ألف شكر للأساتذة الكرام :

أ. حسان البيطار

أ. خلدون السيروان

أ. ياسر الساسة

أ. طارق بن زياد

أ. وائل زعترية

أ. علاء رحال

وشكر خاص لأستاذي الرائع أمير سكيكر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

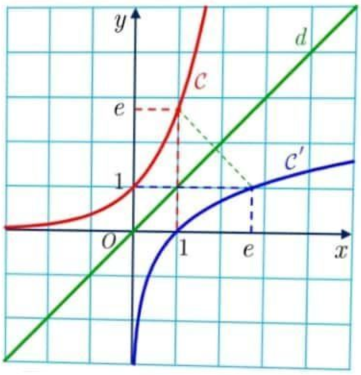
التابع الأسي النيبري

تعريفه: التابع الأسي النيبري exp:

هو التابع المعرف على R كما يلي:

صورة كل x من R وفق exp هو العدد الذي لوغاريتمه النيبري يساوي x ونرمز له بالرمز e^x

نتائج هامة:



- $\ln x = y \Rightarrow x = e^y$
- $e^1 = e \quad , \quad e^0 = 1$
- اياً يكن $x \in R$ فإن $\ln e^x = x$
- اياً يكن $x \in \left]0,+\infty\right[$ فإن $e^{\ln x} = x$
- $exp: R \to R_+^* \quad : x \to e^x$
- $\ln: R_+^* \to R \quad : x \to \ln x$
- بما ان التقابل العكسي للتابع اللوغاريتمي النيبري هو التابع الأسي النيبري

فإن C' هو نظير C بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث.

ملاحظات:

.1

$$x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$$

$$x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$$

$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$$

2. في حالة $x > 0$ نجد: $e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = e^{\ln \frac{1}{x})} = \frac{1}{x}$

في حالة $x > 0$ نجد: $e^{|\ln x|} = \begin{cases} e^{\ln} & : x \geq 1 \\ e^{-\ln x} & : x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x & : x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & : x < 1 \end{cases}$

.3 اياً يكن العددين a , b فإن:

$$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$

$$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$$

$$a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$$

4. التابع $f(x) = e^x$ معرف على R

التابع $f(x) = e^{g(x)}$ معرف حيث يكون $g(x)$ معرف

ملاحظة

حل المعادلة $e^{f(x)} = e^{g(x)}$ يكافئ حل المعادلة $f(x) = g(x)$

حل المتراجحة $e^{f(x)} \leq e^{g(x)}$ يكافئ حل المتراجحة $f(x) \leq g(x)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تدريب صفحة 186:

1) اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

1 $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ $= 2 + 3 = 5$	2 $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$ $= e^{\ln\sqrt{16}} + e^{\ln 3}$ $= 4 + 3 = 7$
3 $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ $= -3 + 5 = 2$	4 $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$ $= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

2) اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من العبارات الآتية مبيناً المجموعة التي تكون معرفة عليها.

1 $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$ $= x - (\ln 2 + \ln e^x)$ $= x - \ln 2 - x$ $= -\ln 2$	شرط التعريف: $x > 0$ $\quad 2e^x > 0$ $D =]0, +\infty[$
2 $B = e^{\ln(x-1) - \ln x} + \frac{1}{x}$ $= e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} + \frac{1}{x}$ $= \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = 1$	شرط التعريف: $x - 1 > 0$ $\quad x > 0$ $\quad x \neq 0$ $D =]1, +\infty[$
3 $C = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln x}$ $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$	شرط التعريف: $e^{\frac{1}{x}} > 0$ $\quad x > 0$ $x \neq 0$ $D =]0, +\infty[$

3) حل المعادلات أو المتراجحات الآتية:

1 $e^{3-x} = 1$ $e^{3-x} = e^0$ $3 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$	2 $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ $2x^2 + 3 = 7x$ $2x^2 - 7x + 3 = 0$ $\Delta = 49 - 24 = 25$ إما : $x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{2}}$ أو: $x_2 = \frac{7+5}{4} = 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3}$
3 $\frac{e^x}{1 - 2e^x} = 5$ $e^x = 5 - 10e^x$ $11e^x = 5$ $e^x = \frac{5}{11} \Rightarrow \boxed{x = \ln\frac{5}{11}}$	4 $2e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1}$ $\frac{2}{e^x} = \frac{1}{e^x + 1}$ $2e^x + 2 = e^x$ $e^x = -2$ (مستحيلة الحل)
5 $\ln(e^x - 2) = 3$ $\ln(e^x - 2) = \ln e^3$ $e^x - 2 = e^3$ $e^x = e^3 + 2$ $\boxed{x = \ln(e^3 + 2)}$	6 $\ln(2 - e^x) \geq 3$ $\ln(2 - e^x) \geq \ln e^3$ $2 - e^x \geq e^3$ $\underbrace{2 - e^3}_{\text{سالب}} \geq e^x$ (وهذه المتراجحة مستحيلة الحل)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

7 $e^{x^2-2} \le e^{4-x}$

$x^2-2 \le 4-x$

$x^2+x-6 \le 0$

$(x+3)(x-2)=0$

إما $x=-3$ او $x=2$

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$		
x^2+x-6	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$		
$x^2+x-6 \le 0$	غير محققة	محققة	غير محققة

$S=[-3,2]$

8 $(e^x-1)(e^x-4)<0$

$(e^x-1)(e^x-4)=0$

إما $e^x=1 \rightarrow x=0$

او $e^x=4 \rightarrow x=\ln 4$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $\quad \ln 4 \quad$ $+\infty$		
$(e^x-1)(e^x-4)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$		
$(e^x-1)(e^x-4)<0$	غير محققة	محققة	غير محققة

$S=]0,\ln 4[$

9 $e^{2x^2-1} \ge 3$

$e^{2x^2-1} \ge e^{\ln 3}$

$2x^2-1 \ge \ln 3$

$2x^2 \ge 1+\ln 3$

$2x^2 \ge \ln e+\ln 3$

$2x^2 \ge \ln 3e$

$x^2 \ge \frac{1}{2}\ln 3e$

$$\underbrace{x^2 \ge \ln\sqrt{3e}}$$

إما $x \ge \sqrt{\ln\sqrt{3e}}$ او $x \le -\sqrt{\ln\sqrt{3e}}$

$S=\left]-\infty,-\sqrt{\ln\sqrt{3e}}\right] \cup \left[\sqrt{\ln\sqrt{3e}},+\infty\right[$

تذكرة: $\underbrace{x^2 \ge a}$

إما $x \ge \sqrt{a}$ او $x \le -\sqrt{a}$

4) اشرح لماذا تتفق إشارة $e^x-\frac{4}{e^x}$ مع إشارة (e^x-2)؛ ثم حل المتراجحة $e^x-\frac{4}{e^x}<0$

- $e^x-\frac{4}{e^x}=\frac{e^{2x}-4}{e^x}=\frac{(e^x-2)\overbrace{(e^x+2)}^{+}}{\underbrace{e^x}_{+}}$

(e^x+2) موجب تماماً و e^x موجب تماماً اصبحت إشارة المقدار السابق من إشارة (e^x-2)

- $e^x-\frac{4}{e^x}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x}<0$

منه تكون المتراجحة السابقة محققة عندما يكون $e^x-2<0$

$e^x<2 \quad \Rightarrow \quad x<\ln 2$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $S=]-\infty,\ln 2[$

****

خواص التابع الأسي:

$e^0=1 \quad , \quad e^1=e$	$e^{-a}=\frac{1}{e^a}$
$e^{a+b}=e^a.e^b$	$(e^a)^p=e^{ap}$
$e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$	$e^{a_1+a_2+\cdots+a_n}=e^{a_1}.e^{a_2}\ldots\ldots.e^{a_n}$

تعريف 2:

في حالة عدد حقيقي موجب تماماً a ، وليكن x عدد حقيقي ما نعرف a^x كما يلي:

$a^x=e^{x\ln a}$

$\pi^5=e^{5\ln\pi} \quad , \quad 3^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\ln}$

مبرهنة: أياً يكن العددان الحقيقيان الموجبان تماماً a,b والعددان الحقيقيان u,v:

$1^u=1$	$(a.b)^u=a^u.b^u$	$\frac{a^u}{a^v}=a^{u-v}$
$a^u.a^v=a^{u+v}$	$(a^u)^v=a^{u.v}$	$\frac{a^u}{b^u}=\left(\frac{a}{b}\right)^u$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تدرب صفحة 190 :

أثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين على R:

$\boxed{1}\ \ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$

$$L_1=\underbrace{\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)}$$

$$=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^{-x}+1}\right)=\ln e^x=x=L_2$$

$\boxed{2}\ \dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$

$$L_1=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)}=\frac{1}{e^{-x}+1}=L_2$$

---

2) اكتب بابسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

$\boxed{1}\ A=\ln\sqrt{e^5}$ $=\ln e^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$	$\boxed{2}\ B=\frac{e}{e^{2+\ln 3}}$ $=\frac{e}{e^2.e^{\ln 3}}=\frac{1}{3.e}$
$\boxed{3}\ C=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$ $=\frac{e^2.e^{\ln 8}}{e^3.e^{\ln 4}}=\frac{8}{(e)(4)}=\frac{2}{e}$	$\boxed{4}\ D=\frac{e^{4x}}{e.(e^x)^2}$ $=\frac{e^{4x}}{e.e^{2x}}=\frac{e^{2x}}{e}=e^{2x-1}$
$\boxed{5}\ E=(e^{2x})^3.(e^{-x})^6$ $=e^{6x}.e^{-6x}=e^0=1$	$\boxed{6}\ F=\frac{e^{3\pi}-e^{2\pi}}{e^{2\pi}-e^{\pi}}$ $=\frac{e^{\pi}(e^{2\pi}-e^{\pi})}{e^{2\pi}-e^{\pi}}=e^{\pi}$
$\boxed{7}\ G=(32)^{\frac{3}{2}}$ $=((2)^5)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{15}{2}}$	$\boxed{8}\ H=3^{\frac{-1}{\ln 3}}$ $=e^{\frac{-1}{\ln 3}.\ln 3}=e^{-1}=\frac{1}{e}$
$\boxed{9}\ I=\sqrt[6]{27}.3^{\frac{1}{2}}$ $=\sqrt[6]{3^3}.3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}=3$	

ملاحظة $e^x.e^{-x}=1$ لا تختصر

3) أثبت أن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ هو تابع ثابت.

$$f(x)=\underbrace{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}_{\text{مطابقة}}$$

$$=[e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})][e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}]$$

$$=(2e^{-x})(2e^x)=4e^0=4\ (\text{ثابت})$$

---

4) حل المعادلات الآتية:

$\boxed{1}\ e^{2x}-5e^x+4=0$ $(e^x-4)(e^x-1)=0$ إما $e^x=4\rightarrow\boxed{x_1=\ln 4}$ او $e^x=1\rightarrow\boxed{x_2=0}$	$\boxed{2}\ e^{2x}-e^x-6=0$ $(e^x-3)(e^x+2)=0$ إما $e^x=3\rightarrow\boxed{x=\ln 3}$ او $e^x=-2$ (مرفوض)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3 $4e^{2x} - e^x + 2 = 0$ $\Delta = 1 - 4(4)(2) = -31 < 0$ (المعادلة مستحيلة الحل)	4 $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$ $(e^{-x} - 6)(e^{-x} - 1) = 0$ إما $e^{-x} = 6 \rightarrow -x = \ln 6 \Rightarrow \boxed{x_1 = -\ln 6}$ او $e^{-x} = 1 \rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

5) حل المتراجحات الآتية:

1

$$e^x - 4e^{-x} \le 0$$
$$e^x - \frac{4}{e^x} \le 0$$
$$e^{2x} - 4 \le 0$$
$$(e^x - 2)\underbrace{(e^x + 2)}_{\boxed{+}} \le 0$$

فالإشارة من إشارة $e^x - 2$

$$e^x - 2 \le 0$$
$$e^x \le 2$$
$$x \le \ln 2$$
$$S =]-\infty, \ln 2]$$

2

$$(e^x - 2)e^x > 2(e^x - 2)$$
$$(e^x - 2)e^x - 2(e^x - 2) > 0$$
$$(e^x - 2)(e^x - 2) > 0$$
$$(e^x - 2)^2 > 0$$

