشتركة بين المستويات الثلاثة وليس للجملة السابقة حلول.

****

تدريب صفحة 90 :

نعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في كل من الحالات الآتية نعطى معادلات ثلاثة مستويات، حل الجملة الخطية الموافقة وبين إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط أو في مستقيم مشترك أو لا تشترك بأي نقطة:

$$\boxed{1} \quad \begin{cases} p_1: \quad 5x+y+z=-5 \\ p_2: \quad 2x+13y-7z=-1 \\ p_3: \quad x-y+z=1 \end{cases}$$

$\overrightarrow{n_1}(5,1,1) \quad , \quad \overrightarrow{n_2}(2,13,-7) \quad , \quad \overrightarrow{n_3}(1,-1,1)$ وهي غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى.

نحل جملة المعادلات حلاً مشتركاً (نستخدم طريقة غاوس)

1. نثبت المعادلة الأولى ونجعل أمثال x في المعادلتين الثانية والثالثة معاكساً لأمثال x في المعادلة الأولى وذلك بضرب كل منهما بعدد :

$$\begin{cases} 5x+y+z=-5 & :L_1 \\ -5x-\frac{65}{2}y+\frac{35}{2}z=\frac{5}{2} & :\frac{-5}{2}L_2 \\ -5x+5y-5z=-5 & :-5L_3 \end{cases}$$

2. نجمع كل من المعادلة الأولى مع الثانية والمعادلة الأولى مع الثالثة فنلاحظ اختفاء x في المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\begin{cases} 5x + y + z = -5 & : L_1 \\ -\frac{63}{2}y + \frac{37}{2}z = \frac{-5}{2} & : \grave{L}_2 = L_1 + \frac{-5}{2}L_2 \\ 6y - 4z = -10 & : \grave{L}_3 = L_1 - 5L_3 \end{cases}$$

3. نثبّت المعادلة الثانية و نجعل امثال y في الثالثة معاكساً لأمثال y في الثانية :

$$\begin{cases} 5x + y + z = -5 & : L_1 \\ -63y + 37z = -5 & : 2\grave{L}_2 \\ 63y - 42z = -105 & : \frac{21}{2}\grave{L}_3 \end{cases}$$

4. نجمع المعادلتين الثانية والثالثة فنلاحظ اختفاء امثال y في الثالثة :

$$\begin{cases} 5x + y + z = -5 & : L_1 \\ -63y + 37z = -5 & : \grave{\grave{L}}_2 \\ -5z = -110 & : \grave{\grave{L}}_3 = 2\grave{L}_2 + \frac{21}{2}\grave{L}_3 \end{cases}$$

من المعادلة $\grave{\grave{L}}_3$ نجد: $\boxed{z = 22}$

نعوض في $\grave{\grave{L}}_2$: $-63y + 37(22) = -5$

$-63y + 814 = -5 \Rightarrow \boxed{y = 13}$

نعوض في L_1 : $5x + 13 + 22 = -5 \Rightarrow \boxed{x = -8}$

وبالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة واحدة $I(-8,13,22)$

$\boxed{2}$
$$\begin{cases} p_1: & x - 2y - 3z = 3 \\ p_2: & 2x - y - 4z = 7 \\ p_3: & 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$$

$\overrightarrow{n_1}(1,-2,-3)$, $\overrightarrow{n_2}(2,-1,-4)$, $\overrightarrow{n_3}(3,-3,-5)$ غير مرتبطة خطياً.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 & : L_1 \\ -x + \frac{1}{2}y + 2z = \frac{-7}{2} & : \frac{-1}{2}L_2 \\ -x + y + \frac{5}{3}z = \frac{-8}{3} & : -\frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 & : L_1 \\ -\frac{3}{2}y - z = \frac{-1}{2} & : \grave{L}_2 = L_1 + \frac{-1}{2}L_2 \\ -y - \frac{4}{3}z = \frac{1}{3} & : \grave{L}_3 = L_1 - \frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 & : L_1 \\ -\frac{3}{2}y - z = -\frac{1}{2} & : \grave{L}_2 \\ \frac{3}{2}y + 2z = -\frac{1}{2} & : -\frac{3}{2}\grave{L}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y-3z=3 & :L_1 \\ -\frac{3}{2}y-z=-\frac{1}{2} & :\grave{L}_2 \\ z=-1 & :\grave{\grave{L}}_3=\grave{L}_2-\frac{3}{2}\grave{L}_3 \end{cases}$$

من المعادلة $\grave{\grave{L}}_3$ نجد: $\boxed{z=-1}$

نعوض في $\grave{L}_2$: $-\frac{3}{2}y+1=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=1}$

نعوض في L_1 : $x-2(1)-3(-1)=3 \Rightarrow \boxed{x=2}$

وبالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة واحدة $I(2,1,-1)$

---

3 $\begin{cases} p_1: & 2x-y+3z=0 \\ p_2: & x+2y+z=0 \\ p_3: & 3x-4y+5z=0 \end{cases}$

$\vec{n_1}(2,-1,3)$, $\vec{n_2}(1,2,1)$, $\vec{n_3}(3,-4,5)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى.

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 & :L_1 \\ -2x-4y-2z=0 & :-2L_2 \\ -2x+\frac{8}{3}y-\frac{10}{3}z=0 & :-\frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 & :L_1 \\ -5y+z=0 & :\grave{L}_2=L_1-2L_2 \\ \frac{5}{3}y-\frac{1}{3}z=0 & :\grave{L}_3=L_1-\frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 & :\grave{L}_1 \\ -5y+z=0 & :\grave{L}_2 \\ 5y-z=0 & :3\grave{L}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 & :L_1 \\ -5y+z=0 & :\grave{L}_2 \\ 0=0 & :\grave{\grave{L}}_3=\grave{L}_2+3\grave{L}_3 \end{cases}$$

نلاحظ من $\grave{\grave{L}}_3$ أن للجملة عدد غير منته من الحلول وبالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع في مستقيم ولإيجاد المعادلات الوسيطية لهذا المستقيم

من $\grave{L}_2$ نجد: $\boxed{z=5y}$ وبالتعويض في L_1 : $2x-y+3(5y)=0$ إذاً: $\boxed{x=-7y}$ وبفرض $y=t$ يكون:

$$d: \begin{cases} x=-7t \\ y=t \\ z=5t \end{cases} \quad ;t\in R$$

---

4 $\begin{cases} P_1: & 2x-y+3z=2 \\ P_2: & x+2y+z=1 \\ P_3: & 3x-4y+5z=3 \end{cases}$

$\vec{n}_1(2,-1,3)$ و $\vec{n}_2(1,2,1)$ و $\vec{n}_3(3,-4,5)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

$$\begin{cases} 2x-y+3z=2 & :L_1 \\ -2x-4y-2z=-2 & :-2L_2 \\ -2x+\frac{8}{3}y-\frac{10}{3}z=-2 & :\frac{-2}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 & : L_1 \\ -5y + z = 0 & : L_2' = L_1 - 2L_2 \\ \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 & : L_3' = L_1 - \frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

نلاحظ أن المعادلتين L_2' و L_3' متكافئتين وبالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع بمستقيم.

ولإيجاد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك: لدينا من L_2': $\boxed{z = 5y}$ نعوض في L_1 : $2x - y + 3(5y) = 2$

إذا $\boxed{x = -7y + 1}$ وبفرض $y = t$ يكون:

$$d: \begin{cases} x = -7t + 1 \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} \quad ; t \in R$$

5
$$\begin{cases} \boldsymbol{P_1}: & \boldsymbol{2x - y + 3z = 2} \\ \boldsymbol{P_2}: & \boldsymbol{x + 2y + z = 1} \\ \boldsymbol{P_3}: & \boldsymbol{3x - 4y + 5z = 4} \end{cases}$$

$\vec{n}_1(2,-1,3)$ و $\vec{n}_2(1,2,1)$ و $\vec{n}_3(3,-4,5)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 & : L_1 \\ -2x - 4y - 2z = -2 & : -2L_2 \\ -2x + \frac{8}{3}y - \frac{10}{3}z = -\frac{8}{3} & : \frac{-2}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 & : L_1 \\ -5y + z = 0 & : L_2' = L_1 - 2L_2 \\ \frac{5}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{-2}{3} & : L_3' = L_1 - \frac{2}{3}L_3 \end{cases}$$

نلاحظ أن المعادلتين L_2' و L_3' متناقضتين فلا يوجد نقاط مشتركة والجملة مستحيلة الحل.

6
$$\begin{cases} \boldsymbol{P_1}: & \boldsymbol{x + y + z = 1} \\ \boldsymbol{P_2}: & \boldsymbol{x - 2y + z = 1} \\ \boldsymbol{P_3}: & \boldsymbol{3x - 4y + 3z = -1} \end{cases}$$

$\vec{n}_1(1,1,1)$ و $\vec{n}_2(1,-2,1)$ و $\vec{n}_3(3,-4,3)$ النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & : L_1 \\ -x + 2y - z = -1 & : -L_2 \\ -x + \frac{4}{3}y - z = \frac{1}{3} & : \frac{-1}{3}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & : L_1 \\ +3y = 0 & : L_2' = L_1 - L_2 \\ \frac{7}{3}y = \frac{4}{3} & : L_3' = L_1 - \frac{1}{3}L_3 \end{cases}$$

نلاحظ أن المعادلتين L_2' و L_3' متناقضتين فلا يوجد نقاط مشتركة والجملة مستحيلة الحل .

تمرينات ومسائل صفحة 94

1. ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه وليكن α عدداً حقيقياً و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE}=\alpha\,\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\,\overrightarrow{BC}$ واخيراً H منتصف $[EF]$.

1) تحقق ان E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

وكذلك ان النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,\alpha),(B,1-\alpha)$.

$$\overrightarrow{AE}=\alpha\,\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AE}=\alpha(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})$$
$$-\overrightarrow{EA}=\alpha\overrightarrow{AE}+\alpha\overrightarrow{ED}$$
$$\underbrace{\overrightarrow{EA}-\alpha\overrightarrow{EA}}+\alpha\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$
$$(1-\alpha)\overrightarrow{EA}+\alpha\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$

E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين:

$(A,1-\alpha),(D,\alpha)$

وتكون $(E,1)$

$$\overrightarrow{BF}=\alpha\,\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BF}=\alpha(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC})$$
$$-\overrightarrow{FB}=\alpha\overrightarrow{BF}+\alpha\overrightarrow{FC}$$
$$\underbrace{\overrightarrow{FB}-\alpha\overrightarrow{FB}}+\alpha\overrightarrow{FC}=\vec{0}$$
$$(1-\alpha)\overrightarrow{FB}+\alpha\overrightarrow{FC}=\vec{0}$$

F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين:

$(B,1-\alpha),(C,\alpha)$

وتكون $(F,1)$

2) a. اثبت ان H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

مما سبق : E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1-\alpha),(D,\alpha)$

F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1-\alpha),(C,\alpha)$

<u>عندئذ:</u> حسب الخاصة التجميعية يكون H هو مركز الأبعاد للنقاط: $(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

b. استنتج وقوع النقاط H,J,I على استقامة واحدة.

مما سبق لدينا H هو مركز الأبعاد للنقاط: $(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

و لدينا I منتصف $[AB]$ فإن I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)$

و لدينا J منتصف $[CD]$ فإن J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,\alpha),(C,\alpha)$

و بالتالي حسب الخاصة التجميعية يكون H هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(J,2\alpha),(I,2-2\alpha)$

إذاً النقاط H,J,I على استقامة واحدة.

---

2. $ABCD$ رباعي الوجوه اثبت في كل من الحالتين الآتيتين أن النقاط D,C,B,M يقع في مستو واحد ثم وضع النقطة M.

① $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$$\underbrace{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}+\underbrace{\overrightarrow{MA}}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DM}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1),(C,1),(B,1)$ فالنقاط D,C,B,M تقع في مستو واحد.

و M هي مركز ثقل المثلث BCD.

② $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB}+2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD})=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB}+\underbrace{2\overrightarrow{AM}}+2\overrightarrow{MD}=\underbrace{2\overrightarrow{AM}}-\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,2),(C,1),(B,1)$ فالنقاط D,C,B,M تقع في مستو واحد.

---

3. نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ $(o;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعطى النقطتين $B(4,3,-3),A(1,0,0)$

1) اتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$, (B,α) عندما تتحول α في R هي نفسها المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$؟

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$, (B,α)عندئذ:

ايا كانت$M(x,y,z)$نقطة من الفراغ : $\overrightarrow{AM}=\alpha\,\overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\alpha+1\\y=3\alpha\\z=-3\alpha\end{cases}\quad;\alpha\in R$$

المعادلات السابقة تمثل جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة A والموجه بالشعاع $\overrightarrow{AB}(3,3,-3)$

و لكن$\overrightarrow{AB}=3(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$

اي ان المستقيم السابق هو نفسه المستقيم المار من النقطة A والموجه بالشعاع $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

2) اتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)$, (B,x), (O,y) عندما تتحول x , y من R هي نفسها المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$, $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه؟

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y),(B,x),(O,y)$عندئذ حسب علاقة الإنشاء :

$$\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AO}$$

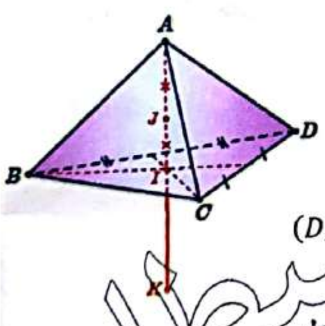
المعادلة السابقة تمثل معادلة المستوي المار بالنقطة O والموجه بالشعاعين $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{AB}$

و نلاحظ ان $\overrightarrow{AB}=3(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ و $\overrightarrow{AO}=-(\vec{i})$ و بالتالي المستوي السابق هو نفسه المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$, $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه .

---

4. ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه وليكن I مركز ثقل المثلث BCD

J منتصف $[AI]$ و k نظيرة A بالنسبة إلى I عبر عن k,J بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط D,C,B,A بعد تزويدها بأمثال مناسبة .



اولاً :

بما ان I مركز ثقل المثلث BCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$

وعندها يكون $(I,3)$ وبما ان J منتصف $[AI]$ فإن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(A,3)$ وبالتالي حسب الخاصة التجميعية يكون J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1)$, $(C,1)$, $(B,1)$, $(A,3)$

ثانياً :

K نظيرة A بالنسبة لـ I $\Leftarrow$ $\overrightarrow{KA} = 2\,\overrightarrow{KI}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{KA} - 2\,\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

وبما ان $(I,3)$ نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $\frac{-3}{2}$ فيكون : $\frac{-3}{2}\overrightarrow{KA} + 3\,\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

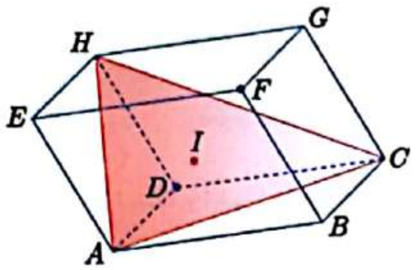
وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,3)$, $\left(A,\frac{-3}{2}\right)$

ولكن $(I,3)$ مركز ثقل المثلث BCD ومنه I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1),(C,1),(D,1)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية تكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $\left(A,\frac{-3}{2}\right),(B,1),(C,1),(D,1)$

---

5. ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح و ليكن I مركز ثقل المثلث AHC , اثبت ان النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة و عيّن موقع I على $[DF]$.



الحل : I مركز ثقل المثلث AHC

فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(H,1),(C,1)$

$$\underbrace{\overrightarrow{IA}}_{D} + \underbrace{\overrightarrow{IH}}_{D} + \underbrace{\overrightarrow{IC}}_{D} = \vec{0}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{ID}} + \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{ID}} + \overrightarrow{DH} + \underbrace{\overrightarrow{ID}} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$3\,\overrightarrow{ID} + \underbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}}_{\text{ثلاثية الأحرف}} = \vec{0}$$

$$3\,\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$$

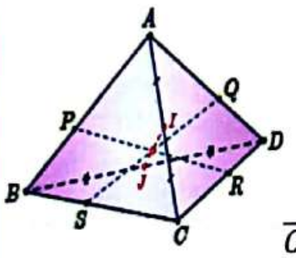
$$\Rightarrow \overrightarrow{DF} = 3\,\overrightarrow{DI}$$

إذاً $\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DI}$ مرتبطان خطياً , فالنقاط I,D,F على استقامة واحدة .

---

6. نتامل رباعي الوجوه $ABCD$ و لتكن x من المجال $]0,1[$ و لتكن S,R,Q,P النقاط التي تحقق :

$$\overrightarrow{AP} = x.\overrightarrow{AB} \ , \ \overrightarrow{AQ} = x\,\overrightarrow{AD} \ , \ \overrightarrow{CR} = x.\overrightarrow{CD} \ , \ \overrightarrow{CS} = x\,\overrightarrow{CB}$$



النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC],[BD]$

اثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة .

① $\overrightarrow{CS} = x\,\overrightarrow{CB}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن S مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,x),(C,1-x)$ و يكون $(S,1)$

② $\overrightarrow{CR} = x\,\overrightarrow{CD}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,x),(C,1-x)$ ويكون $(R,1)$

③ $\overrightarrow{AQ} = x\,\overrightarrow{AD}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,x),(A,1-x)$ و يكون $(Q,1)$

④ $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{AB}$

وحسب علاقة الإنشاء فإن P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,x),(A,1-x)$ ويكون $(P,1)$

⑤ I منتصف $[AC]$ وهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1-x),(A,1-x)$ ويكون $(I,2-2x)$

⑥ J منتصف $[BD]$ وهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,x),(D,x)$ ويكون $(J,2x)$

بما ان النقاط المثقلة $(A,1-x)$, (B,x) , $(C,1-x)$, (D,x) مجموع تثقيلاتها غير معدوم فإنه يوجد نقطة G مركز ابعاد متناسبة لها عندئذ:

- من ② و ④ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,1)$, $(P,1)$ وهي منتصف $[PR]$.
- من ① و ③ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1)$, $(S,1)$ وهي منتصف $[QS]$.
- من ⑤ و ⑥ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2x)$, $(J,2x)$

الخلاصة: G تقع على كل من المستقيمات $[PR],[QS],[JI]$ أي ان المستقيمات السابقة تتقاطع في نقطة واحدة هي G

---

7. نتأمل رباعي وجوه $ABCD$، k نقطة ما من $[AB]$ تحقق $AK=\frac{1}{3}AB$, L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق $CL=\frac{2}{3}CD$ وأخيراً I منتصف $[AD]$ و J هي منتصف $[BC]$، نعرف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$.

1) a) اثبت ان النقاط G , I , J تقع على استقامة واحدة.

I منتصف $[AD]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$, $(D,2)$ ويكون $(I,4)$

J منتصف $[BC]$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(C,1)$ ويكون $(J,2)$

وبما ان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$

عندئذ حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,2)$و$(I,4)$

فالنقاط I , J , G على استقامة واحدة.

b) اثبت ان النقاط G , K , L تقع على استقامة واحدة.

بما ان k نقطة ما من $[AB]$ تحقق $AK=\frac{1}{3}AB$

فإن:

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

فإن k مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$, $(A,2)$

بما أن L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق

$$CL=\frac{2}{3}CD$$

$$\overrightarrow{CL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

فإن L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$, $(C,1)$ ويكون $(L,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3)$, $(L,3)$ وهي منتصف $[LK]$ فالنقاط k , L , G على استقامة واحدة.

2) استنتج وقوع النقاط I , J , K , L في مستو واحد.

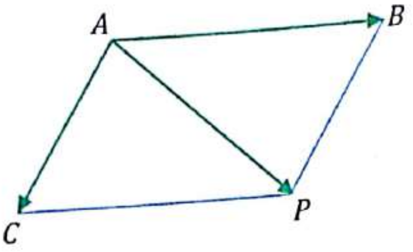
المستقيمان $[LK]$ و$[IJ]$ يتقاطعان في نقطة واحدة G فهما يعينان مستو وحيد

ومنه فالنقاط I , J , K , L تقع في مستو واحد.

8. نتامل رباعي وجوه $ABCD$ والنقاط R, Q, P هي نقاط تجعل $ABPC$ و $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات اضلاع , نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمات $(DP), (CQ), (BR)$.

1) a. اثبت ان النقطة P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1), (B,1), (C,1)$.

$ABPC$ متوازي اضلاع عندئذٍ :

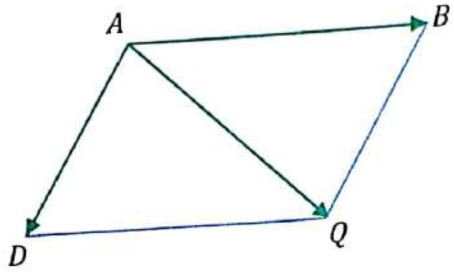


$$\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{} + \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{} = \underbrace{\overrightarrow{AP}}_{}$$
$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \underbrace{\overrightarrow{AP}}_{} + \overrightarrow{PC} = \underbrace{\overrightarrow{AP}}_{}$$
$$-\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

عندئذ $(P,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,1)$, $(C,1)$

b. عبر بالمثل عن Q بصفتها مركز ابعاد متناسبة للنقاط A, B, D , وكذلك عن R بصفتها مركز ابعاد متناسبة للنقاط A, C, D .

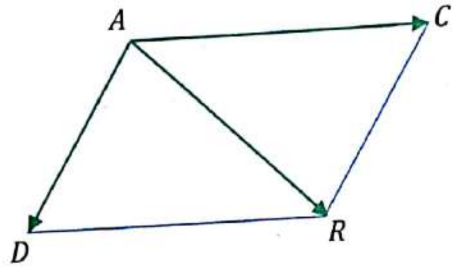
$ABQD$ متوازي أضلاع عندئذٍ :



$$\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{} + \underbrace{\overrightarrow{AD}}_{} = \underbrace{\overrightarrow{AQ}}_{}$$
$$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} + \underbrace{\overrightarrow{AQ}}_{} + \overrightarrow{QD} = \underbrace{\overrightarrow{AQ}}_{}$$
$$-\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD} = \vec{0}$$

عندئذٍ $(Q,1)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,1)$, $(D,1)$

$ACRD$ متوازي أضلاع عندئذٍ :



$$\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{} + \underbrace{\overrightarrow{AD}}_{} = \underbrace{\overrightarrow{AR}}_{}$$
$$\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RC} + \underbrace{\overrightarrow{AR}}_{} + \overrightarrow{RD} = \underbrace{\overrightarrow{AR}}_{}$$
$$-\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} = \vec{0}$$

عندئذٍ $(R,1)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(C,1)$, $(D,1)$

2) بالاستفادة من نقطة I و هي مركز أبعاد متناسبة مختارة للنقاط A, B, C, D ومن الخاصة التجميعية أثبت تلاقي المستقيمات (DP) , (CQ) , (BR) وعين موقع I على هذه المستقيمات .

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$ واستناداً إلى الخاصة التجميعية يكون :

* بما أن P مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,1), (B,1), (A,-1)$ فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(P,1)$, $(D,1)$	* بما أن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,1), (B,1), (A,-1)$ فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(Q,1)$, $(C,1)$	* بما أن R مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,1), (C,1), (A,-1)$ فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(R,1)$, $(B,1)$

I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,1)$, $(D,1)$ وهي منتصف $[PD]$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1)$, $(C,1)$ وهي منتصف $[QC]$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,1)$, $(B,1)$ وهي منتصف $[RB]$

عندئذٍ المستقيمات $(DP), (CQ), (BR)$ تتلاقى في نقطة واحدة I تقع في منتصف كلاً منها .

9. نتامل ثلاث نقاط A و B و C من الفراغ و عدداً حقيقياً k من المجال $[-1,1]$, ترمز G_k إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,k^2+1)(B,k)(C,-k)$.

1) مثّل النقاط A و B و C و I منتصف $[BC]$, و انشئ النقطتين G_1 و G_{-1} .

G_k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,k^2+1) و (B,k) و $(C,-k)$ عندئذٍ :

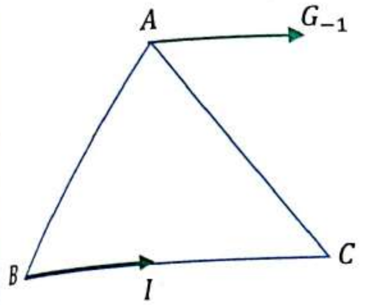
$$(k^2+1)\,\overrightarrow{G_kA}+k\,.\overrightarrow{G_kB}-k\,.\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$$

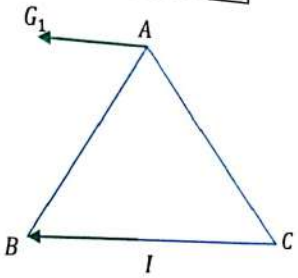
$\boxed{k=-1}$

$$2\,\overrightarrow{G_{-1}A}-\underbrace{\overrightarrow{G_{-1}B}+\overrightarrow{G_{-1}C}}=\vec{0}$$
$$2\,\overrightarrow{G_{-1}A}\quad+\quad\overrightarrow{BC}\qquad=\vec{0}$$
$$-2\,\overrightarrow{AG_{-1}}=-\overrightarrow{BC}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}}$$

$\boxed{k=1}$

$$2\,\overrightarrow{G_1A}+\underbrace{\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}}=\vec{0}$$
$$2\,\overrightarrow{G_1A}\;+\;\overrightarrow{CB}\qquad=\vec{0}$$
$$-2\,\overrightarrow{AG_1}=-\overrightarrow{CB}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{IB}}$$





2) a. اثبت انه مهما كان العدد k من $[-1,1]$ كان : $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$.

G_k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط , عندئذٍ :

$$(1+k^2)\,.\overrightarrow{G_kA}+\underbrace{k\,\overrightarrow{G_kB}-k\,.\overrightarrow{G_kC}}=\vec{0}$$
$$(1+k^2)\,.\overrightarrow{G_kA}+k\,\underbrace{(\overrightarrow{G_kB}-\overrightarrow{G_kC})}=\vec{0}$$
$$(1+k^2)\overrightarrow{G_kA}\;+\;k\;.\;\overrightarrow{CB}\qquad=\vec{0}$$
$$(1+k^2)\overrightarrow{G_kA}=-k\,.\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{G_kA}=\frac{-k}{1+k^2}\,.\overrightarrow{CB}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{1+k^2}\,.\overrightarrow{BC}}$$

b. ادرس تغيرات التابع f المعرف على المجال $[-1,1]$ بالصيغة $f(x)=\frac{-x}{1+x^2}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[-1,1]$

$$f(-1)=\frac{1}{2}\quad,\quad f(1)=\frac{-1}{2}$$
$$f'(x)=\frac{-1(1+x^2)-2x(-x)}{(1+x^2)^2}=\frac{-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-1=0$$
$$x=1:\ f(1)=\frac{-1}{2}$$
$$x=-1:\ f(-1)=\frac{1}{2}$$

x	-1		1
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

ومنه اياً يكن $x\in[-1,1]$ عندئذ $f(x)\in\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$

ⓒ استنتج مجموعة النقاط G_k عندما تتحول k في المجال $[-1,1]$.

من جدول التغيرات والعلاقة $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2}.\overrightarrow{BC}$ نستنتج ان :

النقاط G_k عندما $k \in [-1,1]$ تمثلا القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$ المارة من A والموازية لـ $[BC]$ وطولها الأعظمي يساوي نصف طول $[BC]$

3) عين مجموعة النقاط ε المكونة من النقاط M التي تحقق:

$$\left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{G_1 \text{ مركز ابعاد متناسبة}}\right\| = \left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{G_{-1} \text{ مركز ابعاد متناسبة}}\right\|$$

$$\|(2+1-1)\overrightarrow{MG_1}\| = \|(2-1+1)\overrightarrow{MG_{-1}}\| \text{(حسب مبرهنة الاختزال)}$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{MG_{-1}}\|$$

$$\underbrace{\|\overrightarrow{MG_1}\|} = \underbrace{\|\overrightarrow{MG_{-1}}\|}$$

بعد M عن G_1 بعد M عن G_{-1}

وبالتالي مجموعة النقاط ε هي المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$

4) عين المجموعة $\mathcal{F}$ المكونة من النقاط M التي تحقق:

$$\left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{G_1 \text{ مركز ابعاد متناسبة}}\right\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|\underbrace{\overrightarrow{MA}} + \underbrace{\overrightarrow{MA}} - \underbrace{\overrightarrow{MB}} - \underbrace{\overrightarrow{MC}}\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \left\|\underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}}_{\text{علاقة شعاع المتوسط}}\right\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{IA}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{IA}\|$$

وبالتالي مجموعة النقاط $\mathcal{F}$ هي الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها $[IA]$

---

10. نتامل معلماً متجانساً $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ وليكن G مركز ثقل المثلث ABC.

1) احسب إحداثيات G وتحقق ان (OG) عمودي على (ABC).

بما ان $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ معلم متجانس فإن: $C(0,0,1), B(0,1,0), A(1,0,0)$

G مركز ثقل المثلث ABCومنه $(C,1),(B,1),(A,1)$ عندئذ:

$$G\left(\frac{1+0+0}{3},\frac{0+1+0}{3},\frac{0+0+1}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

حتى يكون (OG) عمودي على (ABC) يجب ان يكون عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه:

$\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$, $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$, $\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB} &= -\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+0=0\\ \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC} &= -\tfrac{1}{3}+0+\tfrac{1}{3}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow (OG)\perp(ABC)$$

2) تُعرف النقاط $\grave{A}(2,0,0), \grave{B}(0,2,0), \grave{C}(0,0,3)$ المستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

ⓐ اكتب معادلة المستوي $\grave{A}\grave{B}\grave{C}$

$\overrightarrow{\grave{A}\grave{B}}(-2,2,0) \qquad \overrightarrow{\grave{A}\grave{C}}(-2,0,3)$

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$ بشرط a,b,c ليست جميعها أصفار عندئذ

$$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{\grave{A}\grave{B}} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{\grave{A}\grave{C}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{\grave{A}\grave{B}} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{\grave{A}\grave{C}} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2a + 2b = 0 \\ -2a + 3c = 0\end{cases}$$

باختيار $b = 1$ نجد ان $a = 1$ ، $c = \frac{2}{3}$

عندئذ معادلة $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$: $\vec{n}\left(1,1,\frac{2}{3}\right)$ ويمر من $\grave{A}$

$$1(x-2) + 1(y-0) + \frac{2}{3}(z-0) = 0$$

$$(\grave{A}\grave{B}\grave{C}) \ : \ \boxed{x + y + \frac{2}{3}z - 2 = 0}$$

ⓑاثبت ان $M(x,y,z)$ تنتمي الى المستقيم (AC) إذا وجد k بحيث: $\begin{cases}x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k\end{cases} : k \in R$

$\vec{u} = \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$

نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AC) :

نختار النقطة $A(1,0,0)$ حيث ان $\vec{u}\ (-1,0,1)$ عندئذ:

$$\overrightarrow{AM} = k.\vec{u}$$

$$(AC): \begin{cases}x - 1 = -k \\ y - 0 = 0 \\ z - 0 = k\end{cases} : k \in R \quad \Rightarrow \begin{cases}x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k\end{cases} : k \in R$$

ⓒاحسب إحداثيات النقطة k المشتركة بين المستقيم (AC) والمستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$.

نعوض معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) في المستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

$$1 - k + 0 + \frac{2}{3}k - 2 = 0 \ \Rightarrow \boxed{k = -3}$$

نعوض في (AC) :

$$\begin{cases}x = 1 - (-3) \\ y = 0 \\ z = -3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 4 \\ y = 0 \\ z = -3\end{cases} : \ k\ (4,0,-3)$$

3) ⓐ احسب إحداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) والمستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

أولاً: لنوجد معادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم (BC)

$\vec{u} = \overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ ونختار النقطة $B(0,1,0)$ عندئذ:

$$(BC): \begin{cases}x = 0 \\ y = -t + 1 \ : \ t \in R \\ z = t\end{cases}$$

ولإيجاد إحداثيات النقطة L نعوض معادلات التمثيل الوسيطي (BC) في المستوي $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

$$0 - t + 1 + \frac{2}{3}t - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -3}$$

$$\begin{cases}x = 0 \\ y = 3 + 1 = 4 \\ z = -3\end{cases} \Rightarrow \quad L\ (0,4,-3)$$

③ اثبت توازي المستقيمات (KL) , (AB) , $(\grave{A}\grave{B})$

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\ ,\ \overrightarrow{\grave{A}\grave{B}}(-2,2,0)\ ,\ \overrightarrow{KL}(-4,4,0)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{KL}=4\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{KL}=2\overrightarrow{\grave{A}\grave{B}}\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}(KL)\backslash\backslash(AB)\\ (KL)\backslash\backslash(\grave{A}\grave{B})\end{matrix}$$

4) عين تقاطع المستويين (ABC) و $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$ بدلالة النقاط المعرفة سابقاً

$k\in(AC)\subset(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

$L\in(BC)\subset(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$

$\boxed{(KL)\subset(\grave{A}\grave{B}\grave{C})}$

$k\in(AC)\subset(ABC)$

$L\in(BC)\subset(ABC)$

$\boxed{(KL)\subset(ABC)}$

وبالتالي (ABC) و $(\grave{A}\grave{B}\grave{C})$ يتقاطعان بالفصل المشترك (KL)

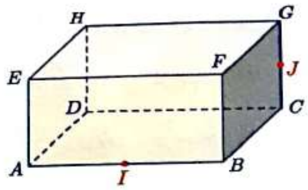
---

11. ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$

النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$

نتأمل المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

يعني طول



1) احسب المسافتين DJ و IJ.

نوجد أولاً إحداثيات النقاط D , I , J:

$$I(1,0,0)\ ,\quad J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)\ ,\quad D(0,1,0)\ ,\quad \overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)\ ,\quad \overrightarrow{DJ}\left(2,0,\frac{1}{2}\right)$$

$$IJ=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$DJ=\sqrt{4+0+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

2) اثبت أن المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان واحسب $\cos\widehat{IJD}$

$$\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)\ ,\quad \overrightarrow{ID}(-1,1,0)$$

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DI}=-1+1+0=0\Rightarrow$ متعامدان $(DI),(IJ)$

حساب $\cos\widehat{IJD}$: نلاحظ أن $(\widehat{IJD})=(\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JD})$

$$\overrightarrow{JI}\left(-1,-1,\frac{-1}{2}\right)\ ,\quad \overrightarrow{JD}\left(-2,0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JD}=\|\overrightarrow{JI}\|.\|\overrightarrow{JD}\|.\cos(\widehat{IJD})$$

$$2+0+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}.\frac{\sqrt{17}}{2}.\cos(\widehat{IJD})$$

$$\frac{9}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{17}\cos(\widehat{IJD})$$

$$\cos(\widehat{IJD})=\frac{3}{\sqrt{17}}$$

3) ⓐ اعط معادلة للمستوي (DIJ).

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي (DIJ) بشرط c,b,a ليست جميعها اصفاراً:

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{ID}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{JI}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+b=0\\ -a-b-\frac{1}{2}c=0\end{cases}$$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

باختيار $b=1$ نجد ان: $a=1$ ، $c=-4$ ومنه $\vec{n}(1,1,-4)$.

معادلة (DIJ): حيث $\vec{n}(1,1,-4)$ ويمر من النقطة D $=0$

$$1(x-0)+1(y-1)-4(z-0)=0$$

$$(DIJ):\boxed{x+y-4z-1=0}$$

$$\frac{|ax+by+cZ+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ⓑ احسب بعد H عن المستوي (DIJ).

$: H(0,1,1)$

$$dist\,(H,(DIJ))=\frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{4}{\sqrt{18}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

4) احسب حجم رباعي الوجوه $(HDIJ)$

نلاحظ ان رباعي الوجوه $(HDIJ)$ راسه H وقاعدته (DIJ)

ويكون ارتفاعه: $h=dist\,(H,(DIJ))=\frac{4}{3\sqrt{2}}$

[redacted]

ومساحة القاعدة : (بعد ملاحظة أن المثلث DIJ قائم حسب عكس فيثاغورث)

$: ID=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

$$S_{DIJ}=\frac{[IJ]\times[ID]}{2}=\frac{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$v=\frac{1}{3}.S_{DIJ}.h=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{2}}{4}.\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$$

5) ⓐ اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI)

بما ان المستقيم d عمودي على المستوي (HDI) فإن ناظم المستوي هو شعاع توجيه المستقيم d.

نوجد معادلة المستوي (HDI): نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (HDI) بشرط c,b,a ليست جميعها أصفاراً.

$$\overrightarrow{HD}(0,0,-1)\ ,\qquad \overrightarrow{ID}(-1,1,0)$$

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{HD}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{ID}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-c=0\\ -a+b=0\end{cases}$$

باختيار $b=1$ نجد ان $a=1$, $c=0$ ومنه $\vec{n}(1,1,0)$

معادلة المستوي (HDI): حيث $\vec{n}(1,1,0)$ ويمر من النقطة D

$$1(x-0)+1(y-1)+0(z-0)=0$$

$$(HDI):\boxed{x+y-1=0}$$

عندئذ: $\vec{u}=\vec{n}(1,1,0)$ والنقطة $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$:

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}:t\in R$$

وائل زعترية 0933699123 باسر السباسة 0949108068 ... 0952480990

ⓑ احسب إحداثيات النقطة $\hat{J}$ نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI):

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي (HDI)

$$t+2+t+1-1=0 \Rightarrow t=-1$$

$$\begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=-1+1=0 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} : \hat{J}\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$$

ⓒ جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة J عن المستوي (HDI):

الطريقة الأولى:

$$dist\left(J,(HDI)\right)=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1+0}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

الطريقة الثانية: وجدنا في الطلب الرابع أن حجم الرباعي الوجوه $(HDIJ)$ هو $\frac{1}{3}$ ومنه بأخذ رأس رباعي الوجوه النقطة J وقاعدته (HDI) نجد:

$$v=\frac{1}{3}.S_{HDI}.h$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.\frac{[HD]\times[DI]}{2}.h \quad , \quad HD=\sqrt{0+0+1}=1 \ , DI=\sqrt{2}$$

$$2=1\times\sqrt{2}.h \Rightarrow \boxed{h=\sqrt{2}}$$

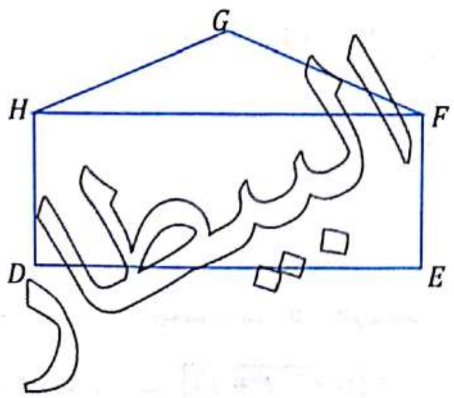
الطريقة الثالثة: بما أن المستقيم d يعامد المستوي (HDI) و $\hat{J}$ هي نقطة تقاطعهما فإن البعد المطلوب هو $J\hat{J}$

$$J\hat{J}=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

---

12. في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, نتأمل الهرم $S-OABC$ حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OS}=\vec{k}$. و ليكن t عدداً يحقق $0<t<1$. نهدف إلى تعيين مقطع الهرم بالمستوي P الذي معادلته $x+y=t$, و تعيين قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية .

1) a. يقطع المستوي P المستقيمات (OA) و (OC) و (SC) و (SB) و (SA) في D و E و F و G و H بالترتيب . ارسم شكلاً و بيّن طبيعة هذا المقطع .



و طبيعة هذا المقطع شكل خماسي .

b.اثبت ان الرباعي $DEFH$ مستطيل , و عبّر عن مساحته بدلالة t .

إحداثيات رؤوس الهرم هي $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $S(0,0,1)$

لإثبات أن الرباعي $DEFH$ مستطيل , نثبت أنه متوازي أضلاع ثم تعامد الشعاعين $\overrightarrow{HD}$ و $\overrightarrow{DE}$

إذاً لنوجد إحداثيات النقاط D و E و F و H وذلك عن طريق دراسة تقاطع المستوي P مع أحرف الهرم .

لحساب إحداثيات D ندرس تقاطع المستقيم (OA) مع المستوي P.

$$\overbrace{\text{نقطة } O(0,0,0) \qquad \text{شعاع توجيه } \overrightarrow{OA}(1,0,0)}^{\text{المستقيم } (OA)}$$

$$(OA):\begin{cases} x = k_1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad : k_1 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي Pهي : $x + y = t$

وبالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (OA) مع معادلة المستوي P نجد: $k_1 = t$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{D(t,0,0)}$

لحساب إحداثيات E ندرس تقاطع المستقيم (OC) مع المستوي P.

$$\overbrace{\text{نقطة } O(0,0,0) \qquad \text{شعاع توجيه } \overrightarrow{OC}(0,1,0)}^{\text{المستقيم } (OC)}$$

$$(OC):\begin{cases} x = 0 \\ y = k_2 \\ z = 0 \end{cases} \quad : k_2 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي P هي: $x + y = t$

و بالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (OC) مع معادلة المستوي P نجد: $k_2 = t$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{E(0,t,0)}$

لحساب إحداثيات F ندرس تقاطع المستقيم (SC) مع المستوي P.

$$\overbrace{\text{نقطة } S(0,0,1) \qquad \text{شعاع توجيه } \overrightarrow{SC}(0,1,-1)}^{\text{المستقيم } (SC)}$$

$$(SC):\begin{cases} x = 0 \\ y = k_3 \\ z = -k_3 + 1 \end{cases} \quad : k_3 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي P هي : $x + y = t$

وبالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (SC) مع معادلة المستوي P نجد: $k_3 = t$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{F(0,t,-t+1)}$

لحساب إحداثيات H ندرس تقاطع المستقيم (SA) مع المستوي P.

$$\overbrace{\text{نقطة } S(0,0,1) \qquad \text{شعاع توجيه } \overrightarrow{SA}(1,0,-1)}^{\text{المستقيم } (SA)}$$

$$(SA):\begin{cases} x = h_4 \\ y = 0 \\ z = -h_4 + 1 \end{cases} \quad : h_4 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي P هي : $x + y = t$

و بالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (SA) مع معادلة المستوي P نجد: $h_4 = t$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{H(t,0,1-t)}$

$\overrightarrow{DH}(0,0,1-t)$, $\overrightarrow{EF}(0,0,1-t)$ $\Leftarrow$ نلاحظ أن $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DH}$ فالرباعي $DEFH$ متوازي أضلاع لتساير ضلعين متقابلين فيه , $\overrightarrow{DE}(-t,t,0)$, $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{DE} = (0).(-t) + (0).(t) + (1-t).(0)$

$$\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{DE} = 0$$

فالضلعان $[HD]$ و $[DE]$ متعامدان , فالرباعي $DEFH$ مستطيل .

مساحة المستطيل = الطول × العرض , أي : $S_{DEFH} = [HD].[DE]$

$\overrightarrow{HD}(0,0,t-1) \Rightarrow HD = \sqrt{0^2 + 0^2 + (1-t)^2} = 1 - t$

$\overrightarrow{DE}(-t,t,0) \Rightarrow DE = \sqrt{(-t)^2 + t^2 + 0^2} = \sqrt{2}\,t$

$\boxed{S_{DEFH} = \sqrt{2}\,t.(1-t)}$

c. احسب إحداثيات النقطة G , ثم مساحة المثلث FGH بدلالة t .

لحساب إحداثيات G ندرس تقاطع المستقيم (SB) مع المستوي P.

$$\overbrace{\text{نقطة } S(0,0,1) \qquad \text{شعاع توجيه } \overrightarrow{SB}(1,1,-1)}^{\text{المستقيم } (SB)}$$

$$(SB):\begin{cases} x = h_5 \\ y = h_5 \\ z = -h_5 + 1 \end{cases} \quad : h_5 \in R$$

و لدينا معادلة المستوي P هي : $x + y = t$

و بالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية لـ (SB) مع معادلة المستوي P نجد: $h_5 = \frac{t}{2}$

إذاً إحداثيات النقطة $\boxed{G\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2},\frac{-t}{2}+1\right)}$

لحساب مساحة المثلث FGH نحسب اطوال اضلاعه:

$$\overrightarrow{HG}\left(\frac{-t}{2},\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right) \Rightarrow HG=\sqrt{\left(\frac{-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.t$$

$$\overrightarrow{FG}\left(\frac{t}{2},\frac{-t}{2},\frac{t}{2}\right) \Rightarrow FG=\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.t$$

$$\overrightarrow{FH}(t,-t,0) \Rightarrow FH=\sqrt{t^2+(-t)^2+0^2}=\sqrt{2}\,t$$

ومنه فإن المثلث FGH متساوي الساقين، فالارتفاع هو متوسط ومنصف ومحور.

لنوجد إحداثيات النقطة N منتصف $[FH]$: $N\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2},-t+1\right)$ ، ومنه :

$$\overrightarrow{NG}\left(0,0,\frac{t}{2}\right) \Rightarrow NG=\sqrt{0^2+0^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\frac{t}{2}$$

مساحة المثلث $=\frac{1}{2}\times$ القاعدة $\times$ الارتفاع ، أي $S_{FGH}=\frac{1}{2}.[FH].[NG]$ ومنه:

$$\boxed{S_{FGH}=\frac{1}{2}.\sqrt{2}t.\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}t^2}$$

d. استنتج عبارة $A(t)$ مساحة المقطع المنشود بدلالة t .

مساحة المقطع P هي: مساحة المستطيل + مساحة المثلث ، أي: $A(t)=S_{DEFH}+S_{FGH}$ ، ومنه

$$A(t)=\sqrt{2}\,t.(1-t)+\frac{\sqrt{2}}{4}t^2 \Rightarrow A(t)=\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}t^2+\frac{\sqrt{2}}{4}t^2$$

$$\boxed{A(t)=\sqrt{2}\,t-\frac{3\sqrt{2}}{4}t^2}$$

2) ادرس اطراد A على المجال $]0,1[$ ، واستنتج قيمة t التي تجعل مساحة المقطع اعظمية.

$$A(t)=\sqrt{2}\,t-\frac{3\sqrt{2}}{4}t^2 \qquad : 0<t<1$$

$$\grave{A}(t)=\sqrt{2}-3\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

التابع A اشتقاقي على المجال $]0,1[$.

$$\grave{A}(t)=0 \Rightarrow \sqrt{2}-3\frac{\sqrt{2}}{2}t=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

$$A\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$\grave{A}(t)$		+	0	−	
$A(t)$		↗	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	↘	

و تكون المساحة اعظمية عندما $t=\frac{2}{3}$.

3) استنتج ان المستوي المار بمركز ثقل المثلث OAC و يقبل $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه يوافق مقطعاً اعظمي المساحة.

لنرمز للمستوي المار بمركز ثقل المثلث OAC ويقبل $\overrightarrow{AC}(-1,1,0)$ و $\overrightarrow{OS}(0,0,1)$ شعاعي توجيه $\grave{P}$

النقطة M هي مركز ثقل المثلث OAC

$$\left.\begin{array}{l} O(0,0,0) \\ A(1,0,0) \\ C(0,1,0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)}$$

[redacted]

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ حيث $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

$\vec{n}\,.\overrightarrow{AC} = 0 \Longrightarrow \boxed{-a+b=0}$ ①

$\vec{n}\,.\overrightarrow{OS} = 0 \Longrightarrow \boxed{c=0}$ ②

بفرض $a=1$ نجد $b=1$ إذاً $\boxed{\vec{n}(1,1,0)}$

فمعادلة المستوي من الشكل: $\grave{P}: x+y+d=0$, نعوض إحداثيات النقطة M في المعادلة فنجد $d=\frac{-2}{3}$

إذاً $\grave{P}: x+y=\frac{2}{3}$

وهو نفسه المستوي الذي يوافق مقطعاً أعظمي المساحة.

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

سلسلة الرؤى الشاملة
في الرياضيات

رؤية شاملة في الجبر

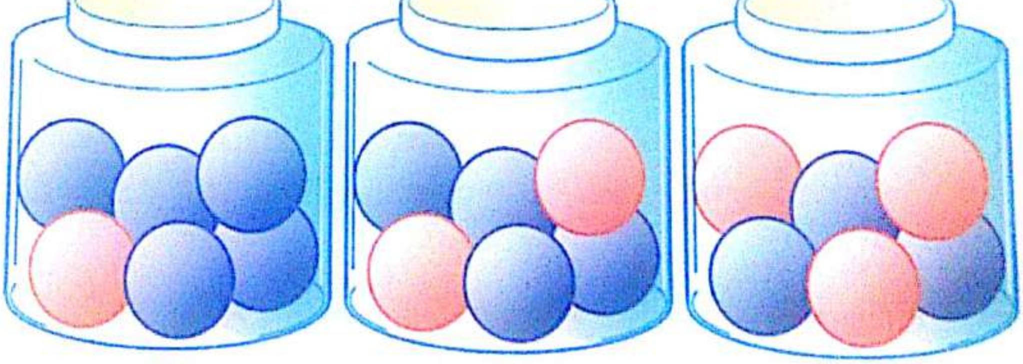
الأعـــداد العـــقديـــة

تطبيقات الأعداد العقدية

التحليل التوافقي

الاحتمالات

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$



① ② ③

باشراف المدرس

حسان البيطار

الثالث الثانوي

العلمي

هديل

الأعداد العقدية

تمهيد

إن للمعادلة $x^2 = 4$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية R هما: إما $x = 2$ أو $x = -2$

إن المعادلة $x^2 = -4$ مستحيلة الحل في R، لذلك نفرض وجود وحدة تخيلية i تحقق $i^2 = -1$، ونسمي المجموعة التي تحوي هذه الوحدة التخيلية بمجموعة الأعداد العقدية C وهي تضم مجموعة الأعداد الحقيقية أي $R \subset C$.

ومنه تصبح المعادلة السابقة $x^2 = 4i^2 \Rightarrow \begin{cases} x = +2i \\ x = -2i \end{cases}$ حيث $(i^2 = -1)$ ولها حلان في المجموعة C.

مثال: حل في C المعادلة: $(x+3)^2 = -16$

$$(x+3)^2 = 16i^2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 4i & \rightarrow x = -3+4i \\ x+3 = -4i & \rightarrow x = -3-4i \end{cases}$$

نلاحظ ان العدد مكون من قسمين أحدهما يحوي i نسميه القسم التخيلي والآخر لا يحوي i نسميه القسم الحقيقي

ونسمي العدد المركب من القسمين الحقيقي والتخيلي بالعدد العقدي ويكتب بالشكل $\boxed{Z = a + bi}$

ملاحظة:

تُمثل كل نقطة $M(a,b)$ من المستوي بعدد عقدي $Z = a + bi$ والعكس صحيح يمثل كل عدد عقدي $Z = a + bi$ بنقطة M إحداثياتها (a,b) وتجري الحسابات في مجموعة الأعداد العقدية بأسلوب مماثل للحسابات في مجموعة الأعداد الحقيقية ذاته مع ملاحظة ان $i^2 = -1$

امثلة:

- $3i - 4 + 2(i-1) = 3i - 4 + 2i - 2 = -6 + 5i$
- $(2+4i)(1-i) = 2 - 2i + 4i - 4i^2 = 2 - 2i + 4i + 4 = 6 + 2i$
- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$
- $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

القوى الطبيعية للعدد i:

$$i^{32} = (i^2)^{16} = (-1)^{16} = 1$$

$$i^{37} = i^{36} \times i = (i^2)^{18} \times i = (-1)^{18} \times i = i$$

$$i^{134} = (i^2)^{67} = (-1)^{67} = -1$$

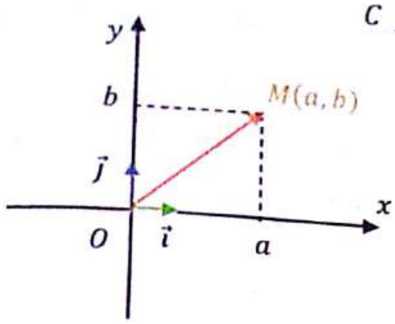
$$i^{135} = i^{134} \times i = (i^2)^{67} \times i = (-1)^{67} \times i = -i$$

$$i^{2007} = i^{2006} \times i = (i^2)^{1003} \times i = (-1)^{1003} \times i = -i$$

تذكر :

$$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad i^4 = 1$$

الشكل الجبري للعدد العقدي:



وجدنا ان كل نقطة من المستوي تمثل عدداً نسميه عدداً عقدياً.

