التابع المركب

تذكرة بالتركيب:

١. مثال:

$$\begin{cases} f(x) = 2x+1 \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

مركب $f(g(x))$
$g(f(x))$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}+1$$

$$g(f(x)) = g(2x+1) = \sqrt{2x+1}$$

2. مثال:

$$\begin{cases} f(x) = 2x+1 \\ g(x) = \sin x \end{cases}$$

مركب $f(g(x))$
$g(f(x))$

$$f(g(x)) = f(\sin x) = 2\sin x + 1$$

$$g(f(x)) = g(2x+1) = \sin(2x+1)$$

3. مثال: ليكن التابع $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ قم بتركيب $f(f(x))$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

$$\Rightarrow f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x+2}+1}{\frac{x+1}{x+2}+2} = \frac{\frac{x+1+x+2}{\cancel{x+2}}}{\frac{x+1+2x+4}{\cancel{x+2}}} = \frac{2x+3}{3x+5}$$

نهايات تابع مركب

الفكرة :

$$\lim_{x \to a} f(x) = g(h(x))$$

- $\lim_{x \to a} h(x) = b$
- $\lim_{x \to b} g(x) = c$

$\Big]\quad \lim_{x \to a} f(x) = c$

مثال 1: ادرس نهاية التوابع الآتية:

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x-1}{x-2}}$ $\qquad a = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4x-1}{x-2} = 4$

$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

$\Big] \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

2. $f(x) = \sqrt{-x^3+x+1}$ $\qquad a = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} -x^3+x+1 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\Big] \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x+5}\right)$ $\quad a = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi x + 1}{2x+5} = \frac{\pi}{2} \\ \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 . \end{array}\right] \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

• مثال: ليكن التابع المعرف على المجال $]-5,+\infty[$ وفق:

$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ المطلوب:

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

② أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x.

الحل:

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

الفكرة:

$$h(x) = f(f(x)) \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b = 1 \\ \lim\limits_{x \to b=1} f(x) = -\dfrac{2}{6} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = -\frac{1}{3}$$

$x \to a = +\infty$

(2)

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x-3}{x+5}\right) = \frac{\dfrac{x-3}{x+5} - 3}{\dfrac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{-2x-18}{6x+22}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{6x} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$