دائماًمحققة إلا عندما : $e^x - 2 = 0$

$$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$
$$S = R \setminus \{\ln 2\}$$

3

$$e^{x+2} \ge \frac{3}{e^x}$$
$$e^{x+2}.e^x \ge 3$$
$$e^{2x+2} \ge e^{\ln 3}$$
$$2x + 2 \ge \ln 3$$
$$x \ge \frac{\ln 3 - 2}{2}$$
$$x \ge \frac{1}{2}\ln 3 - 1$$
$$S = \left[\frac{1}{2}\ln 3 - 1, +\infty\right[$$

4

$$e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$$

هذه الطريقة خاطئة لأنه من الترميز أنه $e^x = t > 0$ لا يمكن t تساوي -1

$$e^{2x} - \frac{2}{e^x} - 3 < 0$$
$$e^{3x} - 3e^x - 2 < 0$$

$t^3 - 3t - 2 < 0$: ومنه $(e^x = t)$ نفرض >0

$$t^3 - 3t - 2 = 0$$

معادلة من الدرجة الثالثة نأخذ حل تجريبي يحققها ومنه نجد $t = -1$ ونقسم المعادلة على المعامل $(t + 1)$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} t^3 - 3t - 2 & t + 1 \\ \mp t^3 \mp t^2 & t^2 - t - 2 \\ -t^2 - 3t - 2 & \\ \pm t^2 \pm t & \\ -2t - 2 & \\ \pm 2t \pm 2 & \\ 0 & \end{array}$$

$$(t + 1)(t^2 - t - 2) < 0$$
$$(t + 1)(t - 2)(t + 1) < 0$$
$$(t + 1)^2(t - 2) < 0$$
$$\underbrace{(e^x + 1)^2}_{\boxed{+}}(e^x - 2) < 0$$

فالإشارة من إشارة $(e^x - 2)$, $e^x - 2 < 0$

$$e^x < 2 \Rightarrow x < \ln 2$$
$$S =]-\infty, \ln 2[$$

الحل الصحيح

$$e^{2x} - \frac{2}{e^x} - 3 < 0$$

نضرب بـ $e^x > 0$

$$e^{3x} - 2 - 3e^x < 0$$

نفرض أن

$$e^x = t > 0$$
$$t^3 - 3t - 2 < 0$$

قاعدة الأعداد (نستعمل جدول)

$$t^3 - 3t - 2 = 0$$

نلاحظ أن $t = 2$ يحقق المعادلة لذلك نقسم على $t - (+2)$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 3t - 2 & t - 2 \\ t^3 - 2t^2 & t^2 + 2t + 1 \\ 2t^2 - 3t - 2 & \\ 2t^2 - 4t & \\ t - 2 & \\ t - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

$$(t - 2)(t^2 + t + 1) = 0$$
$$(t - 2)(t + 1)(t + 1) = 0$$

اما $t = 2$

او $t = -1$ مرفوض

t	0		2		$+\infty$
$t^3 - 3t - 2$		$-$	0	$+$	
		محققة			

متراجحة <0

$$t \in]0, 2[$$

إرجاع

$$e^x \in]0, 2[$$
$$x \in]-\infty, \ln 2[$$
$$S =]-\infty, \ln 2[$$

نفس الحل طلع بس بدون علامات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\boxed{5}$ $e^{x+\ln 4} > \frac{2}{3}$

$e^{x+\ln 4} > e^{\ln\frac{2}{3}}$

$x + \ln 4 > \ln\frac{2}{3}$

$x > \ln\frac{2}{3} - \ln 4$

$x > \ln\frac{1}{6}$

$x > -\ln 6$

$S =]-\ln 6, +\infty[$

$\boxed{6}$ $e^{x} + 4e^{-x} \leq 5$

$e^{2x} + 4 \leq 5\,e^{x}$ نضرب بـ e^{x} :