$M(a,b)$ تُمثل العدد العقدي $Z = a + bi$ ونرمز إلى مجموعة الأعداد العقدية بالرمز C

ويمثل محور الفواصل مجموعة الأعداد الحقيقية.

ويمثل محور التراتيب مجموعة الأعداد التخيلية البحتة.

ومنه يسمى: $Z = a + bi$ الشكل الجبري للعدد العقدي Z

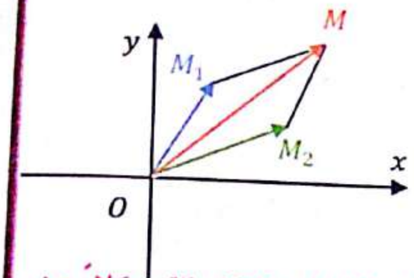
حيث b, a اعداد حقيقية.

نسمي a الجزء الحقيقي للعدد العقدي Z ونكتب $a = Re(z)$

نسمي b الجزء التخيلي للعدد العقدي Z ونكتب $b = Im(z)$

ملاحظة (1): يمثل العدد العقدي $Z = a + bi$ إما بالنقطة $M(a,b)$ أو بالمتجه $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$

ملاحظة (2): بفرض $\overrightarrow{OM_1}$ صورة العدد العقدي Z_1 و $\overrightarrow{OM_2}$ صورة العدد العقدي Z_2



فإن صورة مجموع عددين عقديين يساوي مجموع صورتيهما

اي $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$

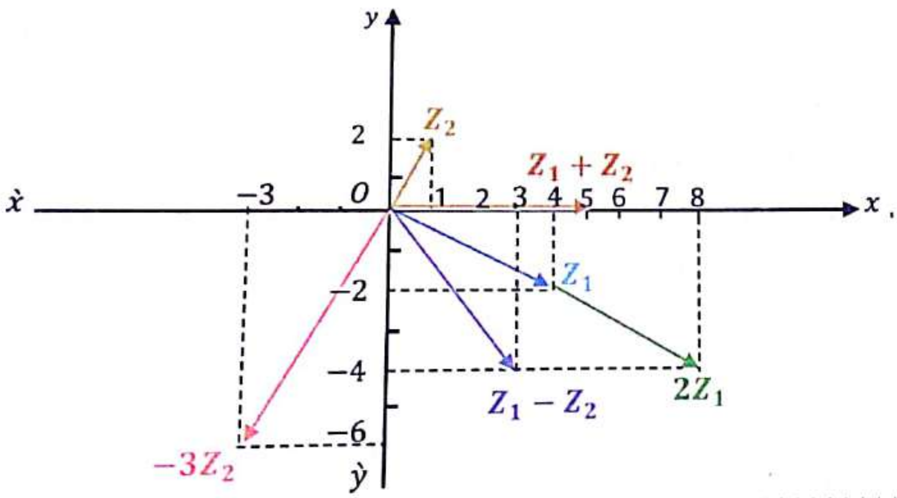
ونستنتج من ذلك انه يمكن ان نمثل عملية جمع عددين عقديين

بعملية جمع متجهين في المستوي وذلك حسب قاعدة متوازي الأضلاع

وكذلك عملية الطرح والضرب بعدد حقيقي.

مثال: إذا كان $Z_1 = 4 - 2i$, $Z_2 = 1 + 2i$ مثل هندسياً كلاً من هذين العددين ثم مثل في الشكل ذاته كلاً من الأعداد المركبة: $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$, $2Z_1$, $-3Z_2$

$$Z_1 + Z_2 = 5$$
$$Z_1 - Z_2 = 3 - 4i$$
$$2Z_1 = 8 - 4i$$
$$-3Z_2 = -3 - 6i$$



****

ملاحظات ونتائج:

1. القول إن Z عدد حقيقي يعني ان $Im(z) = 0$
2. القول إن Z عدد تخيلي بحت يعني ان $Re(z) = 0$
3. طويلة العدد العقدي Z هو المقدار $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ وهو يمثل الطول OM اي بعد النقطة $M(a,b)$ عن المبدا O

$$Z = a + ib \rightarrow |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$Z = a \rightarrow |Z| = |a|$$
$$Z = bi \rightarrow |Z| = |b|$$

4. يتساوى عددان عقديان إذا مثلا النقطة ذاتها في المستوي اي: $(a + bi = \acute{a} + \acute{b}i) \Leftrightarrow (a = \acute{a}\ ,\ b = \acute{b})$

(تستخدم في المطابقة بين عددين عقديين)

5. مرافق العدد العقدي $Z = a + bi$ هو $\overline{Z} = a - bi$ حيث $Z.\overline{Z} = a^2 + b^2$ اي $Z.\overline{Z} = |Z|^2$

وتكون النقطة $\grave{M}(a, -b)$ الموافقة للعدد $\overline{Z}$ هي نظيرة النقطة $M(a, b)$ الموافقة للعدد Z بالنسبة لمحور الفواصل

6. عكس العدد العقدي $Z = a + bi$ هو $-Z = -a - bi$

وتكون النقطة $\grave{M}(-a, -b)$ الموافقة للعدد $-Z$ هي نظيرة النقطة $M(a, b)$ الموافقة للعدد Z بالنسبة للمبدأ .

7. مقلوب عدد عقدي غير معدوم هو $\frac{1}{Z}$ ولكتابته بالشكل الجبري نضرب البسط والمقام بمرافق Z

مثال: ليكن: $Z_1 = 2 + i$, $Z_2 = 2 - i$, $Z_3 = -1 - i$, $Z_4 = 4i$

اوجد $\frac{Z_1}{Z_2}$, $\frac{Z_3}{Z_1}$, $\frac{Z_3}{Z_4}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(2+i)^2}{4+1} = \frac{4+4i+i^2}{5} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{-1-i}{2+i} = \frac{(-1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-2+i-2i+i^2}{4+1} = \frac{-3-i}{5} = \frac{-3}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\frac{Z_3}{Z_4} = \frac{-1-i}{4i} = \frac{(-1-i)(i)}{(4i)(i)} = \frac{-i-i^2}{4i^2} = \frac{-i+1}{-4} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i$$

****

خواص طويلة ومرافق الشكل الجبري للعدد العقدي

اياً كان Z_1 , Z_2 عددان عقديان و $n \in N$

$$Z = x + iy$$

$\lvert Z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\overline{Z} = x - iy$
$\lvert Z_1.Z_2\rvert = \lvert Z_1\rvert.\lvert Z_2\rvert$	$\overline{Z_1.Z_2} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$
$\left\lvert\frac{Z_1}{Z_2}\right\rvert = \frac{\lvert Z_1\rvert}{\lvert Z_2\rvert}$	$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$
$\lvert Z^n\rvert = \lvert Z\rvert^n$	$\overline{Z^n} = (\overline{Z})^n$
$\lvert Z_1 + Z_2\rvert \le \lvert Z_1\rvert + \lvert Z_2\rvert$	$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
$\lvert\lambda . Z\rvert = \lvert\lambda\rvert\,\lvert Z\rvert$	$\overline{\lambda . Z} = \lambda\ .\overline{Z}$

$|\lambda|$ هي القيمة المطلقة لـ λ حيث $\lambda \in R$

مثال: ليكن العدد المركب $Z_1 = 3 - 4i$, $Z_2 = -2i$

1. اوجد طويلة ومرافق المددان Z_1 , Z_2

$$Z_1 = 3 - 4i \Rightarrow \begin{cases} |Z_1| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \overline{Z_1} = 3 + 4i \end{cases}$$

$$Z_2 = -2i \Rightarrow \begin{cases} |Z_2| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \overline{Z_2} = 2i \end{cases}$$

2. اوجد $|Z_1{}^3|$, $\overline{Z_2{}^4}$

$$|Z_1{}^3| = |Z_1|^3 = (5)^3 = 125$$

$$\overline{Z_2{}^4} = (\overline{Z_2})^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$$

3. اوجد $2Z_1 - 3Z_2$, $iZ_2 + Z_1$

$$2Z_1 - 3Z_2 = 2(3 - 4i) - 3(-2i) = 6 - 8i + 6i = 6 - 2i$$

$$iZ_2 + Z_1 = i(-2i) + 3 - 4i = -2i^2 + 3 - 4i = 5 - 4i$$

مثال: اثبت ان:

$\boxed{a}$ $\dfrac{(1-i)^2}{1+i}+\dfrac{(1-i)^2}{1-i}=-2i$

$$L_1=\frac{1-2i+i^2}{1+i}+\frac{1-2i+i^2}{1-i}=\frac{-2i}{1+i}+\frac{-2i}{1-i}=\frac{-2i(1-i)-2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{-2i+2i^2-2i-2i^2}{2}=\frac{-4i}{2}=-2i=L_2$$

$\boxed{b}$ $\dfrac{1}{(1-i)^2}+\dfrac{1}{(2+i)^2}=\dfrac{6+17i}{50}$

$$L_1=\frac{1}{1-2i+i^2}+\frac{1}{4+4i+i^2}=\frac{1}{-2i}+\frac{1}{3+4i}$$
$$=\frac{i}{-2i^2}+\frac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{i}{2}+\frac{3-4i}{9+16}=\frac{i}{2}+\frac{3-4i}{25}$$
$$=\frac{25i+6-8i}{50}=\frac{6+17i}{50}=L_2$$

$\boxed{c}$ $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

$$L_1=(1-i)(1+1)(1+i)=2(1-i)(1+i)=2(1-i^2)=2(2)=4=L_2$$

****

ملاحظات: بفرض العدد العقدي $Z=x+yi$ ، $\overline{Z}=x-yi$

1. $Z.\overline{Z}=x^2+y^2$ ، $\overline{(\overline{Z})}=Z$
2. $Z+\overline{Z}=2x=2Re(z)$
3. $Z-\overline{Z}=2yi=2i\ Im(z)$
4. يكون Z عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان $\overline{Z}=Z$
5. يكون Z عدد تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان $\overline{Z}=-Z$
6. إذا كان $|Z|=1$ فإن $\overline{Z}=\frac{1}{Z}$
7. إذا كان $Z_1=x_1+iy_1$ و $Z_2=x_2+iy_2$ فإن:
$$Z_1=Z_2 \iff (x_1=x_2 \ \wedge\ y_1=y_2)$$
8. إذا كان $Z=x+yi$ فإن: $Z=0 \iff (x=0 \ \wedge\ y=0)$

****

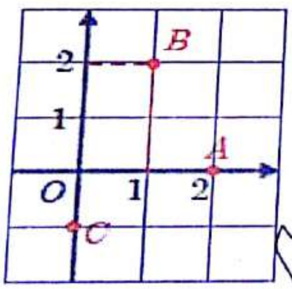
تدرب صفحة 105 :

1) ليكن x عدداً عقدياً تمثله نقطة M في المستوي.

وليكن $Z_1=2+xi$ و $Z_2=3+x+4i$

اكتب Z_1, Z_2 بالشكل الجبري في حالة:

$M=A$ او $M=B$ او $M=C$ حيث A, B, C مبينة في الشكل المجاور.



كون x عدد عقدي فهو يكتب بالشكل $x=a+bi$

$\boxed{I}$ $M=A \Rightarrow x=2$

♦ $Z_1=2+2i$

♦ $Z_2=3+2+4i$
$=5+4i$

$\boxed{II}$ $M=B \Rightarrow x=1+2i$

♦ $Z_1=2+(1+2i)i$
$=2+i+2i^2=i$

♦ $Z_2=3+(1+2i)+4i$
$=4+6i$

$\boxed{III}$ $M=C \Rightarrow x=-i$

♦ $Z_1=2+(-i)i$
$=3$

♦ $Z_2=3+(-i)+4i$
$=3+3i$

2) في حالة عدد عقدي Z نضع $P(Z)=Z^3-(1-i)Z^2-(4-5i)Z+(4+6i)$
احسب كلاً من $P(i)$ ، $P(-2)$ ، $P(3-2i)$

$P(Z)=Z^3-(1-i)Z^2-(4-5i)Z+(4+6i)$

♦ $P(i)=i^3-(1-i)i^2-(4-5i)i+(4+6i)$
$=-i+1-i-4i-5+4+6i$
$=-6i+6i-4+4=0$

♦ $P(-2)=(-2)^3-(1-i)(-2)^2-(4-5i)(-2)+(4+6i)$
$=-8-4(1-i)+2(4-5i)+4+6i$
$=-8-4+4i+8-10i+4+6i=0$

♦ $P(3-2i)=(3-2i)^3-(1-i)(3-2i)^2-(4-5i)(3-2i)+(4+6i)$
$=(3-2i)[(3-2i)^2-(1-i)(3-2i)-(4-5i)]+4+6i$
$=(3-2i)[(9-12i-4)+(-1+i)(3-2i)-4+5i]+4+6i$
$=(3-2i)[5-12i+(-3+2i+3i+2)-4+5i]+4+6i$
$=(3-2i)[5-12i-1+5i-4+5i]+4+6i$
$=(3-2i)(-2i)+4+6i$
$=-6i-4+4+6i=0$

---

3) بسط العبارتين:

[1] $Z=\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}+\dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$ نوحد المقامات :

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}{\left(\sqrt{2}-i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)}+\frac{\left(\sqrt{2}-i\right)^2}{\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{2}-i\right)}$$
$$=\frac{2+2\sqrt{2}\,i-1+2-2\sqrt{2}\,i-1}{\left(\sqrt{2}-i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)}$$
$$=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

[2] $w=(1+i)^8$
$=[(1+i)^2]^4$
$=[1+2i-1]^4$
$=[2i]^4=16$

---

4) أعط الشكل الجبري للأعداد العقدية الآتية:

[1] $Z_1=(2+i)(3-2i)$
$=6-4i+3i-2i^2$
$=6-i+2=8-i$

[2] $Z_2=(1+i)^2$
$=1+2i+i^2$
$=1+2i-1=2i$

[3] $Z_3=(1-i)^2$
$=1-2i+i^2$
$=1-2i-1=-2i$

[4] $Z_4=(1+2i)(1-2i)$
$=(1)^2-(2i)^2$
$=1+4=5$

[5] $Z_5=(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})$
$=(3)^2-\left(i\sqrt{5}\right)^2$
$=9+5=14$

[6] $Z_6=(4-3i)^2$
$=16-24i+9i^2$
$=16-24i-9=7-24i$

$\boxed{7}\ Z_7 = \dfrac{4-6i}{3+2i}$

$= \dfrac{(4-6i)}{(3+2i)} \cdot \dfrac{(3-2i)}{(3-2i)}$

$= \dfrac{12-8i-18i+12i^2}{9+4}$

$= \dfrac{12-26i-12}{13} = \dfrac{-26i}{13} = -2i$

$\boxed{8}\ Z_8 = \dfrac{1}{2-i}$

$= \dfrac{1}{(2-i)} \cdot \dfrac{(2+i)}{(2+i)}$

$= \dfrac{2+i}{4+1} = \dfrac{2+i}{5}$

$= \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$

$\boxed{9}\ Z_9 = \dfrac{3-6i}{3+i} + \dfrac{4}{3-i}$ نوحد المقامات

$= \dfrac{(3-6i)(3-i)+4(3+i)}{(3+i)(3-i)}$

$= \dfrac{9-3i-18i+6i^2+12+4i}{9+1}$

$= \dfrac{15-17i}{10} = \dfrac{15}{10} - \dfrac{17}{10}i$

$= \dfrac{3}{2} - \dfrac{17}{10}i$

$\boxed{10}\ Z_{10} = \left(\dfrac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\dfrac{1+3i}{3+2i}\right)$

$= \left[\dfrac{2(2-3i)}{(2-3i)}\right]\left(\dfrac{1+3i}{3+2i}\right)$

$= 2\left(\dfrac{1+3i}{3+2i}\right)$

$= \dfrac{(2+6i)}{(3+2i)} \cdot \dfrac{(3-2i)}{(3-2i)}$

$= \dfrac{6-4i+18i-12i^2}{9+4}$

$= \dfrac{18+14i}{13} = \dfrac{18}{13} + \dfrac{14}{13}i$

****

تدرب صفحة 107 :

1) اكتب بدلالة $\overline{Z}$ مرافق كل من الأعداد العقدية Z الآتية:

$\boxed{1}\ Z = (Z-1)(Z+i)$

$\overline{Z} = \overline{(Z-1)(Z+i)}$

$= \overline{(Z-1)}\,\overline{(Z+i)}$

$= (\overline{Z}-1)(\overline{Z}-i)$

$\boxed{2}\ Z = \dfrac{3Z^2-2iZ+4}{2Z-3i}$

$\overline{Z} = \dfrac{\overline{3Z^2} - \overline{2iZ} + 4}{\overline{2Z} - \overline{3i}}$

$= \dfrac{3\overline{Z}^2 + 2i\overline{Z} + 4}{2\overline{Z} + 3i}$

$\boxed{3}\ Z = Z^3 + 2iZ^2 + 1 - 3i$

$\overline{Z} = \overline{Z^3} + \overline{2iZ^2} + 1 - \overline{3i}$

$= \overline{Z}^3 - 2i\overline{Z}^2 + 1 + 3i$

$\boxed{4}\ Z = (1+2iZ)^3$

$\overline{Z} = \overline{(1+2iZ)^3}$

$= \left(1-2i\overline{Z}\right)^3$

---

2) حل كلاً من المعادلات الآتية بالمجهول Z حيث: $Z = a + bi$

$\boxed{1}\ Z - 2\overline{Z} = 2$

$a + bi - 2(a - bi) = 2$

$a + bi - 2a + 2bi = 2$

$-a + 3bi = 2$

$-a + 3bi = 2 + 0i$

بالمطابقة نجد :

$-a = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

$3b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

ومنه $\boxed{Z = -2}$

$\boxed{2}\ 2iZ + \overline{Z} = 3 + 3i$

$2i(a+bi) + (a-bi) = 3 + 3i$

$2ai - 2b + a - bi = 3 + 3i$

$(a-2b) + (2a-b)i = 3 + 3i$

بالمطابقة نجد : $\left.a - 2b = 3\ \boxed{1}\ ,2a - b = 3\ \boxed{2}\ \right\}$

من $\boxed{1} \rightarrow a = 3 + 2b\ \boxed{*}$

$\xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{2}} 2(3+2b) - b = 3 \Rightarrow \boxed{b = -1}$

$\xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{*}} \boxed{a = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = 1 - i}$

$\boxed{3}$ $2\overline{Z} = i - 1$

طريقة اولى:

$2(a - bi) = i - 1$

$2a - 2bi = -1 + i$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2}} \\ -2b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{-1}{2}} \end{cases}$$

ومنه $\boxed{Z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i}$

طريقة ثانية:

نأخذ مرافق الطرفين : $\overline{Z} = \frac{i-1}{2}$

$Z = \frac{-i-1}{2}$

ومنه $\boxed{Z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i}$

$\boxed{4}$ $\frac{\overline{Z} - 1}{\overline{Z} + 1} = i$

طريقة اولى:

$\overline{Z} - 1 = i(\overline{Z} + 1)$

$a - bi - 1 = i(a - bi + 1)$

$(a - 1) + (-b)i = b + (a + 1)i$

$$\left.\begin{aligned} a - 1 &= b \quad \boxed{1} \\ -b &= a + 1 \quad \boxed{2} \end{aligned}\right\}$$

$-(a - 1) = a + 1$

نعوض $\boxed{1}$ في $\boxed{2}$ فنجد :

$-a + 1 = a + 1$

$\boxed{a = 0} \xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{1}} \boxed{b = -1}$

ومنه $\boxed{Z = -i}$

طريقة ثانية:

$\overline{Z} - 1 = i(\overline{Z} + 1)$

$\overline{Z} - 1 = i\overline{Z} + i$

$\overline{Z} - i\overline{Z} = 1 + i$

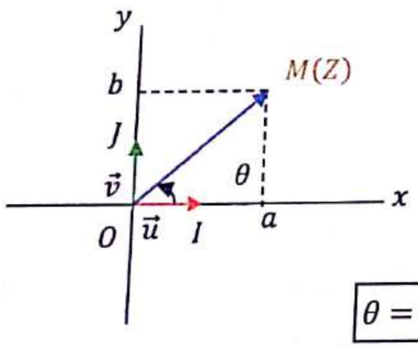
$\overline{Z}(1 - i) = 1 + i$

$\overline{Z} = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{1 + 1} = i$

$\overline{Z} = i$

ومنه $\boxed{Z = -i}$

الشكل المثلثي للعدد العقدي:



نزود المستوي بمعلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث $(\overrightarrow{OI} = \vec{u} \ , \ \overrightarrow{OJ} = \vec{v})$

بفرض $M(a, b)$ هي صورة العدد العقدي $Z = a + bi$

حيث M مختلفة عن المبدا O

إن $r = OM$ والزاوية $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ نسمي الزوج المرتب (r, θ) الذي يحقق:

$\boxed{r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}}$ و $\boxed{\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})}$

زوجاً من الإحداثيات القطبية للنقطة M ويعبر عن ذلك بالكتابة $M(r, \theta)$

ويكون $a = r\cos\theta \ , b = r\sin\theta$

ومنه $\boxed{Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ الشكل المثلثي للعدد العقدي Z

ملاحظة: ① نسمي زاوية للعدد العقدي Z ، ونرمزها $arg(Z)$ وهي قياس الزاوية $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ بالراديان.

② $r > 0$ كون $r = |Z|$ حيث $r \in R$

③ Z عدد حقيقي $\Leftrightarrow arg(Z) \in \{0, \pi\}$

④ Z عدد تخيلي بحت $\Leftrightarrow arg(Z) \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

كتابة العدد العقدي Z بالشكل المثلثي:

نعلم أن الشكل الجبري يعطى بالشكل: $Z = a + bi$

$$|Z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

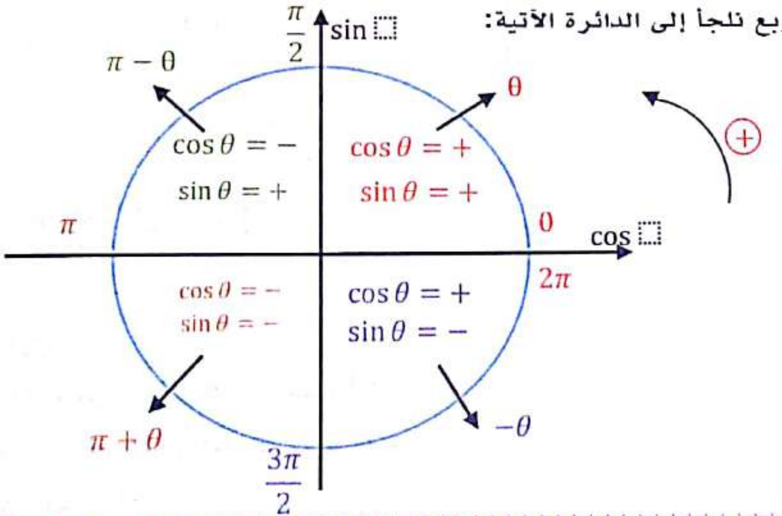
$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = ?} \Rightarrow Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ملاحظات:

1. للتحويل من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي نحتاج إلى θ, r
2. $\overbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}^{\text{مثلثي}} = \overbrace{Z = a + bi}^{\text{جبري}}$ وبالمطابقة (حقيقي = حقيقي ، تخيلي = تخيلي)
3. $\overline{Z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
4. النسب المثلثية للزوايا الشهيرة:

θ	2π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\cos\theta$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta$	0	1	0	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

5. لمعرفة قياس الزاوية وفي أي ربع نلجأ إلى الدائرة الآتية:



****

تمارين: اكتب الأعداد المركبة الآتية بالشكل المثلثي:

$\boxed{1}$ $Z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{2}$ $Z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$

$$r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{3}$ $Z_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{4}$ $Z_4 = 1 - \sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_4 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}$$

تمرين: ليكن العدد العقدي Z الذي طويلته 2 وزاويته $\frac{5\pi}{4}$ اعط الشكل الجبري لـ Z

$$\begin{aligned}Z &= r(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\\ &= 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\ &= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i\end{aligned}$$

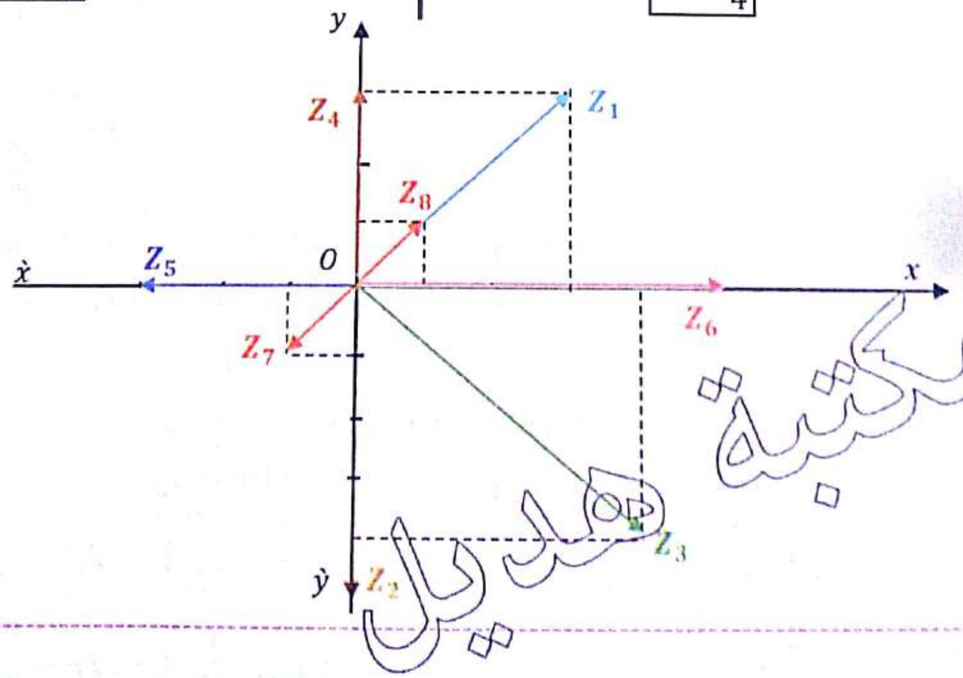
$\frac{5\pi}{4} = 225$ تقع في الربع الثالث :

تدرب صفحة 110 :

1) مثل الأعداد الآتية في المستوي العقدي، ثم أعط زاوية لكل منها انطلاقاً من اعتبارات هندسية ودون إجراء حسابات.

$1+i\ ,\ -1-i\ ,5\ ,-3\ ,\ 3i\ ,\ 4-4i\ ,-5i\ ,3+3i$

$Z_1 = 3+3i$	$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{4}}$	$Z_2 = -5i$	$\boxed{\theta_2 = \frac{-\pi}{2}}$
$Z_3 = 4-4i$	$\boxed{\theta_3 = \frac{-\pi}{4}}$	$Z_4 = 3i$	$\boxed{\theta_4 = \frac{\pi}{2}}$
$Z_5 = -3$	$\boxed{\theta_5 = \pi}$	$Z_6 = 5$	$\boxed{\theta_6 = 0}$
$Z_7 = -1-i$	$\boxed{\theta_7 = \frac{5\pi}{4}}$	$Z_8 = 1+i$	$\boxed{\theta_8 = \frac{\pi}{4}}$



2) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$\boxed{1}$ $Z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2+2} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$\boxed{2}$ $Z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

$r = \sqrt{4+12} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{3}$ $Z_3 = 4 - 4i$

$r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_3 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)}$$

$\boxed{4}$ $Z_4 = -2i$

$r = \sqrt{0+4} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = 0 \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{2}}$$

$$\boxed{Z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$\boxed{5}$ $Z_5 = \dfrac{-1}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$$r = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\frac{-1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_5 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$\boxed{6}$ $Z_6 = \dfrac{4}{1-i}$

$$= \frac{4}{(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{4+4i}{2} = \frac{4}{2} + \frac{4i}{2}$$

$Z_6 = 2 + 2i$

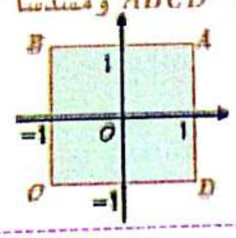
$r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_6 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

---

3) في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس مربعاً $ABCD$ ومسدساً $ABCDEF$ اعط الأعداد العقدية التي تمثل كلاً من رؤوس كل منهما.



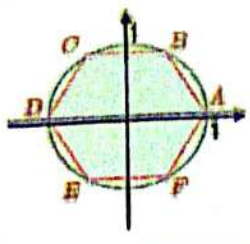
$A(1,1) \Rightarrow Z_A = 1 + i$

$B(-1,1) \Rightarrow Z_B = -1 + i$

$C(-1,-1) \Rightarrow Z_C = -1 - i$

$D(1,-1) \Rightarrow Z_D = 1 - i$

تذكر : في المثلث المتساوي الأضلاع طول ضلعه a يكون طول الارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}a$



$A(1,0) \Rightarrow Z_A = 1$

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_C = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$D(-1,0) \Rightarrow Z_D = -1$

$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_E = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow Z_F = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

وائل زعترية 0933699123 ياسر السادسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

4) في كل من الحالات الآتية عين مجموعة النقاط M التي يحقق العدد العقدي Z الذي يمثلها الشرط المعطى:

$\boxed{2}$ $argZ = \frac{-2\pi}{3}$ نصف مستقيم مفتوح المبدأ يصنع زاوية مقدارها $\frac{-2\pi}{3}$ مع محور الفواصل	$\boxed{1}$ $argZ = \frac{\pi}{3}$ نصف مستقيم مفتوح المبدأ يصنع زاوية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل
$\boxed{4}$ $\lvert Z\rvert = 3$ مجموعة النقاط M تقع على محيط دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $r = 3$	$\boxed{3}$ $argZ = \pi$ نصف مستقيم مفتوح المبدأ يصنع زاوية مقدارها π مع محور الفواصل(الأعداد الحقيقية السالبة)
$\boxed{6}$ $Im(z) = 1$ مجموعة النقاط M هي المستقيم $y = 1$	$\boxed{5}$ $Re(Z) = -2$ مجموعة النقاط M هي المستقيم $x = -2$

خواص طويلة عدد عقدي وزاويته بالشكل المثلثي

بفرض Z_2, Z_1 عددين عقديين فإن:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{1}\ |Z_1.Z_2| = |Z_1|.|Z_2| \\ \boxed{2}\ arg(Z_1.Z_2) = argZ_1 + argZ_2\end{array}\right\} \Rightarrow Z_1.Z_2 = (r_1.r_2)[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{3}\ \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \\ \boxed{4}\ arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = argZ_1 - argZ_2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

$$\boxed{5}\ \left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$$

$$\boxed{6}\ arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -arg(Z)$$

$$\boxed{7}\ arg(Z)^n = n\ arg(Z)$$

تمرين: بفرض $Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ ، $Z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$ عندئذ:

$$|Z_1.Z_2| = |Z_1|.|Z_2| = 2 \times 3 = 6$$

$$arg(Z_1.Z_2) = \left(\frac{\pi}{5}\right) + \left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{20} \quad \Rightarrow \quad Z_1.Z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{-\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{20}\right)\right)$$

ملاحظة:

اياً كان العدد العقدي غير المعدوم Z وايا كان العدد الطبيعي n كان:

$$|Z^n| = |Z|^n$$

وعند وضع $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نجد:

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

دستور دوموافر

في الحالة الخاصة الموافقة لعدد عقدي طويلته تساوي 1 اي $(r = 1)$ فإن دستور دوموافر يعطى بالعلاقة:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

تمرين: اكتب بأبسط صيغة ممكنة: $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$

$$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3} \overset{\text{دوموافر}}{\cong} \frac{\cos 10\theta + i\sin 10\theta}{\cos 9\theta + i\sin 9\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

تمرين: اكتب كلاً مما يلي بالشكل الجبري:

$$\boxed{a}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^4 \overset{\text{دوموافر}}{\cong} \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$$

$$\boxed{b}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3} \overset{\text{دوموافر}}{\cong} \cos\frac{-7\pi}{4} + i\sin\frac{-7\pi}{4}$$

$$= \cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = -\sin\frac{7\pi}{4} \\ \cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} \end{array}}$$

تمرين: بفرض $Z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$ اكتب Z بأبسط صورة واستنتج $|Z|$, $argZ$

لحساب القوى نستعمل التمثيل المثلثي:

$Z_1 = (1+i)^4$

لنكتب $(1+i)$ بالشكل المثلثي: $r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1 = (1+i)^4 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$$

$$= 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4(-1+0)$$

$$\boxed{Z_1 = (1+i)^4 = -4}$$

$Z_2 = (\sqrt{3}+i)^3$

لنكتب $(\sqrt{3}+i)$ بالشكل المثلثي: $r = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

$$(\sqrt{3}+i) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Z_2 = (\sqrt{3}+i)^3 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0+i)$$

$$\boxed{Z_2 = (\sqrt{3}+i)^3 = 8i}$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3} = \frac{-4}{8i} = \frac{-1}{2i} = \frac{1}{2}i$$

$$|Z| = \sqrt{0 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$argZ = arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = argZ_1 - argZ_2 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

تدريب صفحة 113 :

1) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد:

[1] $Z = (1-i)^2$

لنكتب $1-i$ بالشكل المثلثي:

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{4}} \Rightarrow 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{Z = \left[\sqrt{2}\left(cos\frac{-\pi}{4} + i\,sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^2 = 2\left(cos\frac{-\pi}{2} + i\,sin\frac{-\pi}{2}\right)}$$

---

[2] $Z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

$\boldsymbol{Z_1 = 1 - i\sqrt{3}}$

$r = 2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{3}}$$

$$\boxed{Z_1 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}$$

$\boldsymbol{Z_2 = 1 + i}$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-7\pi}{12} + i\,\sin\frac{-7\pi}{12}\right)$$

---

[3] $Z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

$$= \left(\frac{(\sqrt{3}-i)}{i}\cdot\frac{i}{i}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{3}\,i+1}{-1}\right)^5 = \left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^5$$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

لنكتب $-1-\sqrt{3}\,i$ بالشكل المثلثي:

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{4\pi}{3}} \Rightarrow -1-\sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{Z = \left[2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right]^5 = 32\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\,\sin\frac{20\pi}{3}\right)}$$

Scanned by CamScanner

2) نعطى العددين العقديين $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ ، $Z_2 = 1 - i$

1. اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد $Z_1, Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}$

$$Z_2 = 1 - i$$
$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{4}}$$
$$\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\,\sin\frac{-\pi}{4}\right)}$$

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$r = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{-\pi}{6}}$$
$$\boxed{Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\,\sin\frac{-\pi}{6}\right)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\,\sin\frac{-\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\,\sin\frac{-\pi}{4}\right)} = \cos\frac{\pi}{12} + i\,\sin\frac{\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \cos\frac{\pi}{12} + i\,\sin\frac{\pi}{12}}$$

2. اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i} = \frac{(\sqrt{6} - i\,\sqrt{2})}{2(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + i\,\sqrt{6} - i\,\sqrt{2} - i^2\,\sqrt{2}}{2(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$
$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\,i}$$

3. استنتج ان $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ، $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

بالتساوي بين الشكلين المثلثي والجبري نجد:

$$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

بالمطابقة نجد ان :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

---

3) اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $1 + i\sqrt{3}$ واستنتج الشكل المثلثي للعدد $1 - i\sqrt{3}$ واخيراً احسب العددين:

$\boxed{1}$ $Z_1 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$ $\quad$ $\boxed{2}$ $Z_2 = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$

لنكتب $1 + i\sqrt{3}$ بالشكل المثلثي

$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$
$$\boxed{1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

إذاً نستنتج ان $\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ يكتب بالشكل المثلثي:

$$\boxed{1 - \sqrt{3}\, i = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\ \sin\frac{-\pi}{3}\right)}$$

$$* \ \left(1 + \sqrt{3}\, i\right)^5 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\ \sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}\, i$$

$$* \ \left(1 - \sqrt{3}\, i\right)^5 = \overline{\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)^5} = \overline{16 - 16\sqrt{3}\, i}$$

$$= 16 + 16\sqrt{3}\, i$$

$$\boxed{1}\ \boldsymbol{Z_1 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^5 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}$$

$$= \left(16 - 16\sqrt{3}\, i\right) + \left(16 + 16\sqrt{3}\, i\right) = 32$$

$$\boxed{2}\ \boldsymbol{Z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^5 - \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}$$

$$= \left(16 - 16\sqrt{3}\, i\right) - \left(16 + 16\sqrt{3}\, i\right) = -32\sqrt{3}\ i$$

---

4) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$\boxed{1}\ Z = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$$

$$= \cos\frac{6\pi}{8} + i\ \sin\frac{6\pi}{8} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$\boxed{2}\ Z = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\ \cos\frac{\pi}{5}\right)^6$$

بشكل عام:

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad , \quad \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\right]^6$$

$$= \left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right]^6$$

$$= \cos\frac{18\pi}{10} + i\sin\frac{18\pi}{10}$$

$$= \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5} = \cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}$$

$$\boxed{3}\ Z = (1 + i)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\ \sin\frac{\pi}{9}\right)$$

نكتب $(1 + i)$ بالشكل المثلثي:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

إذاً :

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\ \sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= (\sqrt{2})(1)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{9}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{9}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{13\pi}{36} + i\ \sin\frac{13\pi}{36}\right]$$

$$\boxed{4}\ Z = (1 + i)^{2016}$$

$$= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2016}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2016}\left(\cos\frac{2016\,\pi}{4} + i\sin\frac{2016\,\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{1008}(\cos 504\,\pi + i\ \sin 504\,\pi)$$

$$= 2^{1008}(\cos 0 + i\sin 0)$$

الشكل الأسي لعدد عقدي:

بفرض Z عدد عقدي طويلته تساوي 1 اي $|Z| = r = 1$ فإن الشكل الأسي للعدد العقدي Z هو:

$$\boxed{Z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

وإذا كان $r = |Z| \neq 1$ فإن الشكل الأسي للعدد العقدي Z هو:

$$\boxed{Z = |Z|e^{i\theta} = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

ملاحظات ونتائج:

.1	$e^{\frac{3\pi}{2}i} = e^{\frac{-\pi}{2}i} = -i$	$e^{\frac{\pi}{2}i} = +i$	$e^{\pi i} = -1$	$e^{2\pi i} = +1$
.2	$re^{i\theta} \times \grave{r}e^{i\grave{\theta}} = (r.\grave{r})e^{(\theta+\grave{\theta})i}$		$\dfrac{re^{i\theta}}{\grave{r}e^{i\grave{\theta}}} = \dfrac{r}{\grave{r}}e^{(\theta-\grave{\theta})i}$	
.3	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$		$\left(re^{i\theta} = \grave{r}e^{i\grave{\theta}}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} r = \grave{r} \\ \theta = \grave{\theta} + 2\pi k \end{cases}$	
.4	دستور دوموافر في الشكل الأسي $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$			
.5	$\overline{Z} = r\,e^{-i\theta} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$		$Z = r\,e^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$	
.6	علاقتا اويلر			

$$\begin{array}{rl} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \\ \hline e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2\cos\theta \end{array} \quad \boxed{+} \quad (\div 2)$$

$$\boxed{\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta}$$

$$\begin{array}{rl} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \\ \hline e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i\sin\theta \end{array} \quad \boxed{-} \quad (\div 2i)$$

$$\boxed{\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta}$$

تمرين: ليكن Z عدد عقدي طويلته الواحد برهن صحة كل مما يلي:

♦ $\dfrac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1} = i\tan\theta$ $: Z \neq \{i, -i\}$

بما ان $\left(Z = e^{i\theta} \Leftarrow |Z| = r = 1\right)$

$$L_1 = \frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1} = \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = \frac{e^{i\theta}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}{e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}$$

$$= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \underset{\text{حسب اويلر}}{=} \frac{2i\sin\theta}{2\cos\theta} = i\tan\theta = L_2$$

تدريب: ليكن $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ اعط الشكل الأسي للعدد العقدي $Z = 1 + e^{2\theta i}$

$$Z = 1 + e^{2\theta i} = e^{\theta i}\left[\frac{1}{e^{\theta i}} + e^{\theta i}\right] = e^{\theta i}\left[e^{-\theta i} + e^{\theta i}\right] = 2\cos\theta\, e^{\theta i}$$

بما ان $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\theta > 0$ وبالتالي الشكل الأسي للعدد هو: $Z = 2\cos\theta\, e^{\theta i}$

****

تدرب صفحة 116 :

1) نضع $Z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}$, $Z_2 = 3e^{\frac{-\pi}{4}i}$, $Z_3 = \sqrt{2}\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$ جد الشكل الأسي للأعداد الآتية.

$Z_1.Z_2$, $\dfrac{Z_1}{Z_3}$, Z_1^3 , $Z_1.Z_2.Z_3$, Z_3^4 , $\dfrac{Z_2}{Z_3}$

♦ $Z_1.Z_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}.3e^{\frac{-\pi}{4}i} = 3e^{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)i} = 3e^{\frac{\pi}{12}i}$

- $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{3e^{\frac{-\pi}{4}i}} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}.e^{\frac{\pi}{4}i}}{3} = \frac{1}{3}e^{\frac{7\pi}{12}i}$
- $Z_1^3 = \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^3 = e^{\frac{3\pi}{3}i} = e^{\pi i}$
- $Z_1.Z_2.Z_3 = (Z_1.Z_2)(Z_3) = \left(3e^{\frac{\pi}{12}i}\right).\left(\sqrt{2}.e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) = 3\sqrt{2}.e^{\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = 3\sqrt{2}.e^{\frac{9\pi}{12}i} = 3\sqrt{2}.e^{\frac{3\pi}{4}i}$
- $Z_3^4 = \left(\sqrt{2}.e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{\frac{8\pi}{3}i} = 4e^{\frac{8\pi}{3}i} = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$
- $\frac{Z_2}{Z_3} = \frac{3.e^{\frac{-\pi}{4}i}}{\sqrt{2}.e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.e^{\frac{-\pi}{4}i}.e^{\frac{-2\pi}{3}i} = \frac{3}{\sqrt{2}}.e^{\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)i} = \frac{3}{\sqrt{2}}.e^{\frac{-11\pi}{12}i}$

---

2) اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$Z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$

$r = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

$\boxed{Z_1 = 4\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{3}i}}$

$Z_2 = (1+i)\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}.\sqrt{3}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= \sqrt{6}.e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i}$

$\boxed{Z_2 = \sqrt{6}.e^{\frac{7\pi}{12}i}}$

$Z = 1+i$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$Z = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$Z_3 = (1-\sqrt{2}).e^{\frac{\pi}{4}i}$

$= (\sqrt{2}-1)e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$= (\sqrt{2}-1)e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)i}$

$\boxed{Z_3 = (\sqrt{2}-1).e^{\frac{5\pi}{4}i}}$

بما ان r يجب ان تكون نكتب:

$(1-\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}-1)$

$= (\sqrt{2}-1).e^{\pi i}$

$;(e^{\pi i} = -1)$

$Z_4 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^4$

$= \left(2.e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4$

$= (2)^4.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$\boxed{Z_4 = 16.e^{\frac{4\pi}{3}i}}$

$Z = 1+\sqrt{3}i$

$r = 2$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$Z = 2.e^{\frac{\pi}{3}i}$

$Z_5 = \frac{6}{1+i}$

$= \frac{6}{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}}$

$\boxed{Z_5 = 3\sqrt{2}.e^{\frac{-\pi}{4}i}}$

$Z = 1+i$

$r = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$Z = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$

$Z_6 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^4.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

وجدنا من Z_4 ان:

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^4 = 16.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$Z_6 = 16.e^{\frac{4\pi}{3}i}.e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$= 16.e^{\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)i}$

$Z_6 = 16.e^{\frac{8\pi}{3}i} = 16.e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$$Z_7 = \left[\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right]^5$$

وجدنا ان:

$$1+i = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\sqrt{3}+i = 2.e^{\frac{\pi}{6}i}$$

ومنه :

$$Z_7 = \left[\frac{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}}{2.e^{\frac{\pi}{6}i}}\right]^5 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)i}\right]^5$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^5}.\left[e^{\left(\frac{\pi}{12}\right)i}\right]^5$$

$$\boxed{Z_7 = \frac{1}{4\sqrt{2}}.e^{\frac{5\pi}{12}i}}$$

$$Z_8 = \frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^5}{(1-i)^4}$$

$$Z = 2\sqrt{3}+2i$$

$$r = 4$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\grave{Z} = 1-i$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$$

$$\grave{Z} = \sqrt{2}\,.e^{\frac{-\pi}{4}i}$$

$$Z_8 = \frac{\left(4.e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^5}{\left(\sqrt{2}.e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^4} = \frac{(4)^5.e^{\frac{5\pi}{6}i}}{\left(\sqrt{2}\right)^4.e^{\frac{-4\pi}{4}i}} = (4)^4.e^{\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)i}$$

$$\boxed{Z_8 = 256.e^{\frac{11\pi}{6}i}}$$

$$Z_9 = -12.e^{\frac{\pi}{4}i}$$

نعلم ان: $\left(e^{\pi i} = -1\right)$

$$= 12e^{\pi i}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$= 12e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)i}$$

$$\boxed{Z_9 = 12.e^{\frac{5\pi}{4}i}}$$

$$Z_{10} = 3i.e^{\frac{\pi}{3}i}$$

نعلم ان: $\left(e^{\frac{\pi}{2}i} = i\right)$

$$= 3e^{\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$= 3.e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)i}$$

$$\boxed{Z_{10} = 3.e^{\frac{5\pi}{6}i}}$$

---

3) نضع $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{\pi}{3}i}$ بين اي الخواص الآتية صحيحة:

$\boxed{1}$ $|Z| = 1$

نعلم ان: $\left(-1 = e^{\pi i}\right)$ ومنه:

$$Z = \frac{-\sqrt{2}\,.e^{\frac{\pi}{3}i}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}.e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{e^{\frac{4\pi}{3}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i}} = e^{\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)i} = e^{\frac{13\pi}{12}i} \quad \Rightarrow |Z| = 1$$

(صحيحة)

$\boxed{2}$ $Z = -(1-i).e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$= \frac{-(1-i)(1+i)}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{-2}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i} \neq \frac{-\sqrt{2}}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i}$$

(غير صحيحة)

$\boxed{3}$ $argZ = \frac{-\pi}{12}$

وجدنا ان:

$$Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}.e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{13\pi}{12}i}$$

$$argZ = \frac{13\pi}{12} \neq \frac{-\pi}{12}$$

(غير صحيحة)

$\boxed{4}$ $Z = e^{\frac{13\pi}{12}i}$

بعد تحويل Z إلى الشكل الأسي نجد $Z = \frac{-\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{3}i}}{1+i} = e^{\frac{13\pi}{12}i}$ اي ان العلاقة (صحيحة).

***

المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية:

لتكن المعادلة $aZ^2+bZ+c=0$ حيث $a,b,c\in R$ بشرط $a\neq 0$

نوجد المميز Δ: $\Delta=b^2-4ac$ ونميز ثلاث حالات

$\Delta<0$ نوجد $\sqrt{-\Delta}$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
$Z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان.	$Z_1=Z_2=\dfrac{-b}{2a}$ للمعادلة جذر مضاعف	$Z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $Z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ للمعادلة جذرين حقيقيين.

ملاحظة:

يمكن حل المعادلة من الشكل $aZ^2+bZ+c=0$ بالإتمام إلى مربع كامل بعد إخراج a عامل مناسب .

****

تمرين: حل في C المعادلة $Z^2+4Z+29=0$ بطريقتين.

طريقة الدستور Δ:	طريقة الإتمام إلى مربع كامل:
$Z^2+4Z+29=0$ $\Delta=16-4(1)(29)=-100<0$ **للمعادلة جذران عقديان مترافقان:** $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{100}=10$ $Z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+10i}{2}=-2+5i$ $Z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-10i}{2}=-2-5i$	$Z^2+4Z+29=0$ $\underbrace{Z^2+4Z+4}-4+29=0$ $(Z+2)^2+25=0$ $(Z+2)^2=-25$ $(Z+2)^2=25i^2$ إما $Z+2=5i \Rightarrow Z=-2+5i$ أو $Z+2=-5i \Rightarrow Z=-2-5i$

تمرين: حل في C المعادلة $Z^2+3Z+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=9-4(1)(6)=-15<0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{15}$

$$Z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-3+i\sqrt{15}}{2}=\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i$$

$$Z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-3-i\sqrt{15}}{2}=\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i$$

****

ملاحظات:

1. **يمكن تحليل كثير الحدود aZ^2+bZ+c إلى جداء عوامل درجة أولى باستخدام القانون:**

$$aZ^2+bZ+c=a(Z-Z_1)(Z-Z_2)$$

2. **لكي نثبت ان Z_1 جذر للمعادلة $aZ^2+bZ+c=0$ نعوض Z_1 في المعادلة ويجب أن نحصل على $0=0$**

3. في المعادلة $aZ^2 + bZ + c = 0$
إذا كان $\Delta > 0$ وكان $a, b, c \in R$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان Z_2, Z_1 مختلفان.
وإذا كان $\Delta < 0$ وكان $a, b, c \in R$ فإن للمعادلة جذران عقديان مترافقان أي $Z_2 = \overline{Z_1}$ فعند معرفة احد الجذرين يمكن استنتاج الجذر الآخر مباشرة بأخذ المرافق.

4. بفرض Z_2, Z_1 جذرا المعادلة $Z^2 + p.Z + q = 0$ فإن المعادلة تكتب بالشكل:

$$Z^2 - (Z_1 + Z_2)Z + (Z_1.Z_2) = 0$$

حيث $p = -(Z_1 + Z_2)$, $q = Z_1.Z_2$

مثال: حلل في C كثير الحدود $4Z^2 - 12Z + 13$

$$4Z^2 - 12Z + 13 = 0$$
$$\Delta = 144 - 4(4)(13)$$
$$\Delta = -64 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{+64} = 8$$

$$Z_1 = \frac{12 + 8i}{8} = \frac{3}{2} + i$$

$$Z_2 = \frac{12 - 8i}{8} = \frac{3}{2} - i$$

$$4Z^2 - 12Z + 13 = 4\left(Z - \frac{3}{2} - i\right)\left(Z - \frac{3}{2} + i\right)$$

****

تمرين: لتكن المعادلة: $Z^2 + Z + 1 = 0$

1. تحقق من ان: $Z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ هو جذر للمعادلة السابقة ثم اوجد الجذر الآخر.

نعوض Z_1 في المعادلة:

$$L_1 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1$$
$$= \frac{1}{4} - 2.\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \frac{3}{4}i^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0 = L_2$$

فإن: $Z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ هو جذر للمعادلة السابقة.

الجذر الآخر: $Z_2 = \overline{Z_1} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ لأن $a, b, c \in R$

2. اكتب $Z^2 + Z + 1$ على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى.

$$Z^2 + Z + 1 = \left(Z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(Z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

****

تمرين: في كل من الحالات الآتية اوجد معادلة من الشكل: $Z^2 + pZ + q = 0$ حيث العدد Z_1 جذراً لها. حيث $p, q \in R$

$\boxed{1}$ $Z_1 = i$

$$Z_2 = \overline{Z_1} = -i$$

◆ $Z_1 + Z_2 = i - i = 0$

◆ $Z_1 . Z_2 = (i)(-i) = -i^2 = 1$

$$Z^2 - (Z_1 + Z_2)Z + (Z_1.Z_2) = 0$$
$$Z^2 - 0Z + 1 = 0$$
$$\boxed{Z^2 + 1 = 0}$$

$\boxed{2}$ $Z_1 = 5 - i$

$$Z_2 = \overline{Z_1} = 5 + i$$

◆ $Z_1 + Z_2 = 5 - i + 5 + i = 10$

◆ $Z_1 . Z_2 = (5 - i)(5 + i) = 25 + 1 = 26$

$$Z^2 - (Z_1 + Z_2)Z + (Z_1.Z_2) = 0$$
$$\boxed{Z^2 - 10Z + 26 = 0}$$

تمرين: جد عددين عقديين p ، q حتى تقبل المعادلة $Z^2+pZ+q=0$ العددين $Z_1=3-i$, $Z_2=-4+2i$ جذرين لها.

