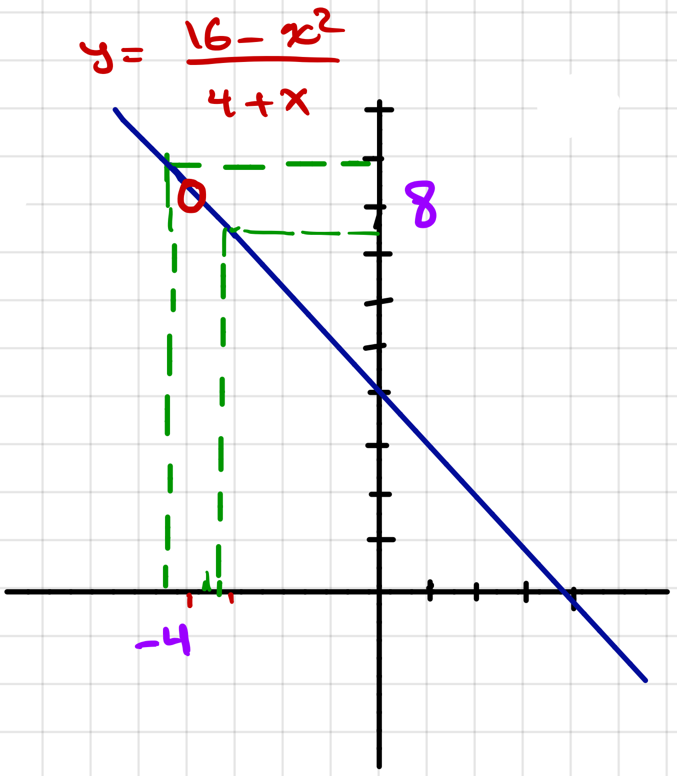
Introduction to the limit



$$f(x) = \frac{16-x^2}{x+4}$$

x	-3.9	-3.99	-3.999
$f(x)$	7.9	7.99	7.999

x	-4.1	-4.01	-4.001
$f(x)$	8.1	8.01	8.001

* نلاحظ من الرسم بإن الداله على يمين ٤- وعن يسارها تقترب من ٨ .

* الدالة غير معرفه عند ٤- ونمثل ذلك على الرسم بوضع دائرة مفتوحة .

نلاحظ هنا بإن الداله غير معرفه عند ٤- ولكن عندما تقترب x من ٤- تقترب النتيجه من ٨ . نسمي ٨ هي نهاية الداله عندما تقترب x من ٤-.

Properties of Limit:

- $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
- $\lim_{x\to a} c = c$ For example : $\lim_{x\to 3} 5 = 5$
- $\lim_{x\to a} c f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$

$$\lim_{x \to a} F(x)$$

Polynomial Functions	Rational Functions
Way to solve	Way to solve
✓ Substituation Method	طريقة التعويض ✓ Substituation Method
	طريقة التحليل ✓ Factoring Method
	طريقة الضرب في مرافق المقام ✓ Conjugate Method.
	طريقة اختبار احد أطراف النهايات ✓ Examin the one sided limit.

$\frac{0}{0}$ case (Factoring Method, Conjugate Method)

$\frac{\text{عدد}}{0}$ (Examin the one sided limit)

Examples	Solution	Comments
$\lim_{x\to 2}(3x+5)$	$\lim_{x\to 2}(3x+5) = 2.3+5 = 11$	دالة كثيرة حدود بالتعويض المباشر
$\lim_{x\to -1}(x^3+5x^2-7)$	$\lim_{x\to -1}(x^3+5x^2-7)$ $=(-1)^3+5(-1)^2-7$ $=-3$	
$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2+3}{x-x^2}$	$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2+3}{x-x^2}$ $=\frac{2(5)^2+3}{5-25} = -\frac{53}{20}$	دالة كسرية :- دائماً نبدأ بالتعويض المباشر وفي حالة الحصول على عدد يكون هو النهاية أما إذا حصلنا على كميات غير معرفة مثل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\text{عدد}}{0}$ نحل بالطرق الأخرى.
$\lim_{x\to 3}\frac{x-3x^2}{5+x}$	$\lim_{x\to 3}\frac{x-3x^2}{5+x}$ $=\frac{3-3(3)^2}{5+3}$ $=\frac{3-27}{8}$ $=\frac{-24}{8}=-3$	

Examples	Solutions	Comments.
$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$ $= \dfrac{-3+3}{(-3)^2-9} = \dfrac{0}{0}$ $\therefore \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$ $= \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\cancel{x+3}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}$ $= \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x-3}$ $= \dfrac{1}{-3-3} = -\dfrac{1}{6}$	* عند التعويض المباشر في الدالة حصلنا على الكمية الغير معرفة $\frac{0}{0}$ لذلك نوجد limit بطريقة أخرى * استخدمنا هنا طريقة التحليل -(factoring) * $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$	$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ $= \dfrac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \dfrac{0}{0}$ $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$ $= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}$ $= \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}+2$ $= \sqrt{4}+2 = 4$	* حصلنا على $\frac{0}{0}$ عند وجود جذر في الدالة نستخدم إنطاق المرافق