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 \leq 0$

$(e^{x}-4)(e^{x}-1) = 0$

نفرض $e^{x} = t > 0$ ط2

إما $e^{x} = 4 \Rightarrow x = \ln 4$

او $e^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$(e^{x}-1)(e^{x}-4)$	+	0 −	0 +	
$(e^{x}-1)(e^{x}-4) \leq 0$	غير محققة	محققة	غير محققة	

$S = [0, \ln 4]$

****

مبرهنات في نهايات التابع الأسي

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0}$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n}}{e^{x}} = 0$

$n \in N$

$\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

إذا كان xe^{x} في المقام عندئذ نهايته 0^{-} عندما $x \to -\infty$

$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1}$

$\lim_{x\to-\infty} x^{n}.e^{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} x^{n}.e^{-x} = 0$

$n \in N$

ملاحظات هامة :

لإزالة حالات عدم التعيين في نهايات التابع الأسي نتبع ما يلي:

1. نخرج عامل مناسب و هو e^{x} او x وإذا وجدنا في التمرين e^{-x} نخرجها عامل مناسب

او $\frac{e^{x} \text{ من البسط}}{x \text{ من المقام}}$ او $\frac{x \text{ من البسط}}{e^{x} \text{ من المقام}}$

2. عندما نحصل على حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ حصرياً نطبق القاعدة $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

3. توحيد المقامات او توزيع البسط على المقام.

4. تغيير المتحول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين: احسب نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع.

$\boxed{1}$ $f(x) = e^x - 4x + 1 \quad : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = e^x\left(1 - 4.\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x - 1} \quad : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot \frac{(1 - 0)}{(1 - 0)} = +\infty$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{e^x - 5}{x} \quad : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{5}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$$

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 1}{4x} \quad : a = 0$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{4x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{3x} - 1}{3x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{3}{4} \cdot (1) = \frac{3}{4}$$

علماً ان : $\left(\lim_{x\to0} \dfrac{e^{3x} - 1}{3x} = 1\right)$

$\boxed{6}$ $f(x) = x + e^{-x} + 2 \quad : a = -\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$f(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}} + 1 + \frac{2}{e^{-x}}\right)$$

$$= e^{-x}\left(\underbrace{x.e^x} + 1 + 2.e^x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0 + 1 + 0) = +\infty$$

$\boxed{7}$ $f(x) = (x - 1).e^x \quad : a = -\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty \times 0$

$$f(x) = x.e^x - e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$\boxed{8}$ $f(x) = 4x - 1 + e^{2-x} : a = -\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$f(x) = 4x - 1 + e^2.e^{-x}$$

$$= e^{-x}\left(\frac{4x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + e^2\right)$$

$$= e^{-x}\left(4\underbrace{xe^x} - e^x + e^2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0 - 0 + e^2) = +\infty$$

$\boxed{9}$ $f(x) = e^x - ln \quad : a = +\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

$\boxed{10}$ $f(x) = \dfrac{ln\,(1 + 4x)}{1 - e^{3x}} \quad a = 0$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{ln\,(1 + 4x)}{-(e^{3x} - 1)}$$

$$= \frac{4x\,\frac{\ln(1+4x)}{4x}}{-3x\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)}$$

$$= \frac{4\,\frac{\ln(1+4x)}{4x}}{-3\,\frac{e^{3x}-1}{3x}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{-4}{3}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نهايات مميزة:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

مثال ① : اوجد نهاية التابع f عند $a=-2$: $f(x) = (3+x)^{\frac{2}{x+2}}$

حصلنا على حالة $(1)^\infty$ عندئذ :

$$f(x) = (1+x+2)^{\frac{2}{x+2}}$$

$$\text{بفرض}\quad \underbrace{u(x) = x+2}_{\substack{x\to-2\\ u(x)\to 0}} \Rightarrow \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{x+2} \Rightarrow \frac{2}{u(x)} = \frac{2}{x+2}$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{u(x)\to 0}[1+u(x)]^{\frac{2}{u(x)}} = \lim_{u(x)\to 0}\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^2 = e^2$$

مثال ② : اوجد نهاية التابع f عند $a=+\infty$: $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