نعلم أن المعادلة السابقة تكتب بالشكل:

$Z^2-(z_1+z_2)Z+(z_1.z_2)=0 \qquad , \qquad (Z_1+Z_2=-p \quad , \quad Z_1.Z_2=q)$

- $Z_1+Z_2=-1+i=-p \Rightarrow \boxed{p=1-i}$
- $Z_1.Z_2=-12+6i+4i-2i^2=-10+10i \Rightarrow \boxed{q=-10+10i}$

$Z^2-(-1+i)Z-10+10i=0$

تدرب صفحة 118 :

1) حل في C كلاً من المعادلات الآتية بالمجهولين Z, $\bar{Z}$

$\boxed{2}\begin{cases}3Z+\bar{Z}=5+2i & (1)\\ -Z+\bar{Z}=1-2i & (2)\end{cases}$

$① - ② \Rightarrow 4Z=4+4i \Rightarrow \boxed{Z=1+i}$

نعوض في ② فنجد:

$-1-i+\grave{Z}=1-2i$

$\boxed{\grave{Z}=2-i}$

$\boxed{1}\begin{cases}3Z+\bar{Z}=2-5i & (1)\\ Z-\bar{Z}=-2+i & (2)\end{cases}$

$① + ② \Rightarrow 4Z=-4i \Rightarrow \boxed{Z=-i}$

نعوض في ② فنجد:

$-i-\grave{Z}=-2+i$

$\boxed{\grave{Z}=2-2i}$

$\boxed{3}\begin{cases}2iZ+\bar{Z}=2i & (1)\\ 3Z-i\bar{Z}=1 & (2)\end{cases}$

نضرب طرفي ① بـ i

$\boxed{1} \qquad -2Z+i\grave{Z}=-2$

$② \qquad 3Z-i\grave{Z}=1$

$② + \boxed{1} \Rightarrow \boxed{Z=-1}$

نعوض في ② فنجد:

$-3-i\grave{Z}=1 \Rightarrow -i\grave{Z}=4$

$\grave{Z}=\frac{-4}{i} \Rightarrow \boxed{\grave{Z}=4i}$

---

2) حل في C كلاً من المعادلات الآتية:

$\boxed{2}\ Z^2-5Z+9=0$

$\Delta=b^2-4ac=25-4(1)(9)=-11<0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{11}$

$Z_1=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}=\frac{5+\sqrt{11}\,i}{2}=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i$

$Z_2=\frac{-b-\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}=\frac{5-\sqrt{11}\,i}{2}=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$

$\boxed{1}\ 2Z^2-6Z+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=36-4(2)(5)=-4<0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{4}=2$

$Z_1=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}=\frac{6+2i}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

$Z_2=\frac{-b-\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}=\frac{6-2i}{4}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

3 $Z^2 + Z + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{3}$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

4 $Z^2 - 2Z + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(3) = -8 < 0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{2}\, i}{2} = 1 + \sqrt{2}\, i$$

$$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{2}\, i}{2} = 1 - \sqrt{2}\, i$$

5 $Z^2 - 2(1 + \sqrt{2})Z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$Z^2 - 2(1 + \sqrt{2})Z + (1 + \sqrt{2})^2 - (1 + \sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

$\left(Z - (1 + \sqrt{2})\right)^2 - (1 + 2\sqrt{2} + 2) + 2\sqrt{2} + 4 = 0$

$\left(Z - 1 - \sqrt{2}\right)^2 - 1 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 4 = 0$

$\left(Z - 1 - \sqrt{2}\right)^2 + 1 = 0$

$\left(Z - 1 - \sqrt{2}\right)^2 - i^2 = 0$

$(Z - 1 - \sqrt{2} - i)(Z - 1 - \sqrt{2} + i) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1 = 1 + \sqrt{2} + i \\ Z_2 = 1 + \sqrt{2} - i \end{cases}$$

6 $Z^2 - 2(\cos\theta)Z + 1 = 0$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$Z^2 - 2(\cos\theta)Z + \cos^2\theta - \cos^2\theta + 1 = 0$

$(Z - \cos\theta)^2 - \cos^2\theta + 1 = 0$

$(Z - \cos\theta)^2 = \cos^2\theta - 1$

$(Z - \cos\theta)^2 = -\sin^2\theta$

$(Z - \cos\theta)^2 = i^2 \sin^2\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z - \cos\theta = i\sin\theta \\ Z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \text{او } Z - \cos\theta = -i\sin\theta \\ Z_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases}$$

3) جد عددين عقديين q, p كي تقبل المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$ العددين $3 - 5i , 1 + 2i$ جذرين لها.

ليكن Z_2 , Z_1 جذران للمعادلة، نعلم أن المعادلة السابقة تكتب بالشكل:

$Z^2 - (Z_1 + Z_2)Z + (Z_1.Z_2) = 0 \quad , \quad (Z_1 + Z_2 = -p \quad , \quad Z_1.Z_2 = q)$

- $Z_1 + Z_2 = 3 - 5i + 1 + 2i = 4 - 3i = -p \Rightarrow \boxed{p = -4 + 3i}$
- $Z_1.Z_2 = (3 - 5i)(1 + 2i) = 3 + 6i - 5i + 10 = 13 + i \Rightarrow \boxed{q = 13 + i}$

4) احسب جداء الضرب $(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5)$ ثم حل في C المعادلة:

$$Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15 = 0$$

- $(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5) = Z^4 + 2Z^3 + 5Z^2 + 2Z^3 + 4Z^2 + 10Z - 3Z^2 - 6Z - 15$
  $= Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15$
- $Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15 = 0$

$(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5) = 0$

إما $Z^2 + 2Z - 3 = 0$

$(Z + 3)(Z - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{Z_1 = -3} \\ \text{او } Z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{Z_2 = 1} \end{cases}$$

او $Z^2 + 2Z + 5 = 0$: بالإتمام إلى مربع كامل

$Z^2 + 2Z + 1 - 1 + 5 = 0$

$(Z + 1)^2 + 4 = 0$

$(Z + 1)^2 = 4i^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z + 1 = 2i \Rightarrow \boxed{Z_3 = -1 + 2i} \\ \text{او } Z + 1 = -2i \Rightarrow \boxed{Z_4 = -1 - 2i} \end{cases}$$

مكتبة هديل

الجذور التربيعية:

نقول ان $w = x + yi$ جذر تربيعي للعدد المركب $Z = a + bi$ إذا وفقط إذا كان $w^2 = Z$.

$$|w^2| = |Z|$$
$$|w|^2 = |Z|$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$w^2 = Z$$
$$(x+iy)^2 = a + bi$$
$$x^2 + 2xy\,i + \underbrace{i^2}_{-1} y^2 = a + bi$$
$$\underline{\underline{x^2 - y^2}} + \underline{2xy}\,i = \underline{\underline{a}} + \underline{b}i$$

بالمطابقة

$$x^2 - y^2 = a$$
$$2xy = b$$

تمرين: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 3 + 4i$

نفرض $w = x + yi$ هو الجذر التربيعي لـ Z ومنه:

$\boxed{1}\; x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5$

$\boxed{2}\; x^2 - y^2 = 3$

$\boxed{3}\; 2xy = 4$

$\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$ إما $x = +2$ أو $x = -2$

$\boxed{1} - \boxed{2} \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1$ إما $y = 1$ أو $y = -1$

من $\boxed{3}$ نجد ان y, x لهما نفس الإشارة ومنه:

$$w_1 = 2 + i \quad , \quad w_2 = -2 - i$$

تمرين: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 1 - 4\sqrt{5}\, i$

نفرض $w = x + i\,y$ هو الجذر التربيعي لـ Z ومنه:

$\boxed{1}\; x^2 + y^2 = 9$

$\boxed{2}\; x^2 - y^2 = 1$

$\boxed{3}\; 2xy = -4\sqrt{5}$

$\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow 2x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 5$ إما $x = \sqrt{5}$ أو $x = -\sqrt{5}$

$\boxed{1} - \boxed{2} \Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$ إما $y = 2$ أو $y = -2$

من $\boxed{3}$ نجد ان y, x لهما إشارتين مختلفتين ومنه:

$$w_1 = \sqrt{5} - 2i \quad , \quad w_2 = -\sqrt{5} + 2i$$

المعادلات في C

$\boxed{1}$ معادلة تحوي مجهول Z بالأشكال الآتية:

a. تحوي Z فقط
b. تحوي $\overline{Z}$ فقط
} بالعزل نحصل على Z

c. تحوي Z و $\overline{Z}$

هنا نبدل كل $Z = x + yi$ و $\overline{Z} = x - yi$

ننشر ونعزل المجاهيل إلى طرف و المعاليم إلى طرف آخر

نقارن القسم الحقيقي في الطرفين

نقارن القسم التخيلي في الطرفين

نحل المعادلات الناتجة فتنتج قيمتي x و y ومنهما نحصل على $Z = x + yi$

مثال : حل في C المعادلات الآتية بالمجهول Z:

$\boxed{1}$ $3\overline{Z} - 9 = 6 + 3i$

$$3\overline{Z} = 6 + 3i + 9$$
$$3\overline{Z} = 15 + 3i$$
$$\overline{Z} = 5 + i$$
$$Z = 5 - i$$

$\boxed{2}$ $2Z - 10i = 4 + 6i$

$$2Z = 10i + 4 + 6i$$
$$2Z = 4 + 16i$$
$$Z = 2 + 8i$$

$\boxed{3}$ $\dfrac{\overline{Z} - i}{\overline{Z} + 2} = i$

$$\overline{Z} - i = i(\overline{Z} + 2)$$
$$\overline{Z} - i = i\overline{Z} + 2i$$
$$\overline{Z} - i\overline{Z} = 2i + i$$
$$\overline{Z}(1 - i) = 3i$$
$$\overline{Z} = \frac{3i}{1 - i}$$
$$\overline{Z} = \frac{3i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$
$$\overline{Z} = \frac{-3 + 3i}{1 + 1}$$
$$\overline{Z} = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$Z = \frac{-3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$\boxed{4}$ $2Z + i\overline{Z} = 5 + 10i$

نبدل كل $Z = x + yi$

وكل $\overline{Z} = x - yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 + 10i$$
$$2x + 2yi + xi + y = 5 + 10i$$
$$2x + y + (x + 2y)i \underset{\text{بالمقارنة}}{=} 5 + 10i$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x + y = 5 & (1) \\ x + 2y = 10 & (2) \end{array}\right\}$$

نضرب (2) بـ (-2) ونجمعها مع (1):

$$-2x - 4y = -20$$
$$\underline{2x + y = 5}$$
$$-3y = -15$$
$$\boxed{y = 5}$$

نعوض في (1) فنجد : $\boxed{x = 0}$

و منه : $Z = 0 + 5i = 5i$

2 حل جملة معادلتين بمجهولين $Z, \grave{Z}$:

طريقة الحل :

1) بالتعويض 2) بالجمع 3) بالتساوي

مثال : حل في C جملة المعادلتين بالمجهولين $Z, \grave{Z}$:

$$\begin{cases} ① & 2Z + i\grave{Z} = 5 + 10i \\ ② & 2iZ + 3\grave{Z} = 6 + i \end{cases}$$

نضرب ① بـ $(-i)$ ونجمعها مع ②:

$$\begin{aligned} -2iZ + \grave{Z} &= 10 - 5i \\ 2iZ + 3\grave{Z} &= 6 + i \\ \hline 4\grave{Z} &= 16 - 4i \\ \boxed{\grave{Z} = 4 - i} \end{aligned}$$

بالجمع

نعوض في المعادلة ① :

$$2Z + i(4 - i) = 5 + 10i$$
$$2Z + 4i + 1 = 5 + 10i$$
$$2Z = 4 + 6i$$
$$\boxed{Z = 2 + 3i}$$

---

3 حل معادلة من الشكل : $Z^2 = w = a + bi$ ، أو بمعنى آخر إيجاد الجذور التربيعية للعدد العقدي:

مثال : حل المعادلة $w = -5 + 12i$

نفرض $Z = x + yi$ جذر تربيعي لـ w فنجد:

① $x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$

② $x^2 - y^2 = -5$

③ $2xy = 12 > 0$

①+②: $2x^2 = 8 \to x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

①−②: $2y^2 = 18 \to y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

من ③ y , x متفقان بالإشارة :

$Z_1 = 2 + 3i$

$Z_2 = -2 - 3i$

---

4 حل المعادلة من الشكل $aZ^2 + bZ + c = 0$ باستخدام الدستور $\Delta = b^2 - 4ac$ حيث $a, b, c \in R$:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$ نوجد $\sqrt{-\Delta}$
$Z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$Z_1 = Z_2 = \dfrac{-b}{2a}$	$Z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
للمعادلة جذرين حقيقيين.	للمعادلة جذر مضاعف	للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

مثال① : حل المعادلة في C: $4Z^2 + 6Z + 9 = 0$

$$a = 4, \quad b = 6, \quad c = 3$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(4)(3) = -12 < 0 \Rightarrow$ للمعادلة جذران عقديان مترافقان

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$Z_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{3}\,i}{8} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$Z_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{3}\,i}{8} = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

5 حل المعادلة من الشكل $aZ^2 + bZ + c = 0$ باستخدام الدستور $\Delta = b^2 - 4ac$ حيث a , b , c احدهم على الأقل لا ينتمي لـ R

عدد عقدي $\Delta =$ نوجد الجذور التربيعية لـ Δ للمعادلة جذران عقديان $Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a}$ $Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$	$\Delta = a$, a عدد حقيقي ويكون للمعادلة جذران عقديان مختلفان

مثال② : حل المعادلة في C: $Z^2 - (3+5i)Z - 4 + 7i = 0$

$a = 1$, $b = -3 - 5i$, $c = -4 + 7i$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3 - 5i)^2 - 4(1)(-4 + 7i)$$

$$\Delta = 9 + 30i - 25 + 16 - 28i = 2i$$

بفرض $w = x + yi$ جذر تربيعي لـ Δ

① $x^2 + y^2 = \sqrt{0+4} = 2$

② $x^2 - y^2 = 0$

③ $2xy = 2 > 0$

①+② : $2x^2 = 2 \to x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

①−② : $2y^2 = 2 \to y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

من ③ x , y متفقان بالإشارة :

$$w_1 = 1 + i$$

$$w_2 = -1 - i$$

$$Z_1 = \frac{3 + 5i + 1 + i}{2} = 2 + 3i$$

$$Z_2 = \frac{3 + 5i - 1 - i}{2} = 1 + 2i$$

---

6 المعادلة من الدرجة الثالثة :

نميز عدة حالات :

1) المعادلة من الشكل : $\alpha Z^3 + \beta = 0$ حيث α , β أعداد حقيقية

نستخدم القانون :

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

مثال : $Z^3 - 8 = (Z - 2)(Z^2 + 2Z + 4)$

مثال : $27Z^3 + 1 = (3Z + 1)(9Z^2 - 3Z + 1)$

2) المعادلة من الشكل : $aZ^3 + bZ^2 + cZ + d = 0$

طريقة الحل : بفرض $Z = Z_1$ حل المعادلة نحصل عليه بالتجريب أو من نص السؤال

عندئذ $(Z - Z_1)$ هو أحد عوامل المعادلة

نكتب المعادلة بشكل جداء عاملين أحدهما درجة أولى و الأخر درجة ثانية

$$(Z - Z_1)(\grave{a}Z^2 + \grave{b}Z + \grave{c}) = 0$$

النشر و المطابقة نحصل على الثوابت $\grave{a}$, $\grave{b}$, $\grave{c}$ أو مباشرة باستخدام القسمة الإقليدية إذا عُلم الحل Z_1

مثال : حل المعادلة :

$$Z^3-(3+2i)Z^2+(2+6i)Z-4i=0$$

إذا علمت انها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً

الحل : بفرض $Z=ai$ حل للمعادلة و منه $(Z-ai)$ عامل من عوامل المعادلة

المعادلة من الشكل :

$$(Z-ai)(Z^2+bZ+c)=0$$

$$Z^3+bZ^2+cZ-aiZ^2-abiZ-aci=0$$

$$\left.\begin{array}{r} Z^3+(b-ai)Z^2+(c-abi)Z-aci=0 \\ Z^3-(3+2i)Z^2+(2+6i)Z-4i=0 \end{array}\right\} \text{بالمطابقة}$$

$$b-ai=-3-2i \Rightarrow \boxed{b=-3},\boxed{a=2}$$

$$c-abi=2+6i \Rightarrow \boxed{c=2}\ ,(-ab=6)\ \text{محققة}$$

$$(-aci=-4i)\ \text{محققة}$$

و منه المعادلة تكتب بالشكل :

$$(Z-2i)(Z^2-3Z+2)=0$$

إما $Z-2i=0 \Rightarrow \boxed{Z=2i}$

او $Z^2-3Z+2=0$

$$(Z-2)(Z-1)=0$$

إما $Z-2=0 \Rightarrow \boxed{Z=2}$

او $Z-1=0 \Rightarrow \boxed{Z=1}$

****

أنشطة

نشاط (1) كثيرات الحدود:

اولاً: مثال على كثير حدود من الدرجة الثالثة:

نهدف إلى حل المعادلة $(1): Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = 0$

① علل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق $Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = (z+1).Q(z)$

بما ان $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$ فإن (-1) هو أحد جذور المعادلة السابقة فهي تقبل القسمة على $z+1$ ويوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(Z)$ يحقق:

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = (Z+1)\,Q(Z)$$

② عين $Q(Z)$ ثم حل المعادلة $Q(Z) = 0$

$$\begin{array}{r|l} & Z^2 - 4Z + 7 \\ \hline Z+1 & Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 \\ & \underline{-Z^3 \mp Z^2} \\ & -4Z^2 + 3Z + 7 \\ & \underline{\pm 4Z^2 \pm 4Z} \\ & 7Z + 7 \\ & \underline{-7Z \mp 7} \\ & 0 \end{array}$$

$: \dfrac{Z^3}{Z} = Z^2$

$: \dfrac{-4Z^2}{Z} = -4Z$

$: \dfrac{7Z}{Z} = 7$

$: Q(Z) = Z^2 - 4Z + 7$

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = (Z+1)(Z^2 - 4Z + 7)$$

$$Z^2 - 4Z + 7 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(1)(7) = -12 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان مختلفان

$$\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$Z_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}i}{2} = 2 - \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}i}{2} = 2 + \sqrt{3}i$$

③ لتكن A, B, C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (1) اثبت ان ABC مثلث متساوي الأضلاع.

$$Z_C = 2 + \sqrt{3}i \quad , \quad Z_B = 2 - \sqrt{3}i \quad , \quad Z_A = -1$$

نحسب أطوال اضلاع المثلث ABC:

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 3 - \sqrt{3}i \Rightarrow AB = |Z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$
$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = 3 + \sqrt{3}i \Rightarrow AC = |Z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$
$$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = 2\sqrt{3}i \Rightarrow BC = |Z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{0+12} = 2\sqrt{3}$$

$AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

ثانياً: مثال على كثير حدود من المرتبة الرابعة:

نهدف إلى حل المعادلة $(2): Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 = 0$

① اثبت بوجه عام انه إذا كانت أمثال P حقيقية وكان Z_0 جذراً للمعادلة $P(Z) = 0$ كان $\overline{Z_0}$ أيضاً جذراً للمعادلة $P(Z) = 0$.

بفرض لدينا كثير الحدود:

$$P(Z)=a_nZ^n+a_{n-1}Z^{n-1}+\cdots+a_1Z+a_0$$

إذا كان Z_0 جذراً للمعادلة $P(Z)=0$ فإن:

$$a_n{Z_0}^n+a_{n-1}{Z_0}^{n-1}+\cdots+a_1Z_0+a_0=0$$

نأخذ مرافق الطرفين وبما أن الأمثال حقيقية فإن:

$$\underbrace{a_n\overline{Z_0}^n+a_{n-1}\overline{Z_0}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{Z_0}+\overline{Z_0}}_{P(\overline{Z_0})=0}=0$$

ومنه $\overline{Z_0}$ جذراً للمعادلة $P(Z)=0$

② تحقق ان $i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة (2) ماذا تستنتج بالاستفادة من اولاً؟

$$P(i\sqrt{3})=9i^4-6(3\sqrt{3})i^3+24(3i^2)-18(i\sqrt{3})+63$$
$$=9+18\sqrt{3}i-72-18\sqrt{3}i+63=0$$

$i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة ونستنتج ان $-i\sqrt{3}$ احد حلول المعادلة (2) اي $P(-i\sqrt{3})=0$

③ استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يجعل المعادلة (2) تكتب $(Z^2+3)Q(Z)=0$

بما ان $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$ من جذور المعادلة (2) فإن P يقبل القسمة على $(Z-i\sqrt{3})$, $(Z+i\sqrt{3})$ فهو يقبل القسمة على جداء ضربهما إذاً: يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية Q تحقق $P(Z)=(Z^2+3).Q(Z)$

④ حل المعادلة (2) لتكن A , B , C , D نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (2) اثبت ان هذه النقاط تقع على دائرة واحدة ، عين مركزها ونصف قطرها.

$$\begin{array}{r|l}
 & Z^2-6Z+21 \\ \hline
Z^2+3 & Z^4-6Z^3+24Z^2-18Z+63 \\
 & \underline{-Z^4+0\ \mp 3Z^2} \\
 & -6Z^3+21Z^2-18Z+63 \\
 & \underline{\pm 6Z^3+\ 0\ \pm 18Z} \\
 & 21Z^2+63 \\
 & \underline{\mp 21Z^2\mp 63} \\
 & 0
\end{array}$$

$:\ \dfrac{Z^4}{Z^2}=Z^2$

$:\ \dfrac{-6Z^3}{Z^2}=-6Z$

$:\ \dfrac{21Z^2}{Z^2}=21$

$:\ Q(Z)=Z^2-6Z+21$

$$Z^4-6Z^3+24Z^2-18Z+63=(Z^2+3)(Z^2-6Z+21)$$

لنوجد جذور:

$$Z^2-6Z+21=0$$

$$\Delta=36-4(1)(21)=-48$$
$$\sqrt{-\Delta}=4\sqrt{3}$$
$$Z_1=\frac{6-4\sqrt{3}i}{2}=3-2\sqrt{3}i$$
$$Z_2=\frac{6+4\sqrt{3}i}{2}=3+\sqrt{3}i$$

جذور المعادلة (2) هي:

$Z_A=\sqrt{3}i$, $Z_B=-\sqrt{3}i$, $Z_C=3-2\sqrt{3}i$, $Z_D=3+2\sqrt{3}i$

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\overrightarrow{AB}}=-2\sqrt{3}i \\ Z_{\overrightarrow{DC}}=-4\sqrt{3}i \end{array}\right\}\Rightarrow$$

AB , DC متوازيان

فالشكل $ABCD$ شبه منحرف

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\overrightarrow{AD}} = 3 + \sqrt{3}i \Rightarrow AD = 2\sqrt{3} \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = 3 - \sqrt{3}i \Rightarrow BC = 2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow AD = BC$$

أصبح $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين فالرباعي دائري والنقاط D, C, B, A تقع على دائرة واحدة مركزها منتصف $[DC]$ وليكن $Z_{\grave{O}}$ ويمثله العدد العقدي $Z_{\grave{O}} = 3$ نصف قطرها $Z_{\grave{O}A} = -3 + \sqrt{3}i$

$$\grave{O}A = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

****

نشاط (2) الجذور التربيعية لعدد عقدي:

اولاً: تعيين الجذور التربيعة للعدد i:

① اكتب i بالشكل الأسي:

$$i = 1e^{\frac{\pi}{2}i}$$

② حل المعادلة $Z^2 = i$:

$$Z^2 = 1.e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$Z_1 = 1.e^{\frac{\pi}{4}i} \qquad Z_2 = -e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$= e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

ثانياً: تعيين الجذور التربيعية للعدد $1 + i$:

① أثبت أن حل المعادلة $(x + iy)^2 = 1 + i$ في R يؤول إلى تعيين x , y تحققان:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$(x+iy)^2 = 1 + i \qquad (*)$$

$$x^2 + 2xyi + i\underbrace{y^2} = 1 + i$$

$$(x^2 - y^2) + (2xy)i = 1 + i$$

بالمطابقة $x^2 - y^2 = 1 \quad , \quad 2xy = 1$

بأخذ طويلة المعادلة $(*)$:

$$|(x+iy)^2| = |1+i|$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على المعادلات الثلاث المطلوبة.

② حل المعادلة $Z^2 = 1 + i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} & ① \\ x^2 - y^2 = 1 & ② \\ 2xy = 1 & ③ \end{cases}$$

$$① + ② \Rightarrow 2x^2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = +\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \\ \text{أو } x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$$

$$① - ② \Rightarrow 2y^2 = \sqrt{2} - 1$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad y = +\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ \text{او} \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

بما ان $2xy = 1 > 0$ فإن لـ y, x نفس الإشارة.

ومنه فإن حلول المعادلة السابقة:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,i \qquad , \quad Z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,i$$

③ حل المعادلة $Z^2 = 1 + i$ بأسلوب ثان، واستنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{8}$

$$1 + i = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{Z^2 = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

$$Z_1 = \sqrt[4]{2}.e^{\frac{\pi}{8}i} \qquad Z_2 = -\sqrt[4]{2}.e^{\frac{\pi}{8}i}$$

بالمقارنة بين ② و ③ نجد:

$$\sqrt[4]{2}.e^{\frac{\pi}{8}i} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,i \qquad \div \sqrt[4]{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}i = \frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}{\sqrt[4]{2}}i$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt[4]{2}} \qquad , \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}{\sqrt[4]{2}}$$

نشاط (3) الأعداد العقدية والتوابع المثلثية:

$\grave{Z}$, Z عددين عقديين طويلة كل منها تساوي الواحد وزاويتهما a, b بالترتيب

عندئذ العدد العقدي $Z\grave{Z}$ طويلة تساوي الواحد وزاويته $a+b$ والمطلوب :

1) اكتب العدد $Z\grave{Z}$ بطريقتين واثبت ان

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

لدينا $Z\grave{Z}$ عدد عقدي طويلته تساوي الواحد وزاويته $a + b$

$$Z\grave{Z} = \cos(a+b) + i\sin(a+b) \qquad \boxed{I}$$

ولدينا:

$$Z = \cos a + i\sin a$$
$$\grave{Z} = \cos b + i\sin b$$

ومنه:

$$Z\grave{Z} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$$
$$= \cos a\ .\cos b + i\cos a\ .\sin b + i\sin a\ .\cos b - \sin a\ .\sin b$$
$$Z\grave{Z} = (\cos a\ .\cos b - \sin a\ .\sin b) + i(\sin a\ .\cos b + \cos a\ .\sin b) \qquad \boxed{II}$$

بالمقارنة بين $\boxed{I}$ و $\boxed{II}$ نستنتج ان:

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \qquad \boxed{1}$$
$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b \qquad \boxed{2}$$

2) ما العلاقات التي تستنتجها عند استبدال $-b$ بالمقدار b ؛

نبدل $(-b)$ بالمقدار (b)

$$\cos(a-b)=\cos a\,.\cos b+\sin a\,.\sin b \qquad \boxed{\hat{1}}$$

$$\sin(a-b)=\sin a\,.\cos b-\cos a\,.\sin b \qquad \boxed{\hat{2}}$$

3) استنتج أن :

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b)) \qquad \sin a\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$

$$\cos a\sin b=\frac{1}{2}(\sin(a-b)-\sin(a+b)) \qquad \sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a-b)+\sin(a+b))$$

بجمع العلاقتين $\boxed{1}$ و $\boxed{\hat{1}}$ ثم نقسم على 2 نجد: $\cos a\,.\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

بطرح العلاقتين $\boxed{1}$ و $\boxed{\hat{1}}$ ثم نقسم على 2 نجد: $\sin a\,.\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

بجمع العلاقتين $\boxed{2}$ و $\boxed{\hat{2}}$ ثم نقسم على 2 نجد: $\sin a\,.\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

بطرح العلاقتين $\boxed{2}$ و $\boxed{\hat{2}}$ ثم نقسم على 2 نجد: $\cos a\,.\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a-b)-\sin(a+b)]$

4) ما العلاقات التي تستنتجها عند تعويض :

$$a+b=p \quad , \quad a-b=q$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\,.\sin\frac{p-q}{2} \qquad \cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\,.\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2}$$

5) استفد مما سبق لتحل في R المعادلة المثلثية :

$$\cos 3x-\cos 5x=\sin 6x+\sin 2x$$

$$\cos 3x-\cos 5x=\sin 6x+\sin 2x$$

$$-2\sin\left(\frac{3x+5x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-5x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{6x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right)$$

$$-2\sin(4x)\sin(-x)=2\sin(4x)\cos(2x)$$

$$\sin(4x)\sin(x)=\sin(4x)\cos(2x)$$

$$\sin(4x)\sin(x)-\sin(4x)\cos(2x)=0$$

$$\sin 4x(\sin x-\cos 2x)=0$$

إما $\sin 4x=0 \to 4x=\pi k \to x=\frac{\pi}{4}k$

أو $\sin x-\cos 2x=0$

$$\sin x=\cos 2x$$

$$\cos\frac{\pi}{2}-x=\cos 2x$$

إما $\frac{\pi}{2}-x=2x+2\pi k$

$$-3x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{3}\pi k$$

أو $\frac{\pi}{2}-x=-2x+2\pi k$

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

تمرينات ومسائل صفحة 122

1) لتكن النقاط D, C, B, A نقاطاً تمثل بالترتيب الأعداد العقدية:

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{-\pi}{6}i} \quad , \quad c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad b=e^{\frac{\pi}{3}i} \quad , \quad a=1$$

1. اكتب c بالشكل الأسي، واكتب d بالشكل الجبري.

$$c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{\theta=\frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{c=\sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{6}i}}$$

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{-\pi}{6}i}$$

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$

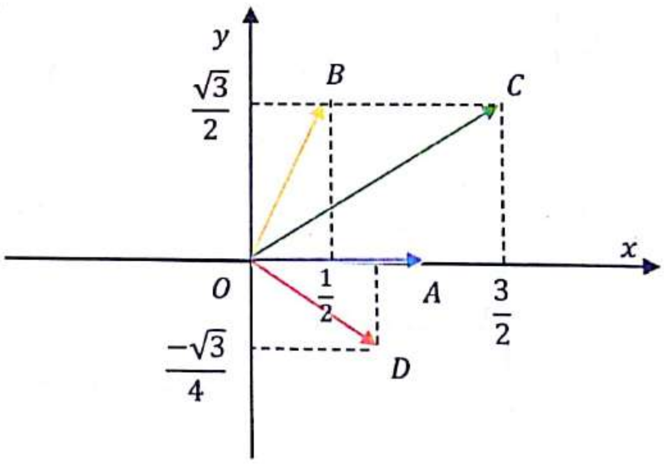
$$\boxed{d=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i}$$

2. a) وضع النقاط D, C, B, A في مستو مزود بمعلم متجانس.

من (1) $D\left(\frac{3}{4},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$ ، فرضاً $C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ، $A(1,0)$

$$b=e^{\frac{\pi}{3}i}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



b) اثبت ان الرباعي $OACB$ معين.

$$\overrightarrow{OA}\,(1,0)$$

$$\overrightarrow{OB}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}\,(1,0)$$

$$\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=1$$

ومنه $OACB$ شكل رباعي اضلاعه متساوية فهو معين

2) 1. اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة: $(Z^2 + 3\sqrt{3}Z + 9)(Z^2 - 3\sqrt{3}Z + 9) = 0$

إما

$$Z^2 + 3\sqrt{3}Z + 9 = 0$$

$$\Delta = 27 - 36 = -9 < 0 \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 3$$

$Z_1 = \dfrac{-3\sqrt{3} + 3i}{2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$ الشكل الجبري

$Z_2 = \dfrac{-3\sqrt{3} - 3i}{2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$ الشكل الجبري

لنكتب Z_1 بالشكل الأسي $r = \sqrt{\dfrac{27}{4} + \dfrac{9}{4}} = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

إذاً $\boxed{Z_1 = 3.e^{\frac{5\pi}{6}i}}$

وبما ان Z_2 هو مرافق Z_1 فإن:

$$\boxed{Z_2 = 3.e^{\frac{-5\pi}{6}i}}$$

أو

$$Z^2 - 3\sqrt{3}Z + 9 = 0$$

$$\Delta = 27 - 36 = -9 < 0 \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 3$$

$Z_3 = \dfrac{3\sqrt{3} + 3i}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$ الشكل الجبري

$Z_4 = \dfrac{3\sqrt{3} - 3i}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$ الشكل الجبري

لنكتب Z_3 بالشكل الأسي $r = \sqrt{\dfrac{27}{4} + \dfrac{9}{4}} = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

إذاً $\boxed{Z_3 = 3.e^{\frac{\pi}{6}i}}$

بما ان Z_4 هو مرافق Z_3 فإن:

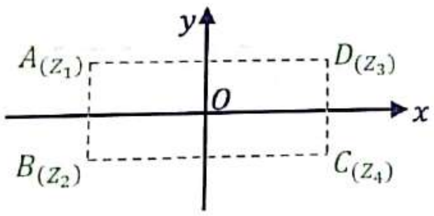
$$\boxed{Z_4 = 3.e^{\frac{-\pi}{6}i}}$$

2. اثبت ان النقاط D, C, B, A التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

نلاحظ ان: $OA = OB = OC = OD = 3$

أي الرباعي $ABCD$ تساوى طولا قطريه وتناصفا.

وبالتالي $ABCD$ مستطيل رؤوسه D, C, B, A تمثل جذور المعادلة السابقة.



3) بسط كتابة العدد العقدي $Z = \dfrac{1+\cos x - i\sin x}{1+\cos x + i\sin x}$ موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

الطريقة الأولى للحل:

$$Z = \frac{1+\cos x - i\sin x}{1+\cos x + i\sin x} = \frac{1+e^{-xi}}{1+e^{xi}} = \frac{e^{-xi}(e^{xi}+1)}{(1+e^{xi})} = e^{-xi}$$

قيم x التي تجعل هذا المقدار موجود:

$$1 + e^{xi} \neq 0$$

$$e^{xi} \neq -1$$

$$e^{xi} \neq e^{\pi i} \Rightarrow x \neq \pi + 2\pi k$$

$$\Rightarrow x \in R \backslash \{\pi + 2\pi k\}$$

الطريقة الثانية للحل:

نعلم أن:

$$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$Z=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-i2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+i2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\cos\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-i\sin\frac{x}{2}\right]}{2\cos\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right]}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{-x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}}=\frac{e^{\frac{-x}{2}i}}{e^{\frac{x}{2}i}}=e^{-xi}$$

4) 1. ليكن Z عدداً عقدياً ما وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

اثبت ان $\frac{Z-u\overline{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي.

أي لنثبت أن العدد العقدي يساوي مرافقه.

نضرب البسط والمقام بـ u :

$$\left(\overline{\frac{Z-u\overline{Z}}{1-u}}\right)=\frac{\overline{Z}-\overline{u}Z}{1-\overline{u}}$$

بما أن u عدد عقدي طويلته تساوي الواحد $(u\overline{u}=1)$:

$$=\frac{\overline{Z}u-u\overline{u}Z}{u-u\overline{u}}$$

ومنه العدد حقيقي

$$=\frac{\overline{Z}u-Z}{u-1}=\frac{Z-u\overline{Z}}{1-u}$$

2. نفترض ان $u\neq 1$ وان $\frac{Z-u\overline{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي اثبت انه إما ان يكون Z حقيقياً او ان يكون $|u|=1$

بما أن عدد $\frac{Z-u\overline{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي فهو يساوي مرافقه و نكتب :

$$\frac{Z-u\overline{Z}}{1-u}=\frac{\overline{Z}-\overline{u}Z}{1-\overline{u}}$$

$$(Z-u\overline{Z})(1-\overline{u})=(1-u)(\overline{Z}-\overline{u}Z)$$

$$Z-Z\overline{u}-u\overline{Z}+u\overline{u}\overline{Z}=\overline{Z}-\overline{u}Z-u\overline{Z}+u\overline{u}Z$$

$$Z-\overline{Z}+u\overline{u}\overline{Z}-u\overline{u}Z=0$$

$$Z-\overline{Z}-u\overline{u}(Z-\overline{Z})=0$$

$$(Z-\overline{Z})(1-u\overline{u})=0\Rightarrow\begin{cases}\text{إما}\quad Z-\overline{Z}=0\Rightarrow Z=\overline{Z}\ \Rightarrow\ \text{حقيقي } Z\\ \text{او}\quad 1-u\overline{u}=0\Rightarrow u\overline{u}=1\Rightarrow|u|=1\end{cases}$$

5) اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين:

$$Z_1=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}$$

$$=\frac{e^{xi}}{e^{-xi}}=e^{2xi}=\cos 2x+i\sin 2x\qquad;x\in R$$

$$Z_2=(3+i)^4$$

$$=((3+i)^2)^2$$

$$=(9+6i-1)^2=(8+6i)^2$$

$$=64+96i-36$$

$$=28+96i$$

6) ليكن $\acute{Z},Z$ عددين عقديين اثبت ان: $|Z+\acute{Z}|^2+|Z-\acute{Z}|^2=2|Z|^2+2|\acute{Z}|^2$

$$\left|\text{عدد مركب}\right|^2=\left(\text{العدد}\right)\left(\text{مرافق العدد}\right)$$

$$|Z|^2=Z.\overline{Z}$$

$$L_1=|Z+\acute{Z}|^2+|Z-\acute{Z}|^2=(Z+\acute{Z})\left(\overline{Z}+\overline{\acute{Z}}\right)+(Z-\acute{Z})\left(\overline{Z}-\overline{\acute{Z}}\right)$$

$$=Z\overline{Z}+Z\overline{\acute{Z}}+\acute{Z}\overline{Z}+\acute{Z}\overline{\acute{Z}}+Z\overline{Z}-Z\overline{\acute{Z}}-\acute{Z}\overline{Z}+\acute{Z}\overline{\acute{Z}}$$

$$=2Z\overline{Z}+2\acute{Z}\overline{\acute{Z}}=2|Z|^2+2|\acute{Z}|^2=L_2$$

7) ليكن المثلث ABC اثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

1. المثلث متساوي الساقين وراسه A

2. $2\sin\hat{B}\cos\hat{C} = \sin\hat{A}$

$$\overbrace{\text{المثلث متساوي الساقين وراسه } A}^{\boxed{1}} \Leftrightarrow \overbrace{2\sin\hat{B}\,.\cos\hat{C} = \sin\hat{A}}^{\boxed{2}}$$

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$

$$2\sin\hat{B}\cos\hat{C} = \sin\hat{A}$$
$$2\left[\frac{1}{2}\left(\sin(\hat{B}+\hat{C}) + \sin(\hat{B}-\hat{C})\right)\right] = \sin\hat{A}$$
$$\sin(\hat{B}+\hat{C}) + \sin(\hat{B}-\hat{C}) = \sin\hat{A}$$
$$\sin\hat{A} + \sin(\hat{B}-\hat{C}) = \sin\hat{A}$$
$$\sin(\hat{B}-\hat{C}) = 0 \Rightarrow \hat{B}-\hat{C} = 0 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

إذاً المثلث متساوي الساقين وراسه $\hat{A}$

$\boxed{2} \Leftarrow \boxed{1}$

مجموع زوايا المثلث 180^0 ، $\boxed{\sin\theta = \sin(180-\theta)}$

إذاً :
$$\sin\hat{A} = \sin(\hat{B}+\hat{C})$$
$$\sin\hat{A} = \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \cos\hat{B}\sin\hat{C}$$

(وبما ان $\hat{B} = \hat{C}$) إذاً:
$$\sin\hat{A} = 2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$$

---

8) تعيين مجموعة:

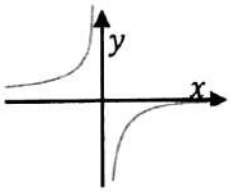
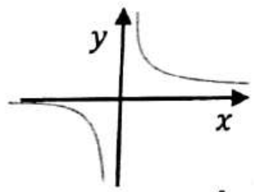
ليكن a عدداً عقدياً معطى. لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة الأعداد العقدية Z التي تحقق: $Z^2 - a^2 = \overline{Z}^2 - \overline{a}^2$

عين المجموعة $\mathcal{E}$ ومثلها في مستو مزود بمعلم.

بفرض $Z = x + yi$ و $a = \alpha + \beta i$

$$Z^2 - a^2 = \overline{Z}^2 - \overline{a}^2$$
$$Z^2 - \overline{Z}^2 = a^2 - \overline{a}^2$$
$$(Z-\overline{Z})(Z+\overline{Z}) = (a-\overline{a})(a+\overline{a})$$
$$(2yi)(2x) = (2\beta i)(2\alpha)$$
$$\boxed{xy = \alpha\,\beta}$$

$$\boldsymbol{x.y = \alpha.\beta}$$

$\alpha.\beta = 0$	$\alpha.\beta < 0$	$\alpha.\beta > 0$
$x.y = 0$ إما $x = 0$ اي مجموعة الأعداد العقدية Z هي الأعداد التخيلية البحتة وتمثل بمحور التراتيب او $y = 0$ اي مجموعة الأعداد العقدية Z هي الأعداد الحقيقية وتمثل بمحور الفواصل	اي مجموعة الأعداد العقدية Z تمثل بنقاط قطع زائد فرعاه في الربعين الثاني والرابع. 	اي مجموعة الأعداد العقدية Z تمثل بنقاط قطع زائد فرعاه في الربعين الأول والثالث. 

---

9) نتأمل عددين عقديان w, Z ويحققان $|Z| = 1$ و $|w| = 1$ و $Zw \neq -1$

اثبت أن العدد العقدي $Z = \frac{z+w}{1+zw}$ عدد حقيقي.

نعلم أن :
$$|Z| = 1 \Rightarrow Z.\overline{Z} = 1 \Rightarrow \overline{Z} = \frac{1}{Z}$$
$$|w| = 1 \Rightarrow w.\overline{w} = 1 \Rightarrow \overline{w} = \frac{1}{w}$$

يكون العدد العقدي Z حقيقي إذا تحقق $\overline{Z} = Z$

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z} + \overline{w}}{1 + \overline{zw}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{w}}{1 + \frac{1}{z}\frac{1}{w}} = \frac{w + z}{zw + 1} = Z$$

بما ان $\overline{Z} = Z$ فالعدد: $Z = \frac{z+w}{1+zw}$ عدد حقيقي.

---

10) نتامل كثير الحدود $P(Z) = Z^4 - 19Z^2 + 52Z - 40$

1. عين عددين حقيقين b, a يحققان $P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)$

$$\begin{aligned} P(Z) &= (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a) \\ &= Z^4 + 4Z^3 + 2aZ^2 + aZ^3 + 4aZ^2 + 2a^2Z + bZ^2 + 4bZ + 2ab \\ &= Z^4 + (4 + a)Z^3 + (6a + b)Z^2 + (2a^2 + 4b)Z + 2ab \end{aligned}$$

$$Z^4 + (4 + a)Z^3 + (6a + b)Z^2 + (2a^2 + 4b)Z + 2ab = Z^4 + 0Z^3 - 19Z^2 + 52Z - 40$$

بالمطابقة نجد:

$4 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$

$6a + b = -19 \Rightarrow -24 + b = -19 \Rightarrow \boxed{b = 5}$

$2a^2 + 4b = 52 \Rightarrow 2(16) + 4(5) = 52$ صحيحة

$2ab = -40 \Rightarrow 2(-4)(5) = -40$ صحيحة

$\boxed{P(Z) = (Z^2 - 4Z + 5)(Z^2 + 4Z - 8)}$

2. حل في C المعادلة $P(Z) = 0$

$(Z^2 - 4Z + 5)(Z^2 + 4Z - 8) = 0$

إما	او
$Z^2 - 4Z + 5 = 0$	$Z^2 + 4Z - 8 = 0$
$\Delta = (16) - 4(5) = -4 < 0 \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$	$\Delta = 16 - 4(-8) = 48 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3}$
$Z_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$	$Z_3 = \frac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}$
$Z_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$	$Z_4 = \frac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\sqrt{3}$

إذاً حلول المعادلة: $\{2 + i \ , \ 2 - i \ , \ -2 - 2\sqrt{3} \ , \ -2 + 2\sqrt{3}\}$

---

11) حل في C المعادلة $Z^3 - (3 + 4i)Z^2 - 6(3 - 2i)Z + 72i = 0$ إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

$Z = ai$ حل للمعادلة $\Leftarrow (Z - ai)$ عامل، فالمعادلة تكتب بالشكل:

$(Z - ai)(Z^2 + bZ + c) = 0$

$Z^3 + bZ^2 + cZ - aiZ^2 - abiZ - aci = 0$

$Z^3 + (b - ai)Z^2 + (c - abi)Z - aci = 0$

$Z^3 - (3 + 4i)Z^2 - 6(3 - 2i)Z + 72i = 0$

بالمقارنة :

$b - ai = -3 - 4i \Rightarrow \boxed{b = -3}$, $\boxed{a = 4}$

$c - abi = -18 + 12i \Rightarrow \boxed{c = -18}$, $-abi = 12i$ (محققة)

$-aci = 72i$ (محققة)

المعادلة تكتب بالشكل:

$$(Z-4i)(Z^2-3Z-18)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } Z-4i=0 \Rightarrow Z=4i \\ \text{أو } Z^2-3Z-18=0 \Rightarrow (Z-6)(Z+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } & Z=6 \\ \text{أو } & Z=-3 \end{cases} \end{cases}$$

$S=\{4i,6,-3\}$

---

12) ليكن $\alpha=e^{\frac{2\pi}{5}i}$ نضع $A=\alpha+\alpha^4$, $B=\alpha^2+\alpha^3$

1. اثبت ان $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

واستنتج ان B,A هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية $x^2+x-1=0$

طريقة أولى: بما ان: $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

فإن:

$$\boxed{1+e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4=0} \qquad (*)$$

نلاحظ ان العلاقة $(*)$ هي عبارة عن مجموع خمس حدود من متتالية هندسية:

حدها الأول: $a=1$ أساسها: $q=e^{\frac{2\pi}{5}i}$ عدد حدودها: $n=5$

نعلم أن مجموع الحدود في متتالية هندسية يعطى بالقانون:

$$S=\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q} \Rightarrow S=\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=\frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}=0$$

طريقة ثانية :

$L_1=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$, (نضرب ونقسم بالمقدار $1-\alpha$)

$$=\frac{(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)}{1-\alpha}=\frac{1^5-\alpha^5}{1-\alpha}=\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5}{1-a}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-a}=\frac{1-1}{1-\alpha}=\frac{0}{1-\alpha}=0=L_2$$

حيث $\boxed{\alpha^5=\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5=e^{2\pi i}=1}$

- حتى يكون B,A جذران للمعادلة x^2+x-1 يجب ان يتحقق: $x^2-(A+B)x+AB=0$

أي لنثبت ان: $A.B=-1$ و $A+B=-1$

طريقة أولى:

من الفرض لدينا: $A+B=\alpha+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3$

$$A+B=e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3$$

$$\boxed{A+B=e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4} \qquad \boxed{1}$$

ولدينا حسب $(*)$:

$$1+e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4=0$$

نعوض $\boxed{1}$ في $(*)$:

$$1+A+B=0 \Rightarrow \boxed{\boxed{A+B=-1}}$$

$$A.B=(\alpha+\alpha^4)(\alpha^2+\alpha^3)$$

$$A.B=\left[e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4\right]\left[\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3\right]$$

$$A.B=\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i}\right)\left(e^{\frac{4\pi}{5}i}+e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)$$

$$A.B=e^{\frac{6\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i}+e^{\frac{12\pi}{5}i}+e^{\frac{14\pi}{5}i}$$

$$A.B=e^{\frac{6\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i}+e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{4\pi}{5}i} \quad ; \quad \boxed{\begin{matrix} e^{\frac{12\pi}{5}i}=e^{\frac{(2+10)\pi}{5}i}=e^{\frac{2\pi}{5}i} \\ e^{\frac{14\pi}{5}i}=e^{\frac{(4+10)\pi}{5}i}=e^{\frac{4\pi}{5}i}\end{matrix}} \text{ : حيث}$$

$$\boxed{A.B=e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^3+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4} \qquad \boxed{2}$$

نعوض $\boxed{2}$ في *:

$$1+A.B=0 \implies \boxed{\boxed{A.B=-1}}$$

طريقة ثانية :

من أجل $A=\alpha+\alpha^4$ نعوض في المعادلة :

$$\begin{aligned} A^2+A-1 &= (\alpha+\alpha^4)^2+\alpha+\alpha^4-1 \\ &= \alpha^2+\underbrace{2\alpha^5}+\underbrace{\alpha^8}+\alpha+\alpha^4-1 \\ &= \alpha^2+2+\alpha^3+\alpha+\alpha^4-1 \\ &= 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 \\ &= 0 \ (\text{فرضاً}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha^5=1 & \text{حيث} \\ \alpha^8=\alpha^3.\alpha^5=\alpha^3(1)=\alpha^3 & \end{matrix}}$$

ومنه A حل للمعادلة

من أجل $B=\alpha^2+\alpha^3$ نعوض في المعادلة :

$$\begin{aligned} B^2+B-1 &= (\alpha^2+\alpha^3)^2+\alpha^2+\alpha^3-1 \\ &= \alpha^4+\underbrace{2\alpha^5}+\underbrace{\alpha^6}+\alpha^2+\alpha^3-1 \\ &= \alpha^4+2+\alpha+\alpha^2+\alpha^3-1 \\ &= 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 \\ &= 0 \ (\text{فرضاً}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha^5=1 & \text{حيث} \\ \alpha^6=\alpha.\alpha^5=\alpha(1)=\alpha & \end{matrix}}$$

ومنه B حل للمعادلة

2. عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

طريقة أولى:

$$\begin{aligned} A &= \alpha+\alpha^4 \\ &= e^{\frac{2\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4=e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i} \\ &= e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{-2\pi}{5}i} \quad ; \quad \boxed{e^{\frac{8\pi}{5}i}=e^{\frac{10\pi i-2\pi i}{5}}=e^{2\pi i-\frac{2\pi i}{5}}=e^{\frac{-2\pi}{5}i}} \\ &= 2\cos\frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

ومنه بحسب دستورا أويلر يكون:

طريقة ثانية :

$$A=\alpha+\alpha^4=\alpha+\frac{\alpha^5}{\alpha}=\alpha+\frac{1}{\alpha} \quad ; \quad (\alpha^5=1) \text{ حيث}$$

$$=\alpha+\alpha^{-1}=\underbrace{e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{-\frac{2\pi}{5}i}}_{\text{حسب اويلر}}$$

$$A=2\cos\frac{2\pi}{5}$$

3. حل المعادلة $x^2+x-1=0$ واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

لدينا مما سبق: $A=2\cos\frac{2\pi}{5}$ ومنه: $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{A}{2}}$

$$x^2+x-1=0$$
$$\Delta=1-4(1)(-1)=5$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}\implies\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}>0\\[2mm] x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0\end{cases}$$

وبما أن A هو حل للمعادلة و$\frac{2\pi}{5}$ بالربع الأول أي $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ سنختار $A=x_1$ ومنه فإن:

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{A}{2}=\frac{x_1}{2}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

---

13) ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi,\pi[$ نعرف $t=\dfrac{e^{\frac{\theta}{2}i}-e^{\frac{-\theta}{2}i}}{e^{\frac{\theta}{2}i}+e^{\frac{-\theta}{2}i}}$

1. احسب المقادير $\frac{2t}{1+t^2}$ ، $\frac{2t}{1-t^2}$ ، $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد θ

$$t=\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=i\tan\frac{\theta}{2}$$ حسب علاقتي اويلر

حيث:

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$

$$\frac{2t}{1+t^2}=\frac{\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)i}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=2i\,\frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=2i\,\frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$
$$=2i\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=i\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=i\tan\theta$$

$$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)i}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}i=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}i=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}i=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}i=i\sin\theta$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$

---

2. اثبت صحة العلاقات الآتية:

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$L_2=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{1}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta=L_1$$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$L_2 = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta = L_1$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$L_2 = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = 2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = L_1$$

---

14) 1. حل في C المعادلات $Z^2 = w$ في الحالات الآتية:

$w = -21 - 20i$

نفرض $Z = x + yi$ جذر تربيعي لـ w

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{441+400} = 29$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = -21$

$\boxed{3}\ \ 2xy = -20 < 0$

$\boxed{1}+\boxed{2} : 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

$\boxed{1}-\boxed{2} : 2y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y مختلفان بالإشارة:

$Z_1 = 2 - 5i \quad , \quad Z_2 = -2 + 5i$

$w = -3 + 4i$

نفرض $Z = x + yi$ جذر تربيعي لـ w

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = -3$

$\boxed{3}\ \ 2xy = 4 > 0$

$\boxed{1}+\boxed{2} : 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$\boxed{1}-\boxed{2} : 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقان بالإشارة:

$Z_1 = 1 + 2i \quad , \quad Z_2 = -1 - 2i$

$w = -7 + 24i$

نفرض $Z = x + yi$ جذر تربيعي لـ w

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{49+576} = 25$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = -7$

$\boxed{3}\ \ 2xy = 24 > 0$

$\boxed{1}+\boxed{2} : 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$\boxed{1}-\boxed{2} : 2y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -4 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقان بالإشارة:

$Z_1 = 3 + 4i \quad , \quad Z_2 = -3 - 4i$

2. حل في C المعادلات الآتية:

$2iZ^2 + (3+7i)Z + 4 + 2i = 0$

$a = 2i \qquad b = 3+7i \qquad c = 4+2i$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3+7i)^2 - 4(2i)(4+2i)$

$\Delta = -24 + 10i$

بفرض $x + yi$ هو جذر تربيعي لـ Δ

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{576+100} = 26$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = -24$

$\boxed{3}\ \ 2xy \ = 10 > 0$

$\boxed{1} + \boxed{2} : 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$\boxed{1} - \boxed{2} : 2y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقتان بالإشارة: $\begin{cases} \text{إما} \ \sqrt{\Delta} = 1 + 5i \\ \text{أو} \ \sqrt{\Delta} = -1 - 5i \end{cases}$

$Z_1 = \dfrac{-(3+7i) + 1 + 5i}{4i} = \dfrac{-2-2i}{4i} \times \dfrac{-i}{-i}$

$= \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2} i$

$Z_2 = \dfrac{-(3+7i) - 1 - 5i}{4i} = \dfrac{-4-12i}{4i} \times \dfrac{-i}{-i}$

$= -3 + i$

$Z^2 + (1+4i)Z - 5 - i = 0$

$a = 1 \qquad b = 1+4i \qquad c = -5-i$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$

$\Delta = 5 + 12i$

بفرض $x + yi$ هو جذر تربيعي لـ Δ

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = 13$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = 5$

$\boxed{3}\ \ 2xy \ = 12 > 0$

$\boxed{1} + \boxed{2} : 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$\boxed{1} - \boxed{2} : 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقتان بالإشارة: $\begin{cases} \text{إما} \ \sqrt{\Delta} = 3 + 2i \\ \text{أو} \ \sqrt{\Delta} = -3 - 2i \end{cases}$

$Z_1 = \dfrac{-(1+4i) + 3 + 2i}{2} = 1 - i$

$Z_2 = \dfrac{-(1+4i) - 3 - 2i}{2} = -2 - 3i$

$Z^2 + (1+8i)Z - 17 + i = 0$

$a = 1 \qquad b = 1+8i \qquad c = -17+i$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (1+8i)^2 - 4(1)(-17+i)$

$\Delta = 5 + 12i$

بفرض $x + yi$ هو جذر تربيعي لـ Δ

$\boxed{1}\ x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = 13$

$\boxed{2}\ x^2 - y^2 = 5$

$\boxed{3}\ \ 2xy \ = 12 > 0$

$\boxed{1} + \boxed{2} : 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$\boxed{1} - \boxed{2} : 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

من $\boxed{3}$: x, y متفقتان بالإشارة: $\begin{cases} \text{إما} \ \sqrt{\Delta} = 3 + 2i \\ \text{أو} \ \sqrt{\Delta} = -3 - 2i \end{cases}$

$Z_1 = \dfrac{-(1+8i) + 3 + 2i}{2} = \dfrac{2-6i}{2} = 1 - 3i$

$Z_2 = \dfrac{-(1+8i) - 3 - 2i}{2} = \dfrac{-4-10i}{2} = -2 - 5i$

15) في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نضـــع $Z = \frac{2+Z}{1+Z}$ ونفترض ان $z = x + iy$ ، $Z = X + iY$ حيث Y, X, y, x هي أعداد حقيقية.