Examples	Solutions	Comments.
$\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x}{(x+3)^2}$	$\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x}{(x+3)^2}$ $= \frac{2(-3)}{(-3+3)^2} = \frac{-6}{0}$ $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{2x}{(x+3)^2} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{2x}{(x+3)^2} = -\infty$ $\therefore \lim\limits_{x\to -3} \frac{2x}{(x+3)^2} = -\infty$	عند التعويض المباشر في الدالة الكسرية حصلنا على $\frac{\text{عدد}}{0}$. في هذه الحالة نختبر ال limit من جهة يمين العدد ويسارة . * النواتج المحتملة لهذا النوع من النهايات $+\infty$ ، $-\infty$ أو DNE * كيف نحصل على النتيجة؟!
$\lim\limits_{x\to 6} \frac{-5}{2x-12}$	$\lim\limits_{x\to 6} \frac{-5}{2x-12}$ $= \frac{-5}{2.6-12} = \frac{-5}{0}$ $\lim\limits_{x\to 6^+} \frac{-5}{2x-12} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 6^-} \frac{-5}{2x-12} = \infty$ $\neq$ $\therefore \lim\limits_{x\to 6} \frac{-5}{2x-12}$ DNE	بالحل على الدالة في المقام والتعويض فيها بأعداد عشوائية عن يمين العدد الذي تؤول إليه x أو يسارة حسب النهاية التي ندرسها إذا كانت سالبه فإن $\lim = \infty$ موجبة فإن $\lim = -\infty$ $x \to -3$ الدالة في المقام $(x+3)^2$ وعند دراسة $\lim\limits_{x\to -3^-}$ نأخذ عدد يسار -3 مثلاً -4 $(-4+3)^2 = 1$ (موجب) $\therefore \lim\limits_{x\to -3^-} = -\infty$ وهكذا !

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

Polynomial Function

نأخذ الحد الذي له الأس الأعلى
ثم نطبق التالي :-

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty \text{ or } -\infty$$

يعتمد على n :-

إذا كانت n زوجية ← ∞

إذا كانت n فردية ← $-\infty$

* الأخذ بالإعتبار بإشارة المتغير x .

Rational Function

يوجد ٣ طرق لإيجاد النهاية :-

١- نقسم جميع حدود البسط والمقام على أعلى أس للمتغير x في المقام.

٢- نقارن درجة البسط والمقام :

• درجة البسط > درجة المقام ← $\pm\infty$

• درجة البسط = درجة المقام :-

$$\frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$$

• درجة البسط < درجة المقام ← 0

٣- نأخذ الحد الذي له الأس الأعلى في البسط والمقام ثم نكمل الحل على الحالة.

Example : Find the following

$$\lim_{x\to\infty} (7-3x-2x^2)$$

$$= \lim_{x\to\infty} -2x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} 4x^3 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} (11-2x^2-4x^3)$$

$$= \lim_{x\to\infty} -4x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$$

Example: Find the following:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x^2+1}$

Method 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{2}{\infty}}+\cancel{\frac{3}{\infty^2}}}{1+\cancel{\frac{1}{\infty^2}}}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

Method 2:

∵ درجة البسط < درجة المقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2+1} = 0$$

Method 3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}$$

$$= \frac{2}{\infty} = 0$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+2}{5x^2-1}$

Method 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^3}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x+\frac{2}{x^2}}{5-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3(\infty)+\cancel{\frac{2}{\infty^2}}}{5-\cancel{\frac{1}{\infty^2}}}$$

$$= \frac{3}{5}(\infty) = \infty$$

Method 2:

∵ درجة البسط > درجة المقام

∴ الحل $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3(\infty)^3+2}{5(\infty)^2-1} = \infty$$

Method 3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2}{5x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{5x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{5}x$$

$$= \frac{3}{5}(\infty) = \infty$$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2}{x+3}$

Method 1:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2}{x+3}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{5x^2}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{1 + \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{5(-\infty)}{1 + \cancel{\frac{3}{\infty}}}$$

$$= 5(-\infty) = -\infty$$

Method 2:

∵ درجة البسط > درجة المقام

∴ $\text{limit} = \pm\infty$

نحدد الإشارة على حسب limit

$$\therefore \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2}{x+3} = -\infty$$

Method 3:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2}{x+3}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 5x$$

$$= 5(-\infty) = -\infty$$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 5x}{3x - 1}$

Method 1:

Method 2:

∵ درجة البسط = درجة المقام

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 5x}{3x - 1} = \frac{-5}{3}$$

Method 3:

More Examples

Find the following :

1. $\lim_{x \to -\infty} \frac{8x^2 + 3x}{2x^2 - 1}$

2. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

3. $\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 9)$

4. $\lim_{x \to -\infty} (-x^3 - x + 6)$

Solution :

1. $\lim_{x \to -\infty} \frac{8x^2 + 3x}{2x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}$

$= \lim_{x \to -\infty} 4 = 4.$

2. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}}$

$= \lim_{x \to -3} x - 2 = -5$

3. $\lim_{x \to -\infty} 2x^2 - 9 = \lim_{x \to -\infty} 2x^2 = \infty$

4. $\lim_{x \to -\infty} -x^3 - x + 6 = \infty$