حصلنا على حالة $(1)^\infty$ عندئذ :

$$f(x) = \left(\frac{x-1+1+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{بفرض}\quad \underbrace{u(x) = \frac{4}{x-1}}_{\substack{x\to+\infty\\ u(x)\to 0}} \Rightarrow \frac{1}{u(x)} = \frac{x-1}{4} \Rightarrow \frac{1}{u(x)} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{4} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{2}{u(x)} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$f(x) = (1+u(x))^{\frac{2}{u(x)}+\frac{1}{2}} = (1+u(x))^{\frac{2}{u(x)}}.(1+u(x))^{\frac{1}{2}} = \left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^2\sqrt{1+u(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u(x)\to 0}\left[\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^2\sqrt{1+u(x)}\right] = e^2$$

****

اشتقاق التابع الأسي:

- التابع $x\to e^x$ اشتقاقي على R و تابعه المشتق $x\to e^x$
- إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على مجال I

فإن التابع $f: x\longrightarrow e^{u(x)}$ اشتقاقي على I وتابعه المشتق $f'(x) = u'(x).e^{u(x)}$

تمرين: في كل من الحالات الآتية، احسب التابع المشتق للتابع على المجموعة المشار إليها:

$\boxed{1}$ $f(x) = e^{x^2-4x+1}$ $\quad I=R$ $f'(x) = (2x-4)e^{x^2-4x+1}$	$\boxed{2}$ $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$ $\quad I =]1,+\infty[$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}e^{\sqrt{x-1}}$
$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ $\quad I=R$ $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x.e^x}{(e^x+1)^2}$ $= \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$	$\boxed{4}$ $f(x) = \pi^{x^2-x}$ $\quad I=R$ $= e^{(x^2-x)\ln\pi}$ $f'(x) = (2x-1)\ln\pi\, \underline{e^{(x^2-x)\ln\pi}}$ $= (2x-1)\ln\pi.(\pi)^{x^2-x}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

5) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ $\quad I =]0, +\infty[$

$$= e^{\sqrt{x}.\ln 2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln 2 . \underbrace{e^{\sqrt{x}.\ln 2}}_{\downarrow}$$

$$= \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} \quad . \quad 2^{\sqrt{x}}$$

6) $f(x) = (x-1)e^x$ $\quad I = R$

$$f'(x) = 1.e^x + e^x(x-1)$$

$$= e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

****

تمرين رقم 3 صفحة 199: جد نهاية كل من التوابع الآتية عند a :

1) $f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$ $\quad : a = 1$

حصلنا على حالة $(1)^{\infty}$ عندئذٍ :

$$f(x) = (1+1-x)^{\frac{3}{x-1}}$$

نفرض $\underbrace{u(x) = 1-x}_{\substack{x \to 1 \\ u(x) \to 0}} \Rightarrow u(x) = -(x-1) \Rightarrow \frac{1}{u(x)} = \frac{-1}{x-1} \Rightarrow \frac{-3}{u(x)} = \frac{3}{x-1}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u(x)\to 0} [1+u(x)]^{\frac{-3}{u(x)}} = \lim_{u(x)\to 0} \left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{-3} = e^{-3}$$

---

2) $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $\quad : a = +\infty$

حصلنا على حالة $(1)^{\infty}$ عندئذٍ :

$$f(x) = \left(\frac{x+1-1-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \left(1 + \frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

بفرض $\underbrace{u(x) = \frac{-3}{x+1}}_{\substack{x \to +\infty \\ u(x) \to 0}} \Rightarrow -u(x) = \frac{3}{x+1} \Rightarrow \frac{-1}{u(x)} = \frac{x+1}{3}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{u(x)\to 0} [1+u(x)]^{\frac{-1}{u(x)}} = \lim_{u(x)\to 0} \left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{-1} = e^{-1}$$

---

3) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ $\quad : a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ $\quad \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

علماً أن : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$ $\quad : a = +\infty, -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{0-1}{-\infty - 1} = 0$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(1) = +\infty$$

4) $f(x) = 2xe^{-x}$ $\quad : a = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\quad \infty.0$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = 2\frac{x}{e^x} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2(0) = 0$$