1. احسب Y, X بدلالة العددين y, x

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$Z = \frac{2 + x - yi}{1 + x - yi}$$

$$Z = \frac{(2 + x - yi)(1 + x + yi)}{(1 + x - yi)(1 + x + yi)} = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2 + yi}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2 + y^2} + \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2} i \implies X = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2 + y^2} \quad , \quad Y = \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

2. اثبت أن مجموعة النقاط $M(Z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.

يكون Z حقيقياً إذا كان قسمه التخيلي معدوم اي: $Y = 0$ ومنه $y = 0$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ هي نقاط محور الفواصل عدا النقطة $(-1,0)$

3. اثبت أن مجموعة النقاط $M(Z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

يكون Z تخيلياً بحتاً إذا كان قسمه الحقيقي معدوم اي: $X = 0$ ومنه: $x^2 + 3x + y^2 + 2 = 0$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 + 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4} - 2 \implies \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ هي نقاط دائرة مركزها $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}$ عدا النقطة $(-1,0)$

---

16) عين في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية Z التي تحقق الشرط المعطى.

1. المقدار $(Z + 1)(\overline{Z} - 2)$ حقيقي.

يكون المقدار حقيقياً إذا تحقق:

$$(Z + 1)(\overline{Z} - 2) = \overline{(Z + 1)(\overline{Z} - 2)}$$

$$(Z + 1)(\overline{Z} - 2) = (\overline{Z} + 1)(Z - 2)$$

$$Z.\overline{Z} - 2Z + \overline{Z} - 2 = Z.\overline{Z} - 2\overline{Z} + Z - 2$$

$$3Z - 3\overline{Z} = 0$$

$$(Z - \overline{Z}) = 0 \implies Z = \overline{Z}$$

ومنه مجموعة الأعداد العقدية Z هي الأعداد الحقيقية

2. العدد Z مختلف عن $4i$ و $\frac{Z+2i}{Z-4i}$ عدد حقيقي.

يكون المقدار حقيقياً إذا تحقق:

$$\frac{Z + 2i}{Z - 4i} = \overline{\left(\frac{Z + 2i}{Z - 4i}\right)}$$

$$\frac{Z + 2i}{Z - 4i} = \frac{\overline{Z} - 2i}{\overline{Z} + 4i}$$

$$(Z + 2i)(\overline{Z} + 4i) = (Z - 4i)(\overline{Z} - 2i)$$

$$Z.\overline{Z} + 4Zi + 2\overline{Z}i - 8 = Z.\overline{Z} - 2Zi - 4\overline{Z}i - 8$$

$$6Zi + 6\overline{Z}i = 0$$

$$6i(Z + \overline{Z}) = 0 \implies Z = -\overline{Z}$$

ومنه مجموعة الأعداد العقدية Z هي الأعداد التخيلية البحتة بشرط $Z \neq 4i$

****

سلسلة الرؤى الشامل
ي الرياضيات

رؤية شاملة في الجبر

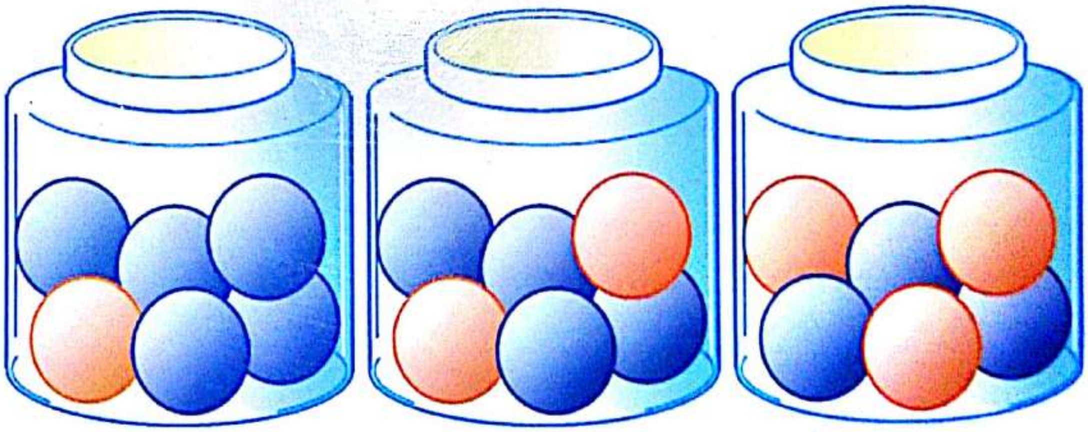
الأعـــــداد العــــــقديـــــة

تطبيقات الأعداد العقدية

التحليل التوافقي

الاحتمالات

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$



① ② ③

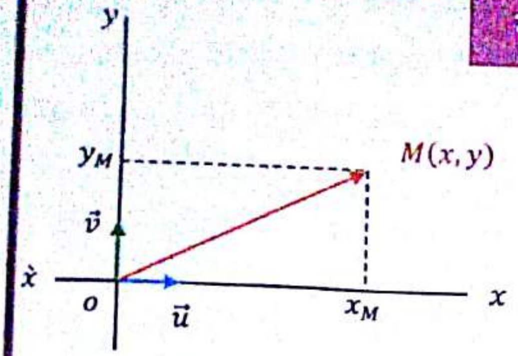
بإشراف المدرس

حسان البيطار

الثالث الثانو

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

تمثيل الأشعة بأعداد عقدية:



نتأمل المعلم المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي.

1) نقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي العدد العقدي:

$$Z_M = x + iy$$

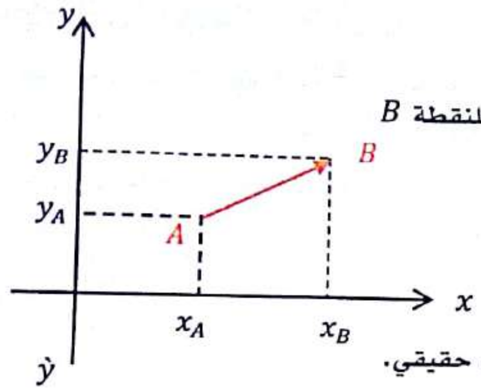
2) إن العدد العقدي $Z = x + iy$ الذي مركبتاه (x,y) يمثل بالشعاع $\overrightarrow{oM}$:

$$Z_{\overrightarrow{oM}} = Z_M = x + iy$$

3) بفرض لدينا في المستوي النقطتان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$:

العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$.

حيث Z_A هو العدد العقدي الممثل للنقطة A و Z_B هو العدد العقدي الممثل للنقطة B



$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$$

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$

نتائج:

إذا كان $\vec{w}$ و $\vec{\acute{w}}$ شعاعان يمثلانهما العددان العقديان Z و $\acute{Z}$ وكان λ عدد حقيقي.

1) تساوي شعاعين يكافئ تساوي العددين العقديين الذين يمثلانهما. $\vec{w} = \vec{\acute{w}} \Leftrightarrow Z = \acute{Z}$

2) الشعاع $\vec{w} + \vec{\acute{w}}$ يمثله العدد العقدي $Z + \acute{Z}$

3) الشعاع $\lambda\,\vec{w}$ يمثله العدد العقدي $\lambda\,Z$

العدد العقدي الموافق لمركز الأبعاد المتناسبة:

بفرض لدينا n عدداً من النقاط المثقّلة: $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots\ldots(A_n,\alpha_n)$ التي تمثلها الأعداد العقدية $Z_1,Z_2,\ldots\ldots,Z_n$ نفترض $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \neq 0$ عندئذ يعطى Z_G العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط بالعلاقة:

$$Z_G = \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \cdots + \alpha_n Z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

ملاحظات هامة جداً:

1) العدد العقدي Z_I الممثل لمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو: $Z_I = \frac{Z_A+Z_B}{2}$

2) العدد العقدي Z_G الممثل لمركز ثقل المثلث ABC هو: $Z_G = \frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}$

3) لإثبات وقوع ثلاث نقاط A , B , C على استقامة واحدة يجب إثبات وجود عدد حقيقي λ يحقق: $\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = \lambda\,Z_{\overrightarrow{AC}}$$

$$b - a = \lambda\,(c - a)$$

إذاً $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة

a هو العدد العقدي الممثل للنقطة A.

b هو العدد العقدي الممثل للنقطة B.

c هو العدد العقدي الممثل للنقطة C.

تدريب:

نتأمل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي العقدي ولتكن النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية.
$a=6-i$, $b=-6+3i$, $c=-18+7i$ بالترتيب

اثبت وقوع النقاط A , B , C على استقامة واحدة.

لإثبات أن النقاط A , B , C على استقامة واحدة يجب أن نثبت الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{AB}} &= b-a = -6+3i-(6-i) = -12+4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} &= c-a = -18+7i-(6-i) = -24+8i \end{aligned}\right\} \qquad Z_{\overrightarrow{AC}} = 2Z_{\overrightarrow{AB}}$$

فالشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً، فالنقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة.

تدريب:

ليكن MNP مثلثاً ما والنقاط A , B , C هي منتصفات اضلاعه $[NP]$ و $[PM]$ و $[MN]$ بالترتيب.
اثبت أن للمثلثين MNP و ABC مركز الثقل نفسه.

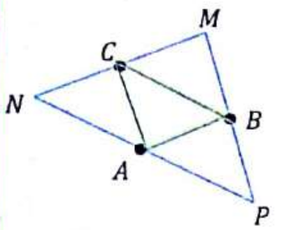
نختار معلم متجانس كيفي:

نفرض أن الأعداد n , m , p هي الأعداد العقدية التي تمثل النقاط N , M , P بالترتيب.

نرمز بـ G لمركز ثقل المثلث MNP :

$$Z_G = \frac{n+m+p}{3}$$

نفرض أن الأعداد a , b , c هي الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A , B , C بالترتيب.



$$a = \frac{n+p}{2} \quad , \quad b = \frac{m+p}{2} \quad , \quad c = \frac{m+n}{2}$$

فيكون مركز ثقل المثلث ABC هو:

$$Z_{\acute{G}} = \frac{\frac{n+p}{2}+\frac{m+p}{2}+\frac{m+n}{2}}{3} = \frac{2m+2n+2p}{6} = \frac{m+n+p}{3}$$

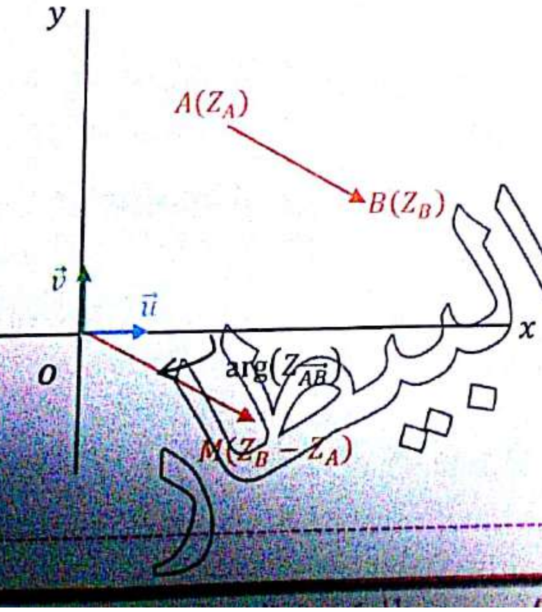
ومنه $Z_G = Z_{\acute{G}}$ وبالتالي $\acute{G} = G$

أي أن للمثلثين MNP و ABC مركز الثقل نفسه.

****

استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع

المسافة والزاوية:



بفرض $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ما ولتكن M النقطة التي تحقق:

$$\underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\downarrow} = \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\downarrow}$$

$$Z_{\overrightarrow{OM}} = Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_M = Z_B - Z_A$$

اي $|Z_M| = oM = AB$ ومنه

$$\boxed{AB = |Z_B - Z_A|}$$

زاوية العدد Z_M هي الزاوية بين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{oM}$ اي: $\quad arg(Z_M) = (\vec{u},\overrightarrow{OM})$

ومنه : $\quad arg(Z_{\overrightarrow{AB}}) = (\vec{u},\overrightarrow{AB}) = arg(Z_B - Z_A)$

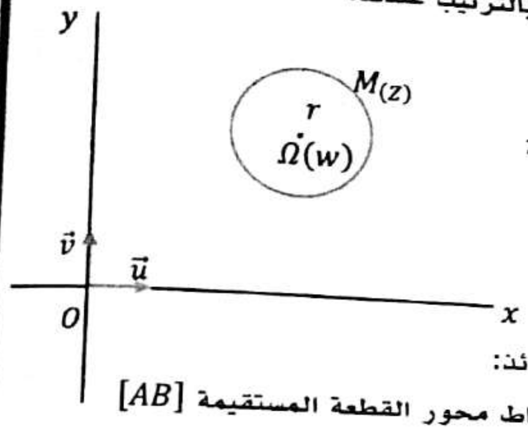
مبرهنة: «قياس الزاوية الموجهة»

لتكن D , C , B , A اربع نقاط تمثلها الأعداد العقدية Z_A , Z_B , Z_C , Z_D بالترتيب:

نفترض $Z_A \neq Z_B$ و $Z_C \neq Z_D$ عندئذ:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)$$

ملاحظات:



1) بفرض M , B , A ثلاث نقاط مختلفة تمثلها الأعداد الحقيقية a , b , z بالترتيب عندئذ:

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = arg\left(\frac{Z - b}{Z - a}\right)$$

2) بفرض r عدد حقيقي موجب تماماً وبفرض w عدداً عقدياً وΩ النقطة التي يمثلها العدد العقدي w عندئذ:

مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق الشرط $|Z - w| = r$

تمثل نقاط دائرة مركزها $\Omega(w)$ ونصف قطرها r

3) بفرض B , A نقطتان يمثلان العددان العقديان a , b حيث$(a \neq b)$ عندئذ:

مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق الشرط $|Z - b| = |Z - a|$ هي نقاط محور القطعة المستقيمة $[AB]$

4) بفرض لدينا النسبة: $Z_B \neq Z_A$: $Z = \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}$

$$arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \qquad \left|\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right| = \frac{CD}{AB}$$

- $$arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = \theta$$

إذا كان $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ فإن $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً

إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ فإن $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$ متعامدان

(5 $$Z = ki$$

إذا كان $k > 0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$

إذا كان $k < 0$: $\theta = -\frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$

تدريب: لتكن D , C , B , A اربع نقاط تمثلها الأعداد العقدية: $a = -2$, $b = 2$, $c = -1 + i$, $d = 1 - 3i$

اثبت ان المثلثين ACD , BCD قائمان.

- المثلث ACD:

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = arg\left(\frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A}\right)$$

$$\frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{d - a}{c - a} = \frac{1 - 3i + 2}{-1 + i + 2} = \frac{3 - 3i}{1 + i}$$

$$= \frac{(3 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 - 3i - 3i + 3i^2}{1 + 1} = \frac{-6i}{2} = -3i$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = arg(-3i) = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{لأن } (-3 < 0)$$

فالمثلث ACD قائم في A.

- المثلث BCD:

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) = arg\left(\frac{Z_D-Z_B}{Z_C-Z_B}\right)$$

$$\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{d-b}{c-b} = \frac{1-3i-2}{-1+i-2} = \frac{-1-3i}{-3+i}$$

$$= \frac{(-1-3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{3+i+9i+3i^2}{9+1} = \frac{10i}{10} = i$$

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) = arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad (\text{لأن } 1>0)$$

فالمثلث BCD قائم في B.

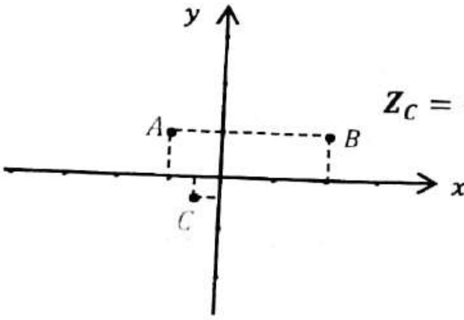
****

تدريب صفحة 132:

1) لتكن النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$Z_C = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \quad , \quad Z_B = 2+i \quad , \quad Z_A = -1+i$$

1. وضع النقاط A , B , C على شكل:



2. احسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

- $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 2+i-(-1+i) = 3$
- $Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-(-1+i) = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
- $Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-(2+i) = -\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$

3. احسب أطوال اضلاع المثلث ABC وبين إذا كان مثلثاً قائماً في C.

- $AB = |Z_B - Z_A| = |3| = \sqrt{9+0} = 3$
- $AC = |Z_C - Z_A| = \left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
- $BC = |Z_C - Z_B| = \left|-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

$$\left.\begin{array}{c} AB^2 \stackrel{?}{=} AC^2+BC^2 \\ 9 \stackrel{?}{=} \frac{10}{4}+\frac{34}{4} \\ 9 \neq 11 \end{array}\right\}$$

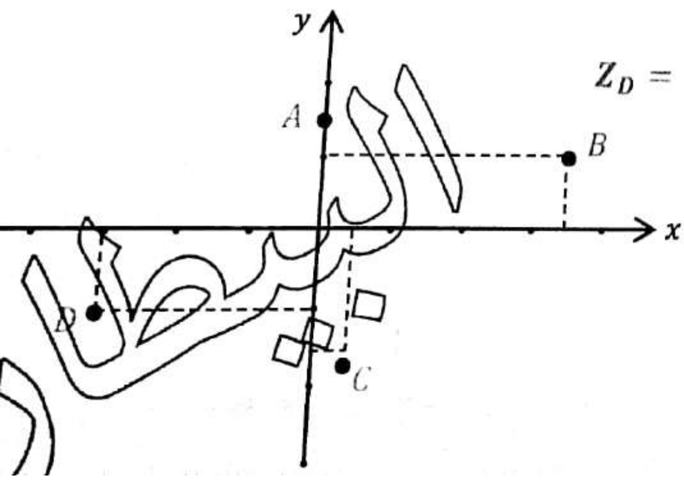
حسب عكس فيثاغورث نجد أن المثلث ليس قائم في C

---

2) لتكن النقاط A , B , C , D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$Z_D = -3-i \quad , \quad Z_C = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i \qquad Z_B = \frac{7}{2}+i \quad , \quad Z_A = \frac{3}{2}i$$

1. وضع النقاط A , B , C , D في شكل:



2. ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

$$\left.\begin{aligned} &\blacksquare\ Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = \frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \\ &\blacksquare\ Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - (-3 - i) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$$

ومنه : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع

---

3) لتكن النقطتان A , B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية:

$$Z_B = 2(1 - i\sqrt{3}) \quad , \quad Z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$$

1. اثبت ان A , B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

$$\left.\begin{aligned} Z_A = 2 + 2\sqrt{3}i &\Rightarrow |Z_A| = \sqrt{4+12} = 4 \\ Z_B = 2 - 2\sqrt{3}i &\Rightarrow |Z_B| = \sqrt{4+12} = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |Z_A| = |Z_B| = 4 = r$$

ومنه النقطتان A , B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 4.

2. جد العدد العقدي الممثل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلث ABC .

O مركز ثقل المثلث ABC فإن:

$$Z_O = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

$$0 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i + Z_C}{3}$$

$$0 = 4 + Z_C \Longrightarrow Z_C = -4$$

3. ما طبيعة المثلث ABC؟

طريقة 1: O مركز ثقل المثلث ومركز الدائرة المارة برؤوسه وبالتالي O نقطة تلاقي المتوسطات و المحاور فالمثلث متساوي الأضلاع .

طريقة 2: يمكن إثبات ان المثلث متساوي الأضلاع بحساب أطوال أضلاعه .

$$\left.\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{AB}} &= -4\sqrt{3}i &&\Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \\ Z_{\overrightarrow{AC}} &= -6 - 2\sqrt{3}i &&\Rightarrow AC = 4\sqrt{3} \\ Z_{\overrightarrow{BC}} &= -6 + 2\sqrt{3}i &&\Rightarrow BC = 4\sqrt{3} \end{aligned}\right\} AB = AC = BC$$ فالمثلث متساوي الأضلاع

---

4) نتأمل شعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ يمثلهما العددان العقديان u , v بالترتيب.

نفترض ان $v = iu$ ونضع $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. اثبت أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

$$v = iu$$

$$\frac{v}{u} = i$$

$$\left|\frac{v}{u}\right| = |i|$$

$$\frac{|v|}{|u|} = 1$$

$$|u| = |v|$$

$$AB = AC$$

المثلث ABC متساوي الساقين راسه A

$$arg\frac{v}{u} = arg(i)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في A

---

5) المثلثان ABC و $\grave{A}\grave{B}\grave{C}$ معرفان بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما:

$$c = 2 + i \quad , \quad b = 2 + 3i \quad , \quad a = 1 - i$$
$$\grave{c} = 4 + i \quad , \quad \grave{b} = 3 - i \quad , \quad \grave{a} = -2 + 3i$$

1. احسب العدد الممثل للشعاع: $\overrightarrow{A\grave{A}} + \overrightarrow{B\grave{B}} + \overrightarrow{C\grave{C}}$

$$Z_{\overrightarrow{A\grave{A}}} = \grave{a} - a = -2 + 3i - (1 - i) = -3 + 4i$$
$$Z_{\overrightarrow{B\grave{B}}} = \grave{b} - b = 3 - i - (2 + 3i) = 1 - 4i$$
$$Z_{\overrightarrow{C\grave{C}}} = \grave{c} - c = 4 + i - (2 + i) = 2$$
$$Z_{\left(\overrightarrow{A\grave{A}}+\overrightarrow{B\grave{B}}+\overrightarrow{C\grave{C}}\right)} = -3 + 4i + 1 - 4i + 2 = 0$$

2. جد العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

بما ان G مركز ثقل المثلث ABC فإن:

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = \frac{1 - i + 2 + 3i + 2 + i}{3} = \frac{5}{3} + i$$

3. هل $\grave{G}$ مركز ثقل المثلث $\grave{A}\grave{B}\grave{C}$ هو نفسه G.

$$Z_{\grave{G}} = \frac{Z_{\grave{A}} + Z_{\grave{B}} + Z_{\grave{C}}}{3} = \frac{-2 + 3i + 3 - i + 4 + i}{3} = \frac{5}{3} + i$$

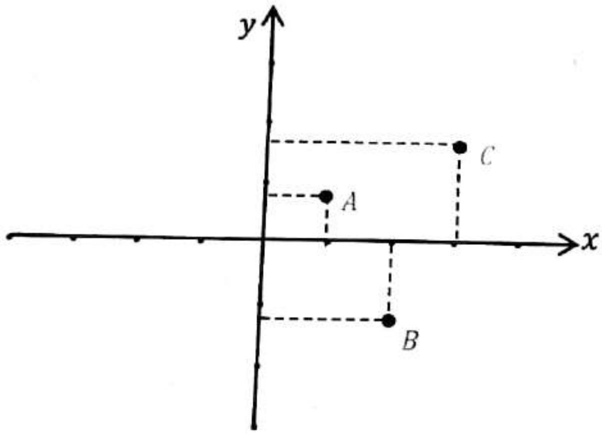
$Z_G = Z_{\grave{G}}$ ومنه $\grave{G} = G$

---

6) لتكن النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$c = 3 + \frac{7}{4}i \quad , \quad b = 2 - \frac{5}{4}i \quad , \quad a = 1 + \frac{3}{4}i$$

1. وضع النقاط A , B , C في شكل ما. ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ؟



$$Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = 2 - \frac{5}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right) = 1 - 2i$$
$$Z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = 3 + \frac{7}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right) = 2 + i$$
$$Z_{\overrightarrow{AC}} = iZ_{\overrightarrow{AB}}$$

2. استنتج ان ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = i$$

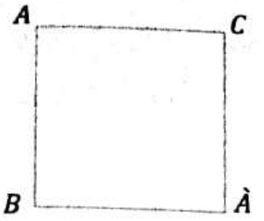
$$\arg \frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = \arg i$$
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في A

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right| = |i|$$
$$\frac{AC}{AB} = 1$$
$$AB = AC$$

المثلث ABC متساوي الساقين راسه A

3. احسب العدد العقدي الممثل للنقطة $\grave{A}$ التي تجعل $AB\grave{A}C$ مربعاً.



$$\overrightarrow{B\grave{A}} = \overrightarrow{AC}$$

$$Z_{\overrightarrow{B\grave{A}}} = Z_{\overrightarrow{AC}}$$

$$\grave{a} - b = c - a$$

$$\grave{a} - 2 + \frac{5}{4}i = 3 + \frac{7}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$$

$$\grave{a} = 4 - \frac{1}{4}i$$

---

7) لتكن النقاط $D\,,C\,,B\,,A$ التي يمثلها الأعداد العقدية:

$d = -4 - 2i \quad , \quad c = 4 + 2i \quad , \quad b = -1 + 7i \quad , \quad a = 2 - 2i$

1. لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $w = -1 + 2i$.

اثبت وقوع النقاط $D\,,C\,,B\,,A$ على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها (5).

- $Z_{\overrightarrow{A\Omega}} = w - a = -1 + 2i - (2 - 2i) = -3 + 4i$

  $A\Omega = |w - a| = \sqrt{9 + 16} = 5$
- $Z_{\overrightarrow{B\Omega}} = w - b = -1 + 2i - (-1 + 7i) = -5i$

  $B\Omega = |w - b| = \sqrt{0 + 25} = 5$
- $Z_{\overrightarrow{C\Omega}} = w - c = -1 + 2i - (4 + 2i) = -5$

  $C\Omega = |w - c| = \sqrt{25 + 0} = 5$
- $Z_{\overrightarrow{D\Omega}} = w - d = -1 + 2i - (-4 - 2i) = 3 + 4i$

  $D\Omega = |w - d| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$A\Omega = B\Omega = C\Omega = D\Omega = 5$

فالنقاط $D\,,C\,,B\,,A$ تقع على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها (5).

2. ليكن e العدد الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e وبرهن ان $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

- $e = \frac{a+b}{2} = \frac{2-2i-1+7i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

$$L_1 = \frac{a-e}{d-e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2} - \frac{9}{2}i}$$

$$= \frac{3 - 9i}{-9 - 9i} = \frac{1 - 3i}{-3 - 3i} = \frac{(1 - 3i)(-3 + 3i)}{(-3 - 3i)(-3 + 3i)}$$

$$= \frac{-3 + 3i + 9i - 9i^2}{9 + 9} = \frac{6}{18} + \frac{12}{18}i$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$L_2 = \frac{c-e}{a-e} = \frac{4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i}$$

$$= \frac{7 - i}{3 - 9i} = \frac{(7 - i)(3 + 9i)}{(3 - 9i)(3 + 9i)}$$

$$= \frac{21 + 63i - 3i - 9i^2}{9 + 81} = \frac{30}{90} + \frac{60}{90}i$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$L_1 = L_2$ فالعلاقة السابقة صحيحة

3. ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC؟

من العلاقة السابقة: $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

عددين عقديين متساويين إذاً زاويتاهما متساويتان

$$arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$

$$(\overrightarrow{ED}\,,\overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA}\,,\overrightarrow{EC})$$

فإن (EA) منصف داخلي للزاوية $\widehat{DEC}$.

8) لتكن النقطتان B, A اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : 1 , $3+2i$ بالترتيب. مثّل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق:

$$1)\ |Z-1| = |Z-3-2i|$$
$$|Z-1| = |Z-(3+2i)|$$
$$\underbrace{|Z-Z_A|}_{AM} = \underbrace{|Z-Z_B|}_{BM}$$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل نقاط محور القطعة المستقيمة $[AB]$

$$2)\ |Z-3-2i| = 1$$
$$|Z-(3+2i)| = 1$$
$$\left.\begin{matrix}\underbrace{|Z-Z_B|}_{BM} = 1 \\ = 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow BM = 1$$

ومنه مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل نقاط دائرة مركزها B. ونصف قطرها 1

****

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

تمهيد:

نزود المستوي بمعلم متجانس ومباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ وبفرض u تحويلاً هندسياً يقرن بكل نقطة M يمثلها العدد العقدي Z نقطة $\grave{M}$ يمثلها العدد العقدي $\grave{Z}$.

أولاً: الصيغة العقدية للانسحاب (T):

ليكن لدينا $\vec{W}$ شعاعاً يمثله العدد العقدي b.

الصيغة العقدية للتحويل T هي $\boxed{\grave{Z} = Z + b}$

تدريب:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = 3 - 2i$

أوجد العدد العقدي $\grave{Z}$ الممثل للنقطة $\grave{M}$ صورة النقطة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(-2,3)$.

الحل:

b هو العدد العقدي الممثل للشعاع $\vec{w}$:

$$\grave{Z} = Z + b$$
$$= 3 - 2i + (-2 + 3i)$$
$$\grave{Z} = 1 + i$$

ثانياً: الصيغة العقدية للتحاكي (H)

بفرض w العدد العقدي الذي يمثل النقطة Ω و k عدد حقيقي غير معدوم. الصيغة العقدية للتحويل H (H تحاكي مركزه Ω ونسبته k) هي: $\boxed{\grave{Z} - w = k(Z - w)}$

حالة خاصة : التحاكي مركزه مبدا المعلم $\boxed{\grave{Z} = kZ}$

تدريب:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = 5 + i$ أوجد العدد العقدي $\grave{Z}$ الممثل للنقطة $\grave{M}$ صورة العدد العقدي Z وفق تحاكي مركزه $\Omega(-1, 2)$ ونسبته (3).

$;w = -1 + 2i \quad , \; k = 3$

$$\grave{Z} - w = k(Z - w)$$
$$\grave{Z} - (-1 + 2i) = 3(5 + i + 1 - 2i)$$
$$\grave{Z} + 1 - 2i = 18 - 3i$$
$$\grave{Z} = 17 - i$$

ثالثاً: الصيغة العقدية للدوران (R):

بفرض w العدد العقدي الذي يمثل النقطة Ω و θ عدد حقيقي غير معدوم. الصيغة العقدية للتحويل R (R دوران مركزه Ω وزاويته θ) هي:

$$\grave{Z} - w = e^{i\theta}(Z - w)$$

حالة خاصة: الدوران مركزه مبدأ المعلم

$$\grave{Z} = e^{i\theta} Z$$

تدريب:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = 3 - 2i$ اوجد العدد العقدي $\grave{Z}$ الممثل للنقطة $\grave{M}$ صورة العدد العقدي Z وفق دوران مركزه $\Omega(-1,1)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\grave{Z} - w = e^{i\theta}(Z - w) \qquad ; w = -1 + i \quad , \ \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\grave{Z} + 1 - i = e^{\frac{\pi}{2}i}(3 - 2i + 1 - i) \qquad ; \left(e^{\frac{\pi}{2}i} = i\right)$$

$$\grave{Z} + 1 - i = i(4 - 3i)$$

$$\grave{Z} + 1 - i = 4i - 3i^2$$

$$\grave{Z} = 2 + 5i$$

****

ملاحظات هامة:

- إذا كانت A, B, C ثلاث نقاط تمثلها الأعداد العقدية a, b, c عندئذ:
  - يكون ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين إذا وفقط إذا كانت B صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $\left(\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\right)$.
  - يكون ABC مثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كانت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$.
- $Z = x + iy$ العدد العقدي الممثل للنقطة $M(x,y)$. $\grave{Z}$ العدد العقدي الممثل للنقطة $\grave{M}$ عندئذ:

نلاحظ حالات التناظر (S) التالية:

التناظر بالنسبة لنقطة

$\grave{M}$ صورة M وفق تناظر بالنسبة للنقطة Ω فإن:

$$w = \frac{\grave{Z} + Z}{2}$$

$$\grave{Z} = 2w - Z$$

التناظر بالنسبة لمحور التراتيب

$\grave{M}$ صورة M وفق تناظر بالنسبة لـ $y\grave{y}$ فإن:

$$\grave{Z} = -\overline{Z} = -x + iy$$

التناظر بالنسبة لمحور الفواصل

$\grave{M}$ صورة M وفق تناظر بالنسبة لـ $x\grave{x}$ فإن:

$$\grave{Z} = \overline{Z} = x - iy$$

****

تدريب صفحة 136:

1) لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = 1 + i$. جد العدد العقدي $\grave{Z}$ الممثل للنقطة $\grave{M}$ صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي:

1. T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

$$\grave{Z} = Z + b \qquad ; (b = -2 + 3i)$$

$$= 1 + i - 2 + 3i$$

$$= -1 + 4i$$

Scanned by CamScanner

2. H التحاكي الذي مركزه O ونسبته (3).

$$\begin{aligned}\grave{Z} &= kZ \\ &= 3(1+i) \\ &= 3+3i\end{aligned}$$

3. R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}\grave{Z} &= e^{\theta i}Z \\ &= e^{\frac{\pi}{4}i}(1+i) \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(1+i) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i) \quad = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,i\end{aligned}$$

4. S التناظر الذي مركزه $A(1-3i)$.

$$\begin{aligned}\frac{\grave{Z}+Z}{2} &= Z_A \\ \grave{Z}+Z &= 2Z_A \\ \grave{Z} &= 2Z_A - Z \qquad ;\ Z_A = 1-3i \\ &= 2(1-3i)-1-i \\ &= 2-6i-1-i \\ &= 1-7i\end{aligned}$$

5. R الدوران الذي مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

$$\grave{Z} - w = e^{i\theta}(Z-w) \qquad ;\ w = 2-i$$

$$\grave{Z} - 2 + i = e^{\frac{2\pi}{3}i}(1+i-2+i)$$

$$\grave{Z} - 2 + i = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(-1+2i)$$

$$\grave{Z} - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+2\mathrm{i})$$

$$\grave{Z} - 2 + i = \frac{1}{2} - i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \sqrt{3}$$

$$\grave{Z} = \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(-2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

6. S التناظر المحوري الذي محوره (OX).

$$\grave{Z} = \bar{Z} = 1-i$$

---

2) فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a , b الممثلان للنقطتين A , B بالعلاقة المعطاة. عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A.

1) $b = a - 1 + 3i$

$b = a + (-1+3i)$

النقطة B صورة النقطة A وفق انسحاب T شعاعه $\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

2) $b = -ia$

$b = e^{\frac{-\pi}{2}i}a \qquad ;\ \left(-i = e^{\frac{-\pi}{2}i}\right)$

النقطة B صورة النقطة A وفق دوران R مركزه O وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

3) $b = \overline{a}$

النقطة B صورة النقطة A وفق تناظر S بالنسبة للمحور ox.

4) $b = 2a$

النقطة B صورة النقطة A وفق تحاكي H مركزه O ونسبته $k = 2$.

5) $b - 1 = -(a - 1)$

النقطة B صورة النقطة A وفق تحاكي H مركزه $(w = 1)$ ونسبته $k = -1$.

أو النقطة B صورة النقطة A وفق دوران R مركزه $(w = 1)$ وزاويته $\theta = \pi$.

6) $b - i = e^{\frac{\pi}{3}i}(a - i)$

النقطة B صورة النقطة A وفق دوران R مركزه $(w = i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.

7) $b = a + 4 - 3i$

$= a + (4 - 3i)$

النقطة B صورة النقطة A وفق انسحاب T شعاعه $\vec{w} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$

8) $b + 1 - i = e^{\frac{\pi}{4}i}(a + 1 - i)$

$b - (-1 + i) = e^{\frac{\pi}{4}i}\big(a - (-1 + i)\big)$

النقطة B صورة النقطة A وفق دوران R مركزه $(w = -1 + i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$.

---

3) لتكن النقطتان $G(3 - i\sqrt{3})$, $H(3 + i\sqrt{3})$ وليكن R الدوران الذي مركزه O ويحقق $R(G) = H$

احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R.

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{OH}}}{Z_{\overrightarrow{OG}}}\right)$$

$$= arg\left(\frac{h - O}{g - O}\right)$$

$$= arg\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}\right)$$

$$= arg\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \cdot \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}}\right)$$

$$= arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$$

الصيغة العقدية للدوران: $h = e^{\frac{\pi}{3}i}g$

ملاحظات ونتائج هامة

1) Z عدد حقيقي: $Im(Z) = 0$ ، $\bar{Z} = Z$ ، $arg\,(Z) \in \{0, \pi\}$

Z عدد تخيلي بحت: $Re(Z) = 0$ ، $\bar{Z} = -Z$ ، $arg\,(Z) \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

2) بفرض لدينا اربع نقاط A, B, C, D الممثلة بالأعداد العقدية a, b, c, d على الترتيب فإن الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ هي:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{CD}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

3) $$(b \neq a \;,\; d \neq c) \quad \frac{d-c}{b-a} = ai \;:\; a \epsilon R \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

4) $$(b \neq a \;,\; d \neq c) \quad \frac{d-c}{b-a} = a \;:\; a \epsilon R \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

5) بفرض لدينا ثلاث نقاط A, B, C فإن الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ هي:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad ; (b \neq a \;,\; d \neq c)$$

6) إذا كان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ فالرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع.

7) إذا كان $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = DC$ فالرباعي $ABCD$ معين.

8) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ فالرباعي $ABCD$ مستطيل.

9) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ و $AD = DC$ و $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}$ فالرباعي $ABCD$ مربع.

10) إذا كان $\frac{Z_B+Z_D}{2} = \frac{Z_A+Z_C}{2}$ فإن قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان فهو متوازي أضلاع.

	العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
1	$AB = \lvert Z_B - Z_A \rvert$	المسافة بين A, B
2	$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[AB]$
3	$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$	G مركز ثقل المثلث ABC
4	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = a \;\epsilon R$	النقاط A, B, C على استقامة واحدة
5	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ai \quad : a \in R$	ABC قائم الزاوية في النقطة A
6	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \pm i$	ABC متساوي الساقين وقائم في النقطة A
7	$\lvert Z - Z_A \rvert = r \Leftrightarrow AM = r \quad r \epsilon R_+^*$	M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها r
8	$\lvert Z - Z_A \rvert = \lvert Z - Z_B \rvert$ $AM = BM$	M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[AB]$

أنشطة

نشاط (1): متوازي الأضلاع وربع الدورة:

نتأمل في مستو مزود بمعلم متجانس رباعياً محدباً $ABCD$ وننشئ عليه مثلثات قائمة ومتساوية الساقين SDA, RCD و QBC, PAB بحيث:

$$(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = \frac{-\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) = \frac{-\pi}{2}$$

نفرض أن الشكل مرسوم في المستوي الموجه وقد زودناه بمعلم متجانس مباشر ولنرمز بـ a, b, c, d إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A, B, C, D وكذلك p, q, r, s إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط P, Q, R, S.

① الدوران الذي مركزه p وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ ينقل A إلى B ، استعمل الصيغة العقدية لتثبت أن:

$$p = \frac{1}{2}[a(1+i) + b(1-i)]$$

الحل: أي ان B صورة A وفق دوران مركزه p وزاويته $\frac{-\pi}{2}$

$$b - p = e^{-\frac{\pi}{2}i}(a - p)$$
$$b - p = -i(a - p)$$
$$b - p = -ia + ip$$
$$b + ia = p + ip$$
$$b + ia = p(1+i) \qquad \div (1+i)$$
$$\frac{b + ia}{1+i} = p$$

نضرب بمرافق المقام :

$$\frac{(b+ia)(1-i)}{2} = p$$
$$\frac{1}{2}[b(1-i) + ia(1-i)] = p$$
$$\boxed{\frac{1}{2}[b(1-i) + a(1+i)] = p}$$

② عبر بالمثل عن q, r, s بدلالة a, b, c, d

C صورة B وفق دوران مركزه Q وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c - q = e^{\frac{\pi}{2}i}(b - q)$$
$$c - q = i(b - q)$$
$$c - q = ib - iq$$
$$c - ib = q - iq$$
$$c - ib = q(1-i) \qquad \div (1-i)$$
$$\frac{c - ib}{1-i} = q$$

نضرب بمرافق المقام

$$\frac{(c-ib)(1+i)}{2} = q$$
$$\frac{1}{2}[c(1+i) - ib(1+i)] = q$$
$$\boxed{\frac{1}{2}[c(1+i) + b(1-i)] = q}$$

D صورة C وفق دوران مركزه R وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$d - r = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c - r)$$
$$d - r = -i(c - r)$$
$$d - r = -ic + ir$$
$$d + ic = r + ir$$
$$d + ic = r(1+i) \qquad \div (1+i)$$
$$\frac{d + ic}{1+i} = r$$

نضرب بمرافق المقام

$$\frac{(d+ic)(1-i)}{2} = r$$
$$\frac{1}{2}[d(1-i) + ic(1-i)] = r$$
$$\boxed{\frac{1}{2}[d(1-i) + c(1+i)] = r}$$

A صورة D وفق دوران مركزه S وزاويته $\frac{\pi}{2}$

بالمثل نجد أن: $S = \frac{1}{2}[a(1+i) + d(1-i)]$

③ تيقن أن $p + r = q + s$ ثم استنتج ان $PQRS$ متوازي أضلاع.

$$* \ p + r = \frac{1}{2}\left[\underline{b(1-i)} + \underline{\underline{a(1+i)}}\right] + \frac{1}{2}\left[\underline{d(1-i)} + \underline{\underline{c(1+i)}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(1-i)(b+d) + (1+i)(a+c)]$$

$$* \ q + s = \frac{1}{2}\left[\underline{c(1+i)} + \underline{\underline{b(1-i)}}\right] + \frac{1}{2}\left[\underline{a(1+i)} + \underline{\underline{d(1-i)}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[(1+i)(a+c) + (1-i)(b+d)]$$

$$\Rightarrow p + r = q + s \qquad \div 2$$

$$\frac{p+r}{2} = \frac{q+s}{2}$$

اصبح الشكل $PQRS$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان.

نشاط (2): الجذور التكعيبية للواحد . المثلث المتساوي الأضلاع.

أولاً: في حالة $z \neq 0$ نرمز بالرمز r إلى طويلة Z وبالرمز θ إلى زاويته من المجال $[0,2\pi[$

① تيقن أن الشرط $Z^3 = 1$ يقتضي أن يكون $r = 1$, $3\theta = 2\pi k$ حيث k عدد صحيح.

$$Z^3 = 1$$

$$\left(r.e^{\theta i}\right)^3 = 1e^{0i}$$

$$r^3.e^{3\theta i} = 1.e^{0i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r = 1 \\ 3\theta = 2\pi k \end{matrix}$$

② تحقق أن الشرط $\theta \in [0,2\pi[$ يقتضي في الحقيقة أن $k \in \{0,1,2\}$

$$3\theta = 2\pi k$$

$$\left.\begin{matrix} k = 0 & \Rightarrow & \theta = 0 \\ k = 1 & \Rightarrow & \theta = \frac{2\pi}{3} \\ k = 2 & \Rightarrow & \theta = \frac{4\pi}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta \in [0,2\pi[$$

③ استنتج أن مجموعة حلول المعادلة $Z^3 = 1$ محتواة في $U_3 = \left\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\right\}$

$$r = 1 \ , \quad \theta = \frac{2\pi k}{3}$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_0 = 1$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad Z_1 = 1.e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad Z_2 = 1.e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

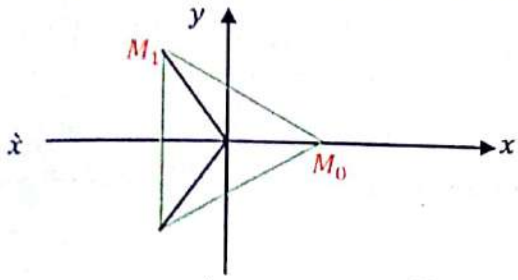
④ وبالعكس تحقق ان كل عنصر من $u_3 = \left\{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\right\}$ هو حل المعادلة $Z^3 = 1$

$$Z_0 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} L_1 = (1)^3 = 1 \\ L_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2 \quad (\text{محققة})$$

$$Z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}} \Longrightarrow \begin{cases} L_1 = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3 = e^{2\pi i} = 1 \\ L_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2 \quad (\text{محققة})$$

$$Z_2 = e^{\frac{4\pi}{3}} \Longrightarrow \begin{cases} L_1 = \left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)^3 = e^{4\pi i} = 1 \\ L_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2 \quad (\text{محققة})$$

⑤ مثّل النقاط $M_0(1)$ ، $M_1\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$ ، $M_2\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)$ في المستوي وتيقن انها تؤلف رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.



نسمي حلول المعادلة $Z^3 = 1$ الجذور التكعيبية للواحد ونرمز إلى مجموعتها U_3

وكذلك نرمز إلى $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ بالرمز j لاحظ ان $U_3 = \{1, j, j^2\}$

⑥ تحقق أن $1 + j + j^2 = 0$ و $\bar{j} = j^2 = e^{\frac{-2\pi i}{3}}$

- $$\begin{aligned} L_1 &= 1 + j + j^2 \\ &= 1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \\ &= 1 - \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 1 - 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = L_2 \end{aligned}$$
- $$\bar{j} = \overline{\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)} = e^{\frac{-2\pi}{3}i}$$

$$j^2 = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \underbrace{e^{\frac{6\pi i}{3}}}_{=1} . e^{\frac{-2\pi i}{3}} = e^{\frac{-2\pi i}{3}}$$

$$\Rightarrow \bar{j} = j^2 = e^{\frac{-2\pi}{3}i}$$

ثانياً: نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ونتأمل ثلاث نقاط متباينة A ، B ، C تمثلها الأعداد العقدية a, b, c

نقول إن ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا كنا عند قراءة رؤوسه بهذا الترتيب $A \to B \to C \to A$ ندور في الاتجاه الموجب وهذا يكافئ القول إن A هي صورة C وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$

استعمل نتائج الفقرة السابقة لتثبت ان ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان $a + bj + cj^2 = 0$

ABC مثلث متساوي الأضلاع ومنه: A صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$:

$$a - b = e^{\frac{\pi i}{3}}(c - b) \qquad (*)$$

لكن:

$$-j^2 = -e^{\frac{-2\pi}{3}i} \Longrightarrow e^{\pi i} . e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow 1 + j^2 = -j$$

بالعودة إلى $(*)$:

$$a-b=-j^2(c-b)$$
$$a-b=-j^2c+j^2b$$
$$a-b-j^2b+j^2c=0$$
$$a-b\left(\underbrace{1+j^2}\right)+j^2c=0$$
$$\boxed{a+bj+cj^2=0}$$

ثالثاً: نقرن بكل عدد $Z\neq 1$ ، النقاط $\grave{M}(Z), M(Z), R(1)$

① ما هي قيم Z التي تجعل $\grave{M}$, M مختلفين؟

$\grave{M}$, M مختلفتين إذا وفقط إذا كان $Z\neq\overline{Z}$ أي إذا وفقط إذا لم يكن Z عدد حقيقي.

② نفترض تحقق الشرط السابق اثبت أن Δ مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تمثل المثلث $RM\grave{M}$ مثلثاً متساوي الأضلاع مباشر هي مستقيم محذوف منه نقطة.

مما سبق وجدنا أن:

$$a+bj+cj^2=0$$
$$1+Zj+\overline{Z}j^2=0$$
$$1+Zj+\overline{Z}\,\overline{j}=0$$
$$1+\underbrace{Zj+\left(\overline{Zj}\right)}=0$$

$$1+\ 2\,Re\,(Zj)=0 \qquad ;Z=x+iy \text{ بفرض}$$

$$1+\qquad 2Re\left[(x+iy)\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\right]=0 \qquad , \qquad y\neq 0$$
$$1+\qquad 2Re\left[(x+iy)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]=0 \qquad , \qquad y\neq 0$$
$$1+\qquad Re\left[(x+iy)(-1+\sqrt{3}i)\right]=0 \qquad , \qquad y\neq 0$$
$$1+\quad Re\left[-x+\sqrt{3}xi-iy-\sqrt{3}y\right]=0 \qquad , \qquad y\neq 0$$
$$1+Re\left[(-x-\sqrt{3}y)+i(\sqrt{3}x-y)\right]=0 \qquad , \qquad y\neq 0$$

أي: $1-x-\sqrt{3}y=0 \quad , \quad y\neq 0$

فالمجموعة Δ هي المستقيم الذي معادلته $1-x-\sqrt{3}y=0$ محذوف منه النقطة $(1,0)$

****

1. نتأمل النقاط A , B , C التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية:

$$c=-4i \quad , \quad b=-4+4i \quad , \quad a=8$$

1) ⓐ تحقق ان $b-c=i(a-c)$

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= b-c=-4+4i+4i=-4+8i \\ L_2 &= i(a-c)= i(8+4i) =-4+8i \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_1=L_2$$

ⓑ استنتج ان المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

لدينا
$$b-c=i(a-c)$$
$$\boxed{b-c=e^{\frac{\pi i}{2}}(a-c)}$$

النقطة B هي صورة النقطة A وفق الدوران R الذي مركزه النقطة C وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فالمثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

2) نقرن بكل نقطة $M(Z)$ النقطة $\grave{M}$ الموافقة للعدد العقدي Z. $\grave{Z}=e^{\frac{\pi}{3}i}.Z$.

ⓐ ما التحويل الهندسي الموافق؟

التحويل هو دوران مركزه O وزاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$.

ⓑ احسب الأعداد العقدية $\grave{a}$, $\grave{b}$, $\grave{c}$ الموافقة للنقاط $\grave{A}$, $\grave{B}$, $\grave{C}$ صور A , B , C وفق هذا التحويل:

• $\grave{a}=e^{\frac{\pi}{3}i}\,a$ $=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(8)$ $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)8 = 4+4\sqrt{3}i$	• $\grave{c}=e^{\frac{\pi}{3}i}\,c$ $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-4i)$ $=-2i-2\sqrt{3}i^2=2\sqrt{3}-2i$
• $\grave{b}=e^{\frac{\pi}{3}i}\,b$ $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-4+4i)$ $=-2+2i-2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i^2$ $=(-2-2\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})\,i$	

3) لتكن P , Q , R منتصفات القطع المستقيمة $[\grave{A}B]$, $[\grave{B}C]$, $[\grave{C}A]$ ولتكن p , q , r الأعداد العقدية التي توافقها.

ⓐ احسب p , q , r

$$p=\frac{\grave{a}+b}{2}=\frac{4+4\sqrt{3}i-4+4i}{2}=(2\sqrt{3}+2)i$$
$$q=\frac{\grave{b}+c}{2}=\frac{-2-2\sqrt{3}+2i-2\sqrt{3}i-4i}{2}=(-1-\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})\,i$$
$$r=\frac{\grave{c}+a}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2i+8}{2}=4+\sqrt{3}-i$$

ⓑ تحقق ان $r-p=e^{\frac{\pi}{3}i}(q-p)$

$$\begin{aligned} L_1 &= r-p \\ &= 4+\sqrt{3}-i-2\sqrt{3}\,i-2i \\ &= 4+\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3}\,i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= e^{\frac{\pi}{3}i}(q-p)\\
&= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).(-1-\sqrt{3}-i-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i-2i)\\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1-\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3}i)\\
&= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3}i)\\
&= \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3i+3\sqrt{3}+9)\\
&= \frac{1}{2}(8+2\sqrt{3}-6i-4\sqrt{3}i)
\end{aligned}$$

$$L_2 = 4+\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3}i$$

$L_1 = L_2$ فالعلاقة صحيحة.

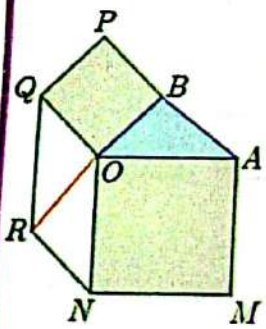
ⓒ استنتج ان المثلث PQR متساوي الأضلاع.

من العلاقة السابقة: $r-p = e^{\frac{\pi i}{3}}(q-p)$

النقطة R هي صورة النقطة Q وفق دوران مركزه النقطة P وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$ فالمثلث PQR متساوي الأضلاع.

---

2. نتأمل مثلثاً OAB فيه $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$ حيث $\alpha \in]0,\pi[$ ننشئ خارج هذا المثلث المربعين $OBPQ$ ، $OAMN$ ومتوازي الأضلاع $NOQR$ نهدف في هذا التمرين إلى إثبات ان المستقيمين $(AB),(OR)$ متعامدان وان $OR = AB$ وذلك باستعمال الأعداد العقدية.



لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ وليكن a , b العددين العقديين اللذين يمثلان A , B.

1) ⓐ ما هي صورة النقطتين N , B وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول O؟

- نعتبر O مبدأ الإحداثيات ومنه:
- النقطة A هي صورة النقطة N وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- النقطة Q هي صورة النقطة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ⓑ نرمز n إلى العدد العقدي الممثل للنقطة N و q العدد العقدي الموافق للنقطة Q.

اثبت أن: $\quad n = -ia \quad , \quad q = ib$

A صورة N وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$a = e^{\frac{\pi}{2}i}\, n$$
$$a = i\, n$$

نضرب بـ i:

$$ia = i^2\, n$$
$$ia = -n$$
$$\boxed{n = -i\,a}$$

Q صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$q = e^{\frac{\pi}{2}i} b$$
$$\boxed{q = i\,b}$$

2) ⓐ عبر عن $\overrightarrow{OR}$ بدلالة $\overrightarrow{ON}$ ، $\overrightarrow{OQ}$.

الشكل $OQRN$ متوازي اضلاع فإن: $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$

ⓑ استنتج العدد العقدي r الذي يمثل النقطة R بدلالة a ، b

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON}$$
$$r = q + n = bi - ai$$
$$r = (b-a)i$$

Ⓒ ما العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$؟

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$$

Ⓓ اثبت إذن ان $OR = AB$ وان $(\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ واستنتج تعامد المستقيمين (OR) و (AB)

$$r = (b-a)i$$

$$\frac{r-o}{b-a} = i$$

$$\frac{|r-o|}{|b-a|} = |i|$$

$$\frac{OR}{AB} = 1$$

$$OR = AB$$

$$arg\,\frac{r-o}{b-a} = arg(i)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2}$$

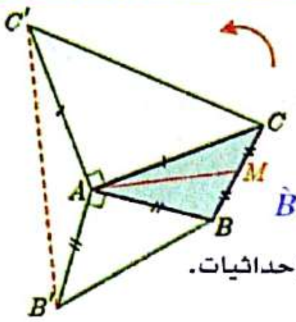
$$-(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$$

وجدنا ان $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه المستقيمان (OR) , (AB) متعامدان

---

3. دراسة شكل:



نتأمل في المستوي ABC مثلثاً مباشر التوجيه كيفياً. ولتكن M منتصف $[BC]$

وليكن $A\grave{B}B$, $AC\grave{C}$ مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين.

اثبت ان المتوسط (AM) في المثلث ABC هو ارتفاع في المثلث $A\grave{B}\grave{C}$ وان $\grave{B}\grave{C} = 2AM$

العدد العقدي b يمثل النقطة B ، العدد العقدي c يمثل النقطة C نعتبر النقطة A مبدأ الإحداثيات.

النقطة $\grave{B}$ صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\grave{b} = e^{-\frac{\pi}{2}i}.b \quad \Rightarrow \quad \boxed{\grave{b} = -i\,b}$$

النقطة $\grave{C}$ صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\grave{c} = e^{\frac{\pi}{2}i}.c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\grave{c} = i\,c}$$

في المثلث ABC ، M منتصف BC وليكن m العدد العقدي الذي يمثل النقطة M فنجد أن:

$$m = \frac{b+c}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{1}{2}(b+c)}$$

لنحسب النسبة $\frac{Z_{\overrightarrow{\grave{B}\grave{C}}}}{Z_{\overrightarrow{AM}}}$:

$$\frac{Z_{\overrightarrow{\grave{B}\grave{C}}}}{Z_{\overrightarrow{AM}}} = \frac{\grave{c}-\grave{b}}{m-0} = \frac{ic+ib}{\frac{1}{2}(b+c)} = \frac{(c+b)i}{\frac{1}{2}(b+c)} = 2i \qquad \text{(تخيلي بحت)}$$

$$\frac{\grave{c}-\grave{b}}{m-0} = 2i$$

$$\left|\frac{\grave{c}-\grave{b}}{m-0}\right| = |2i|$$

$$\frac{\grave{B}\grave{C}}{AM} = 2$$

$$\Leftarrow \grave{B}\grave{C} = 2AM$$

$$arg\,\frac{\grave{c}-\grave{b}}{m-0} = arg(2i)$$

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\grave{B}\grave{C}}) = \frac{\pi}{2}$$

AM , $\grave{B}\grave{C}$ متعامدان

$\Leftarrow AM$ ارتفاع في المثلث $A\grave{B}\grave{C}$

4. البحث عن مجموعة:

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ نقرن كل نقطة $M(Z)$ حيث $Z \neq i$ بالنقطة $M(\acute{Z})$ حيث $\acute{Z} = \frac{Z+2}{Z-i}$

- عين Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها $\acute{Z}$ عدداً حقيقياً.

$$\acute{Z} = \frac{Z+2}{Z-i} = \frac{Z-(-2)}{Z-(i)}$$

$$\acute{Z} = \frac{Z-a}{Z-b} \Longleftarrow \begin{cases} \text{العدد العقدي } a=-2 \text{ يمثل النقطة } A \\ \text{العدد العقدي } b=i \text{ يمثل النقطة } B \end{cases}$$

$\acute{Z}$ عدداً حقيقياً $\Rightarrow$ $\frac{Z-a}{Z-b}$ حقيقياً $\Rightarrow$ $arg\left(\frac{Z-a}{Z-b}\right) \in \{0,\pi\}$

اي ان النقاط A,B,M تقع على استقامة واحدة.

Δ تمثل نقاط المستقيم المار من النقطتين A , B عدا النقطة B

- عين Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها $\acute{Z}$ عدداً تخيلياً بحتاً.

$\acute{Z}$ عدداً تخيلياً $\Rightarrow$ $\frac{Z-a}{Z-b}$ عدداً تخيلياً $\Rightarrow$ $arg\left(\frac{Z-a}{Z-b}\right) \in \left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$

اي ان M تنتمي إلى مجموعة النقاط التي ترى منها القطعة AB ضمن زاوية قائمة ما عدا النقطة B

Γ تمثل دائرة قطرها AB عدا النقطة B منها.

---

5. خاصة مميزة لمتوازي الأضلاع:

تمثل الأعداد العقدية a,b,c,d اربع نقاط A,B,C,D اثبت ان الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان: $a+c=b+d$

$ABCD$ متوازي اضلاع إذا و فقط إذا تناصف قطراه

العدد العقدي الذي يمثل منتصف AC هو $\frac{a+c}{2}$ ، العدد العقدي الذي يمثل منتصف BD هو $\frac{b+d}{2}$

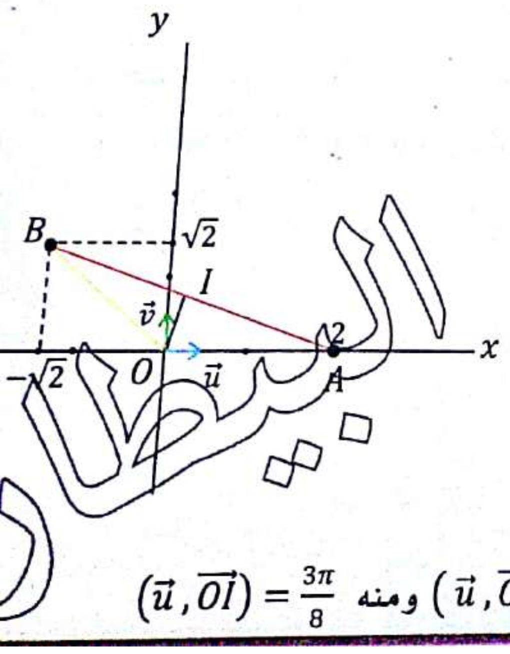
$$a+c=b+d \Leftrightarrow \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \Leftrightarrow ABCD \text{ متوازي اضلاع}$$

---

6. حساب النسبة المثلثية $\frac{3\pi}{8}$:

نتامل النقطتين A , B اللتين يمثلهما العددان $a=2$, $b=2e^{\frac{3\pi}{4}i}$ وليكن I منتصف $[AB]$.

1) ⓐ ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة المثلث OAB



$$a=2 \Rightarrow A(2,0)$$
$$b=2e^{\frac{3\pi}{4}i}$$
$$b=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$b=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$b=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i \Rightarrow B(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$\left.\begin{array}{l} |Z_{\overrightarrow{OA}}| = \sqrt{4+0} = 2 \\ |Z_{\overrightarrow{OB}}| = \sqrt{2+2} = 2 \end{array}\right\} OAB \text{ متساوي الساقين راسه } O$$

ⓑ استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$

OI خط متوسط في مثلث متساوي الساقين فهو منصف لكن $(\vec{u},\overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8}$

2) ⓐ احسب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

$$Z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} \Rightarrow Z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad (\text{جبري})$$

نكتب Z_I بالشكل الأسي :

$$r = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$arg\, Z_I = (\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8}$$

$$Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}.\, e^{\frac{3\pi}{8}i} \quad (\text{اسي})$$

ⓑ استنتج كلاً من $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\sin\frac{3\pi}{8}$

الشكل الجبري لـ Z_I = الشكل الأسي لـ Z_I

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}.\, e^{\frac{3\pi}{8}i} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}.\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

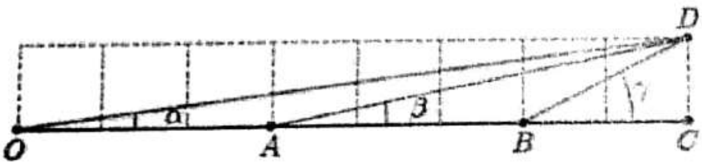
$$\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}i$$

بالمطابقة نجد :

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \quad , \quad \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

---

7. تأمل الشكل واحسب المجموع $\alpha+\beta+\gamma$ حيث γ, β, α هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ بالترتيب:



النقطة $A(3,0)$ يمثلها العدد المركب $Z_A = 3$

النقطة $B(6,0)$ يمثلها العدد المركب $Z_B = 6$

النقطة $C(8,0)$ يمثلها العدد المركب $Z_C = 8$

النقطة $D(8,1)$ يمثلها العدد المركب $Z_D = 8 + i$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} = 8 + i$$

$$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A = 8 + i - 3 = 5 + i$$

$$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 8 + i - 6 = 2 + i$$

$$\alpha + \beta + \gamma = arg\left(Z_{\overrightarrow{OD}}.\, Z_{\overrightarrow{AD}}.\, Z_{\overrightarrow{BD}}\right)$$

$$arg\, z_{\overrightarrow{OD}} = \alpha$$

$$arg\, z_{\overrightarrow{AD}} = \beta$$

$$arg\, z_{\overrightarrow{BD}} = \gamma$$

مجموع زوايا اعداد عقدية يساوي زاوية العدد الناتج عن جداء هذه الأعداد

$$\alpha + \beta + \gamma = arg\,\underbrace{[(8+i)(5+i)(2+i)]}_{\text{بالنشر}}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = arg[65 + 65i] = \frac{\pi}{4}$$

8. نقرن بكل نقطة $M(Z)$ من المستوي حيث $Z \neq -\frac{1}{2}i$ النقطة $\grave{M}$ التي يمثلها العدد العقدي $\grave{Z} = \frac{Z+2i}{1-2iZ}$ لتكن Γ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها (1) اثبت انه إذا انتمت M إلى Γ انتمت $\grave{M}$ إلى Γ ايضاً ايكون العكس صحيحاً ؟

اولاً: بما ان $M \in \Gamma$ فإنه يكافئ $OM = 1$ اي

$|Z| = 1$ ومنه $Z.\overline{Z} = 1$ او $\overline{Z} = \frac{1}{z}$

ولإثبات انتماء $\grave{M}$ إلى Γ يجب ان نثبت ان $O\grave{M} = 1$ اي $|\grave{Z}| = 1$ اي $\grave{Z}.\overline{\grave{Z}} = 1$

$$\grave{Z} = \frac{Z+2i}{1-2iZ}$$

$$\overline{\grave{Z}} = \frac{\overline{(Z+2i)}}{\overline{(1-2iZ)}} = \frac{\overline{Z}-2i}{1+2i\overline{Z}}$$

نضرب بـ Z :

$$= \frac{Z\overline{Z}-2iZ}{Z+2i\overline{Z}Z} = \frac{1-2iZ}{Z+2i} = \frac{1}{\grave{Z}}$$

$$\overline{\grave{Z}} = \frac{1}{\grave{Z}}$$

$$\grave{Z}\overline{\grave{Z}} = 1$$

$$|\grave{Z}| = 1$$

$$O\grave{M} = 1$$

اي $\grave{M} \in \Gamma$

ثانياً: لنحاول إثبات العكس

بما ان $\grave{M} \in \Gamma$ فإنه يكافئ ان $O\grave{M} = 1$ اي $|\grave{Z}| = 1$

ومنه $\grave{Z}.\overline{\grave{Z}} = 1$

ولإثبات انتماء M إلى Γ يجب ان نثبت ان $OM = 1$

اي $|Z| = 1$ اي $Z.\overline{Z} = 1$

لدينا: $\grave{Z}.\overline{\grave{Z}} = 1$

$$\left(\frac{Z+2i}{1-2iZ}\right)\left(\frac{\overline{Z}-2i}{1+2i\overline{Z}}\right) = 1$$

$$\frac{Z\overline{Z}-2iZ+2i\overline{Z}+4}{1+2i\overline{Z}-2iZ+4Z\overline{Z}} = 1$$

$$Z\overline{Z}-2iZ+2i\overline{Z}+4 = 1+2i\overline{Z}-2iZ+4Z\overline{Z}$$

$$3Z.\overline{Z}-3 = 0 \qquad (\div 3)$$

$$Z.\overline{Z}-1 = 0$$

$$Z.\overline{Z} = 1$$

$$|Z| = 1$$

$$OM = 1$$

اي $M \in \Gamma$ ومنه العكس صحيح

---

9. مسالة تعامد:

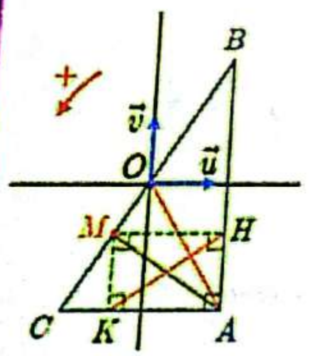
نتأمل في المستوي الموجه مثلثاً مباشراً ABC قائماً في A النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (CB) و K , H هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) و على (AC) بالترتيب.

نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (OA) و (HK).

نختار معلماً متجانساً ومباشراً $(O; \vec{u}, \vec{v})$ بحيث تقع O في منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عمودياً على (AB) $\vec{v}$ شعاعاً موجهاً للمستقيم (AB)

ونرمز a, b, c, h, k, m إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A, B, C, H, K, M

1) علل ما يلي: $a = \overline{b}$, $a - m = \overline{h-k}$



- لاحظ $[AO]$ خط متوسط متعلق بالوتر في المثلثالقائم ABC وبالتالي طوله يساوي نصف طول الوتر اي $AO = OB$

إذاً A نظيرة B بالنسبة لـ $x\grave{x}$ اي $a = \overline{b}$.

- لنحسب $a - m$ ثم $\overline{h-k}$:

$$a - m = (x_A + y_A i) - (x_M + y_M i)$$
$$= x_A + y_A i - x_M - y_M i$$
$$a - m = (x_A - x_M) + i(y_A - y_M) \qquad (1)$$
$$h - k = (x_H + iy_H) - (x_K + iy_K)$$
$$= (x_A + iy_M) - (x_M + iy_A)$$
$$= x_A + iy_M - x_M - iy_A$$

نلاحظ من الرسم:

$$\begin{cases} x_H = x_A , y_H = y_M \\ x_K = x_M , y_K = y_A \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$h-k=(x_A-x_M)+i(y_M-y_A)$$
$$h-k=(x_A-x_M)-i(y_A-y_M)$$
$$\overline{h-k}=(x_A-x_M)+i(y_A-y_M) \quad (11)$$

نلاحظ من (1) و (11) ان : $a-m=\overline{h-k}$

2) ⓐ اثبت ان $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=\frac{\pi}{2}$ او $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=-\frac{\pi}{2}$

بما ان النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على CB إذاً: $MA\perp BC$ فإن $MA\perp OB$ ومنه:

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MA})=-\frac{\pi}{2}$$
$$arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

ⓑ استنتج ان $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=-\frac{\pi}{2}$ او $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\frac{\pi}{2}$ ثم اثبت المطلوب:

من (1) وجدنا ان : $a=\overline{b}$ $\left(\begin{matrix}a-m=\overline{h-k}\\ \overline{a-m}=h-k\end{matrix}\right)$

$$arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=arg\left(\frac{\overline{a-m}}{\overline{b}}\right)$$
$$=arg\,\overline{\left(\frac{a-m}{b}\right)}$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

إثبات المطلوب:

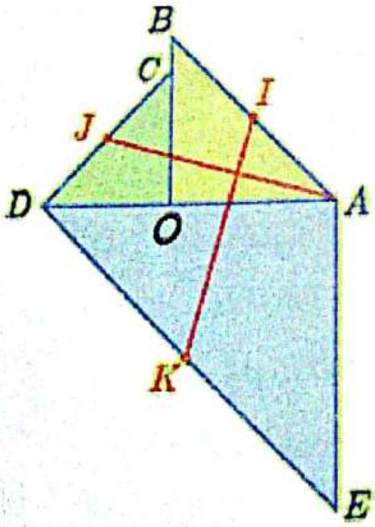
بما أن $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\frac{\pi}{2}$

فإن $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{KH})=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\overrightarrow{KH},\overrightarrow{OA}$ متعامدان.

---

10. نتامل في المستوي الموجه الشكل المجاور: المثلثات ADE, OCD, OAB مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط K, J, I هي منتصفات اوتار هذه المثلثات نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين $(AJ), (IK)$ وان $IK=AJ$ نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O ونرمز c, a إلى العددين العقدين الممثلين للنقطتين C, A

1) عبر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثل النقاط B و D و E



نفرض e, d, b اعداد عقدية تمثل النقاط E, D, B

- B صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن:

$$b=e^{\frac{\pi}{2}i}\,a$$
$$\boxed{b=i\,a}$$

- D صورة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن:

$$d=e^{\frac{\pi}{2}i}\,c$$
$$\boxed{d=i\,c}$$

- E صورة D وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن:

$$e-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(d-a)$$
$$e-a=i\,(i\,c-a)$$
$$e-a=-c-ia$$
$$\boxed{e=(-c+a)-ia}$$

2) استنتج الأعداد العقدية Z_I, Z_J, Z_K التي تمثل النقاط I, J, K

- I منتصف AB فإن:

$$Z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{a+ai}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}i$$

- J منتصف DC فإن:

$$Z_J = \frac{d+c}{2} = \frac{ic+c}{2} = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}i$$

- K منتصف DE فإن:

$$Z_K = \frac{d+e}{2} = \frac{ic-c+a-ia}{2} = \frac{a-c}{2} + i\left(\frac{c-a}{2}\right)$$

3) اثبت ان $Z_K - Z_I = i(Z_J - a)$ ثم استنتج الخواص المطلوبة:

$$\begin{aligned} L_1 &= Z_K - Z_I \\ &= \frac{a-c}{2} + i\left(\frac{c-a}{2}\right) - \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}i\right) \\ &= \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{c}{2}i - \frac{a}{2}i - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}i \\ &= -\frac{c}{2} + i\left(\frac{c}{2} - a\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= i(Z_J - a) \\ &= i\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2}i - a\right) \\ &= i\frac{c}{2} - \frac{c}{2} - ai \\ &= -\frac{c}{2} + i\left(\frac{c}{2} - a\right) \end{aligned}$$

$L_1 = L_2$ فالعلاقة صحيحة.

$$Z_K - Z_I = i(Z_J - a)$$

$$\frac{Z_K - Z_I}{Z_J - a} = i$$

$$\left|\frac{Z_K - Z_I}{Z_J - a}\right| = |i|$$

$$\frac{IK}{AJ} = 1$$

$$AJ = IK$$

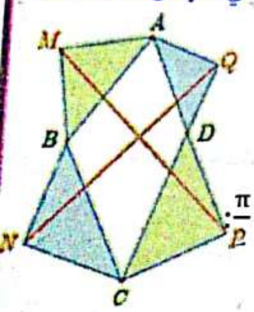
$$arg\frac{Z_K - Z_I}{Z_J - a} = arg(i)$$

$$\left(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{IK}\right) = \frac{\pi}{2}$$

AJ, IK متعامدان.

---

11. نتأمل في المستوي الموجه رباعياً محدباً مباشراً $ABCD$ ننشئ خارجه النقاط M, N, P, Q التي تجعل المثلثات MBA, NCB, PDC, DQA قائمة في M, N, P, Q بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.



اثبت باستعمال الأعداد العقدية ان $MP = NQ$ وان المستقيمين $(MP), (NQ)$ متعامدان.

فكرة الحل: نوجد q, n, m, p بدلالة d, c, b, a ثم نحسب $p - m$, $q - n$

A صورة B وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} a - m &= e^{\frac{\pi}{2}i}(b - m) \\ a - m &= i(b - m) \\ a - m &= ib - im \\ im - m &= ib - a \\ m(i-1) &= ib - a \\ m &= \frac{ib - a}{i - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{a - bi}{1 - i}}$$

B صورة C وفق دوران مركزه N وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} b - n &= e^{\frac{\pi}{2}i}(c - n) \\ b - n &= i(c - n) \\ b - n &= ic - in \\ in - n &= ic - b \\ n(i-1) &= ic - b \\ n &= \frac{ic - b}{i - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{n = \frac{b - ic}{1 - i}}$$

C صورة D وفق دوران مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$c-p=e^{\frac{\pi}{2}i}(d-p)$$
$$c-p=i(d-p)$$
$$c-p=id-ip$$
$$ip-p=id-c$$
$$p(i-1)=id-c$$
$$p=\frac{id-c}{i-1}$$
$$\boxed{p=\frac{c-id}{1-i}}$$

D صورة A وفق دوران مركزه Q وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$d-q=e^{\frac{\pi}{2}i}(a-q)$$
$$d-q=i(a-q)$$
$$d-q=ia-iq$$
$$iq-q=ia-d$$
$$q(i-1)=ia-d$$
$$q=\frac{ia-d}{i-1}$$
$$\boxed{q=\frac{d-ia}{1-i}}$$

$$p-m=\frac{c-id}{1-i}-\frac{a-bi}{1-i}=\frac{(c-a)+i(b-d)}{1-i}$$
$$q-n=\frac{d-ia}{1-i}-\frac{b-ic}{1-i}=\frac{(d-b)+i(c-a)}{1-i}$$

نلاحظ ان:

$$(q-n)=i(p-m)$$
$$\frac{q-n}{p-m}=i$$

$$\left|\frac{q-n}{p-m}\right|=|i|$$
$$\frac{NQ}{MP}=1$$
$$NQ=MP$$

$$arg\left(\frac{q-n}{p-m}\right)=arg(i)$$
$$\left(\overrightarrow{MP}\ ,\overrightarrow{NQ}\right)=\frac{\pi}{2}$$

MP, NQ متعامدان.

---

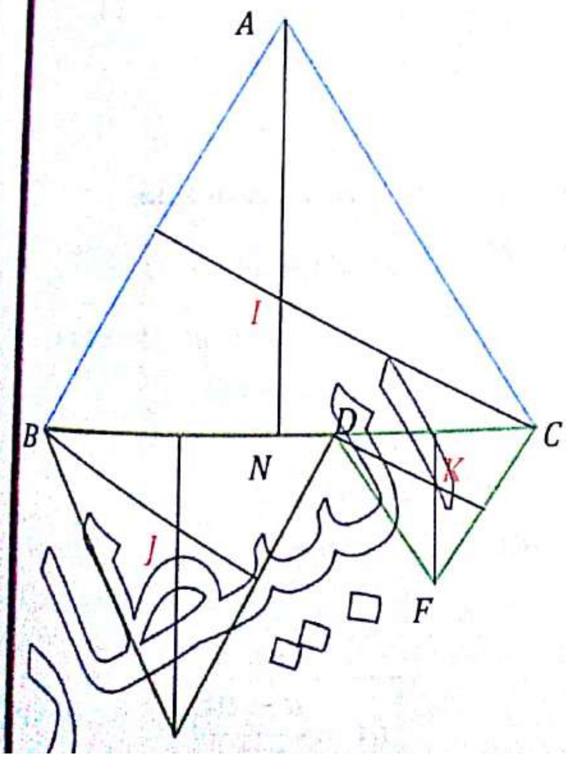
12. نتامل في المستوي الموجه مثلثا متساوي الأضلاع مباشرا ABC مركزه النقطة I . D نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$ ننشئ مثلثين متساويي الأضلاع مباشرين BED , DFC .

ونعرف J , K مركزي المثلثين BED , DFC نهدف إلى اثبات ان المثلث IJK متساوي الأضلاع. نختار معلماً متجانساً مباشراً $(B;\vec{u},\vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{BC}=\alpha\vec{u}$ حيث $\alpha=BC$

1) احسب بدلالة α العددين العقدين Z_A , Z_I اللذين يمثلان A , I بالترتيب.

$BC=\alpha$ فيكون $AB=AC=BC=\alpha$

ومنه إحداثيات النقاط:



$$B(0,0)$$
$$C(\alpha,0)$$

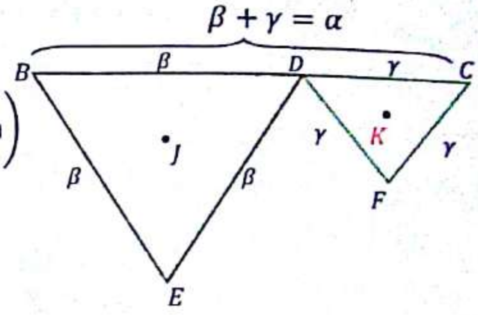
$A\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}\right)$: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right.$ يساوي α الارتفاع في مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه

$$I\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\sqrt{3}\alpha}{6}\right):\left(IN=\frac{1}{3}AN=\frac{\sqrt{3}\alpha}{6}\right)$$

$$\boxed{Z_A=\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}\alpha}{2}i}\quad,\quad\boxed{Z_I=\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{3}\alpha}{6}i}$$

2) نفترض ان $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$ حيث $t \in]0,1[$ احسب بدلالة α و t العددين العقديين Z_J , Z_K اللذين يمثلان J, K بالترتيب.

لنوجد إحداثيات النقاط الآتية:



$D(\beta, 0)$

$E\left(\frac{\beta}{2}, \frac{-\sqrt{3}\beta}{2}\right)$: (الارتفاع في مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه β يساوي $\frac{\sqrt{3}\beta}{2}$)

$J\left(\frac{\beta}{2}, \frac{-\sqrt{3}\beta}{6}\right)$: $(\overrightarrow{BD} = t.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \beta = t\alpha)$

$\Rightarrow J\left(\frac{t\alpha}{2}, \frac{-\sqrt{3}\,t\,\alpha}{6}\right) \Longrightarrow \boxed{Z_J = \frac{t\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}\,t\alpha}{6}i}$

$F\left(\beta + \frac{\gamma}{2}, -\frac{\sqrt{3}\gamma}{2}\right) \Rightarrow F\left(t\alpha + \frac{\alpha(1-t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\alpha(1-t)}{2}\right)$

$$\begin{bmatrix} \beta + \gamma = \alpha \\ t\alpha + \gamma = \alpha \\ \gamma = \alpha - t\alpha \\ \gamma = \alpha(1-t) \end{bmatrix}$$

$K\left(\beta + \frac{\gamma}{2}, -\frac{\sqrt{3}\gamma}{6}\right) \Rightarrow K\left(t\alpha + \frac{\alpha(1-t)}{2}, -\frac{\sqrt{3}\alpha(1-t)}{6}\right)$

$$\boxed{Z_K = t\alpha + \frac{\alpha(1-t)}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha(1-t)}{6}i}$$

3) تحقق ان: $Z_K - Z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_J - Z_I)$ واستنتج الخاصة المرجوة:

$$L_1 = Z_K - Z_I$$
$$= t\alpha + \frac{\alpha(1-t)}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha(1-t)}{6}i - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha}{6}i$$
$$= \frac{t\alpha}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}\alpha}{3} + \frac{\sqrt{3}\alpha t}{6}\right)i$$

$$L_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_J - Z_I)$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{t\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}t\alpha}{6}i - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}\alpha}{6}i\right)$$
$$= \frac{t\alpha}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}\alpha}{3} + \frac{\sqrt{3}\alpha t}{6}\right)i$$

$L_1 = L_2$ فالعلاقة صحيحة.

لدينا $Z_K - Z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_J - Z_I)$ فإن K صورة J وفق دوران مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{3}$ والمثلث IJK متساوي الأضلاع.

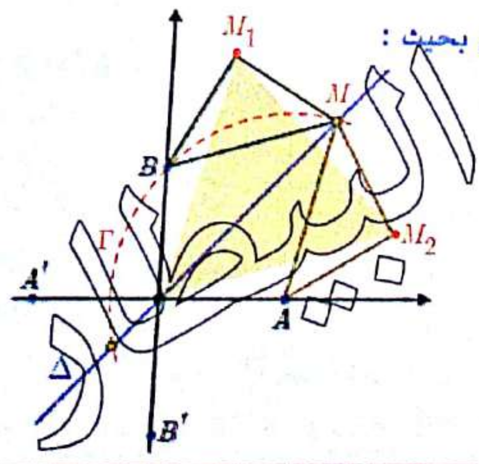
---

13. نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقاط A و $\acute{A}$ و B و $\acute{B}$ هي النقاط الموافقة للأعداد العقدية 1 و -1 و i و $-i$ بالترتيب .

نقرن كل نقطة $M(z)$ مختلفة عن النقاط O و A و $\acute{A}$ و B و $\acute{B}$ النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثان BMM_1 و AMM_2 قائمين و متساويي الساقين بحيث :

$$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

1) ارسم شكلاً مناسباً.



$$Z - Z_1 = i(i - Z_1)$$
$$1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$$

2) a. علل صحة المساواتين

لنثبت ان $Z - Z_1 = i(i - Z_1)$

BMM_1 مثلث قائم في M_1 ومتساوي الساقين

M صورة B وفق دوران مركزه M_1 و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z - Z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_B - Z_1)$$
$$Z - Z_1 = i(i - Z_1)$$

لنثبت ان $1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$

AMM_2 مثلث قائم ومتساوي الساقين في M_2

A صورة M وفق دوران مركزه M_2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z_A - Z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z - Z_2)$$
$$1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$$

b. عبر عن Z_1 و Z_2 بدلالة Z

$$Z - Z_1 = i(i - Z_1)$$
$$Z - Z_1 = -1 - iZ_1$$
$$iZ_1 - Z_1 = -1 - Z$$
$$Z_1(i - 1) = -1 - Z$$
$$Z_1 = \frac{-1 - Z}{i - 1}$$
$$Z_1 = \frac{Z + 1}{1 - i}$$

$$1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$$
$$1 - Z_2 = iZ - iZ_2$$
$$iZ_2 - Z_2 = iZ - 1$$
$$Z_2(i - 1) = iZ - 1$$
$$Z_2 = \frac{iZ - 1}{i - 1}$$
$$Z_2 = \frac{1 - iZ}{1 - i}$$

3) نهدف إلى تعيين النقاط M التي تجعل المثلث OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع

a. اثبت ان الشرط $OM_1 = OM_2$ يكافئ $|Z + 1| = |Z + i|$ و استنتج Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$ و ارسم Δ على الشكل نفسه

$$OM_1 = OM_2$$
$$|Z_1| = |Z_2|$$
$$\left|\frac{Z + 1}{1 - i}\right| = \left|\frac{1 - iZ}{1 - i}\right|$$
$$\left|\frac{Z + 1}{1 - i}\right| = \left|\frac{-i(Z + i)}{1 - i}\right|$$
$$\frac{|Z + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|Z + i|}{\sqrt{2}}$$
$$\boxed{|Z + 1| = |Z + i|}$$
$$|Z + 1| = |Z + i|$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|x + iy + 1| = |x + iy + i|$$
$$|(x + 1) + iy| = |x + (y + 1)i|$$
$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$
$$(x + 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$$
$$2x = 2y$$
$$\boxed{x = y}$$

مجموعة النقاط Δ تمثل منصف الربع الأول.

b. اثبت ان الشرط $OM_1 = M_1M_2$ يكافئ $|Z + 1|^2 = 2|Z|^2$

$$M_1M_2 = |Z_2 - Z_1|$$
$$Z_2 - Z_1 = \frac{1 - iZ}{1 - i} - \frac{Z + 1}{1 - i} = \frac{1 - iZ - Z - 1}{1 - i} = \frac{-Z(1 + i)}{1 - i} = \frac{-Z\,(1 + i)}{(1 - i)} \cdot \frac{(1 + i)}{(1 + i)} = \frac{-2Z\,i}{2} = -i\,Z$$

$$OM_1 = M_1M_2$$
$$|Z_1| = |Z_2 - Z_1|$$
$$\left|\frac{Z + 1}{1 - i}\right| = |-iZ|$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{|Z + 1|}{\sqrt{2}} = |Z|$$
$$|Z + 1| = \sqrt{2}|Z|$$
$$\boxed{|Z + 1|^2 = 2|Z|^2}$$

c. استنتج ان Γ مجموعة النقاط M التي تحقق $OM_1 = M_1M_2$ وارسم Γ في الشكل نفسه.

$$2|Z|^2 = |Z+1|^2$$
$$2(x^2+y^2) = (x+1)^2 + y^2$$
$$2x^2+2y^2 = x^2+2x+1+y^2$$
$$x^2+y^2-2x-1=0$$
$$\underbrace{x^2-2x+1}-1+y^2-1=0$$
$$(x-1)^2+y^2=2$$

ومنه مجموعة النقاط Γ تمثل دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$

d. استنتج مما سبق النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع وحددها على الشكل.

يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا انتمت النقطة M إلى تقاطع المجموعتين Δ و Γ بالحل المشترك لجملة المعادلتين :

$\boxed{1}\ \ y = x \Rightarrow y^2 = x^2\ \ \boxed{\acute{1}}$

$\boxed{2}\ \ (x-1)^2+y^2=2$

نعوض $\boxed{\acute{1}}$ في $\boxed{2}$ فنجد:

$$(x-1)^2+x^2=2$$
$$x^2-2x+1+x^2-2=0$$
$$2x^2-2x-1=0$$
$$\Delta = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$
$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{1}} y_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{1}} y_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه إما $M\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $M\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

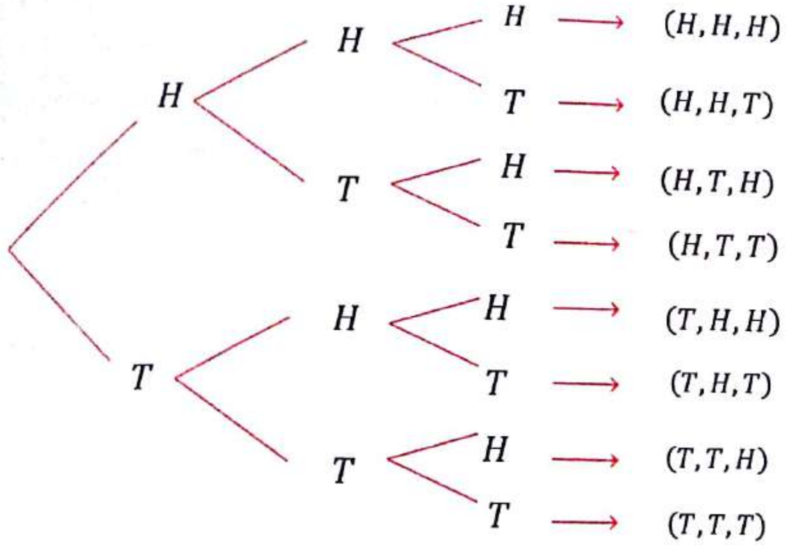
****

التحليل التوافقي

تمهيد:
نهدف من هذا البحث إلى استخدام طرائق العدّ لإيجاد عدد عناصر مجموعة وإيجاد عدد الطرق الممكنة لإجراء تجربة ما.

أولاً: استعمال التمثيل الشجري:

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات متتالية فإنه يمكن تمثيل فضاء العينة بالمخطط الشجري المجاور:
حيث نرمز بـ H للشعار و T للكتابة.

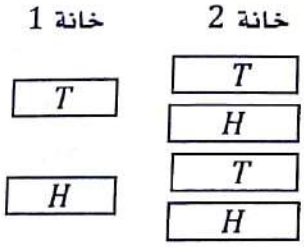


نلاحظ ان عدد عناصر فضاء العينة
هو: $n(\Omega) = 2^3 = 8$

ثانياً: استعمال الخانات:

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين فإنه يمكن تمثيل فضاء العينة بطريقة الخانات:

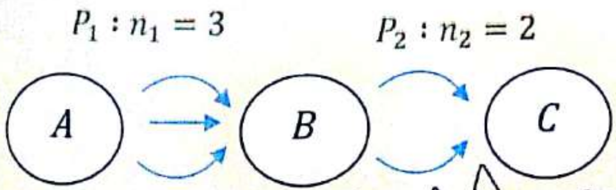
لدينا خيارين لملئ الخانة الأولى.
ونقابل كل خيار من الخانة الأولى خيارين لملئ الخانة الثانية
نلاحظ ان عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 2^2 = 4$



ثالثاً: المبدأ الأساسي في العدّ:

مثال توضيحي: لدينا ثلاث مدن A و B و C يمكن الإنتقال من المدينة A إلى B بثلاث طرق ويمكن الانتقال من المدينة B إلى المدينة C بطريقتين، بكم طريقة يمكن الإنتقال من المدينة A إلى المدينة C مروراً بالمدينة B

مناقشة الحل: نلاحظ اننا يمكننا الإنتقال من A إلى B بثلاث طرق
ويمكننا الإنتقال من B إلى C بطريقتين



اي أن الإنتقال من A إلى C يتم عبر مرحلتين P_1 و P_2
فحسب المبدأ الأساسي في العدّ يمكن الإنتقال من A إلى C بـ $(n = n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6)$ أي يوجد 6 طرق.

الخلاصة: إذا كان لدينا عمل يتم عبر r مرحلة، وكانت المرحلة الأولى تتم بـ n_1 طريقة
وكانت المرحلة الثانية تتم بـ n_2 طريقة، وكانت المرحلة الثالثة تتم بـ n_3 طريقة و.......
وكانت المرحلة الأخيرة تتم بـ n_r طريقة فإن عدد طرق إنجاز هذا العمل هو:

$$\boxed{\text{عدد الطرق} = n_1 . n_2 . n_3 \cdots\cdots . n_r}$$

وائل زعترية 0933699123 ياسر السماسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

التباديل على مجموعة:

بفرض E مجموعة غير خالية مكونة من n عنصراً نسمي تبديلاً على المجموعة E كل قائمة مكونة من n بنداً تضم جميع عناصر E .

فمثلاً: المجموعة $E = \{a, b, c\}$ عندئذ يكون كلاً من (a, b, c) , (a, c, b) تبديلاً على E ومنه فكرة التباديل للمجموعة E تاول إلى ملئ ثلاث خانات مرقمة بحيث تحوي كل خانة حرفاً واحداً من E وتكون الحروف الواردة في الخانات مختلفة مثنى مثنى.

ففي المثال السابق نلاحظ انه يوجد ثلاث خيارات لملء الخانة الأولى ويوافق كل منها خيارين لملء الخانة الثانية ويوافق كل منها خيار واحد لملء الخانة الثالثة.

خانة 3	خانة 2	خانة 1

ومنه عدد تباديل المجموعة E يساوي $3 \times 2 \times 1 = 6$ وهذا يقابل العدد $3!$

تعريف: يعطى عدد تباديل مجموعة E مكونة من n عنصراً $(n \geq 1)$ بالصيغة:

$n! = n(n-1)(n-2) \cdots\cdots \times 2 \times 1$ ويقرا n عاملي ونصطلح $0! = 1$

الخلاصة: في التباديل يوجد أهمية للترتيب ونستخدم كافة العناصر ولا يوجد تكرار.

مثال (1) : بكم طريقة يمكن ترتيب 5 كتب مختلفة على رف فيه 5 أماكن؟

عدد طرق التباديل هي: عدد الطرق $= 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ طريقة

مثال (2): لتكن المجموعة $E = \{a, s, n, r\}$ بكم طريقة يمكن تشكيل كلمة مؤلفة من اربعة أحرف مختلفة من حروف المجموعة E

عدد طرق تشكيل الكلمة هو عدد الطرق $= 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ طريقة

توضيح:

يمكن اختيار الحرف الأول بـ 4 طرق
يمكن اختيار الحرف الثاني بـ 3 طرق
يمكن اختيار الحرف الثالث بـ 2 طريقة
يمكن اختيار الحرف الرابع بـ 1 طريقة

حسب المبدأ الأساسي في العد:

(عدد الطرق $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ طريقة)

****

التراتيب:

أولاً: القوائم دون تكرار:

بفرض E مجموعة مؤلفة من n عنصر وبفرض لدينا مجموعة جزئية من E مكونة من r عنصر بنودها مختلفة مثنى مثنى حيث $1 \leq r \leq n$ نسمي كل قائمة مكونة من r بنداً ماخوذة من E ترتيباً طوله r

ومنه لترتيب مجموعة طولها r ماخوذة من n عنصر نستخدم قانون التراتيب:

$$\boxed{P_n^r = n(n-1)(n-2) \cdots\cdots \times (n-r+1)}$$

ويمكن كتابة قانون التراتيب بالشكل:

$$\boxed{P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

الخلاصة: تستخدم التراتيب إذا كان لدينا مجموعة تحوي n عنصر وأردنا ترتيب r عنصر منها هي قوائم، وتستخدم في تحديد المراكز أو المناصب أو ترتيب الأماكن وفي مسائل سحب (بطاقات أو كرات) على التتالي دون إعادة.

مثال ①: بكم طريقة يمكن ترتيب 3 كتب مختلفة من مجموعة تحوي 6 كتب على رف ؟

طريقة اولى : $P_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ طريقة

طريقة ثانية : $P_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ طريقة

مثال ②: يشترك في سباق للخيول ثمانية متسابقين بكم طريقة يمكن تعيين الفائز الأول والثاني والثالث علماً انه لا يصل متسابقين معاً إلى خط النهاية بنفس الوقت؟

طريقة اولى: $P_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ طريقة

طريقة ثانية:

عدد طرق تعيين الفائز الأول 8 طرق
عدد طرق تعيين الفائز الثاني 7 طرق
عدد طرق تعيين الفائز الثالث 6 طرق

حسب المبدأ الأساسي في العدّ:

عدد الطرق $= 8 \times 7 \times 6 = 336$ طريقة

ثانياً: القوائم مع تكرار:

في هذه الحالة يسمح بتكرار عناصر المجموعة E في بنود القائمة.

فإذا كان لدينا r خانة فيكون لدينا n خيار للبنـد الأول و n خيار للبند الثاني ……… n خيار للبند r، إذاً عدد هذه القوائم هو n^r

خانة r ……… خانة 2 خانة 1

الخلاصة: قد نحتاج أحياناً إلى تكرار العناصر المختارة ففي هذه الحالة تؤول التراتيب إلى المبدأ الأساسي في العدّ.

مثال: صف يحوي 20 طالب بكم طريقة يمكن تعيين الطالب الأولي في مادة الرياضيات والفيزياء والكيمياء.

نلاحظ أنه نفس الطالب محتمل أن يكون أولي في المواد الثلاثة معاً لذلك لا يمكن استخدام قانون P_n^r لأنه يوجـد تكـرار في هذه الحالة لذلك نستخدم المبدأ الأساسي في العدّ:

يمكن اختيار الأولي في مادة الرياضيات بـ 20 طريقة
يمكن اختيار الأولي في مادة الفيزياء بـ 20 طريقة
يمكن اختيار الأولي في مادة الكيمياء بـ 20 طريقة

حسب المبدأ الأساسي في العدّ:

عدد الطرق $= 20 \times 20 \times 20 = 8000$ طريقة

تمرين:

كم عدداً طبيعياً مكوناً من 4 ارقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام $\{0,1,2,4,7,8\}$ ليكون العدّد اقل من 4000

توضيح:

يجب ان تكون الأعداد مكونة من 4 ارقام لذا لا يمكن أن يكون في الألوف صفر

ويجوز تكرار الأرقام لأنه لم يذكر خلاف ذلك.

الأعداد يجب ان تكون اقل من 4000 لذا لا يمكن استخدام الأرقام 8,7,4 في خانة الألوف.

يمكن اختيار رقم احاد الألوف بـ 2 طريقة
يمكن اختيار رقم المئات بـ 6 طرق
يمكن اختيار رقم العشرات بـ 6 طرق
يمكن اختيار رقم الآحاد بـ 6 طرق

وحسب المبدأ الأساسي في العدّ:

عدد الطرق $= 2 \times 6 \times 6 \times 6 = 432$ طريقة

****

وائل زعترية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

تمارين صفحة 152:

1) اختزل المقادير الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة:

$\boxed{1}$ $\dfrac{21!}{20!}=\dfrac{21\times 20!}{20!}=21$	$\boxed{2}$ $\dfrac{17!}{15!}=\dfrac{17\times 16\times 15!}{15!}=17\times 16=272$
$\boxed{3}$ $\dfrac{6!-5!}{5!}=\dfrac{6\times 5!-5!}{5!}=\dfrac{5!\,(6-1)}{5!}$ $=6-1=5$	$\boxed{4}$ $\dfrac{6\times 4!}{5!}=\dfrac{6\times 4!}{5\times 4!}=\dfrac{6}{5}$
$\boxed{5}$ $\dfrac{7!\times 5!}{10!}=\dfrac{7!\times 5!}{10\times 9\times 8\times 7!}$ $=\dfrac{5!}{10\times 9\times 8}$ $=\dfrac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{10\times 9\times 8}=\dfrac{1}{3\times 2}=\dfrac{1}{6}$	$\boxed{6}$ $\dfrac{1}{5!}-\dfrac{42}{7!}=\dfrac{1}{5!}-\dfrac{42}{7\times 6\times 5!}$ $=\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{5!}=0$
$\boxed{7}$ $\dfrac{6!}{(3!)^2}=\dfrac{6!}{3!\times 3!}=\dfrac{6\times 5\times 4\times 3!}{3!\times 3!}$ $=\dfrac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=5\times 4=20$	$\boxed{8}$ $\dfrac{9!}{5!\times 4!}=\dfrac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 4!}$ $=\dfrac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=9\times 2\times 7=126$
$\boxed{9}$ $\dfrac{9!}{6!\times 3!}=\dfrac{9\times 8\times 7\times 6!}{6!\times 3!}$ $=\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=3\times 4\times 7$ $=84$	$\boxed{10}$ $\dfrac{6!+7!}{2!\,3!\,4!}=\dfrac{6!+7\times 6!}{2\times 1\times 3\times 2\times 1\times 4!}$ $=\dfrac{6!\,(1+7)}{12\times 4!}=\dfrac{6\times 5\times 4!\times 8}{12\times 4!}$ $=\dfrac{6\times 5\times 8}{12}=5\times 4=20$

---

2) اختزل المقادير الآتية:

$\boxed{1}$ $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1)(n)=n^2+n$$

$\boxed{2}$ $$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}=(2n+1)(2n)=4n^2+2n$$

$\boxed{3}$ $$\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}=\frac{(2n)(2n-1)!-(2n-1)!}{2n(n-1)!-(n-1)!}=\frac{(2n-1)!\;[2n-1]}{(n-1)!\,[2n-1]}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(2n-1)(2n-2)\cdots\cdots\left(\overbrace{2n-n}^{n}\right)(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$=(2n-1)(2n-2)\cdots\cdots n$$

$\boxed{4}$ $$\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{(n-1)!}{n(n-1)!}-\frac{n!}{(n+1)n!}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}$$

$\boxed{5}$ $$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)n!}=\frac{1}{n!}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{1}{n!}\left[\frac{n}{n+1}\right]$$

$$=\frac{n}{n(n-1)!\,(n+1)}=\frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}$$

طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سيروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

$$\boxed{6}\ \frac{(2n)!}{1\times 3\times 5\cdots\cdots\times(2n-1)}$$

$$=\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots\cdots\left(\overbrace{2n-n}^{n}\right)(n-1)\cdots\cdots 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\times 3\times 5\times\cdots\cdots(2n-1)}$$

$$=(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots\cdots\times 6\times 4\times 2$$

$$=2(n).2(n-1).2(n-2)\cdots\cdots\times 2(3)\times 2(2)\times 2(1)$$

$$=2^n[n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\times 3\times 2\times 1]=2^n.n!$$

---

3) اكتب جميع تباديل المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$

المجموعة E تحوي 4 عناصر فإن عدد التباديل هو: $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = !4 =$ عدد التباديل

$$\Omega=\{(a,b,c,d),(a,b,d,c),(a,d,b,c),(a,d,c,b),(a,c,b,d),(a,c,d,b),(b,a,c,d)$$
$$(b,a,d,c),(b,d,a,c),(b,d,c,a),(b,c,a,d),(b,c,d,a),(c,a,d,b),(c,a,b,d)$$
$$(c,b,a,d),(c,b,d,a),(c,d,a,b),(c,d,b,a),(d,a,b,c),(d,a,c,b),(d,b,a,c)$$
$$(d,b,c,a),(d,c,a,b),(d,c,b,a)\}$$

---

4) لتكن المجموعة $S=\{1,2,5,8,9\}$

1. كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

نلاحظ أن العدد مؤلف من منزلتين ويمكن التكرار أي يمكن اختيار الآحاد بـ 5 طرق ويمكن اختيار العشرات بـ 5 طرق

وحسب المبدأ الأساسي في العد فإن عدد الطرق المطلوبة:

طريقة $25 = 5 \times 5 =$ عدد الطرق

2. كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

بما أن أرقام العدد مختلفة (لا يمكن أن يكون للآحاد وللعشرات نفس الرقم) فإن عدد طرق تشكيل العدد هو:

$P_5^2=5\times 4=20$ طريقة

3. كم عدداً زوجياً مؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

يكون العدد زوجي إذا كان آحاده زوجي ومنه:

يمكن اختيار الآحاد بـ 2 طريقة
يمكن اختيار العشرات بـ 5 طرق

حسب المبدأ الأساسي في العد عدد طرق تشكيل العدد:

طرق $10 = 2 \times 5 =$ عدد الطرق

---

5) في أحد مراكز الهاتف مهندسان وأربعة عمال كم لجنة مختلفة قوامها مهندس واحد وعامل واحد يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز؟

يمكن اختيار المهندس بـ 2 طريقة
يمكن اختيار العامل بـ 4 طرق

حسب المبدأ الأساسي في العد عدد الطرق المطلوبة

طرق $8 = 2 \times 4 =$ عدد الطرق

---

6) يتألف مجلس إدارة نادي رياضي من سبعة أعضاء بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين سر للنادي؟

بما ان الترتيب مهم فإن الاختيار يتم بـ P_7^3 أي: طرق $210 = 5 \times 6 \times 7 = P_7^3 =$ عدد الطرق

---

7) اشترك مئة متسابق في سباق للدراجات يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟ (لا توجد حالات تساو).

ترتيب المراكز مهم ومنه يمكن توزيع الميداليات بـ: طريقة $970200 = 98 \times 99 \times 100 = P_{100}^3 =$ عدد الطرق

التـــوافـــيـــق

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصراً وليكن r عدداً طبيعياً يحقق $0 \le r \le n$ نسمي توفيقاً يضم r عنصراً من E كل مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصراً من E وفي هذه الحالة يكون ترتيب العناصر في المجموعة الجزئية غير مهم.

فمثلاً: $\{a,b\}$, $\{b,a\}$ تمثلان المجموعة نفسها ونكتب قانون التوافيق بالشكل:

$$\boxed{C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,.\,r!}}$$

مثال: صندوق يحوي 8 كرات بكم طريقة يمكن اختيار 3 كرات من الصندوق السابق.

طريقة اولى:

$$\binom{8}{3} = \frac{P_8^3}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56 \quad \text{طريقة}$$

طريقة ثانية:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!\,.\,3!} = \frac{8!}{5!\,.\,3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!\ .\ 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \quad \text{طريقة}$$

الخلاصة: نستخدم التوافيق عندما نكون أمام اختيار مجموعة جزئية مؤلفة من r عنصر من مجموعة أوسع تحوي n عنصر.

ومعنى التوافيق $\binom{n}{r}$ هو عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من r عنصر والمأخوذة من مجموعة تضم n عنصر.

مثال: مغلف يحوي 16 بطاقة ملونة 4 حمراء و4 خضراء و4 صفراء و4 زرقاء وكل لون مرقم من 1 إلى 4 نسحب 5 بطاقات من المغلف.

1. **كم سحباً يضم تماماً بطاقتين زرقاء اللون.**
2. **كم سحباً يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل رقم (1).**

1. يجب سحب بطاقتين من البطاقات الزرقاء والبطاقات الثلاث المتبقية يجب سحبها من البطاقات الـ 12 المتبقية ومنه طرق السحب هي:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{4}{2}\binom{12}{3} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times 3 \times 2 \times 11 \times 10 = 1320 \quad \text{طريقة}$$

2. لنرمز بالرمز A إلى مجموعة السحوبات التي يضم كل منها بطاقة واحدة على الأقل تحمل رقم 1

نلاحظ أنه من الأسهل الاعتماد على حساب عدد عناصر متمم المجموعة A وهو $\grave{A}$

اي $\grave{A}$ تضم السحوبات التي لا تحمل رقم 1 اي اختيار 5 بطاقات من 12 بطاقة (بعد حذف 4 بطاقات تحمل الرقم 1).

$$n(A) = \underbrace{\binom{16}{5}}_{\text{عدد السحوبات الكلية}} - \underbrace{n(\grave{A})}_{\text{عدد السحوبات التي لا تضم 1}}$$

$$n(A) = \binom{16}{5} - \binom{12}{5}$$

$$= \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4368 - 792 = 3576 \quad \text{طريقة}$$

خواص عدد التوافيق $\binom{n}{r}$:

1. اذا كان العددان الطبيعيان r و n وكان $0 \le r \le n$ كان $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ بشرط $r > \frac{n}{2}$
2. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$
3. اذا كان العددان الطبيعيان r و n وكان $1 \le r \le n$ كان $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$
4. يتساوى توفيقان $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ عندما: $p = q$ او $P + q = n$

والحل يجب ان يحقق الشرط: $((n \ge p)\ (n \ge q))$

طارق سعد الدين 0955561648 خلدون سيروان 0932791896 حسان البيطار 0933756454

تمارين صفحة 155:

1) اختزل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة او كسور غير قابلة للاختزال.

$\boxed{1}\ \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$	$\boxed{2}\ \binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$
$\boxed{3}\ \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{7 \times 6}{2 \times 1}}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{7 \times 6}{3 \times 8 \times 7} = \frac{1}{4}$	$\boxed{4}\ \frac{\binom{5}{3} \times \binom{6}{4}}{\binom{9}{3}} = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1}}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{25}{14}$
$\boxed{5}\ \frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \frac{2}{3}$	$\boxed{6}\ \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}} = \frac{1}{10}$

---

2) اثبت صحة المساواة $n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$ في حالة $n \geq 2$ و $1 \leq r \leq n$

طريقة أولى :

$$L_1 = n\binom{n-1}{r-1} = n\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-1-r+1)!} = \frac{n(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$L_2 = r\binom{n}{r} = r\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{r\,n!}{r(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}$$

ومنه $L_1 = L_2$ فالمساواة السابقة صحيحة.

طريقة ثانية:

$$L_1 = n\binom{n-1}{r-1} = n\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-1-r+1)!} = \frac{n(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\cdot\frac{r}{r}$$

$$= r\cdot\frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!} = r\cdot\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = r\binom{n}{r} = L_2$$

إذاً $L_1 = L_2$ فالمساواة السابقة صحيحة.

---

3) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

$\boxed{1}\ \binom{n}{2} = 36$

شرط الحل $n \geq 2$:

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 36$$

$$\frac{n^2 - n}{2} = 36$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad \boxed{n = 9} \quad (\text{مقبول}) \\ \text{او} \quad n = -8 \quad (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

$\boxed{2}\ 3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

شرط الحل $((n \geq 4) \cap (n \geq 2))$ ومنه: $n \geq 4$

$$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 14\frac{n(n-1)}{2 \times 1}$$

: من شرط الحل $n \neq 0$ و $n - 1 \neq 0$ نقسم الطرفين على $n(n-1)$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{8} = 7$$

$$(n-2)(n-3) = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad (n-10)(n+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } \boxed{n = 10} & (\text{مقبول}) \\ \text{او } n = -5 & (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$: شرط الحل $\left.\begin{matrix} 10 \geq n+2 \\ 10 \geq 3n \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \leq n \leq 3$

إما $3n + n + 2 = 10$

$4n + 2 = 10$

$\boxed{n = 2}$ (مقبول)

او $3n = n + 2$

$2n = 2$

$\boxed{n = 1}$ (مقبول)

---

4) نريد تاليف لجنة مكونة من اربعة اشخاص ماخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً واربع عشر امراة.

1. كم لجنة مختلفة يمكننا تاليفها؟

عدد طرق اختيار 4 أشخاص من 29 شخص:

$$\binom{29}{4} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 23751 \quad \text{لجنة}$$

2. كم لجنة مختلفة مكونة من رجلين وامراتين يمكننا تاليفها؟

نرمز للرجل بـ m و نرمز للمراة بـ f

$$A = \{(f, f, m, m)\}$$

$$n(A) = \binom{14}{2}\binom{15}{2} = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} \times \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 7 \times 13 \times 15 \times 7 = 9555 \quad \text{لجنة}$$

***

منشور ذي الحدين: أياً كان العدّدان العقديان b, a وأياً كان العدّد الطبيعي $n \geq 1$ كان:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n . b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} . b + \binom{n}{2} a^{n-2} . b^2 + \cdots\cdots + \binom{n}{n} a^0 . b^n$$

$$= a^n + n . a^{n-1} . b + \binom{n}{2} a^{n-2} . b^2 + \cdots\cdots + b^n$$

ملاحظة: الحد ذي الدليل r في منشور $(a+b)^n$ ترتيبه $r+1$ ويعطى بالعلاقة:

$$\boxed{T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} . b^r}$$

اي: الحد الأول هو T_0 والحد الثاني هو T_1 والحد الثالث T_2 و..... والحد $r+1$ هو T_r

مثال: اوجد منشور كلاً من المقدارين $A = (2x-1)^5$, $B = (1+i)^6$

$A = (2x-1)^5$ حيث $(a = 2x), (b = -1), (n = 5)$:

$$= \binom{5}{0}(2x)^5(-1)^0 + \binom{5}{1}(2x)^4(-1)^1 + \binom{5}{2}(2x)^3(-1)^2 + \binom{5}{3}(2x)^2(-1)^3 + \binom{5}{4}(2x)^1(-1)^4 + \binom{5}{5}(2x)^0(-1)^5$$

$$= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$$

$B = (1+i)^6$ حيث $(a = 1), (b = i), (n = 6)$:

$$= \binom{6}{0}(1)^6(i)^0 + \binom{6}{1}(1)^5(i)^1 + \binom{6}{2}(1)^4(i)^2 + \binom{6}{3}(1)^3(i)^3 + \binom{6}{4}(1)^2(i)^4 + \binom{6}{5}(1)(i)^5 + \binom{6}{6}(1)^0(i)^6$$

$$= 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6$$

$$= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i$$

تمارين صفحة 159:

1) انشر كلاً من العبارات الآتية:

$\boxed{1}$ $(2+x)^4 = \binom{4}{0}(2)^4(x)^0 + \binom{4}{1}(2)^3(x)^1 + \binom{4}{2}(2)^2(x)^2 + \binom{4}{3}(2)^1(x)^3 + \binom{4}{4}(2)^0(x)^4$

$= (1)(16)(1) + (4)(8)x + (6)(4)x^2 + (4)(2)x^3 + (1)(1)x^4$

$= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

$\boxed{2}$ $(1-x)^5 =$

$= \binom{5}{0}(1)^5(-x)^0 + \binom{5}{1}(1)^4(-x)^1 + \binom{5}{2}(1)^3(-x)^2 + \binom{5}{3}(1)^2(-x)^3 + \binom{5}{4}(1)^1(-x)^4$

$+ \binom{5}{5}(1)^0(-x)^5$

$= (1)(1)(1) + (5)(1)(-x) + (10)(1)(x^2) + (10)(1)(-x^3) + (5)(1)(x^4) + (1)(1)(-x^5)$

$= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

$\boxed{3}$ $(2x+1)^6 =$

$= \binom{6}{0}(2x)^6(1)^0 + \binom{6}{1}(2x)^5(1)^1 + \binom{6}{2}(2x)^4(1)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3(1)^3 + \binom{6}{4}(2x)^2(1)^4$

$+ \binom{6}{5}(2x)^1(1)^5 + \binom{6}{6}(2x)^0(1)^6$

$= (1)(64x^6)(1) + (6)(32x^5)(1) + (15)(16x^4)(1) + (20)(8x^3)(1)$

$+ (15)(4x^2)(1) + (6)(2x)(1) + (1)(1)(1)$

$= 64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + 60x^2 + 12x + 1$

$\boxed{4}$ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = \binom{4}{0}(x)^4\left(\frac{1}{x}\right)^0 + \binom{4}{1}(x)^3\left(\frac{1}{x}\right)^1 + \binom{4}{2}(x)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{4}{3}(x)^1\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{4}{4}(x)^0\left(\frac{1}{x}\right)^4$

$= (1)(x^4)(1) + (4)(x^3)\left(\frac{1}{x}\right) + 6(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right) + (4)(x)\left(\frac{1}{x^3}\right) + (1)(1)\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

$\boxed{5}$ $(1+2i)^3 = \binom{3}{0}(1)^3(2i)^0 + \binom{3}{1}(1)^2(2i)^1 + \binom{3}{2}(1)^1(2i)^2 + \binom{3}{3}(1)^0(2i)^3$

$= (1)(1)(1) + (3)(1)(2i) + (3)(1)(4i^2) + (1)(1)(8i^3)$

$= 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$

$\boxed{6}$ $(2-i)^4 = \binom{4}{0}(2)^4(-i)^0 + \binom{4}{1}(2)^3(-i)^1 + \binom{4}{2}(2)^2(-i)^2 + \binom{4}{3}(2)^1(-i)^3 + \binom{4}{4}(2)^0(-i)^4$

$= (1)(16)(1) + (4)(8)(-i) + (6)(4)(i^2) + (4)(2)(-i^3) + (1)(1)(i^4)$

$= 16 - 32i - 24 + 8i + 1 = -7 - 24i$

---

2) عين في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x

لدينا: $b=\frac{1}{x}$, $a=x$ ، $n=10$

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r=\binom{10}{r}x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{10}{r}x^{10-r}\frac{1}{x^r}$$

$$=\binom{10}{r}x^{10-r}.x^{-r}\quad\Rightarrow\quad\boxed{T_r=\binom{10}{r}x^{10-2r}}$$

لنوجد دليل الحد الذي يحوي x^2 و الذي يحقق :

$$x^2=x^{10-2r}$$

$$2=10-2r$$

$$2r=8\quad\Rightarrow\quad\boxed{r=4}$$

$$T_4=\binom{10}{4}x^{10-2(4)}=\binom{10}{4}x^2$$

$$=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}x^2=210\,x^2$$

الحد الثابت المستقل عن x فيه x^0 ودليله يحقق :

$$x^0=x^{10-2r}$$

$$0=10-2r$$

$$2r=10\quad\Rightarrow\quad\boxed{r=5}$$

$$T_5=\binom{10}{5}x^{10-2(5)}=\binom{10}{5}x^0$$

$$=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252\,x^0=252$$

---

3) ما الشرط على العدّد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ على حد ثابت مستقل عن x

$$T_r=\binom{n}{r}(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{n}{r}x^{2n-2r}\frac{1}{x^r}$$

$$=\binom{n}{r}x^{2n-2r}.x^{-r}\quad\Rightarrow\quad\boxed{T_r=\binom{n}{r}x^{2n-3r}}$$

وجود حد ثابت يكافئ وجود قيمة للدليل r تحقق الشرط:

$$x^0=x^{2n-3r}$$

$$0=2n-3r$$

$$3r=2n\Rightarrow r=\frac{2n}{3}$$

وبما ان n عدد طبيعي فيجب أن يكون n من مضاعفات العدّد (3) ماعدا العدّد الصفر

---

4) اختزل منشور المقدار $(1+x)^6+(1-x)^6$

باستخدام منشور ذي الحدين:

$$(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$$

$$(1-x)^6=1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$$

$$(1+x)^6+(1-x)^6=2+30x^2+30x^4+2x^6$$

انشطة

نشاط (1): انواع السحب المختلفة:

نتأمل صندوق يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6 , 7 , 8 , 9 نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة.

1) **كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة؟**

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

2) **كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية؟**

a) الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6 والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7

$$1 \times 1 \times 1 = 1$$

b) الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8 والثانية تحمل الرقم 7

$$1 \times 1 \times 4 = 4$$

c) الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9 والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8

$$4 \times 1 \times 1 = 4$$

d) الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7

$$4 \times 1 \times 4 = 16$$

في حالة السحب دون إعادة:

1) $4 \times 3 \times 2 = 24$

2) a) $1 \times 1 \times 1 = 1$ b) $1 \times 1 \times 2 = 2$

c) $2 \times 1 \times 1 = 2$ d) $3 \times 1 \times 2 = 6$

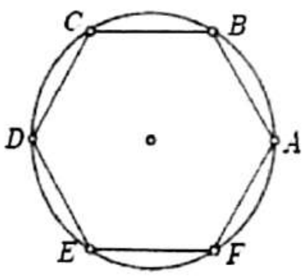
في حالة السحب معاً:

1) كم عدد النتائج الممكنة: $\binom{4}{3} = 4$

2) كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 : $\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 3$

3) كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان 9,8 : $\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1} = 2$

نشاط (2): مثلثات في مسدس:



في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F

موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم

نجري التجربة الآتية: نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث

1) **ما عدد المثلثات التي يمكن ان نحصل عليها بهذا الأسلوب؟**

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

2) **ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن ان نحصل عليها بهذا الأسلوب؟**

ينقسم العمل لمرحلتين: المرحلة الأولى: عدد طرق إنشاء قطر المسدس المار من مركز الدائرة ويتم بـ 3 طرق

المرحلة الثانية: عدد طرق انشاء مثلث قائم ويتم بأربع طرق تقابل كل طريقة لإنشاء القطر

عدد المثلثات يكون جداء طرق كل مرحلة $4 \times 3 = 12$

3) **ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن ان نحصل عليها بهذا الأسلوب؟**

كل ضلعين متجاورين في المسدس تشكل مثلث منفرج زاويته $\frac{2\pi}{3}$

عدد المثلثات المنفرجة 6

نشاط (3): منعاً من السرقة: يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال رمّاز (كود) مكون من عدد ذي اربع خانات يمكن لأي منها ان يأخذ اياً من القيم $0,1,\dots,9$

1) a) ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل؟

ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجر إدخال أي خانة صحيحة في مكانها.

ما عدد الرمّازات التي تسبب انطلاق الإنذار

عدد الرمّازات التي تصلح للقفل: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

عدد الرمّازات التي تسبب انطلاق الانذار 9999

b) ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل والمكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

2) عند فصل التغذية الكهربائية عن المذياع، يجب على مالك السيارة ان يعيد إدخال الرمّاز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذياع. يتذكر المالك ان الرمّاز الصحيح مكون من الأرقام 1 و 5 و 9 و 9 ولكنه نسي ترتيبها

كم رمّازاً مختلفاً يمكن للمالك ان يكون من هذه الأرقام؟

يمكن وضع الرقم (1) بأربع طرق يمكن وضع الرقم (5) بثلاث طرق

اما العددان 9 و 9 يتم وضعهما بطريقة واحدة ومنه عدد الرمّازات $= 3 \times 4 \times 1 = 12$

نشاط (4): تحويل العبارات المثلثية: حول كل عبارة مما يأتي إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات x

$$\cos^4 x = (\cos x)^4 = \left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^4$$
$$= \frac{\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)^4}{16}$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{4xi}+4e^{2xi}+6+4e^{-2xi}+e^{-4xi}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left[e^{4xi}+e^{-4xi}+4\left(e^{2xi}+e^{-2xi}\right)+6\right]$$
$$= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$$

$$\cos^2 x . \sin^2 x = (\cos x)^2(\sin x)^2$$
$$= \left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^2$$
$$= \frac{\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)^2}{(2)^2}.\frac{\left(e^{xi}-e^{-xi}\right)^2}{(2i)^2}$$
$$= \frac{\left(\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)\left(e^{xi}-e^{-xi}\right)\right)^2}{(4)(-4)}$$
$$= \frac{-1}{16}\left(e^{2xi}-e^{-2xi}\right)^2$$
$$= \frac{-1}{16}\left(e^{4xi}-2+e^{-4xi}\right)$$
$$= \frac{-1}{16}\left(e^{4xi}+e^{-4xi}-2\right)$$
$$= \frac{-1}{16}(2\cos 4x - 2)$$
$$= \frac{-1}{8}(\cos 4x - 1)$$

$$\sin^5 x = (\sin x)^5$$
$$= \left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^5$$
$$= \frac{\left(e^{xi}-e^{-xi}\right)^5}{(2i)^5}$$
$$= \frac{1}{32i}\left(e^{5xi}-5e^{3xi}+10e^{xi}-10e^{-xi}+5e^{-3xi}-e^{-5xi}\right)$$
$$= \frac{1}{32i}\left[e^{5xi}-e^{-5xi}-5\left(e^{3xi}-e^{-3xi}\right)+10\left(e^{xi}-e^{-xi}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{32i}(2i\sin 5x - 10i\sin 3x + 20i\sin x)$$
$$= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

1) اثبت صحة العلاقتين:

$\boxed{1}$ $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{r+1}$

$$L_1 = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1-r-1)!\,(r+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

$$= \frac{\dfrac{(n+1)n!}{(n-r)!\,(r+1)r!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}} = \frac{n+1}{r+1} = L_2$$

$\boxed{2}$ $\dfrac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{n+1-r}$

$$L_1 = \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

$$= \frac{\dfrac{(n+1)n!}{(n+1-r)(n-r)!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!}} = \frac{n+1}{n+1-r} = L_2$$

---

2) احسب قيمة كل من n و r إذا علمت:

$\boxed{1}$ $3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$

$$3\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = 8\frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}$$

$$\frac{3}{(n-r)!\,r(r-1)!} = \frac{8}{(n-r+1)(n-r)!\,(r-1)!}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1}$$

$$3n - 3r + 3 = 8r$$

$$\boxed{3 = 11r - 3n} \qquad \boxed{1}$$

$\boxed{2}$ $2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$

$$2\frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!} = 5\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$$

$$\frac{2}{(n-r)!\,(r+1)r!} = \frac{5}{(n+1-r)(n-r)!\,r!}$$

$$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n+1-r}$$

$$5r + 5 = 2n + 2 - 2r$$

$$\boxed{3 = 2n - 7r} \qquad \boxed{2}$$

بمطابقة $\boxed{2}$ و $\boxed{1}$ نجد :

$$11r - 3n = 2n - 7r$$

$$18r = 5n \Longrightarrow n = \frac{18r}{5}\ (*) \xrightarrow{\text{نعوض في } \boxed{2}} 3 = \frac{36r - 35r}{5} \Longrightarrow \boxed{r = 15} \xrightarrow{\text{نعوض في } (*)} \boxed{n = 54}$$

ملاحظة: لإيجاد قيمة n في التراتيب نضع شرط الحل: $n \geq r$ ثم نستخدم قانون P_n^r

3) عين n في كل من الحالات الآتية:

$\boxed{1}$ $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$

شرط الحل $(n \geq 2) \cap (n \geq 3)$ ومنه: $n \geq 3$

$$(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14n(n-1)(n-2)$$

$$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$$

$$n^2 + n + 2n + 2 = 14n - 28$$

$$n^2 + 3n + 2 - 14n + 28 = 0$$

$$n^2 - 11n + 30 = 0$$

$$(n-6)(n-5) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{n = 6} & (\text{مقبول}) \\ \boxed{n = 5} & (\text{مقبول}) \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $P_n^5 = 18P_{n-2}^4$

شرط الحل $(n \geq 5) \cap (n \geq 6)$ ومنه: $n \geq 6$

$$P_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$18P_{n-2}^4 = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

بعد المساواة و الاختصار نجد ان :

$$n(n-1) = 18(n-5)$$

$$n^2 - n = 18n - 90$$

$$n^2 - 19n + 90 = 0$$

$$(n-10)(n-9) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{n = 10} & (\text{مقبول}) \\ \boxed{n = 9} & (\text{مقبول}) \end{cases}$$

وائل زعترية 0933699123 ياسر الساسة 0949198068 علاء رحال 0952480990

4 $P_n^6 = 12P_{n-1}^5$ شرط الحل $(n \geq 6) \cap (n \geq 6)$ ومنه: $n \geq 6$ $P_n^6 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ $12P_{n-1}^5 = 12(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ بعد المساواة و الاختصار نجد ان : $\boxed{n = 12}$ (مقبول)	**3** $P_n^4 = 10P_{n-1}^3$ شرط الحل $(n \geq 4) \cap (n \geq 4)$ ومنه: $n \geq 4$ $n(n-1)(n-2)(n-3) = 10(n-1)(n-2)(n-3)$ $\boxed{n = 10}$ (مقبول)
6 $P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$ شرط الحل $(n \geq -1) \cap (n \geq 1)$ ومنه: $n \geq 1$ $(n+2)(n+1)n = 6(n+2)$ $(n+1)n = 6$ $n^2 + n = 6$ $n^2 + n - 6 = 0$ $(n+3)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -3 & \text{(مرفوض)} \\ \boxed{n = 2} & \text{(مقبول)} \end{cases}$	**5** $P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$ شرط الحل $(n \geq 0) \cap (n \geq 2)$ ومنه: $n \geq 2$ $(n+1)(n)(n-1) = 2(n+2)(n+1)$ $n(n-1) = 2(n+2)$ $n^2 - n = 2n + 4$ $n^2 - 3n - 4 = 0$ $(n-4)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n = 4} & \text{(مقبول)} \\ n = -1 & \text{(مرفوض)} \end{cases}$
8 $P_n^2 = 5P_{n-1}^1$ شرط الحل $(n \geq 2) \cap (n \geq 2)$ ومنه: $n \geq 2$ $n(n-1) = 5(n-1)$ $\boxed{n = 5}$ (مقبول)	**7** $P_{n+2}^3 = 4P_{n+1}^2$ شرط الحل $(n \geq 1) \cap (n \geq 1)$ ومنه: $n \geq 1$ $(n+2)(n+1)(n) = 4(n+1)(n)$ $n + 2 = 4$ $\boxed{n = 2}$ (مقبول)

---

4) **يلتقي عشرة اصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الأخرين مرة واحدة فقط، فكم عدد المصافحات التي جرت في الحفل، عمم الحالة السابقة إلى حالة n صديق.**

نعلم أن المصافحة تتم بين شخصين لمرة واحدة فقط:

وبالتالي عدد المصافحات يساوي عدد طرق اختيار شخصين من عشرة أشخاص:

في حالة 10 اصدقاء : $\text{عدد المصافحات} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ مصافحة

في حالة n صديق : $\text{عدد المصافحات} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$ مصافحة

---

5) **في احد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة.**

1. **بكم طريقة يمكن للطالب ان يختار الأسئلة؟**

يمكن اختيار الأسئلة السبعة من العشرة بـ:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120 \text{ طريقة}$$

2. **بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية؟**

بما ان الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية فإنه يجب اختيار ثلاثة اسئلة من الأسئلة الستة الباقية:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{4}{4}\binom{6}{3} = 1 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ طريقة}$$

6) صف فيه 12 طالب و 8 طالبات ارادوا ان ينتخبوا لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة اشخاص، بكم طريقة يتم انتخاب اللجنة في الحالات الآتية:

1. اللجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب وطالبتين.

بفرض الطالب m والطالبة f فإن اللجنة: $\{(f,f,m,m,m)\}$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} = \frac{8\times 7}{2\times 1}\times\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1} = 6160 \text{ طريقة}$$

2. ان يكون في اللجنة طالبتين على الأكثر.

$\{(f,f,m,m,m),(f,m,m,m,m),(m,m,m,m,m)\}$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{8}{2}\binom{12}{3}+\binom{8}{1}\binom{12}{4}+\binom{12}{5}$$
$$=\frac{8\times 7}{2}\times\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}+8\times\frac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2\times 1}+\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}$$
$$=6160+3960+792=10912 \text{ طريقة}$$

3. ان يكون في اللجنة طالبتين على الأقل.

نلاحظ أن متمم الحالة هو: في اللجنة طالبة واحدة على الأكثر ومنه عدد الطرق:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{20}{5}-\left[\binom{8}{1}\binom{12}{4}+\binom{8}{0}\binom{12}{5}\right] = 15504-[3960+792]$$
$$=15504-4752=10752 \text{ طريقة}$$

---

7) احسب امثال x^3 في منشور $(2+3x)^{15}$

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r \quad , \quad (a=2),\ (b=3x),\ (n=15)$$

الحد الذي فيه x^3 هو T_3 ومنه:

$$T_3=\binom{15}{3}(2)^{15-3}.(3x)^3=\binom{15}{3}(2)^{12}.(27x^3)=(455).(4096).(27x^3)=50319360\,x^3$$

إذاً امثال x^3 هو: 50319360

---

8) ما آحاد وعشرات العدد 11^{11}

$$11^{11}=(1+10)^{11}$$
$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r \quad , \quad (a=1),(b=10),(n=11)$$
$$T_r=\binom{11}{r}(1)^{11-r}.(10)^r$$

الحد الأول $T_0=1$

الحد الثاني $T_1=110$

الحد الثالث $T_2=5500$

ومنه باقي الحدود آحادها و عشراتها اصفار وبالتالي بجمع هذه الحدود يكون العدّد الناتج آحاده (1) وعشراته (1)

---

9) ما الحد الثابت (الذي لا يتعلق بالمتحول x) في منشور $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^{12}$

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r \quad , \quad (a=x) \quad , \quad \left(b=\frac{1}{x^3}\right) \quad , \quad (n=12)$$
$$T_r=\binom{12}{r}(x)^{12-r}.\left(\frac{1}{x^3}\right)^r=\binom{12}{r}x^{12-r}.\frac{1}{x^{3r}}=\binom{12}{r}x^{12-r}.x^{-3r}$$
$$T_r=\binom{12}{r}x^{12-4r}$$

دليل الحد الثابت الذي لا يحوي المتحول x يحقق الشرط: $12-4r=0$

$$4r=12 \implies \boxed{r=3}$$

الحد الذي لا يتعلق بالمتحول x هو الحد :

$$T_3=\binom{12}{3}=\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}=220$$

10) عدد اقطار مضلع محدب.

اثبت ان عدد اقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $4 \geq n$ يعطى بالعلاقة: $\frac{n(n-3)}{2}$

الضلع: هو قطعة مستقيمة تصل بين راسين متتاليين

القطر: هو قطعة مستقيمة تصل بين راسين غير متتاليين

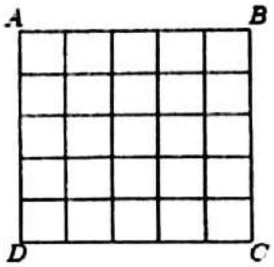
عدد القطع المستقيمة الواصلة بين اي راسين (اضلاع او اقطار) يعطى بـ $\binom{n}{2}$

عدد الأقطار=عدد القطع المستقيمة الواصلة بين اي راسين - عدد الأضلاع

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n(n-1-2)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

---

11) التعداد على الشبكة:



في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربع $ABCD$ ونرغب بحساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل، علماً ان المربع مستطيل خاص.

استنتج ان عدد المستطيلات المنشودة يساوي عدد أساليب اختيار مستقيمين شاقوليين ومستقيمين افقيين.

لتشكيل مستطيل يلزمنا تقاطع مستقيمين شاقوليين و مستقيمين افقيين

عدد المستقيمات الشاقولية 6 ومنه عدد طرق اختيار مستقيمين منها بـ $\binom{6}{2}$ طريقة

عدد المستقيمات الأفقية 6 ومنه عدد طرق اختيار مستقيمين منها بـ $\binom{6}{2}$ طريقة

$$\text{عدد المستطيلات} = \binom{6}{2}\binom{6}{2} = 15 \times 15 = 225 \quad \text{مستطيل}$$

---

12) من خواص عدد التوافيق:

في حالة عدد طبيعي n ادرس كيف تتغير الحدود المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$

واستنتج ان المساواة $\binom{n}{P} = \binom{n}{q}$ تكافئ $P = q$ أو $P + q = n$

لدينا المتتالية $\left\{\binom{n}{r}\right\}_{0\le r\le n}$, باخذ قيمتين للعدد n هما $n = 5$, $n = 4$ نجد:

$$n = 5 \Rightarrow \left\{\binom{5}{r}\right\}_{0\le r\le 5} = \left\{\binom{5}{0},\binom{5}{1},\binom{5}{2},\binom{5}{3},\binom{5}{4},\binom{5}{5}\right\} = \{1,5,10,10,5,1\}$$

$$n = 4 \Rightarrow \left\{\binom{4}{r}\right\}_{0\le r\le 4} = \left\{\binom{4}{0},\binom{4}{1},\binom{4}{2},\binom{4}{3},\binom{4}{4}\right\} = \{1,4,6,4,1\}$$

في كلا الحالتين السابقتين وجدنا ان الحدود تتزايد ثم تبدأ بالتناقص

1. اثبت ان $\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n-r}{r+1}$

$$L_1 = \frac{\frac{n!}{(n-r-1)!\,(r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)!\,r!}} = \frac{(n-r)!\,r!}{(n-r-1)!\,(r+1)!}$$

$$= \frac{(n-r)(n-r-1)!\,r!}{(n-r-1)!\,(r+1)r!} = \frac{n-r}{r+1} = L_2$$

2. a) نفترض ان $n = 2m$ اثبت ان $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$ في حالة $m > r$ و $\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r}$ في حالة $m \le r$.

استنتج ان $\binom{2m}{m}$ هو اكبر أعداد التوافيق $\left\{\binom{2m}{r}\right\}_{0\le r\le 2m}$

في حال $n = 2m$ (اي عدد عناصر المجموعة الكلي زوجي كما وجدنا في المثال عندما $n = 4$ فهنا $m = 2$)، لدينا:

$$\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \iff \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \iff \frac{n-r}{r+1} < 1 \iff \frac{2m-r}{r+1} < 1$$

$$\iff 2m - r < r + 1 \iff 2m < 2r + 1 \xLongleftrightarrow{\text{يمكن ان نكتب}} m \le r$$

$$\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r} \iff \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} > 1 \iff \frac{n-r}{r+1} > 1 \iff \frac{2m-r}{r+1} > 1$$

$$\iff 2m - r > r + 1 \iff 2m > 2r + 1 \xLongleftrightarrow{\text{يمكن ان نكتب}} m > r$$

وبالتالي يمكن أن نعبر عن النتائج السابقة بالجدول الآتي:

r	0		m		$2m$
$\binom{2m}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m}{m}$	$\searrow$	1

وهذا برهن أن $\binom{2m}{m}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left\{\binom{2m}{r}\right\}_{0\le r\le 2m}$

وبالفعل وجدنا في حال كان $n = 2m = 4$ حيث $m = 2$ كان أكبر التوفيقات

$\binom{2(2)}{2} = \binom{4}{2} = 6$

$\{1,4,6,4,1\}$

b) نفترض ان $n = 2m + 1$ اثبت ان $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$ في حالة $m > r$ و $\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r}$ في حالة $m < r$

استنتج ان $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ هي اكبر اعداد التوافيق $\left\{\binom{2m+1}{r}\right\}_{0\le r\le 2m+1}$.

في حال $n = 2m + 1$ (اي عدد عناصر المجموعة الكلي فردي كما وجدنا في المثال $n = 5$ هنا $m = 2$)

$$\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \iff \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \iff \frac{n-r}{r+1} < 1 \iff \frac{2m+1-r}{r+1} < 1$$

$$\iff 2m + 1 - r < r + 1 \iff 2m < 2r \iff m < r$$

$$\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r} \iff \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} > 1 \iff \frac{n-r}{r+1} > 1 \iff \frac{2m+1-r}{r+1} > 1$$

$$\iff 2m + 1 - r > r + 1 \iff 2m > 2r \iff m > r$$

وبالتالي يمكن أن نعبر عن النتائج السابقة بالجدول الآتي:

r	0		m	$m+1$		$2m+1$
$\binom{2m+1}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m+1}{m}$	$\binom{2m+1}{m+1}$	$\searrow$	1

وهذا برهن ان $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$ هو اكبر اعداد التوافيق $\left\{\binom{2m+1}{r}\right\}_{0\le r\le 2m+1}$

وبالفعل وجدنا في حال كان $n = 2m+1$ حيث $m = 2$ كان اكبر التوفيقات

$$\binom{2m+1}{m} = \binom{2(2)+1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

$$\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2(2)+1}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

$\{1,5,10,10,5,1\}$

نلاحظ أخيراً ان المساواة $\binom{n}{P} = \binom{n}{q}$ تقتضي أن يكون: -

$$\binom{n}{P} = \binom{n}{q} = \binom{n}{n-P} = \binom{n}{n-q}$$

سنراعي وضع العددين P و q بالنسبة لـ $\frac{n}{2}$

في حال $q < \frac{n}{2}$, $P < \frac{n}{2}$ عندئذٍ $\binom{n}{P} = \binom{n}{q}$ وبالتالي $P = q$

في حال $q > \frac{n}{2}$, $P < \frac{n}{2}$ عندئذٍ $\binom{n}{P} = \binom{n}{n-q}$ وبالتالي $P = n - q$

في حال $q > \frac{n}{2}$, $P > \frac{n}{2}$ عندئذٍ $\binom{n}{n-P} = \binom{n}{n-q}$ اي $n - P = n - q$ او $P = q$

وبالتالي نستنتج من جميع الحالات انه إما $P = q$ أو $P + q = n$

---

13) ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث a و b عددان طبيعيان

فإذا علمت ان امثال x تساوي 62 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$؟

أمثال x في أي كثير حدود تساوي $\acute{F}(0)$

F اشتقاقي على R

$$\acute{F}(x) = 5a(1+ax)^4(1+bx)^4 + 4b(1+bx)^3(1+ax)^5$$
$$\acute{F}(0) = 5a + 4b$$

أمثال x تساوي $(5a+4b)$ و منه :

$$\boxed{5a + 4b = 62}$$

$$4a \le 5a \le 5a \quad ①$$

$$4b \le 4b \le 5b \quad ②$$

$$①+② : \quad 4a + 4b \le 5a + 4b \le 5a + 5b$$

$$4(a+b) \le \underbrace{\quad 62 \quad}_{} \le 5(a+b)$$

$$4(a+b) \le 62 \qquad\qquad 62 \le 5(a+b)$$

$$a + b \le 15.5 \qquad\qquad 12.4 \le a + b$$

$$12.4 \le a + b \le 15.5$$

و بما ان $(a+b)$ عدد طبيعي إذاً قيمه الممكنة هي:

$$a + b \in \{13,14,15\}$$

14) يريد معلم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل.
ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية؟

نلاحظ أن تلميذ واحد فقط سينال جائزتين في حين ينال كل واحد من باقي التلاميذ جائزة واحدة فقط لذلك يتم توزيع الهدايا على مرحلتين :

المرحلة الأولى : اختيار هديتين من $(n+1)$ و يتم بـ $\binom{n+1}{2}$ طريقة و نعتبر هاتين الهديتين بمثابة هدية واحدة .

المرحلة الثانية : توزيع n هدية على n تلميذ و تتم بـ $n!$ طريقة , بالتالي ب0لاعتماد على المبدأ الأساسي للعدّ:

$$\text{عدد النتائج} = \binom{n+1}{2} \times n! = \frac{(n+1)(n)}{2\times 1} \times n! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

---

15) لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5\}$ ولدينا مجموعة H من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية: ارقامها مختلفة وماخوذة من S لا يوجد اي عدد منها من مضاعفات العدّد 5 كل عدد منها اكبر من 20000 فما هو عدد عناصر H؟

عشرات الألوف	آحاد الألوف	مئات	عشرات	آحاد
5				
يحوي أحد الأرقام $\{2,3,4,5\}$				لا يحوي الرقم 5

نميز حالتين:

الحالة الأولى:

الرقم 5 موجود في خانة عشرات الألوف عندئذ:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد : 4

عدد طرق اختيار رقم العشرات : 3

عدد طرق اختيار رقم المئات : 2

عدد طرق اختيار رقم آحاد الألوف : 1

عدد طرق اختيار رقم عشرات الألوف: 1

حسب المبدأ الأساسي في العدّ فإن عدد عناصر H في هذه الحالة هو:

$1\times1\times2\times3\times4 = 24$ عنصر

الحالة الثانية:

احد الأرقام $\{2,3,4\}$ في خانة عشرات الألوف عندئذ:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد : 3

عدد طرق اختيار رقم العشرات : 3

عدد طرق اختيار رقم المئات : 2

عدد طرق اختيار رقم آحاد الألوف : 1

عدد طرق اختيار رقم عشرات الألوف: 3

حسب المبدأ الأساسي في العدّ فإن عدد عناصر H في هذه الحالة هو:

$3\times1\times2\times3\times3 = 54$ عنصر

إذاً عدد عناصر H المطلوب هو: $24+54=78$ عنصر

---

16) صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟

$n(\Omega) = n^r = 10^3 = 1000$ نتيجة

2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟

نرمز للكرة الحمراء R والكرة البيضاء W والكرة السوداء B

$C=\{(RR\bar{R}),(WW\bar{W}),(BB\bar{B})\}$

$n(C) = [6\times6\times4\times(3)] + [3\times3\times7\times(3)] + [1\times1\times9\times(3)] = 648$ نتيجة

3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟

$F = \{(RwB)\}$

$n(F) = (6 \times 3 \times 1) \times (6) = 108$ نتائج

4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟

بفرض A مجموعة السحوبات التي تدل على أن الكرات الثلاث ليست جميعها من لون واحد.

إن متمم A هو أن تكون جميع الكرات من لون واحد و نرمز له بـ $\grave{A}$:

$\grave{A} = \{(RRR), (www), (BBB)\}$

$n(\grave{A}) = (6 \times 6 \times 6) + (3 \times 3 \times 3) + (1 \times 1 \times 1) = 244$

$n(A) = n(\Omega) - n(\grave{A}) = 1000 - 244 = 756$ نتيجة

5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟

$H = \{(R\grave{R}\grave{R}), (RR\grave{R}), (RRR)\}$

$n(H) = [6 \times 4 \times 4 \times (3)] + [6 \times 6 \times 4 \times (3)] + [6 \times 6 \times 6] = 936$ نتيجة

6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل؟

بفرض E مجموعة السحوبات التي تدل على أن الكرات الثلاث فيها كرة سوداء واحدة على الأقل.

إن متمم E هو عدم وجود اي كرة سوداء و نرمز له بـ $\grave{E}$:

$\grave{E} = \{(\grave{B}\grave{B}\grave{B})\}$

$n(\grave{E}) = 9 \times 9 \times 9 = 729$

$n(E) = n(\Omega) - n(\grave{E}) = 1000 - 729 = 271$ نتيجة

---

17) صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟

$n(\Omega) = P_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ نتيجة

2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟

$A = \{(RR\grave{R}), (ww\grave{w})\}$

$n(A) = [6 \times 5 \times 4 \times (3)] + [3 \times 2 \times 7 \times (3)] = 486$ نتيجة

3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟

$B = \{(RwB)\}$

$n(B) = 6 \times 3 \times 1 \times (3!) = 108$ نتائج

4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟

بفرض C مجموعة السحوبات التي تدل على أن الكرات الثلاثة ليست جميعها من لون واحد

إن متمم C هو أن تكون جميع الكرات من لون واحد ونرمز له بـ $\grave{C}$:

$\grave{C} = \{(RRR), (www)\}$

$n(\grave{C}) = (6 \times 5 \times 4) + (3 \times 2 \times 1) = 126$

$n(C) = n(\Omega) - n(\grave{C}) = 720 - 126 = 594$ نتيجة

5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟

بفرض D مجموعة السحوبات التي تدل على أن الكرات الثلاثة فيها كرة حمراء واحدة على الأقل

إن متمم D هو عدم وجود اي كرة حمراء ونرمز له بـ $\grave{D}$:

$\grave{D} = \{(\grave{R}\grave{R}\grave{R})\}$

$n(\grave{D}) = 4 \times 3 \times 2 = 24$

$n(D) = n(\Omega) - n(\grave{D}) = 720 - 24 = 696$ نتيجة

6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل كرة سوداء واحدة على الأقل؟

$F = \{(B\dot{B}\dot{B})\}$

$n(F) = 1 \times 9 \times 8 \times (3) = 216$ نتيجة

---

18) لتكن $S = \{1,2,3,\dots\dots,29,30\}$ كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدّد 3

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على 3 يساوي (0) : $A_0 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على 3 يساوي (1) : $A_1 = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$

مجموعة الأعداد التي باقي قسمتها على 3 يساوي (2) : $A_2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$

يمكن اختيار عناصر المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر , بحيث يكون مجموع الأرقام من مضاعفات العدّد 3

بالشكل : $\{\,(a_0a_0a_0)\,,(a_1a_1a_1)\,\,,(a_2a_2a_2)\,,(a_0a_1a_2)\,\}$

عدد المجموعات الجزئية المطلوبة $= \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$

$= 120 + 120 + 120 + 1000 = 1360$ مجموعة

---

19) ليكن A_n العدّد المعرف بالصيغة: $A_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$

1. تحقق أن A_4 , A_3 هما عددان طبيعيان.

$$A_3 = \left(2+\sqrt{3}\,\right)^3 + \left(2-\sqrt{3}\,\right)^3$$
$$= 8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3} + 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 52 \in N$$
$$A_4 = \left(2+\sqrt{3}\,\right)^4 + \left(2-\sqrt{3}\,\right)^4$$
$$\left(2+\sqrt{3}\,\right)^4 = \binom{4}{0}(2)^4\left(\sqrt{3}\,\right)^0 + \binom{4}{1}(2)^3\left(\sqrt{3}\,\right)^1 + \binom{4}{2}(2)^2\left(\sqrt{3}\,\right)^2 + \binom{4}{3}(2)^1\left(\sqrt{3}\,\right)^3 + \binom{4}{4}(2)^0\left(\sqrt{3}\,\right)^4$$
$$= 16 + 32\sqrt{3} + 72 + 24\sqrt{3} + 9 = 97 + 56\sqrt{3}$$
$$\left(2-\sqrt{3}\,\right)^4 = 16 - 32\sqrt{3} + 72 - 24\sqrt{3} + 9 = 97 - 56\sqrt{3}$$
$$A_4 = 97 + 56\sqrt{3} + 97 - 56\sqrt{3} = 194 \in N$$

2. اثبت أن A_n عدد طبيعي أياً كانت قيمة العدّد الطبيعي n

$$A_n = \left(2+\sqrt{3}\,\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\,\right)^n$$

الحد ذي الدليل r في المنشور $\left(2+\sqrt{3}\,\right)^n$ يعطى بالشكل:

$$\boxed{T_r = \binom{n}{r}\,2^{n-r}\,\left(\sqrt{3}\,\right)^r}$$

الحد ذي الدليل r في المنشور $\left(2-\sqrt{3}\,\right)^n$ يعطى بالشكل:

$$\acute{T}_r = \binom{n}{r}\,2^{n-r}\left(-\sqrt{3}\,\right)^r$$
$$= \binom{n}{r}\,2^{n-r}\,(-1)^r\left(\sqrt{3}\,\right)^r$$

ومنه :

$$\boxed{\acute{T}_r = \binom{n}{r}\,2^{n-r}\left(\sqrt{3}\,\right)^r(-1)^r}$$

$$T_r + \acute{T}_r = \binom{n}{r}\,2^{n-r}\,\sqrt{3}^r + \binom{n}{r}.2^{n-r}.\sqrt{3}^r(-1)^r$$
$$\boxed{T_r + \acute{T}_r = \binom{n}{r}\,2^{n-r}\sqrt{3}^r\,(1+(-1)^r)}$$

نميز حالتين لـ r :

فردي أي $(r = 2k+1)$:

$$T_r + \bar{T}_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\sqrt{3}\right)^r (1 + (-1)^r)$$
$$= \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\sqrt{3}\right)^r (1-1)$$
$$= 0 \quad (\text{طبيعي})$$

زوجي أي $(r = 2k)$:

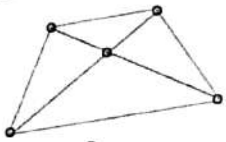
$$T_r + \bar{T}_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\sqrt{3}\right)^r (1 + (-1)^r)$$
$$= \binom{n}{r} 2^{n-r} \left(\sqrt{3}\right)^r (2) \quad (\text{طبيعي})$$

بملاحظة : $\boxed{\left(\sqrt{3}\right)^r = \left(\sqrt{3}\right)^{2k} = 3^k}$

ومنه A_n عدد طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n

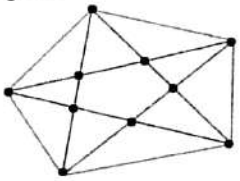
---

20) نتامل مضلعاً محدباً مؤلفاً من n ضلعاً $(n \geq 4)$ نسمي قطراً في المضلع كل قطعة مستقيمة تصل بين راسين غير متتاليين في المضلع، نفترض اننا في الحالة العامة حيث لا تتلاقى اي ثلاثة اقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة احد رؤوس المضلع احسب D_n عدد نقاط تقاطع اقطار المضلع بدلالة n يمكن البدء بتعيين D_5, D_4



في الشكل الرباعي عدد نقاط تقاطع الأقطار $D_4 = 5$

$$\underbrace{1}_{\text{تقاطع الأقطار مع بعضها}} + \underbrace{4}_{\text{تقاطع الأقطار مع الرؤوس}} = 5$$



في الشكل الخماسي عدد نقاط تقاطع الأقطار $D_5 = 10$

$$\underbrace{5}_{\text{تقاطع الأقطار مع بعضها}} + \underbrace{5}_{\text{تقاطع الأقطار مع الرؤوس}} = 10$$

نلاحظ بشكل عام: عدد نقاط تقاطع الأقطار مع الرؤوس يساوي عدد الرؤوس n

عدد نقاط تقاطع الأقطار مع بعضها يساوي عدد طرق تشكيل شكل رباعي $\binom{n}{4}$

ومنه عدد نقاط تقاطع اقطار مضلع بدلالة n يعطى بالشكل: $D_n = \binom{n}{4} + n$

---

21) اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ثم أجب عن السؤال الموافق.

1. $\cos^3 x$، واستنتج قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$

طريقة أولى :

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \implies \boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}$$

طريقة ثانية : نعلم أن : $\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3$$
$$= \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)^0 + \binom{3}{1}\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^1 + \binom{3}{2}\left(e^{ix}\right)^1\left(e^{-ix}\right)^2 + \binom{3}{3}\left(e^{ix}\right)^0\left(e^{-ix}\right)^3\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left[e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[2\cos 3x + 3(2\cos x)\right]$$

$$= \frac{1}{8}[2\cos 3x + 6\cos x]$$

$$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right)\ dx = \left[\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{12}\sin 0 + \frac{3}{4}\sin 0\right)$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - (0+0) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

2. $\sin^3 x$، واستنتج قيمة $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$

طريقة أولى :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \implies \boxed{\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}$$

طريقة ثانية : نعلم ان : $\boxed{\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$

$$\sin^3 x = \frac{-1}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[\binom{3}{0}\left(e^{ix}\right)^3\left(-e^{-ix}\right)^0 + \binom{3}{1}\left(e^{ix}\right)^2\left(-e^{-ix}\right)^1 + \binom{3}{2}\left(e^{ix}\right)^1\left(-e^{-ix}\right)^2 + \binom{3}{3}\left(e^{ix}\right)^0\left(-e^{-ix}\right)^3\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[e^{3ix} - 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} - e^{-3ix}\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[e^{3ix} - e^{-3ix} - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{8i}\left[2i\sin 3x - 3(2i\sin x)\right]$$

$$= \frac{-1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

$$\boxed{\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}$$

حيث $(x \neq 0)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to 0} -4\left(\frac{\sin x}{\tan x}\right)^3$$

$$= \lim_{x\to 0}(-4)\left(\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^3 = \lim_{x\to 0}(-4\cos^3 x) = -4$$

3. $\sin^4 x$، واستنتج قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\ dx$

نعلم ان : $\boxed{\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$, $\boxed{\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$

$$\sin^4 x = \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4}{16}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\binom{4}{0}\left(e^{ix}\right)^4\left(-e^{-ix}\right)^0 + \binom{4}{1}\left(e^{ix}\right)^3\left(-e^{-ix}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(e^{ix}\right)^2\left(-e^{-ix}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(e^{ix}\right)^1\left(-e^{-ix}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(e^{ix}\right)^0\left(-e^{-ix}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{3ix}.e^{-ix} + 6e^{2ix}.e^{-2ix} - 4e^{ix}.e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) - 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{16}[2\cos 4x - 8\cos 2x + 6] = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

4. $\cos x . \sin^4 x$، واحسب $F(t) = \int_0^x \cos t . \sin^4 t \; dt$ بطريقتين.

وجدنا من الطلب السابق :

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$\cos x . \sin^4 x = \frac{1}{8}\cos x . \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x . \cos x + \frac{3}{8}\cos x$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)[\cos 3x + \cos x] + \frac{3}{8}\cos x$$

$$= \frac{1}{16}[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{1}{4}[\cos 3x + \cos x] + \frac{3}{8}\cos x$$

$$= \frac{1}{16}[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{1}{4}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{8}\cos x$$

$$= \frac{1}{16}[\cos 5x + \cos 3x] - \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$$

$$F(t) = \int_0^x \cos t . \sin^4 t \; dt = \int_0^x \left[\frac{1}{16}(\cos 5t + \cos 3t) - \frac{1}{4}\left(\cos 3t - \frac{1}{2}\cos t\right)\right] dt$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{3}\sin 3t\right]_0^x - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin t\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x\right]$$

$$= \frac{1}{80}\sin 5x + \frac{1}{48}\sin 3x - \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$$

$$= \frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$$

طريقة ثانية:

$$F(t) = \int_0^x \cos t . \sin^4 t \; dt = \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^x = \frac{\sin^5 x}{5}$$

رؤية شاملة في الاحتمالات

الاحتمالات

فضاء العينة (Ω) : هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة ما.

أمثلة:

$n(\Omega)$ عدد عناصر فضاء العينة	فضاء العينة Ω	التجربة
$n(\Omega)=2^1=2$	$\Omega=\{T,H\}$	إلقاء قطعة نقود مرة
$n(\Omega)=2^2=4$	$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$	إلقاء قطعتي نقود معاً
$n(\Omega)=2^3=8$	$\Omega=\left\{\begin{matrix}(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H)\\(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T)\\(T,T,H),(T,T,T)\end{matrix}\right\}$	إلقاء ثلاث قطع نقود معاً
$n(\Omega)=6^1=6$	$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$	إلقاء حجر نرد مرة واحدة
$n(\Omega)=6^2=36$	(الجدول أدناه)	إلقاء حجري نرد معاً

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

الحدث: هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة نرمز له بحرف كبير مثلاً B أو A

أحداث مميزة : الحدث المستحيل : ويقابله المجموعة الخالية $\{\ \}=\emptyset$ ، الحدث الأكيد : Ω

الحدث البسيط : وهو حدث وحيد العنصر.

الحدثان المتنافيان : $A,B \Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$ حدثان متنافيان

الحدثان المتتامان : $A\cup B=\Omega$ و $A,B \Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$ حدثان متتامان

****

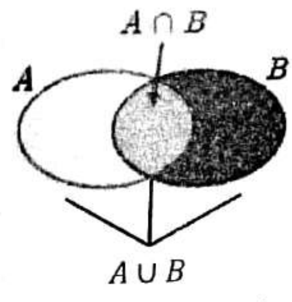
العمليات على الأحداث:

اجتماع حدثين: **اجتماع** B,A هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع أحد الحدثين A أو B أو كلاهما ورمزه $A\cup B$

تقاطع حدثين: تقاطع حدثين B,A هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع الحدثان B,A في آن معاً ورمزه $A\cap B$

الحدث المعاكس $\acute{A}$: هو الحدث الذي يقع إذا لم يقع الحدث A .

نتائج:



1. يعطى احتمال حدث A بالصيغة : $P(A)=\frac{A \text{ عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$
2. $P(\Omega)=1 \ , \ P(\emptyset)=0$
3. $0\le P(A)\le 1$
4. $P(A)+P(\acute{A})=1 \Rightarrow P(\acute{A})=1-P(A)$
5. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

في حال A,B حدثان متنافيان فإن: $P(A\cap B)=0;\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

تذكرة: $(\acute{A})'=A$ ، $(A\cap B)'=\acute{A}\cup\acute{B}$ ، $(A\cup B)'=\acute{A}\cap\acute{B}$

مسألة : **يدرس 30% من طلاب صف اللغة الفرنسية (F) ، و يدرس 40% منهم اللغة الروسية (R) ، و يدرس 60% منهم دروس إحدى هاتين اللغتين على الأقل ، فما احتمال أن يتابع طالب دروس اللغتين في آن معاً ؟**

$$P(F)=\frac{30}{100} \ , \ P(R)=\frac{40}{100} \ , \ P(F\cup R)=\frac{60}{100}$$

$$P(F\cap R)=P(F)+P(R)-P(F\cup R)=\frac{30}{100}+\frac{40}{100}-\frac{60}{100}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

والل زعترية 0933699123
ياسر الماسة 0949198068

الاحتمال المشروط

إذا كان A, B حدثين متعلقين بتجربة معينة فإن وقوع أحد الحدثين قد يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

تعريف الاحتمال الشرطي: ليكن B حدثاً يحقق $P(B) \neq 0$, و لنفترض أننا نعلم أنه قد وقع , عندئذٍ نعرف الاحتمال المشروط لوقوع حدث A علماً أن B قد وقع , (أو احتمال A مشروطاً بالحدث B) بالصيغة :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نستنتج من القانون السابق: $P(A \cap B) = P(A|B) \, . \, P(B)$

ملاحظة:

لمعرفة أن الطلب هو احتمال مشروط تكون صيغة السؤال:

* ما احتمال A إذا علمت وقوع $B \Leftarrow P(A|B)$.
* أو إذا علمت وقوع A ما احتمال $B \Leftarrow P(B|A)$.

الحل يكون: نوجد حالات الحدث A، وحالات الحدث B. نوجد $A \cap B$ ثم نطبق القانون المطلوب. إما $P(B|A)$ أو $P(A|B)$.

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء حجري نرد معاً :

إذا علمنا أن الوجهين الظاهرين يحملان رقمين أوليين ما احتمال أن يكون مجموع الوجهين الظاهرين أكبر تماماً من (6)

الحل: عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 6^2 = 36$

	1	2	3	4	5	6
1						
2		$\times$	$\times$		$\boxed{\times}$	
3		$\times$	$\times$		$\boxed{\times}$	
4						
5		$\boxed{\times}$	$\boxed{\times}$		$\boxed{\times}$	
6						

A الحدث الوجهين الظاهرين يحملان رقمين أوليين ومنه: $n(A) = 9$

B الحدث مجموع الوجهين الظاهرين أكبر تماماً من (6)

$$n(A \cap B) = 5$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{5}{9}$$

مسألة : **في تجربة إلقاء قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات**

ما احتمال الحصول على كتابة واحدة على الأكثر , علمنا أنه قد ظهر شعار واحد على الأقل .

الحل : $\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

A الحصول على كتابة واحدة على الأكثر أي: $A = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\} \ : n(A) = 4$

B الحصول على شعار واحد على الأقل:

$B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\} \ : n(B) = 7$

$A \cap B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\} \ : n(A \cap B) = 4$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{7}$$

الاستقلال الاحتمالي

تمهيد: بفرض B,A حدثين متعلقين بتجربة معينة فإذا كان احتمال وقوع احد الحدثين لا يؤثر على احتمال وقوع الحدث الاخر نسميه استقلال احتمالي.

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين نلاحظ أن احتمال وقوع حدث الرمية الثانية لا يتاثر باحتمال وقوع حدث الرمية الأولى نقول هنا ان هذين الحدثين مستقلين احتمالياً.

تعريف: إذا كان B,A حدثين في تجربة احتمالية , عندئذ نقول إن A و B مستقلان احتمالياً إذا كان:

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

ملاحظة :

1. الاستقلال الاحتمالي للحدثين B,A ان يكون: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A) \quad ; P(B)\neq 0$

   اي ان احتمال وقوع الحدث A لا يتاثر بوقوع الحدث B.
2. لإثبات ان حدثين B,A مستقلين احتمالياً يجب ان نتحقق من صحة المساواة: $P(A\cap B) = P(A).P(B)$

مسألة: صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة، الصندوق (I) يحوي ثلاث كرات مرقمة $1,2,3$ والصندوق (II) يحوي اربع كرات مرقمة بالأرقام $2,3,4,5$. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق I ثم نسحب كرة من الصندوق II والمطلوب:

a. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختيار .

I \ II	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

b. الحدث A إحدى الكرتين على الأقل تحمل الرقم (3).

الحدث B مجموع رقمي الكرتين اكبر تماماً من (5)، هل الحدثان A,B مستقلان احتمالياً؟

$$A = \{(1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(1,5),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$A\cap B = \{(3,3),(3,4),(3,5)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P(A\cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

ومنه A,B مستقلان احتمالياً.

مسألة: في تجربة رمي ثلاث قطع نقود معاً إذا كان الحدث A ظهور شعار واحد على الأكثر والحدث B ظهور كتابتين فقط هل الحدثان A,B مستقلان احتمالياً.

الحل:

$$\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$A = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \Rightarrow p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\} \Rightarrow p(B) = \frac{3}{8}$$

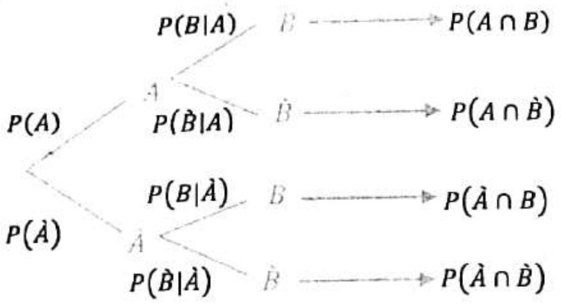
$$A\cap B = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\} \Rightarrow p(A\cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B) = \frac{3}{8} \\ P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{3}{8} = \frac{3}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B) \neq P(A).P(B)$$

B,A غير مستقلان احتمالياً.

المخطط الشجري

في حالة حدثين فقط A و B نجد المخطط الشجري التالي:



في اي مخطط شجري نلاحظ ما يلي :

1) مجموع احتمالات اي عقدة يساوي واحد .

2) الحدث الذي يمثله كل مسار هو تقاطع الأحداث الموجودة على هذا المسار

اي: احتمال كل مسار هو جداء احتمالات الأحداث فيه .

3) احتمال أي حدث هو مجموع احتمالات كل المسارات التي تنتهي بهذا الحدث

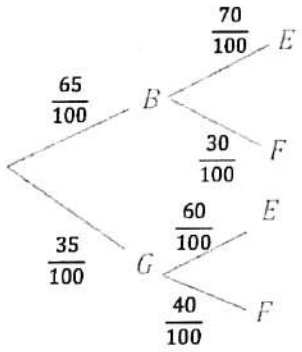
احتمال $B \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\dot{A} \cap B)$

احتمال $\dot{B} \Rightarrow P(\dot{B}) = P(A \cap \dot{B}) + P(\dot{A} \cap \dot{B})$

مسألة : في معهد 65% من المسجلين ذكور (B) و الباقي إناث (G) , يوجد بين الذكور 70% يدرسون الإعدادية (E) و الباقي يدرسون الثانوية (F)

و يوجد بين الإناث 40% يدرسون الثانوية (F) و الباقي يدرسون الإعدادية (E) ,

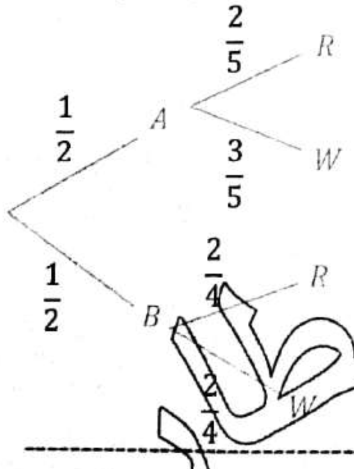
اخترنا شخصاً من هذا المعهد , ما احتمال أن يدرس الثانوية ؟



احتمال ان يدرس الثانوية $P(F)$:

$$P(F) = P(B \cap F) + P(G \cap F)$$
$$= \frac{65}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{40}{100}$$
$$= \frac{195}{1000} + \frac{140}{1000} = \frac{335}{1000}$$

مسألة : صندوقان A و B , يحوي الصندوق A على خمس كرات $(2R$ و $3W)$ و يحتوي الصندوق B على اربع كرات $(2R$ و $2W)$ نختار أحد الصندوقين عشوائياً و نسحب منه كرة واحدة , ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة حمراء اللون ؟

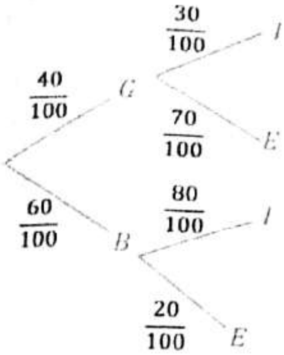


احتمال الكرة المسحوبة حمراء اللون $P(R)$:

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{4}$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

مسألة : تضم مدرسة تلاميذ %40 منهم إناث و الباقي ذكور و %30 من التلميذات مقيمات بالمدينة السكنية في المدرسة والباقي يقمن في منازلهن و %80 من التلاميذ الذكور يقيمون في المدينة السكنية في المدرسة الباقي يقيمون في منازلهم , نختار عشوائياً بطاقة تعريف أحد الطلاب و المطلوب :

1. ما احتمال ان تكون تلميذة مقيمة في المدينة السكنية .
2. ما احتمال ان تكون تلميذة غير مقيمة في المدينة السكنية .
3. ما احتمال ان يكون تلميذ مقيم في المدينة السكنية .
4. ما احتمال ان يكون تلميذ غير مقيم في المدينة السكنية .



الحل : نشكل مخطط شجري للمسألة :

حيث نرمز للإناث G و للذكور B و للمقيم بـ I و الخارجي E

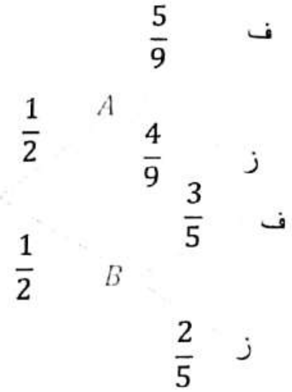
1. A: الحدث التلميذة مقيمة في المدينة السكنية $P(A) = P(G \cap I) = \frac{40}{100} . \frac{30}{100} = \frac{12}{100}$

2. B: الحدث التلميذة غير مقيمة في المدينة السكنية $P(B) = P(G \cap E) = \frac{40}{100} . \frac{70}{100} = \frac{28}{100}$

3. C : الحدث التلميذ مقيم في المدينة السكنية $P(C) = P(B \cap I) = \frac{60}{100} . \frac{80}{100} = \frac{48}{100}$

4. D : الحدث التلميذ غير مقيم في المدينة السكنية $P(D) = P(B \cap E) = \frac{60}{100} . \frac{20}{100} = \frac{12}{100}$

مسألة : يحتوي صندوق (A) على 9 بطاقات مرقمة من (1) إلى (9) ويحتوي صندوق (B) على 5 بطاقات مرقمة من (1) إلى (5)، اختير احد الصندوقين عشوائياً وسحبت منه بطاقة، فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجياً فما احتمال ان تكون البطاقة قد سحبت من الصندوق A؟



E : حدث البطاقة المسحوبة زوجية: $E = \left\{ ز_B \text{ أو } ز_A \right\}$.

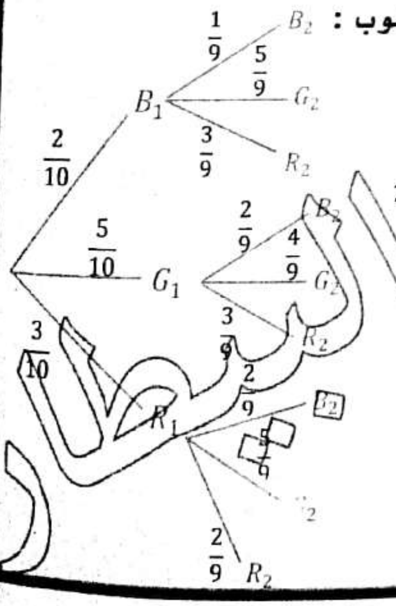
F : حدث البطاقة المسحوبة من الصندوق A: $F = \left\{ ف_A \text{ أو } ز_A \right\}$

$$\Rightarrow E \cap F = \left\{ ز_A \right\}$$

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}} = \frac{10}{19}$$

مسألة : صندوق يحوي عشر كرات (كرتان زرقاوان B و خمس كرات خضراء G و ثلاث كرات حمراء R) نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة و نسجل النتيجة التي نحصل عليها , و المطلوب :

ما احتمال الحدث A الموافق لسحب كرة زرقاء في المرة الثانية .



الحل : نشكل مخطط شجري للمسألة

و نرمز R_1, G_1, B_1 لسحب الكرة الأولى , و نرمز R_2 , G_2 , B_2 لسحب الكرة الثانية

و منه الحدث A : سحب كرة زرقاء في المرة الثانية هو:

$$A = \left\{ B_1 \cap B_2 \text{ او } G_1 \cap B_2 \text{ او } R_1 \cap B_2 \right\}$$

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2) + P(G_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{2}{10} . \frac{1}{9} + \frac{5}{10} . \frac{2}{9} + \frac{3}{10} . \frac{2}{9} = \frac{2 + 10 + 6}{90} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

مسألة : نتأمل ثلاث قطع نقود نرمز إليها بـ c_1 و c_2 و c_3 القطعة c_1 متوازنة اما c_2 و c_3 فهما متماثلتان ولكن غير متوازنتان و يكون فيهما احتمال ظهور H يساوي $\frac{3}{5}$ و احتمال ظهور T يساوي $\frac{2}{5}$

نلقي قطع النقود الثلاث و نسجل النتائج التي نحصل عليها. ما احتمال وقوع الحدث A (الحصول على H مرة واحدة فقط)

الحل : نراعي في الحل الترتيب (c_1 , c_2 , c_3)

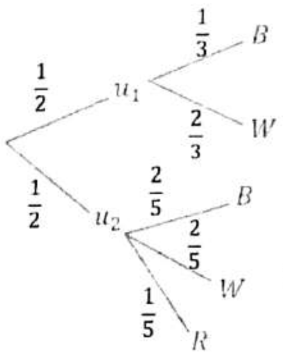
الحدث: الحصول على H مرة واحدة فقط : $A = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$

و بما أن ظهور H و T أحداث مستقلة احتمالياً في كل رمية فإن :

$$P(A) = P(H,T,T) + P(T,H,T) + P(T,T,H)$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.\frac{2}{5} + \frac{1}{2}.\frac{3}{5}.\frac{2}{5} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{4+6+6}{50} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$

مسألة : صندوقان u_1 و u_2 يحتوي u_1 على كرة سوداء B و كرتين بيضاويين W و يحتوي u_2 على كرتين سوداويين B و كرتين بيضاويين W و كرة حمراء R , نختار عشوائياً احد الصندوقان و نسحب منه كرة عشوائياً , والمطلوب :

1. ما احتمال الحدث B الموافق لسحب كرة سوداء .
2. إذا سحبنا كرة سوداء اللون , فما احتمال أن تكون سحبت من الصندوق u_1 .



الحل :

1. الحدث B سحب كرة سوداء و منه : $B = \{u_1 \cap B$ أو $u_2 \cap B\}$

$$P(B) = P(u_1 \cap B) + P(u_2 \cap B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$$

2. نلاحظ أن الاحتمال شرطي في هذا الطلب

B : حدث سحب كرة سوداء $\qquad B = \{u_1 \cap B$ او $u_2 \cap B\}$

N : حدث سحب كرة من الصندوق u_1 $\qquad N = \{u_1 \cap B$ او $u_1 \cap W\}$

$B \cap N$: حدث سحب كرة سوداء من الصندوق u_1 $\qquad B \cap N = \{u_1 \cap B\}$

$$P(N|B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11}$$

****

تدرب صفحة 180 :

1) يحتوي صندوق على عشرين كرة سبع منها بيضاوات اللون , نسحب منها ثلاث كرات دفعة واحدة .

ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث بيضاوات ؟

$\boxed{\text{سحب 3 كرات معاً}}$

$$\overbrace{\text{7 بيضاء} \quad \text{13 ليست بيضاء}}^{\text{20 كرة}}$$

$A = \{(w,w,w)\}$ حدث الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء اللون .

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}} = \frac{7}{228}$$

---

2) نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية | | | | | باحد العددين (1) او (-1)

1. احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً الصفر .

- إن عدد الخانات (4) و نريد ملئ الخانات بالعددين (-1) و (1)

فإن عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 2^4 = 16$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

– A الحدث مجموع الخانات يساوي الصفر و منه عدد النتائج المواتية هي تلك التي تحتوي على إشارتين موجبتين و إشارتين سالبتين و الترتيب غير مهم عندئذٍ :

$$A=\left\{\begin{matrix}(-1,-1,+1,+1),(-1,+1,-1,+1),(-1,+1,+1,-1)\\(+1,+1,-1,-1),(+1,-1,+1,-1),(+1,-1,-1,+1)\end{matrix}\right\}$$

عدد تباديل A $= 6$ $\quad\Rightarrow\quad P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

2. احسب احتمال الّا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين .

$$B=\{(1,-1,1,-1),(-1,1,-1,1)\}$$

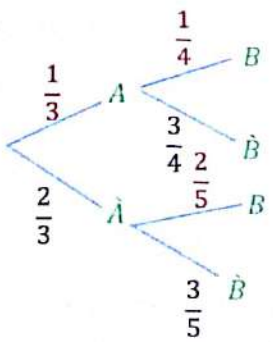
$$P(B)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

---

3) استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور ، عيّن الاحتمالات $P(\grave{B}|\grave{A}),P(\grave{B}|A),P(\grave{A})$

و استنتج قيمة كل من : $P(\grave{A}\cap\grave{B})$, $P(\grave{A}\cap B)$, $P(A\cap\grave{B})$, $P(A\cap B)$

الحل : بإكمال المخطط نجد :



$P(\grave{A})=\dfrac{2}{3}$, $P(\grave{B}|A)=\dfrac{3}{4}$, $P(\grave{B}|\grave{A})=\dfrac{3}{5}$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$P(A\cap\grave{B})=P(A).P(\grave{B}|A)=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(\grave{A}\cap B)=P(\grave{A}).P(B|\grave{A})=\frac{2}{3}.\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

$$P(\grave{A}\cap\grave{B})=P(\grave{A}).P(\grave{B}|\grave{A})=\frac{2}{3}.\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

---

4) اجب عن الأسئلة الآتية :

- إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ فاحسب $P(A|B),P(B|A)$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/10}{1/4}=\frac{2}{5}\quad,\quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/10}{1/2}=\frac{1}{5}$$

- إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ فاحسب $P(A|B),P(B|A)$.

لنحسب اولاً $P(A\cap B)$:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2}$$

- إذا كان $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B|A)=\frac{1}{4}$ و $P(B|\grave{A})=\frac{4}{5}$ فاحسب $P(B)$.

نعلم ان :

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\grave{A})$$

$$=P(A).P(B|A)+P(\grave{A}).P(B|\grave{A})$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{3}\right).\frac{4}{5}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{8}{15}=\frac{37}{60}$$

• إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فاحسب $P(A|B)\,,P(B|A)$

و احسب ايضاً $P(\grave{A}\cap\grave{B})$ و استنتج $P(\grave{B}|\grave{A})$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2/5}{3/4}=\frac{8}{15}\qquad,\qquad P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2/5}{1/2}=\frac{4}{5}$$

$$P(\grave{A}\cap\grave{B})=P(A\cup B)'=1-\underbrace{P(A\cup B)}_{\text{لنحسبه}}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{17}{20}$$

$$P(\grave{A}\cap\grave{B})=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}\qquad,\qquad P(\grave{B}|\grave{A})=\frac{P(\grave{B}\cap\grave{A})}{P(\grave{A})}=\frac{3/20}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3/20}{1/2}=\frac{3}{10}$$

---

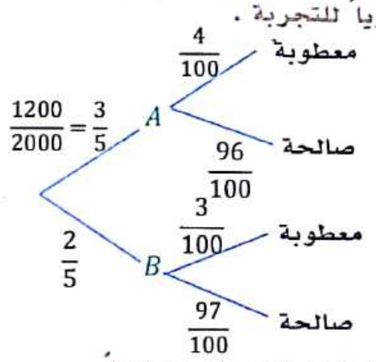
5) يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح صنعت الورشة A منها 1200 مصباحاً و صنعت البقية الورشة B

هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة , في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة .

نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب , نرمز بالرمز A إلى الحدث (المصباح مصنوع في الورشة A)

و بالرمز B إلى الحدث (المصباح مصنوع في الورشة B) و بالرمز D إلى الحدث (المصباح معطوب)

1. اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .



2. احسب احتمال ان يكون المصباح معطوباً.

$$D=\{\text{معطوب من } B \text{ او معطوب من } A\}$$

D الحدث المصباح معطوب.

$$P(D)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{100}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{100}=\frac{18}{500}$$

3. إذا كان المصباح معطوباً , فما احتمال ان يكون مصنوعاً في الورشة A .

$$D=\{\text{معطوب من } B \text{ او معطوب من } A\}$$

D الحدث المصباح معطوب.

$$C=\{\text{صالح من } A \text{ و معطوب من } A\}$$

C الحدث المصباح مصنوع في الورشة A .

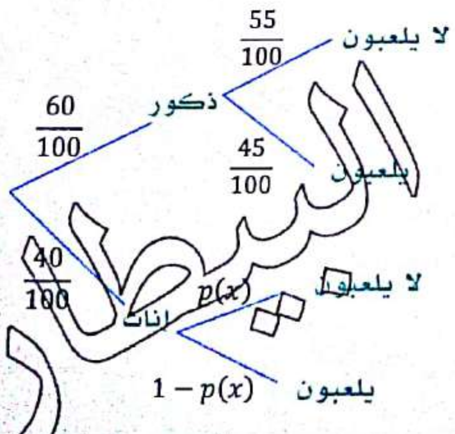
$$C\cap D=\{\text{معطوب من } A\}$$

$$P(C\cap D)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{100}=\frac{12}{500}$$

$$P(C|D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{12/500}{18/500}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

---

6) في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب , ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور و ان 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب . ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارسن لعبة كرة المضرب ؟



بما ان احتمال الطلاب الذين يمارسون لعبة كرة المضرب هو $\frac{30}{100}$

فإن احتمال الذين لا يمارسون لعبة كرة المضرب هو $\frac{70}{100}$

$$\frac{70}{100}=\frac{60}{100}\times\frac{55}{100}+\frac{40}{100}\times P(x)\quad\Rightarrow\quad\frac{7}{10}=\frac{330}{1000}+\frac{4}{10}\times P(x)$$

$$\frac{4}{10}P(x)=\frac{7}{10}-\frac{33}{100}$$

$$\frac{4}{10}P(x)=\frac{37}{100}\quad\Rightarrow P(x)=\frac{37}{40}=0.925$$

المتحولات العشوائية

مفهوم المتحول العشوائي: هو ربط نتيجة التجربة العشوائية بعدد حقيقي

تعريف : ليكن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية نسمي متحولاً عشوائياً كل تابع معرف على Ω و يأخذ قيمه في R

قانون الاحتمال و التوقع و التباين:

نرمز للمتحول العشوائي بالرمز X أو Y ومجموعة قيمه تحددها نص المسالة بالرمز $I = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

و نرمز لاحتمال قيم المتحول بـ $P(x_i)$ أي: $P(x_1)$ و $P(x_2)$ و .....

ومنه يمثل القانون الاحتمالي بالجدول الآتي:

x_i	x_1	x_2	x_3	………	x_m
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	………	$P(x_m)$

ولحساب التوقع الرياضي $E(X)$ للمتحول العشوائي X نستخدم القانون: $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, P(x_i)}$

ولحساب التباين $V(X)$ للمتحول العشوائي نستخدم القانون: $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \,.\, P(x_i) - \left(E(X)\right)^2}$

ولحساب الانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتحول العشوائي نستخدم القانون: $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

ملاحظة: في المسائل التي يطلب فيها حساب $E(X)$, $V(X)$ نشكل الجدول الآتي:

x_i	x_1		x_2		………		x_m
$P(x_i)$	$P(x_1)$		$P(x_2)$		………		$P(x_m)$
$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, P(x_i)$	$x_1P(x_1)$	+	$x_2P(x_2)$	+	………	+	$x_mP(x_m)$
x_i^2	x_1^2		x_2^2		………		x_m^2
$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \,.\, P(x_i)$	$x_1^2 \,.\, P(x_1)$	+	$x_2^2 \,.\, P(x_2)$	+	………	+	$x_m^2 \,.\, P(x_m)$

مسألة ① : نلقي ثلاث قطع نقود متوازنة و نسجل الوجه الظاهر لكل قطعة ولنفرض لعبة تقضي بربح ليرة واحدة كلما ظهر الوجه T وبخسارة ليرة كلما ظهر الوجه H ولنعرف متحولاً عشوائياً يدل على نتيجة الربح في نهاية اللعبة, احسب القانون الاحتمالي لهذا المتحول واحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل: $\Omega = \{(T,T,H), \dots\}$, $n(\Omega) = 2^3 = 8$, $I = \{-3, -1, 1, 3\}$

$$P(x_1) = P(-3) = P(H,H,H) = \frac{1}{8}$$

$$P(x_2) = P(-1) = P(H,H,T) + P(H,T,H) + P(T,H,H) = \frac{3}{8}$$

$$P(x_3) = P(1) = P(H,T,T) + P(T,H,T) + P(T,T,H) = \frac{3}{8}$$

$$P(x_4) = P(3) = P(T,T,T) = \frac{1}{8}$$

x_i	-3		-1		1		3
$P(x_i)$	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i\,P(x_i)$	$\frac{-3}{8}$	$+$	$\frac{-3}{8}$	$+$	$\frac{3}{8}$	$+$	$\frac{3}{8}=0$
x_i^2	9		1		1		9
$\sum_{i=1}^{4} x_i^2\,.P(x_i)$	$\frac{9}{8}$	$+$	$\frac{3}{8}$	$+$	$\frac{3}{8}$	$+$	$\frac{9}{8}=3$

$$E(X)=0 \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2\,.P(x_i)-\big(E(X)\big)^2=3-0=3 \quad , \quad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3}$$

مسألة ② : تقضي لعبة إلقاء حجر نرد مثالي بربح ليرتين إذا ظهر الرقم (1) وبربح ليرة واحدة إذا ظهر الرقم (2) وبخسارة ليرة واحدة في باقي الحالات , والمطلوب :

1. ما هو التوقع الرياضي للمتحول العشوائي الموافق لهذه اللعبة و ماذا تخمن ؟
2. احسب التباين و الانحراف المعياري لهذا المتحول .

الحل :

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\} \quad , \quad n(\Omega)=6^1=6 \quad , \quad I=\{-1\,,1\,,2\}$$

$$P(X=-1)=\frac{4}{6} \quad , \quad P(X=1)=\frac{1}{6} \quad , \quad P(X=2)=\frac{1}{6}$$

x_i	-1		1		2
$P(x_i)$	$\frac{4}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\,P(x_i)$	$\frac{-4}{6}$	$+$	$\frac{1}{6}$	$+$	$\frac{2}{6}=\frac{-1}{6}$
x_i^2	1		1		4
$\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)$	$\frac{4}{6}$	$+$	$\frac{1}{6}$	$+$	$\frac{4}{6}=\frac{3}{2}$

وبما أن التوقع سالب نخمن أنه إذا لعب اللاعب عدداً كبيراً من المرات فإنه سيخسر

$$E(X)=\frac{-1}{6} \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)-\big(E(X)\big)^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{36}=\frac{53}{36} \quad , \quad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{53}}{6}$$

****

تدرب صفحة 184:

1) نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1 و نحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6 , و نخسر درجتين في بقية الحالات , ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها , اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X . و احسب كلاً من $E(X)$ و $V(X)$.

$$\Omega=\left\{\underbrace{1}_{\boxed{+1}}\,,\underbrace{2\,,3\,,4\,,5}_{\boxed{-2}}\,,\underbrace{6}_{\boxed{+6}}\right\} \quad , \quad n(\Omega)=6 \quad , \quad I=\{-2,1,6\}$$

$$P(-2)=\frac{4}{6} \quad , \quad P(1)=\frac{1}{6} \quad , \quad P(6)=\frac{1}{6}$$

Scanned by CamScanner

x_i	-2	1	6
$P(x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\,P(x_i)$	$\frac{-8}{6}$	$+\ \frac{1}{6}$	$+\ \frac{6}{6}=\frac{-1}{6}$
x_i^2	4	1	36
$\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)$	$\frac{16}{6}$	$+\ \frac{1}{6}$	$+\ \frac{36}{6}=\frac{53}{6}$

$$E(X)=\frac{-1}{6}\quad,\quad V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)-\left(E(X)\right)^2=\frac{53}{6}-\frac{1}{36}=\frac{317}{36}$$

---

2) يحتوي صندوق على خمس كرات : ثلاث كرات سوداء اللون ، وكرتان بيضاوان . نسحب عشوائياً و في آن معاً كرتين من الصندوق و نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، عيّن مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي ، واحسب توقعه و تباينه .

نسحب كرتان معاً

$$\overbrace{2W\quad 3B}^{\text{5 كرات}}$$

$$I=\{\ \underset{(B,B)}{0}\ ,\ \underset{(W,B)}{1}\ ,\ \underset{(W,W)}{2}\ \}$$

$$P(0)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}\quad,\quad P(1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}\quad,\quad P(2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\,P(x_i)$	0	$+\ \frac{6}{10}$	$+\ \frac{2}{10}=\frac{4}{5}$
x_i^2	0	1	4
$\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)$	0	$+\ \frac{6}{10}$	$+\ \frac{4}{10}=1$

$$E(X)=\frac{4}{5}\quad,\quad V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)-\left(E(X)\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

---

3) اعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي و دون إعادة .

نسحب كرتان بدون إعادة

$$\overbrace{2W\quad 3B}^{\text{5 كرات}}$$

$$I=\{\ \underset{(B,B)}{0}\ ,\ \underset{(W,B)}{1}\ ,\ \underset{(W,W)}{2}\ \}$$

$$P(0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}\quad,\quad P(1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times 2=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}\quad,\quad P(2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

القيم الناتجة تطابق قيم التجربة السابقة وعليه فإن القانون الاحتمالي لـ X هو نفسه القانون السابق

4) يحتوي صندوق على خمس كرات : اثنتان تحملان الرقم 1 و اثنتان تحملان الرقم 2 و واحدة تحمل الرقم 3 نسحب عشوائياً و في آن معاً كرتين من الصندوق و نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع ارقام الكرتين المسحوبتين .
عيّن مجموعة قيم X ، و اكتب قانونه الاحتمالي ، واحسب توقعه و تباينه .

نسحب كرتان معاً

$$\underbrace{1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3}_{\text{5 كرات مرقمة}}$$

$$I = \{\underset{(1,1)}{2}, \underset{(1,2)}{3}, \underset{(1,3),(2,2)}{4}, \underset{(2,3)}{5}\}$$

$$P(2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10} \quad , \quad P(3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$P(4) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10} \quad , \quad P(5) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$$

x_i	2		3		4		5
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$		$\frac{4}{10}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{2}{10}$
$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(x_i)$	$\frac{2}{10}$	+	$\frac{12}{10}$	+	$\frac{12}{10}$	+	$\frac{10}{10} = \frac{18}{5}$
x_i^2	4		9		16		25
$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(x_i)$	$\frac{4}{10}$	+	$\frac{36}{10}$	+	$\frac{48}{10}$	+	$\frac{50}{10} = \frac{69}{5}$

$$E(X) = \frac{18}{5} \quad , \quad V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(x_i) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{69}{5} - \frac{324}{25} = \frac{21}{25}$$

---

5) أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي و دون إعادة .

نسحب كرتان بدون إعادة

$$\underbrace{1 , 1 , 2 , 2 , 3}_{\text{5 كرات مرقمة}}$$

$$I = \{\underset{(1,1)}{2}, \underset{(1,2)}{3}, \underset{(1,3),(2,2)}{4}, \underset{(2,3)}{5}\}$$

$$P(2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \quad , \quad P(3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{4}{10}$$

$$P(4) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{10} \quad , \quad P(5) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$$

القيم الناتجة تطابق قيم التجربة السابقة وعليه فإن القانون الاحتمالي لـ X هو نفسه القانون السابق

النتيجة: نستنتج من التدريبات (2) , (3) , (4) , (5) السابقة ان السحب معاً يماثل السحب على التتالي دون اعادة.

6) نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين و نسجل رقمي الوجهين الظاهرين ، ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين .
اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X و احسب توقعه و تباينه و انحرافه المعياري .

$\boxed{+}$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

من الجدول السابق نجد أن X يأخذ قيمه في المجموعة: $I = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$P(2) = \frac{1}{36}$, $P(3) = \frac{2}{36}$, $P(4) = \frac{3}{36}$, $P(5) = \frac{4}{36}$

$P(6) = \frac{5}{36}$, $P(7) = \frac{6}{36}$, $P(8) = \frac{5}{36}$, $P(9) = \frac{4}{36}$

$P(10) = \frac{3}{36}$, $P(11) = \frac{2}{36}$, $P(12) = \frac{1}{36}$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\sum_{i=1}^{11} x_i P(x_i)$	$\frac{2}{36}$ +	$\frac{6}{36}$ +	$\frac{12}{36}$ +	$\frac{20}{36}$ +	$\frac{30}{36}$ +	$\frac{42}{36}$ +	$\frac{40}{36}$ +	$\frac{36}{36}$ +	$\frac{30}{36}$ +	$\frac{22}{36}$ +	$\frac{12}{36} = 7$
x_i^2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\sum_{i=1}^{11} x_i^2 P(x_i)$	$\frac{4}{36}$ +	$\frac{18}{36}$ +	$\frac{48}{36}$ +	$\frac{100}{36}$ +	$\frac{180}{36}$ +	$\frac{294}{36}$ +	$\frac{320}{36}$ +	$\frac{324}{36}$ +	$\frac{300}{36}$ +	$\frac{242}{36}$ +	$\frac{144}{36} = \frac{1974}{36}$

$$E(X) = 7 \quad , \quad V(X) = \sum_{i=1}^{11} x_i^2 . P(x_i) - (E(X))^2 = \frac{1974}{36} - 49 = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.42$$

****

القانون الاحتمالي لمتحولين عشوائيين :

ليكن X و Y متحولين عشوائيين على فضاء العينة ذاته Ω

- يأخذ X مجموعة القيم $I = \{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$
- يأخذ Y مجموعة القيم $J = \{y_1 , y_2, \dots , y_m\}$
- إن قانون الزوج العشوائي (X, Y) هو إعطاء الاحتمال P_{ij} لكل حدث من الشكل : $((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ حيث : $x_i \in I , y_j \in J$

اي حساب جميع قيم P_{ij} : $P_{ij} = P[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]$

و عادة نضع جميع الاحتمالات في جدول كالجدول الاتي :

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X = x_i)$
x_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_1 +
x_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_2
$P(Y = y_j)$	$\grave{P}_1$ +	$\grave{P}_2$ +	$\grave{P}_3$	$\boxed{1}$

نلاحظ من الجدول السابق:

$$\left.\begin{aligned} \bullet\ P_{11} + P_{12} + P_{13} &= P_1 \\ P_{21} + P_{22} + P_{23} &= P_2 \end{aligned}\right\} P_1 + P_2 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \bullet\ P_{11} + P_{21} &= \grave{P}_1 \\ P_{12} + P_{22} &= \grave{P}_2 \\ P_{13} + P_{23} &= \grave{P}_3 \end{aligned}\right\} \grave{P}_1 + \grave{P}_2 + \grave{P}_3 = 1$$

****

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين Y , X :

لكي يكون المتحولين العشوائيين مستقلان احتمالياً يجب أن يتحقق : $\boxed{P_{ij} = P_i . \grave{P}_j}$ أياً كانت i , j

في حال عدم تحقق واحدة فقط عندها يكون X و Y غير مستقلين احتمالياً .

مسألة : **صندوق يحوي ثلاث كرات , واحدة حمراء تحمل الرقم (0) و اثنتان زرقاوان تحملان الرقم $(1$ و $2)$ نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة و لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة .**

- **نعرف على Ω المتحول العشوائي X الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الكرات الزرقاء المسحوبة .**
- **نعرف على Ω المتحول العشوائي Y الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .**

اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X , Y) , أيكون X و Y مستقلان احتمالياً ؟

Y يأخذ قيمة في المجموعة $J = \{1,2,3\}$, X يأخذ قيمة في المجموعة $I = \{1,2\}$

$X \backslash Y$	$(0,1)$ 1	$(0,2)$ 2	$(1,2)$ 3	$P(x_i)$
(R , B) 1	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$ +
(B , B) 2	0	0	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ ǁ
$P(y_j)$	$\frac{1}{3}$ +	$\frac{1}{3}$ +	$\frac{1}{3}$ =	$\boxed{1}$

أيكون X و Y مستقلان احتمالياً :

$$P_1 = \frac{2}{3} , \grave{P}_1 = \frac{1}{3} , P_{11} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left.\begin{aligned} P_1 . \grave{P}_1 &= \frac{2}{9} \\ P_{11} &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_1 . \grave{P}_1 \neq P_{11}$$

إذاً المتحولان X و Y ليسا مستقلان احتمالياً .

تدريب صفحة 187:

1) نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X, Y) من المتحولات العشوائية , أكمله و بيّن إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً .

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}=\boxed{\frac{6}{120}}$	$\frac{1}{8}=\boxed{\frac{15}{120}}$	$\frac{1}{8}=\boxed{\frac{15}{120}}$	$\frac{36}{120}$
1	$\frac{17}{60}=\boxed{\frac{34}{120}}$	$\frac{3}{8}=\boxed{\frac{45}{120}}$	$\frac{1}{24}=\boxed{\frac{5}{120}}$	$+$ $\frac{84}{120}$
قانون Y	$\frac{40}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\boxed{1}$

أيكون X و Y مستقلان احتمالياً :

$$P_1 = \frac{36}{120}\ ,\ \grave{P}_1 = \frac{40}{120} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1 . \grave{P}_1 = \frac{36}{120} \times \frac{40}{120} = \frac{1}{10} \\ P_{11} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 . \grave{P}_1 \neq P_{11}$$

إذاً المتحولان X و Y ليسا مستقلان احتمالياً

---

2) أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X, Y) , **علماً أن المتحولين** العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً .

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

بما ان X و Y مستقلان احتمالياً عندئذ :

- $P_{00} = P_0 \times \grave{P}_0 = 0.4 \times 0.3 = 0.12$
  $P_{20} = P_2 \times \grave{P}_0 = 0.4 \times 0.3 = 0.12$
- $P_{00} + P_{10} + P_{20} = 0.3$
  $0.12 + P_{10} + 0.12 = 0.3 \Rightarrow P_{10} = 0.06$
- $P_0 + P_1 + P_2 = 1$
  $0.4 + P_1 + 0.4 = 1 \Rightarrow P_1 = 0.2$
- $P_{10} + P_{11} + P_{12} = 0.2$
  $0.06 + P_{11} + 0.04 = 0.2 \Rightarrow P_{11} = 0.1$
- $P_{11} = P_1 \times \grave{P}_1$
  $0.1 = 0.2 \times \grave{P}_1 \Rightarrow \grave{P}_1 = 0.5$
- $P_{01} = P_0 \times \grave{P}_1$
  $= 0.4 \times 0.5 = 0.2 \Rightarrow P_{01} = 0.2$
- $P_{01} + P_{11} + P_{21} = \grave{P}_1$
  $0.2 + 0.1 + P_{21} = 0.5 \Rightarrow P_{21} = 0.2$
- $\grave{P}_0 + \grave{P}_1 + \grave{P}_2 = 1$
  $0.3 + 0.5 + \grave{P}_2 = 1 \Rightarrow \grave{P}_2 = 0.2$
- $P_{02} = P_0 \times \grave{P}_2$
  $= 0.4 \times 0.2 \Rightarrow P_{02} = 0.08$
- $P_{22} = P_2 \times \grave{P}_2$
  $= 0.4 \times 0.2 \Rightarrow P_{22} = 0.08$

اصبح الجدول كاملاً :

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.08	0.4 +
1	0.06	0.1	0.04	0.2 +
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3 +	0.5 +	0.2	$\boxed{1}$

3) نلقي حجري نرد متوازنين . ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الوجهين الظاهرين و ليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل اصغر هذين الرقمين . اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) , و استنتج القانون الاحتمالي لكل من X و Y , و احسب توقع و تباين كل من X و Y ايكون X و Y مستقلين احتمالياً ؟

$n(\Omega) = 6^2 = 36$

Y ياخذ قيمه في المجموعة $J = \{1,2,3,4,5,6\}$

X ياخذ قيمه في المجموعة $I = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	قانون X
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$ +
3	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$ +
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$ +
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{4}{36}$ +
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	$\frac{5}{36}$ +
7	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{6}{36}$ +
8	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$ +
9	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$ +
10	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$ +
11	[illegible]	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$ +
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
قانون Y	$\frac{11}{36}$ +	$\frac{9}{36}$ +	$\frac{7}{36}$ +	$\frac{5}{36}$ +	$\frac{3}{36}$ +	$\frac{1}{36}$	$\boxed{1}$

♦ حساب التوقع و التباين للمتحول X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	
$E(X)=\sum_{i=1}^{11} x_i P(x_i)$	$\frac{2}{36}$	$+\frac{6}{36}$	$+\frac{12}{36}$	$+\frac{20}{36}$	$+\frac{30}{36}$	$+\frac{42}{36}$	$+\frac{40}{36}$	$+\frac{36}{36}$	$+\frac{30}{36}$	$+\frac{22}{36}$	$+\frac{12}{36}$	$=7$
x_i^2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	
$\sum_{i=1}^{11} x_i^2 P(x_i)$	$\frac{4}{36}$	$+\frac{18}{36}$	$+\frac{48}{36}$	$+\frac{100}{36}$	$+\frac{180}{36}$	$+\frac{294}{36}$	$+\frac{320}{36}$	$+\frac{324}{36}$	$+\frac{300}{36}$	$+\frac{242}{36}$	$+\frac{144}{36}$	$=\frac{1974}{36}$

$$E(X)=7 \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{11} x_i^2 . P(x_i)-\left(E(X)\right)^2=\frac{1974}{36}-49=\frac{210}{36}=\frac{35}{6}=5.8$$

♦ حساب التوقع و التباين للمتحول Y :

y_j	1	2	3	4	5	6	
$P(y_j)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	
$E(Y)=\sum_{j=1}^{6} y_j P(y_j)$	$\frac{11}{36}$	$+\frac{18}{36}$	$+\frac{21}{36}$	$+\frac{20}{36}$	$+\frac{15}{36}$	$+\frac{6}{36}$	$=\frac{91}{36}$
y_j^2	1	4	9	16	25	36	
$\sum_{j=1}^{6} y_j^2 . P(y_j)$	$\frac{11}{36}$	$+\frac{36}{36}$	$+\frac{63}{36}$	$+\frac{80}{36}$	$+\frac{75}{36}$	$+\frac{36}{36}$	$=\frac{301}{36}$

$$E(Y)=\frac{91}{36} \quad , \quad V(Y)=\sum_{j=1}^{6} y_j^2 . P(y_j)-\left(E(Y)\right)^2=\frac{301}{36}-\left(\frac{91}{36}\right)^2=\frac{2555}{1296}=1.971$$

$$P_1=\frac{1}{36} \ , \ \grave{P}_1=\frac{11}{36} \ \Rightarrow \ \left.\begin{aligned} P_1 . \grave{P}_1 &= \frac{1}{36}\times\frac{11}{36}=\frac{11}{1296} \\ P_{11} &= \frac{1}{36} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ P_1 . \grave{P}_1 \neq P_{11}$$

إذاً المتحولان X و Y ليسا مستقلان احتمالياً

****

المتحولات العشوائية الحدانية (التجارب البرنولية)

تعريف : عندما نهتم في تجربة عشوائية ما , فقط بوقوع حدث معين S نطلق على هذه التجربة اسم اختبار برنولي

توضيح: إذا كنا امام تجربة نهتم بوقوع الحدث S عدد من المرات قدرها K و ذلك عند تكرار هذه التجربة n مرة نكون امام اختبار برنولي. بفرض احتمال وقوع الحدث S هو P فإن احتمال حدث عدم وقوعه $\grave{S}$ هو $1-P$ و نقول ان المتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدانياً بوسيطين n و P و نرمز لهذا القانون بالرمز $B(n,P)$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k} P^k . q^{n-k}} \quad , \quad q=1-P \quad , \quad 0\le k\le n \ ; \ k \text{ عدد طبيعي}$$

قانونا التوقع و التباين لمتحول عشوائي حداني : $\boxed{V(X)=n\,P(1-P)}$ $\boxed{E(X)=n\,P}$

مثال ① : نلقي حجر نرد متوازن ثلاثة مرات على التتالي , ما احتمال الحصول على العدد 4 مرتين فقط ؟

الحل : يمكن اعتبار رمي حجر النرد ثلاثة مرات متوالية تجربة برنولية فيها $n = 3$ و $k = 2$

و فيها احتمال الحصول على العدد (4) في كل رمية هو $P = \frac{1}{6}$

فيكون احتمال عدم الحصول على العدد (4) في كل رمية هو $q = \frac{5}{6}$

و منه حسب القانون الحداني : $P(X = k) = \binom{n}{k} P^k . q^{n-k}$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = (3)\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$$

مثال ② : نلقي خمس قطع نقود متوازنة في آن معاً , ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرات فقط ؟

الحل : نحن امام تجربة برنولية فيها $n = 5$ و $k = 3$

و فيها احتمال الحصول على الوجه H في الرمية الواحدة هو : $P = \frac{1}{2}$

فيكون احتمال عدم الحصول على الوجه H في الرمية الواحدة هو : $q = \frac{1}{2}$

و حسب القانون الحداني : $P(X = k) = \binom{n}{k} P^K . q^{n-k}$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (10)\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}$$

مثال ③ : نلقي حجر نرد متوازن 6 مرات و ليكن A الحدث <<الحصول مرتين على الأقل على 5 او 6>>
فما احتمال وقوع الحدث A ؟

الحل : نحن أمام تجربة برنولية فيها $n = 6$ و عندما يكون الحدث A من النمط (على الأقل) يفضل حساب احتمال الحدث المتمم $\grave{A}$, $\grave{A}$ حدث يدل على عدم الحصول على 5 أو 6 أو الحصول عليهما مرة واحدة فقط

و منه يكون $n = 6$ و $k = \{0,1\}$

و يكون احتمال ظهور العدد 5 أو 6 هو $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ لأن : $\left.\begin{matrix} P(5)=\frac{1}{6} \\ P(6)=\frac{1}{6} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

و يكون احتمال عدم ظهور العدد 5 أو 6 هو $q = \frac{2}{3}$

$$\left.\begin{matrix} P(X = k) = \binom{n}{k} P^k . q^{n-k} \\ k = \{0,1\} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} P(X = 0) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \\ P(X = 1) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^5 \end{matrix}$$

$$P(\grave{A}) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(\grave{A}) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3} + 2\right)\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{256}{729}$$

و عليه يكون احتمال A المطلوب هو : $P(A) = 1 - P(\grave{A})$

$$= 1 - \frac{256}{729} \Longrightarrow P(A) = \frac{473}{729}$$

****

ملاحظات و نتائج : نكون امام تجربة برنولية في الحالات الآتية :

① تجربة إلقاء (حجر نرد أو قطعة نقود) عدداً من المرات.

② السحب على التتالي مع الإعادة و الاهتمام بالحصول على حدث واحد فقط.

③ إلقاء عدد من قطع النقود (او احجار النرد) المرقمة في آن معاً.

④ عند حساب احتمال وقوع حدث معين عدداً من المرات (k) , عند تكرار التجربة (n) مرة.

تدرب صفحة 192:

1) يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة اضعاف عدد الكرات البيضاء .

① نسحب عشوائياً كرة , ما احتمال ان تكون حمراء اللون ؟

– نفرض عدد الكرات البيضاء n

– فيكون عدد الكرات الحمراء $3n$

و مجموع كرات الصندوق $= 4n$

$$\overbrace{(n)W \qquad (3n)R}^{4n \text{ كرة}}$$

A : الحدث الكرة المسحوبة حمراء اللون $\quad P(A) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$

(و هو احتمال سحب كرة بيضاء) $\quad \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

② نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع الإعادة و نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة اثناء عمليات السحب الثلاث , ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

$$I = \{\ 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3\ \}$$

$$(W,W,W) \ (R,W,W) \ (R,R,W) \ (R,R,R)$$

$$n = 3 \qquad P = \frac{3}{4} \qquad q = \frac{1}{4}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} P^k \cdot q^{n-k} \qquad ; k = \{0,1,2,3\}$$

$$P(0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(1) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

فيكون القانون الاحتمالي:

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

---

2) نلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية , ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات ؟

الحل :

- نحن امام تجربة برنولية فيها $n = 6$ و $k = 3$
- احتمال الحصول على الرقم (6) في الرمية الواحدة: $P = \frac{1}{6}$
- احتمال عدم الحصول على الرقم (6) في الرمية الواحدة: $q = \frac{5}{6}$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} P^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(X=3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11664}$$

---

3) نلقي حجر نرد متوازن ثماني مرات متتالية. ليكن A الحدث : (الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل) .
ما احتمال A ؟

- نحن امام تجربة برنولية فيها $n = 8$
- عندما يكون الحدث A من النمط (على الأقل) يفضل حساب الحدث المتمم $\acute{A}$
- $\acute{A}$ حدث يدل على عدم الحصول على عدد زوجي أو الحصول على عدد زوجي مرة واحدة أو مرتين

و منه : $n = 8$ و $k = \{0,1,2\}$

- احتمال الحصول على عدد زوجي في الرمية الواحدة : $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- احتمال عدم الحصول على عدد زوجي في الرمية الواحدة : $q = \frac{1}{2}$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} P^k \cdot q^{n-k} \qquad ; k = \{0,1,2\}$$
$$P(X=0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$
$$P(X=1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^8$$
$$P(X=2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 28\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$P(\acute{A}) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$P(\acute{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^8 + 28\left(\frac{1}{2}\right)^8$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^8 [1+8+28] = 37\left(\frac{1}{2}\right)^8$$
$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\acute{A})$$
$$= 1 - 37\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{219}{256}$$

---

4) يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة ادوار, يكسب A الدور الواحد باحتمال 0.6 يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار, ما احتمال أن يربح B المباراة ؟

هذه تجربة برنولية , ليكن X عدد الأدوار التي يكسبها A بعد انتهاء المباراة

المباراة مكونة من تسعة ادوار إذاً $n = 9$, علماً ان احتمال ربحه في الدور الواحد يساوي $P = 0.6$

فيكون احتمال خسارته في الدور الواحد يساوي $q = 0.4$

لكي يربح اللاعب B المباراة يجب أن يربح اللاعب A أربعة أدوار على الأكثر أي المطلوب حساب $P(X \leq 4)$:

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$
$$= \binom{9}{0}(0.6)^0(0.4)^9 + \binom{9}{1}(0.6)^1(0.4)^8 + \binom{9}{2}(0.6)^2(0.4)^7 + \binom{9}{3}(0.6)^3(0.4)^6$$
$$+ \binom{9}{4}(0.6)^4(0.4)^5 \approx 0.2666$$

****

انشطة

نشاط 1 : إنشاء واستعمال التمثيل الشجري:

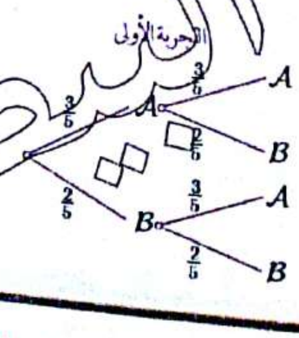
اولاً : السحب مع الإعادة وبدونها: يحتوي صندوق على ثلاثة حروف A وحرفين اثنين B

- التجربة الأولى: نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق ونسجل النتيجة ثم نعيده إلى الصندوق ونسحب حرفاً ثانياً ونسجل النتيجة.

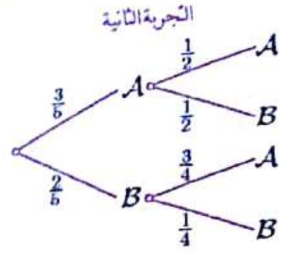
ما احتمال الحصول على AA في التجربة الأولى؟

نسمي X الحدث الحصول على AA في التجربة الأولى.

$$P(X) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$



- التجربة الثانية: نسحب عشوائياً وعلى التالي حرفين من الصندوق واحداً إثر الآخر دون إعادة ونسجل النتيجة بترتيب السحب.



ما احتمال الحصول على AA في التجربة الثانية؟

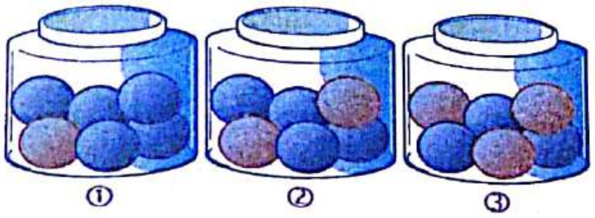
نسمي Y الحدث الحصول على AA

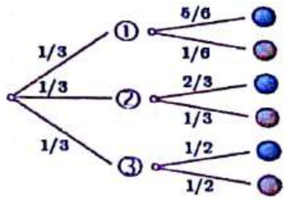
$$P(Y)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

ثانياً: اختيار سحب صندوق ثم سحب كرة:

تتألف التجربة من مرحلتين، نختار عشوائياً واحداً من الصناديق الثلاثة المبينة في الشكل ثم نختار منه كرة ولقد أنشأنا التمثيل الشجري الموافق لهذه التجربة، اشرح هذا الإنشاء ثم أعطِ احتمال الحدث «سحب كرة زرقاء اللون»

وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق ②؟





- نسمي الحدث B سحب كرة زرقاء اللون

$$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

- $B=\{(\text{ز},1),(\text{ز},2),(\text{ز},3)\}$ وقع

الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني $=A$

$$A\cap B=\{(\text{ز},2)\}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

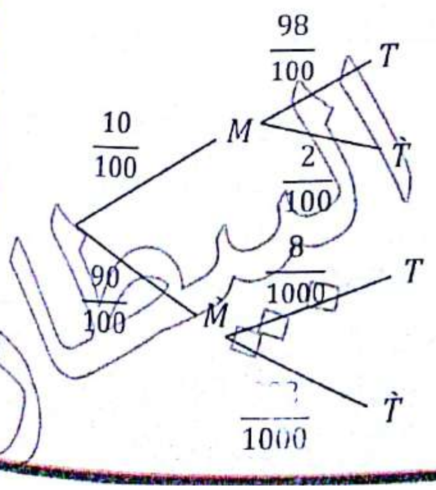
نشاط ② : فحص الأمراض:

يصيب مرض نسبة 10% من السكان. يتيح اختبار اكتشاف إذا كان شخص مصاباً بهذا المرض يجب أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية في حال كون الشخص مصاباً. ولكن احتمال أن تكون النتيجة إيجابية مع كون الشخص الخاضع للاختبار غير مصاب بالمرض يساوي 0.008 . أما احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية على الرغم من كون الشخص الخاضع للاختبار مصاباً فيساوي 0.02

لنرمز بالرمز M إلى الحدث (الشخص مصاب بالمرض) وبالرمز T إلى الحدث (نتيجة الاختبار إيجابية)

نختار شخصاً عشوائياً

1. انشئ تمثيلاً شجرياً محدداً عليه الاحتمالات المعطاة في النص



Scanned by CamScanner

2. احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية

A حدث الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية

$$P(A) = \frac{90}{100} \times \frac{8}{1000} = \frac{72}{10000}$$

3. احسب احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض

B حدث أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض

$$P(B) = \frac{10}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{2}{1000}$$

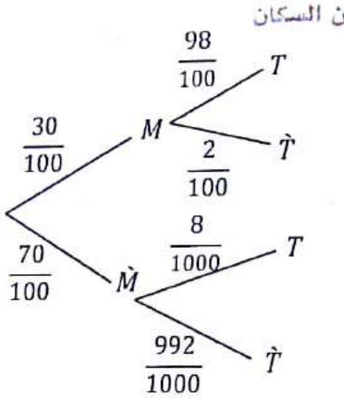
4. استنتج احتمال أن يكون الاختبار موثوقاً أي احتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية في حالة شخص مصاب بالمرض ونتيجة سلبية في حالة شخص غير مصاب بالمرض

$$P(C) = P(M \cap T) + P(\grave{M} \cap \grave{T})$$
$$= \frac{10}{100} \times \frac{98}{100} + \frac{90}{100} \times \frac{992}{1000} = \frac{9908}{10000}$$

5. أجب عن الأسئلة السابقة ذاتها بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان

يصبح المخطط الشجري كما يلي:

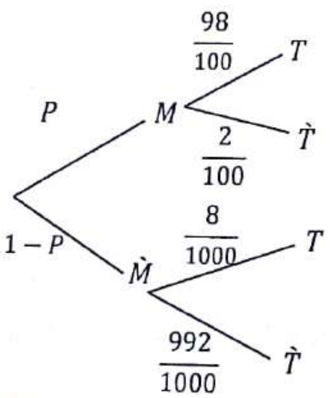
وبنفس الأسلوب نحصل على حل الطلبات



6. عمم النتائج السابقة بافتراض أن احتمال الإصابة بالمرض يساوي P

يصبح المخطط الشجري كما يلي:

وحل الطلبات بنفس الطريقة السابقة ولكن النتائج بدلالة P



نشاط ③: متحولات عشوائية واحتمالات شروطه:

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد زبائن محطة لتوزيع الوقود في فترة خمس دقائق. نفترض أن عدد الزبائن هذا لا يتجاوز 2 . أما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X فهو كما يأتي:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0.1	0.5	0.4

يشتري كل زبون إما البنزين أو المازوت. احتمال أن يشتري الزبون البنزين يساوي 0.4 واحتمال أن يشتري المازوت 0.6

• إن ما يشتريه الزبون مستقل عما يشتريه الزبائن الآخرون وعن عدد الزبائن.

لنرمز بالرمز C_k إلى الحدث $(X = k)$ تسهيلاً للكتابة، ولنرمز بالرمز E إلى الحدث «في خمس دقائق يشتري زبون، وزبون واحد فقط، البنزين» استعن بتمثيل شجري أو بأي أسلوب آخر في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

① a. احسب $P(C_1 \cap E)$

الحدثان C_1 و E مستقلين احتمالياً:

$$P(C_1 \cap E) = P(C_1) \times P(E)$$
$$= 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

b. علل لماذا $P(E|C_2) = 0.48$ واستنتج $P(C_2 \cap E)$

نلاحظ انه إذا وقع C_2 فيوجد في المحطة زبونان وعدد الذين يشترون البنزين من بينهم هو متحول حداني $B(n,P) = B(2,0.4)$ ومنه:

$$P(E|C_2) = P(X=1) = \binom{2}{1}(0.4)^1(0.6)^1 = 0.48$$

نستنتج أن:

$$P(E \cap C_2) = (C_2).P(E|C_2)$$
$$= 0.4 \times 0.48 = 0.192$$

c. استنتج مما سبق قيمة $P(E)$

$$P(E) = P(E \cap C_0) + P(E \cap C_1) + P(E \cap C_2)$$
$$= \quad 0 \quad + \quad 0.2 \quad + \quad 0.192 \quad = \quad 0.392$$

② ليكن Y المتحول العشوائي الذي يعطي عدد الزبائن الذين يشترون البنزين بخمس دقائق.

a. ما هي القيم التي يأخذها Y

$$j = \{0,1,2\}$$

b. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y.

نرمز بالرمز E_k للدلالة إلى الحدث $(Y = k)$ عندئذ:

$$P(E_0) = P(E_0 \cap C_0) + P(E_0 \cap C_1) + P(E_0 \cap C_2)$$

$$= \quad 0.1 \quad + \ 0.5 \times 0.6 \ + \ 0.4 \times (0.6)^2 \ = 0.544$$

و $P(E_1) = P(E) = 0.392$

$$P(E_2) = P(E_2 \cap C_0) + P(E_2 \cap C_1) + P(E_2 \cap C_2)$$

$$= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 0.4 \times (0.4)^2 = 0.064$$

C. اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

القانون الاحتمالي للزوج (X,Y):

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0.1	0	0	0.1
1	0.3	0.2	0	0.5
2	0.144	0.192	0.064	0.4
قانون Y	0.544	0.392	0.064	

d. ايكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً؟

من الواضح ان المتحولين العشوائيين X و Y غير مستقلين احتمالياً لأن:

$$\left.\begin{array}{l} P(X=1) \cap P(Y=1) = 0.2 \\ P(X=1).P(Y=1) = 0.5 \times 0.392 \end{array}\right\} \ P(X=1) \cap P(Y=1) \neq P(X=1).P(Y=1)$$

تمرينات ومسائل صفحة 198

1) يحتوي صندوق على خمس كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2 . نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق. يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والماخوذة من بين خمسة عناصر .

1. ما احتمال الحدث A : « للكرتين المسحوبتين اللون ذاته» ؟

$$A = \{(R,R),(B,B)\}$$

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1+3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2. ما احتمال الحدث B: « مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3»؟

$$B = \{(1,2)\}$$

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}.\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

3. ما احتمال الحدث B علماً ان A قد وقع؟

$$A = \{(R,R),(B,B)\} \quad , \quad B = \{(1,2)\} \quad , \quad A \cap B = \{(R_1,R_2),(B_1,B_2)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{1}{1}.\binom{1}{1}+\binom{1}{1}.\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{1+1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad , \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

---

2) نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة، ونتامل الحدث A : «العدد الظاهر زوجي» والحدث B: «العدد الظاهر اولي».
ايكون هذان الحدثان مستقلين احتمالياً؟

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

العدد الظاهر زوجي $A = \{2,4,6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

العدد الظاهر اولي $B = \{2,3,5\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B) = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

فالحدثان A , B ليسا مستقلان احتمالياً

---

3) تتالف عائلة من اربعة اطفال. نقبل انه عند كل ولادة, احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة انثى. ونفترض ان الولادات المتتالية هي احداث مستقلة احتمالياً. نرمز A و B و C إلى الأحداث:

A: «للأطفال الأربعة الجنس نفسه» , B: «هناك طفلان ذكران وطفلتان» , C: «الطفل الثالث انثى»

1) احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C.

نرمز للذكر بالرمز M والأنثى بالرمز F فيكون: $n(\Omega) = 2^4 = 16$

الحدث الأطفال الأربعة من نفس الجنس : $A = \{(F,F,F,F),(M,M,M,M)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

الحدث طفلان ذكران و طفلتان : $B = \left\{\begin{array}{l}(F,F,M,M),(M,M,F,F),(F,M,F,M), \\ (M,F,M,F),(F,M,M,F),(M,F,F,M)\end{array}\right\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

الحدث الطفل الثالث أنثى : $C = \left\{\begin{array}{c}(F,F,F,F),(F,F,F,M),(F,M,F,F), \\ (M,F,F,F),(F,M,F,M),(M,F,F,M), \\ (M,M,F,F),(M,M,F,M)\end{array}\right\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

2) احسب $P(A \cap C)$ ثم $P(C|A)$. ايكون الحدثان C, A مستقلين احتمالياً؟

$$A \cap C = \{(F, F, F, F)\}$$

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{16} \quad , \quad P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) \times P(C) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \\ P(A \cap C) = \frac{1}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

إذاً C, A مستقلين احتمالياً

3) احسب $P(B \cap C)$ ثم $P(C|B)$ ايكون الحدثان C, B مستقلين احتمالياً؟

$$B \cap C = \{(M, F, F, M), (F, M, F, M), (M, M, F, F)\}$$

$$P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{16}$$

$$P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(B) \times P(C) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} \\ P(B \cap C) = \frac{3}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

إذ C, B مستقلين احتمالياً

---

4) يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

1. ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

$$I = \{1 \, , \, 2 \, , \, 3\}$$

2. احسب كلاً من $P(X = 1)$, $P(X = 3)$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56} \quad , \quad P(X = 3) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

3. استنتج قيمة $P(X = 2)$.

بما أن:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$\frac{5}{56} + P(X = 2) + \frac{12}{56} = 1 \Rightarrow P(X = 2) = \frac{39}{56}$$

4. احسب توقع X وانحرافه المعياري .

x_i	1		2		3		
$P(x_i)$	$\frac{5}{56}$		$\frac{39}{56}$		$\frac{12}{56}$		
$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i)$	$\frac{5}{56}$	$+$	$\frac{78}{56}$	$+$	$\frac{36}{56}$	$= \frac{119}{56} = \frac{17}{8}$	
${x_i}^2$	1		4		9		
$\sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 P(x_i)$	$\frac{5}{56}$	$+$	$\frac{156}{56}$	$+$	$\frac{108}{56}$	$= \frac{269}{56}$	

$E(X) = \frac{119}{56}$, $V(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(x_i) - (E(X))^2 = \frac{269}{56} - \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{903}{3136} = \frac{129}{448} \approx 0.288$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.288} \approx 0.537$

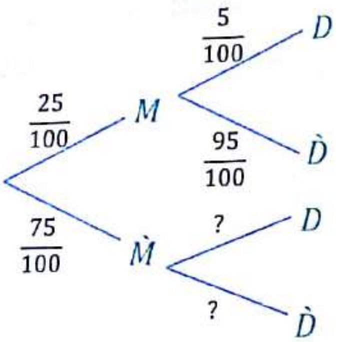
---

5) احتمال مشروط: تبين دراسة إحصائية اجريت على جماعة من الرياضيين انه اثناء فترة المسابقة يكون احتمال ان يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع احد الرياضيين له مساوياً 0.02 ويمكن لتناول بعض ادوية الرشح ان يؤثر في نتيجة الاختبار السابق. يتناول 25% من الرياضيين في الجماعة ادوية الرشح في الشتاء. وبين هؤلاء يكون احتمال ان يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً 0.05

ليكن M الحدث: «الرياضي يستعمل دواء الرشح». وليكن D الحدث: «نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية».

يجري اختيار احد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من الحدثين:

- «الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية».
- «الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً انه لا يستعمل دواء الرشح»



M الحدث الرياضي يستعمل دواء الرشح ومنه : $P(M) = \frac{25}{100}$

$\grave{M}$ الحدث الرياضي لا يستعمل دواء الرشح ومنه : $P(\grave{M}) = \frac{75}{100}$

D الحدث نتيجة اختبار المنشطات إيجابية ومنه : $P(D) = \frac{2}{100}$

$\grave{D}$ الحدث نتيجة اختبار المنشطات سلبية ومنه : $P(\grave{D}) = \frac{98}{100}$

1. احسب احتمال الحدث: الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية

$$P(M \cap D) = \frac{25}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{125}{10000}$$

2. احسب احتمال الحدث: الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً انه لا يستعمل دواء الرشح.

$$P(D|\grave{M}) = \frac{P(\grave{M} \cap D)}{P(\grave{M})}$$

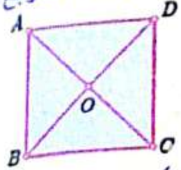
لنحسب $P(\grave{M} \cap D)$: $P(D) = P(M \cap D) + P(\grave{M} \cap D)$

$$\frac{2}{100} = \frac{125}{10000} + P(\grave{M} \cap D) \Rightarrow P(\grave{M} \cap D) = \frac{75}{10000}$$

$$P(D|\grave{M}) = \frac{P(\grave{M} \cap D)}{P(\grave{M})} = \frac{\frac{75}{10000}}{\frac{75}{100}} = \frac{1}{100}$$

6) <u>تجوال عشوائي</u>

نتأمل مربعاً $ABCD$ مركزه O. تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية: إذا كانت الجزيئة عند أحد رؤوس المربع فإنها تقفز إلى أحد الرأسين المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$. (فمثلاً من A يمكنها أن تنتقل إلى B أو D أو O).



وإذا كانت الجزيئة في O فإنها تقفز إلى أي من الرؤوس D, C, B, A باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$.

في البدء كانت الجزيئة في A. في حالة $n \geq 1$

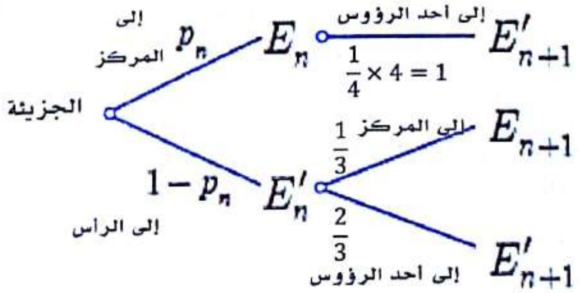
نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: «الجزيئة في O بعد القفزة رقم n» وليكن $p_n = P(E_n)$ (إذن $p_1 = \frac{1}{3}$)

يطلب إيجاد علاقة تفيد في حساب p_{n+1} انطلاقاً من p_n، ثم حساب p_n بدلالة n.

- إذا كانت الجزيئة في أحد الرؤوس فإن احتمال أن تقفز إلى الرأسين المجاورين أو إلى المركز $= \frac{1}{3}$.
- إذا كانت الجزيئة في المركز فإن احتمال أن تقفز إلى أحد الرؤوس $= \frac{1}{4}$
- نرمز E_n إلى الحدث الجزيئة تصل إلى O بعد n قفزة ومنه $P_n = P(E_n)$
- نرمز E_{n+1} إلى الحدث الجزيئة تصل إلى O بعد $n+1$ قفزة ومنه $p_{n+1} = P(E_{n+1})$
- بالتالي نرمز $\grave{E}_n$ إلى الحدث الجزيئة تصل إلى أحد الرؤوس بعد n قفزة ومنه $P(\grave{E}_n) = 1 - P(E_n) = 1 - P_n$
- بالتالي نرمز $\grave{E}_{n+1}$ إلى الحدث الجزيئة تصل إلى أحد الرؤوس بعد $n+1$ قفزة ومنه:

$P(\grave{E}_{n+1}) = 1 - P(E_{n+1}) = 1 - P_{n+1}$

المطلوب : إيجاد علاقة تفيد في حساب p_{n+1} انطلاقاً من p_n ثم حساب p_n بدلالة n.



من المخطط الشجري السابق نجد:

$$\underbrace{P_{n+1}}_{\text{من الفرض}} = \frac{1}{3}(1 - P_n)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}(1 - P_n) \Rightarrow \boxed{P_n = \frac{1}{4}}$$

أصبح لدينا المعادلتين:

$$\begin{cases} P_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - P_n) \\ - \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}(1 - p_n) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - p_n - 1 + \frac{1}{4}\right]$$

$$\underbrace{P_{n+1} - \frac{1}{4}}_{} = \frac{-1}{3}\underbrace{\left[p_n - \frac{1}{4}\right]}_{}$$

$$\boxed{t_{n+1} = -\frac{1}{3} t_n}$$

أصبحت $(t_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{-1}{3}$

وحدها الأول $t_1 = p_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

علاقة الحد العام : $t_n = t_1 . q^{(n-1)}$

$$t_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} . \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$t_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} . (-3)$$

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$p_n = \frac{-1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} = 0 \quad ;$$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$ متتالية هندسية و $-1 < \left(q = \frac{-1}{3}\right) < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{4}$$

7) استعمال متحولين عشوائيين:

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي. تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

X	1	2	3
$P(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

X	1	2	3	4
$P(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E إلى الحدث: «يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل»

اوجد احتمال E

لنشكل جدولاً مشتركاً بالمتحولين العشوائيين:

X_B \ X_A	1	2	3	4	قانون X_A
1	0.04	0.06	0.08	0.02	0.2
2	0.1	0.15	0.2	0.05	0.5
3	0.06	0.09	0.12	0.03	0.3
قانون X_B	0.2	0.3	0.4	0.1	$\boxed{1}$

الحدث E يستغرق انجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل إذا: $P(E) = P_{11} + P_{12} + P_{21} = 0.04 + 0.06 + 0.1 = 0.2$

---

8) يضم ناد رياضي 80 سباحاً و 95 لاعب قوى و125 لاعب جمباز. يمارس كل رياضي لعبة واحدة فقط.

1. نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة. احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين:

a) الحدث A : «يمارس اللاعبون الثلاثة العاب القوى».

$$P(A) = \frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}} = \frac{27683}{891020}$$

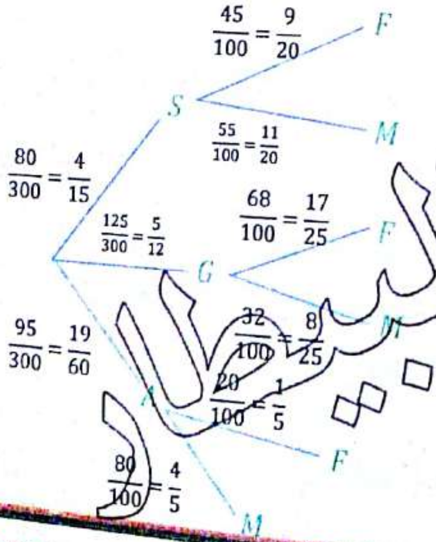
b) الحدث B: «يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة ذاتها».

$$P(B) = \frac{\binom{80}{3} + \binom{95}{3} + \binom{125}{3}}{\binom{300}{3}} = \frac{21533}{178204}$$

2. نسبة الفتيات بين الذين يمارسون السباحة تساوي 45% وبين الذين يمارسون العاب القوى 20% وهي تساوي 68% بين الذين يمارسون لعبة الجمباز.

a) نختار عشوائياً احد اعضاء النادي. احسب P_1 احتمال ان يكون فتاة تمارس إحدى العاب القوى.

احسب ايضاً P_2: احتمال ان يكون فتاة.



نرمز الحدث S يمارس اللاعب السباحة.

نرمز الحدث G يمارس اللاعب لعبة الجمباز.

نرمز الحدث A يمارس اللاعب العاب القوى.

نرمز للفتاة F والفتى M.

$$P_1 = P(A \cap F) = \frac{19}{60} \times \frac{1}{5} = \frac{19}{300}$$

$$P_2 = P(S \cap F) + P(G \cap F) + P(A \cap F)$$

$$= \frac{4}{15} \times \frac{9}{20} + \frac{5}{12} \times \frac{17}{25} + \frac{19}{60} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

b) نختار عشوائياً فتاة من اعضاء النادي. احسب p_3 احتمال ان تكون لاعبة جمباز.

$$P_3 = P(G|F) = \frac{P(G\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{5}{12}\times\frac{17}{25}}{\frac{7}{15}} = \frac{17}{28}$$

9) يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات. نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب: ثلاث كرات حمراء (الحدث R_3) ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب: كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث R_2) واخيراً يأخذ القيمة 0 في باقي الحالات.

1. احسب $P(R_2)\,,P(R_3)$

R_3 الحدث سحب ثلاث كرات حمراء

$$P(R_3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$$

R_2 الحدث سحب كرتان حمراوان وكرة خضراء

$$P(R_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

2. عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

$I = \{\ 5\ ,\ 3\ ,\ 0\ \}$

$(R,R,R)\quad (R,R,G)$ باقي الحالات

$$P(X=5) = P(R_3) = \frac{1}{12}$$

$$P(X=3) = P(R_2) = \frac{5}{12}$$

$$P(X=0) = 1-\left(P(R_3)+P(R_2)\right) = 1-\left(\frac{1}{12}+\frac{5}{12}\right) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

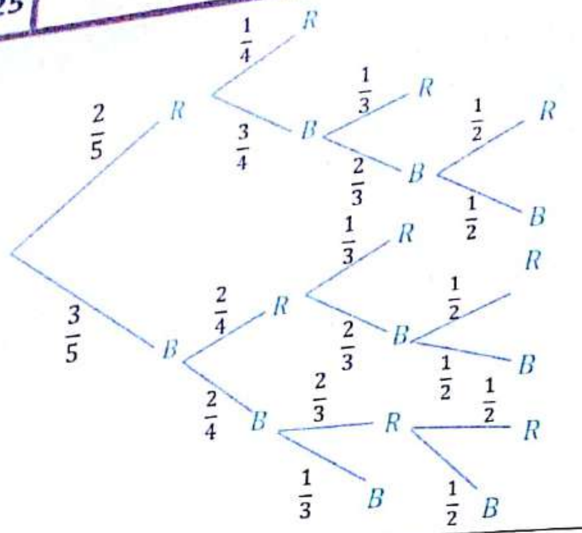
x_i	5		3		0	
$P(x_i)$	$\frac{1}{12}$		$\frac{5}{12}$		$\frac{6}{12}$	
$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i)$	$\frac{5}{12}$	+	$\frac{15}{12}$	+	0	$= \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$
x_i^2	25		9		0	
$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(x_i)$	$\frac{25}{12}$	+	$\frac{45}{12}$	+	0	$= \frac{70}{12} = \frac{35}{6}$

$$E(X) = \frac{5}{3}\quad ,\quad V(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(x_i) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{156}{54} = \frac{55}{18}$$

10) لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء. تكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة. عين مجموعة القيم التي يأخذها X، وعين قانون X ، واحسب توقعه الرياضي.

$$I = \{2,3,4\}$$

$$P(2) = P(R,R) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$



$$P(3) = P(R,B,R) + P(B,R,R) + P(B,B,B)$$
$$= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$
$$P(4) = 1 - [P(2) + P(3)]$$
$$= 1 - \left[\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\right] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

x_i	2		3		4	
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{6}{10}$	
$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i)$	$\frac{2}{10}$	$+$	$\frac{9}{10}$	$+$	$\frac{24}{10}$	$= \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

$$E(X) = \frac{7}{2}$$

---

11) نلقي حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2، وليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 4.

1. عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S.

$S(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

حيث S مجموع رقمي الوجهين الظاهريين.

$\boxed{+}$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي :

S_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. عين القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y.

المتحول العشوائي X يمثل باقي قسمة S على (2) , المتحول العشوائي Y يمثل باقي قسمة S على (4).

ملاحظة:

- باقي قسمة العدد (4) على العدد (2) هو العدد (0)
- باقي قسمة العدد (2) على العدد (4) هو العدد (2) لأن:

بشكل عام في عملية القسمة إذا كان البسط اصغر من المقام فإن ناتج القسمة (0) والباقي هو البسط دائماً

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
y_j	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

قيم المتحول العشوائي X: $\Omega(X) = I = \{0,1\}$

x_i	0	1
$P(x_i)$	$\frac{18}{36}$	$\frac{18}{36}$

قيم المتحول العشوائي Y: $\Omega(Y) = J = \{0,1,2,3\}$

y_j	0	1	2	3
$P(y_j)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$

3. عين القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

$x_i \backslash y_j$	0	1	2	3	$P(x_i)$
0	$\frac{9}{36}$	0	$\frac{9}{36}$	0	$\frac{18}{36}$
1	0	$\frac{8}{36}$	0	$\frac{10}{36}$	$\frac{18}{36}$
$P(y_j)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\boxed{1}$

4. ايكون المتحولان العشوائيان X, Y مستقلين احتمالياً.

$$\left.\begin{array}{l} P(X=0)=\frac{18}{36} \quad , \quad P(Y=0)=\frac{9}{36} \\ P\big((X=0)\cap P(Y=0)\big)=\frac{9}{36} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{18}{36}\times\frac{9}{36}\neq\frac{9}{36}$$

$P(X=0).P(Y=0) \neq P\big((X=0)\cap(Y=0)\big)$ ، و منه المتحولان Y, X غير مستقلين احتمالياً

12) طائرات ذات محركين وأخرى ذات اربعة محركات

يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بالنوع ذاته من المحركات. إن احتمال حدوث عطل في احد هذه المحركات يساوي p وهو عدد موجب واصغر تماماً من 1. نفترض ان الأعطال التي يمكن ان تصيب المحركات مستقلة عن بعضها. ليكن X المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين، وليكن Y المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات اربعة محركات.

1) عين القيم الذي يأخذها X وقانونه الاحتمالي.

$I = \{0,1,2\}$

نحن امام تجربة حدانية فيها $n = 2$, $k \in \{0,1,2\}$

واحتمال ان يصيب احد محركات الطائرة عطل هو p .

واحتمال عدم إصابة أحد محركات الطائرة عطل هو $1 - p$.

$P(X = k) = \binom{n}{k} . p^k . (1-p)^{n-k}$

$P(0) = \binom{2}{0} . p^0 . (1-p)^2 = (1-p)^2$

$P(1) = \binom{2}{1} . p^1 . (1-p) = 2p(1-p)$

$P(2) = \binom{2}{2} . p^2 . (1-p)^0 = p^2$

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

2) عين القيم التي يأخذها Y وقانونه الاحتمالي.

نحن أمام تجربة حدانية فيها $n = 4$ ومجموعة القيم التي يأخذها Y : $J = \{0,1,2,3,4\}$; $k \in \{0,1,2,3,4\}$

$P(0) = \binom{4}{0} . p^0 . (1-p)^4 = (1-p)^4$, $P(1) = \binom{4}{1} . p^1 . (1-p)^3 = 4p(1-p)^3$

$P(2) = \binom{4}{2} . p^2 . (1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$, $P(3) = \binom{4}{3} . p^3 . (1-p) = 4p^3(1-p)$

$P(4) = \binom{4}{4} . p^4 . (1-p)^0 = p^4$

y_j	0	1	2	3	4
$P(y_j)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

3) يمكن لطائرة ان تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطل.

احسب p_2 احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها

احسب p_4 احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها.

حساب p_2 : تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها إذا كان: { لا يوجد عطل او محرك واحد معطل }

$p_2 = p(X \leq 1)$

$p_2 = 1 - p(X = 2)$ أو للسهولة

$\boxed{p_2 = 1 - p^2}$

حساب p_4 : تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها إذا كان:

{ لا يوجد عطل او محرك واحد معطل أو محركان معطلان }

$p_4 = p(Y \leq 2)$

$= p(y = 0) + p(y = 1) + p(y = 2)$

$= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2$

$= (1-p)^2[(1-p)^2 + 4p(1-p) + 6p^2]$

$= (1-p)^2(1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 + 6p^2)$

$\boxed{p_4 = (1-p)^2(3p^2 + 2p + 1)}$

4) تحقق ان $p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$ وعين تبعاً لقيم p . اي نوع من الطائرات يعطي وثوقية اكبر.

$p_2 - p_4 = \underbrace{1 - p^2} - (1-p)^2(3p^2 + 2p + 1)$

$$= \underbrace{(1-p)}(1+p) - \underbrace{(1-p)^2}(3p^2+2p+1)$$
$$= (1-p)[1+p-(1-p)(3p^2+2p+1)]$$
$$= (1-p)(1+p-3p^2-2p-1+3p^3+2p^2+p)$$
$$= (1-p)(3p^3-p^2)$$
$$p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$$

بما أن $p_2 - p_4 = \underbrace{p^2}_{\boxed{+}}\underbrace{(1-p)}_{\boxed{+}}(3p-1)$ لأن $p<1$

فإشارة $p_2 - p_4$ من إشارة $(3p-1)$:

p	0		$\frac{1}{3}$		1
$p_2 - p_4$		$-$	0	$+$	
		الطائرة ذات المحركات الأربعة أكثر وثوقية	نفس الوثوقية	الطائرة ذات المحركين أكثر وثوقية	

---

13) متتاليات واحتمالات

① ليكن a عدداً حقيقياً. نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بشرط البدء $u_1 = a$ والعلاقة التدريجية $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$.

a) لتكن $(v_n)_{n\geq1}$ المتتالية المعرفة بالصيغة $v_n = 13u_n - 4$. اثبت ان $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية، وعين أساسها، ثم عبر عن v_n بدلالة n.

$$v_n = 13u_n - 4$$
$$v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4$$
$$= 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4$$
$$= \underbrace{\frac{52}{10}} - \frac{39}{10}u_n - \underbrace{4} = \underbrace{\frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n}_{\text{عامل مشترك } \frac{-3}{10}}$$
$$= \frac{-3}{10}[13u_n - 4]$$
$$\boxed{v_{n+1} = \frac{-3}{10}v_n}$$

إذاً المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $q = \frac{-3}{10}$

وحدها الأول : $v_1 = 13u_1 - 4 = 13a - 4$

$$v_n = v_1.(q)^{n-1}$$
$$\boxed{v_n = (13a-4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}}$$

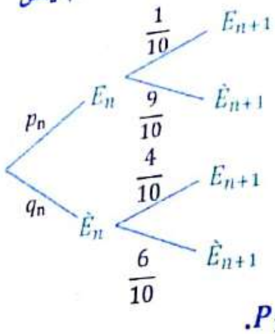
b) استنتج صيغة u_n بدلالة n و a ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

$$v_n = 13u_n - 4 \quad \Rightarrow \quad u_n = \frac{1}{13}[v_n + 4]$$
$$\boxed{u_n = \frac{1}{13}\left[(13a-4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + 4\right]}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} = 0 \quad ; \quad -1 < \left(q = \frac{-3}{10}\right) < 1 \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{13}$$

② غالباً ما ينسى مدرس الرياضيات مفتاح غرفة الصف. اياً كان العدد n ، $(n \geq 1)$ نرمز بالرمز E_n إلى الحدث:
«نسي المدرس مفتاح غرفة الصف في اليوم n»
لنضع: $p_n = p(E_n)$ و $q_n = p(\bar{E}_n)$

نفترض انه إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n فإن احتمال ان ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$ ، وإذا لم ينس المدرس المفتاح في اليوم n فإن احتمال ان ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$

a) اثبت انه في حالة $n \geq 1$ لدينا: $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$



$$p_{n+1} = p(E_{n+1})$$
$$= p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\bar{E}_n \cap E_{n+1})$$
$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n}$$

b) استنتج صيغة P_{n+1} بدلالة P_n ثم استفد من ① لتحسب P_n بدلالة n ، P_1.
التعلق نهاية المتتالية $(P_n)_{n\geq 1}$ بقيمة P_1 ؟

$$P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n)$$
$$= \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10} - \frac{4}{10}P_n$$
$$\boxed{P_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n}$$

من الفرض لدينا : $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$

و بالاستفادة مما سبق نجد ان :

$$P_n = \frac{1}{13}\left[(13P_1 - 4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + 4\right]$$
$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{4}{13}$$

و لا تتعلق نهاية المتتالية $(P_n)_{n\geq 1}$ بقيمة P_1 .

---

14) نكرر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين ، و نسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين ، احسب احتمال كل من الحدثين A : (الحصول ثلاث مرات على وجهين H) و B : (الحصول على وجهين H مرة على الأقل)

♦ الحدث A الحصول ثلاث مرات على وجهين H
نحن أمام تجربة برنولية فيها $k = 3$, $n = 10$
و احتمال ظهور الوجهين H عند القاء قطعتي النقود
$P = \frac{1}{4}$ و منه $q = \frac{3}{4}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$
$$P(A) = P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^7$$
$$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \cdot \frac{1}{(4)^3} \cdot \frac{(3)^7}{(4)^7}$$
$$= 10 \times 3 . \frac{1}{(4)^2} \cdot \frac{(3)^7}{(4)^7} = (10)\frac{(3)^8}{(4)^9}$$

♦ الحدث B الحصول على وجهين H مرة على الأقل .

$$P(B) = P(X \geq 1)$$
$$= 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$
$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

15) نتامل حجر نرد متوازن فيه اربعة وجوه ملونة بالأسود , و وجهان ملونان بالأحمر نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي .

① ما احتمال ان يظهر وجه احمر أول مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد ؟

A الحدث ظهور وجه أحمر أول مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد .

$$A=\{(B\,,B\,,B\,,B\,,R)\}$$

نلاحظ أن $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ و $P(R)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ و الأحداث مستقلة احتمالياً .

$$\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{243}$$

② ما احتمال ان يظهر وجه احمر مرة على الأقل ؟

C الحدث ظهور وجه أحمر مرة على الأقل .

$\grave{C}$ الحدث عدم ظهور وجه أحمر (ظهور اللون الأسود في الحالات الخمسة)

$$P(C)=1-P(\grave{C})$$
$$=1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{211}{243}$$

1/3

③ ما قانون المتحول العشوائي X الذي يعد عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها ؟

$$I=\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$P(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}=\binom{5}{k}\frac{2^k}{3^5}\qquad;k=\{0,1,2,3,4,5\}$$

طلب إضافي: احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

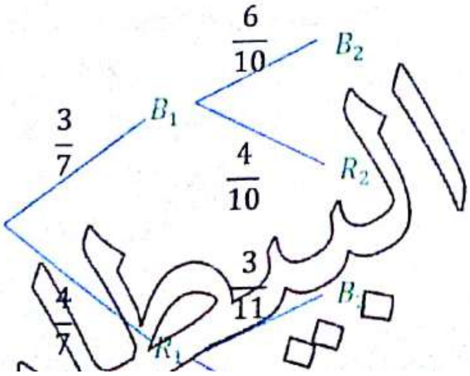
$$P(0)=\binom{5}{0}\frac{2^0}{3^5}=\frac{1}{243}\qquad P(2)=\binom{5}{2}\frac{2^2}{3^5}=\frac{40}{243}\qquad P(4)=\binom{5}{4}\frac{2^4}{3^5}=\frac{80}{243}$$
$$P(1)=\binom{5}{1}\frac{2^1}{3^5}=\frac{10}{243}\qquad P(3)=\binom{5}{3}\frac{2^3}{3^5}=\frac{80}{243}\qquad P(5)=\binom{5}{5}\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243}$$

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

) نتامل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء و أربع كرات حمراء , نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق و بعدئذٍ نسحب مجدداً كرة من الصندوق لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث (الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون)

و ليكن R_1 الحدث (الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون) .

1. اعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة .



2. احسب احتمال R_2 .

$$P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2)$$
$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{10} + \frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11} = \frac{452}{770}$$

3. إذا كانت الكرة المسحوبة الثانية حمراء اللون، فما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون

$$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{452}{770}} = \frac{132}{452} = \frac{33}{113}$$

---

17) التجربة الأولى : نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين و أربع كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آنٍ معاً ، ليكن Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

1. ما هي مجموعة القيم التي يأخذها Y .

$$J = \left\{ \underbrace{1}_{(R,B,B)} \quad , \quad \underbrace{2}_{(R,R,B)} \quad , \quad \underbrace{3}_{(R,R,R)} \right\}$$

2. احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y .

$$P(1) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$P(2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$P(3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$$

y_j	1	2	3
$P(y_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

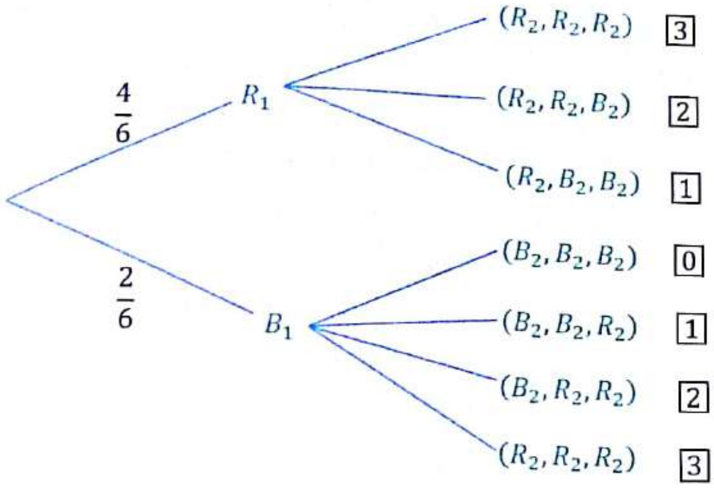
3. احسب التوقع الرياضي للمتحول Y و تباينه .

y_j	1		2		3	
$P(y_j)$	$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j\,.P(y_j)$	$\frac{1}{5}$	$+$	$\frac{6}{5}$	$+$	$\frac{3}{5}$	$=2$
y_j^2	1		4		9	
$\sum_{j=1}^{3} y_j^2\,.P(y_j)$	$\frac{1}{5}$	$+$	$\frac{12}{5}$	$+$	$\frac{9}{5}$	$=\frac{22}{5}$

$$V(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j^2\,.P(y_j) - (E(Y))^2 = \frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5}$$

التجربة الثانية : نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين و اربع كرات حمراء , نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق و بعدئذٍ نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آنٍ معاً و ليكن X عدد الكرات الحمراء المسحوبة في المرة الثانية , نرمز بالرمز R_1 إلى الحدث (الكرة المسحوبة في الأولى حمراء اللون) .

ملاحظة : للسهولة قبل الحل نرسم المخطط الشجري .



1) ما هي مجموعة القيم التي يأخذها .

$$I = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ \}$$

2) احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

$$P(0) = P[B_1 \cap (B_2, B_2, B_2)] = \frac{2}{6} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{42} = \frac{15}{630}$$

$$P(1) = P[R_1 \cap (R_2, B_2, B_2)] + P[B_1 \cap (B_2, B_2, R_2)]$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{2}{6} \cdot \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{59}{315} = \frac{118}{630}$$

$$P(2) = P[R_1 \cap (R_2, R_2, B_2)] + P[B_1 \cap (B_2, R_2, R_2)]$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{2}{6} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{143}{315} = \frac{286}{630}$$

$$P(3) = P[R_1 \cap (R_2, R_2, R_2)] + P[B_1 \cap (R_2, R_2, R_2)]$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{2}{6} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{211}{630}$$

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{15}{630}$	$\frac{118}{630}$	$\frac{286}{630}$	$\frac{211}{630}$

3) احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X وتباينه.

x_i	0		1		2		3	
$P(x_i)$	$\frac{15}{630}$		$\frac{118}{630}$		$\frac{286}{630}$		$\frac{211}{630}$	
$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i P(x_i)$	0	+	$\frac{118}{630}$	+	$\frac{572}{630}$	+	$\frac{633}{630}$	$=\frac{1323}{630}=\frac{21}{10}$
x_i^2	0		1		4		9	
$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(x_i)$	0	+	$\frac{118}{630}$	+	$\frac{1144}{630}$	+	$\frac{1899}{630}$	$=\frac{3161}{630}$

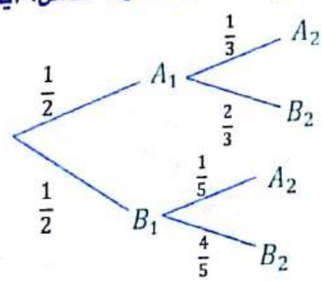
$$E(X)=\frac{21}{10} \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(x_i)-\left(E(X)\right)^2=\frac{3161}{630}-\left(\frac{21}{10}\right)^2=\frac{3827}{6300}\simeq 0.6$$

18) تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تلقيها، تُكرر سعاد التجربة عدداً من المرات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمالية نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$ ، وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها. نتأمل، اياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، الحدثين الآتيين:

A_n : (نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n)

B_n : (فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n) , ونعرف $p_n=P(A_n)$

للسهولة نرسم المخطط الشجري (A نجاح سعاد ، B فشل سعاد)



1) عين p_1 وبرهن أن $p_2=\frac{4}{15}$

$$P_1=P(A_1)=\frac{1}{2}$$

$$P_2=P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(B_1\cap A_2)$$

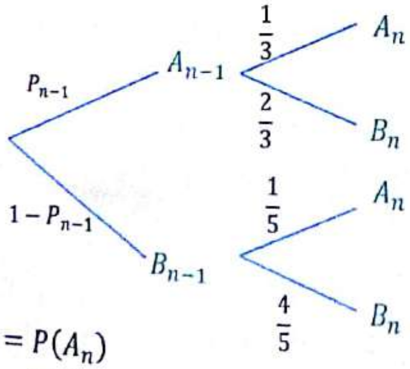
$$=\quad \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\quad+\quad\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\quad=\frac{4}{15}$$

2) اثبت انه اياً كانت $n\geq 2$ كان $P_n=\frac{2}{15}P_{n-1}+\frac{1}{5}$.

بما أن احتمالات نجاح سعاد بعد نجاحها في الرمية الأولى متساوية (تساوي $\frac{1}{3}$)

واحتمالات نجاح سعاد بعد فشلها في الرمية الأولى متساوية (تساوي $\frac{1}{5}$)

عندئذ يصبح المخطط الشجري:



$$P_n=P(A_n)$$

$$=P[A_{n-1}\cap A_n]+P[B_{n-1}\cap A_n]$$

$$=P_{n-1}\times\frac{1}{3}+(1-P_{n-1})\times\frac{1}{5}=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}P_{n-1}$$

$$P_n=\frac{2}{15}P_{n-1}+\frac{1}{5}$$

3) نعرف في حالة $n \geq 1$ المقدار P_n بالعلاقة : $u_n = P_n - \frac{3}{13}$ اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وعين حدها الأول u_1 واساسها q .

$$u_{n+1} = \underbrace{P_{n+1}} - \frac{3}{13}$$

$$= \frac{2}{15} P_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15} P_n - \frac{2}{65}$$

$$= \frac{2}{15} \underbrace{\left[P_n - \frac{3}{13}\right]}$$

$$u_{n+1} = \frac{2}{15} \cdot u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{15}$$

فالمتتالية $(u_{n\geq 1})$ هندسية واساسها $q = \frac{2}{15}$

$$u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

4) استنتج قيمة u_n ثم P_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$

$(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية فيها $q = \frac{2}{15}$ و $u_1 = \frac{7}{26}$

$$u_n = u_1 . q^{n-1} \Longrightarrow \boxed{u_n = \frac{7}{26} . \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}}$$

$$u_n = p_n - \frac{3}{13} \Longrightarrow p_n = u_n + \frac{3}{13}$$

$$\boxed{p_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}}$$

$\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$ متتالية هندسية و $-1 < \left(q = \frac{2}{15}\right) < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{13}$$

****