6) $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$ $\quad : a = +\infty, -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 - 0 + 3 = 3$$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$ $\quad \infty - \infty$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = e^x(e^x - 1) + 3$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 1) + 3 = +\infty$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

7) $f(x) = \ln(e^x + 2)$: $a = +\infty, -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

9) $f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$ $a = 0, +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty . 0$

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $0 . \infty$

$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$

8) $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$: $a = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty + \infty$

$f(x) = e^{-x}\left(\frac{2x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right)$

$= e^{-x}(2xe^x - e^x + 1)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty(0 - 0 + 1) = +\infty$

10) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $a = -\infty, +\infty, 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^0 = 1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^0 = 1$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 0$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

تدريب صفحة 203 :

1) بسط كتابة كل من العددين : $A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}}$, $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$

$A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}} = e^{\frac{-1}{\ln 3} . \ln 3}$

$= e^{-1} = \frac{1}{e}$

$B = 2^{\frac{1}{\ln 4}} = 2^{\frac{1}{2\ln 2}}$

$= e^{\frac{1}{2\ln 2} . \ln 2} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

---

2) حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة :

① $7^{x-1} = 3^x$

$e^{(x-1)\ln 7} = e^{x \ln 3}$

$(x-1).\ln 7 = x \ln 3$

$x \ln 7 - \ln 7 - x \ln 3 = 0$

$x\left(\underbrace{\ln 7 - \ln 3}_{\ln\frac{7}{3}}\right) = \ln 7$

$x \ \ln\frac{7}{3} \quad = \ln 7$

$\boxed{x = \frac{\ln 7}{\ln\frac{7}{3}}}$

② $3^x = 4^{2x+1}$

$e^{x \ln 3} = e^{(2x+1)\ln 4}$

$x \ln 3 = (2x+1)\ln 4$

$x \ln 3 = 2x \ln 4 + \ln 4$

$x \ln 3 - 2x \ln 4 = \ln 4$

$x\left(\underbrace{\ln 3 - \ln 16}_{\ln\frac{3}{16}}\right) = \ln 4$

$x \ \ln\frac{3}{16} \quad = \ln 4$

$\boxed{x = \frac{\ln 4}{\ln\frac{3}{16}}}$

③ $3^x > 4$

$e^{x \ln 3} > e^{\ln}$

$x \ln 3 > \ln 4$

$x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$

$S = \left]\frac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[$

④ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$

$e^{x \ln\frac{1}{3}} > e^{\ln 4}$

$x \ln\frac{1}{3} > \ln 4$

$-x \ln 3 > \ln 4$

$x < \frac{-\ln 4}{\ln 3}$

$S = \left]-\infty, \frac{-\ln 4}{\ln 3}\right[$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ $5^{-x} < 5^{2x}$

$-x < 2x$

$0 < 3x$

$0 < x$

$S =]0, +\infty[$

⑥ $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

$3.2^x < 2^x + 1$

$3.2^x - 2^x < 1$

$2.2^x < 1$

$2^{x+1} < 2^0$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$S =]-\infty, -1[$

---

3) فيما ياتي حل كلاً من المعادلات و المتراجحات الآتية :

① $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$,

$(2^2)^x + 2.2^x - 3 = 0$

$2^{2x} + 2.2^x - 3 = 0$

$(2^x + 3)(2^x - 1) = 0$

إما $2^x = -3$ (مرفوض)

او $2^x = 1$

$2^x = 2^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

بعد حل المعادلة نجد:

فالإشارة من إشارة $(2^x - 1)$

$\underbrace{(2^x + 3)}_{\text{موجبة دائماً}}(2^x - 1) \leq 0$

$2^x - 1 \leq 0$

$2^x \leq 1 = 2^0$

$2^x \leq 2^0$

$x \leq 0$

$S =]-\infty, 0]$

---

② $2^{x+1} - 10.2^x + 12 = 0$,

$\underline{2.2^x - 10.2^x} = -12$

$-8.2^x = -12$

$2^x = \frac{3}{2}$

$e^{x \ln 2} = e^{\ln\frac{3}{2}}$

$x \ln 2 = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 3/2}{\ln 2}}$

$2^{x+1} - 10.2^x + 12 \geq 0$

بعد حل المعادلة نجد:

$-8.2^x \geq -12$

$2^x \leq \frac{3}{2}$

$e^{x \ln 2} \leq e^{\ln\frac{3}{2}}$

$x \ln 2 \leq \ln\frac{3}{2} \Rightarrow x \leq \frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln 2}$

$S = \left]-\infty, \frac{\ln 3/2}{\ln 2}\right]$

---

③ $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$,

$3^{2x+1} + 2 = 7.3^x$: نضرب بـ (3^x)

$3.3^{2x} - 7.3^x + 2 = 0$

$\Delta = 49 - 4(3)(2) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

- إما $3^x = 2$

$e^{x \ln 3} = e^{\ln 2}$

$x \ln 3 = \ln 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$

- او $3^x = \frac{1}{3}$

$e^{x \ln 3} = e^{\ln\frac{1}{3}}$

$x \ln 3 = -\ln 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

$3^{x+1} + 2.3^{-x} \geq 7$

$3.3^{2x} - 7.3^x + 2 \geq 0$

بعد حل المعادلة نجد:

ان الحلين هما : $x_1 = \frac{\ln}{\ln 3}$, $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{\ln 2}{\ln 3}$		$+\infty$
المعادلة		+	0	−	0	+	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$S =]-\infty, -1] \cup \left[\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2^{x^2-2x}$

① ادرس تغيرات f .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على R

$$f(x) = e^{(x^2-2x)\ln 2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = (2x-2).\ln 2 . e^{(x^2-2x).\ln 2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} : f(1) = e^{-\ln 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

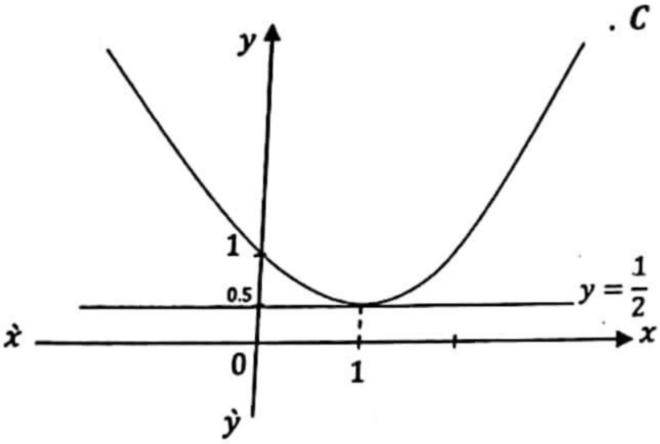
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

② اكتب معادلة d مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$.

بما ان المماس في النقطة التي تعدم $f'(x)$ فإن المماس افقي و ميله يساوي الصفر

$$d: y = \frac{1}{2}$$

③ ارسم في معلم واحد المماس d ثم الخط C .



---

5) جد التابع المشتق لكل من التوابع الآتية :

① $f(x) = x^x$

$= e^{x\ln x}$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right).e^{x\ln x}$$

$$= (\ln x + 1).e^{x\ln x}$$

② $f(x) = 3^{x^2}$

$= e^{x^2\ln 3}$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 2x\ln 3 . e^{x^2\ln 3}$$

③ $f(x) = \pi^{\ln x}$

$= e^{\ln x.\ln\pi}$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x}.\ln\pi . e^{\ln x.\ln\pi}$$

---

6) حل في R جملة المعادلتين :

$$3^x.3^y = 9 \quad ①$$

$$3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \quad ②$$

الحل : من ② نجد ان : $\boxed{3^y = 4\sqrt{3} - 3^x}$ * نعوض * في ① :

$$3^x.\left(4\sqrt{3} - 3^x\right) = 9$$

$$4\sqrt{3}.3^x - 3^{2x} - 9 = 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$3^{2x} - 4\sqrt{3}\,.\,3^x + 9 = 0 \qquad : (-1)\ \text{نضرب بـ}$$

$$\Delta = 48 - 4(1)(9) = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

• إما $3^x = \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} 3^y = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$3^x = 3^{\frac{1}{2}}$, $3^y = 3.3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$, $\boxed{y = \frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

• او $3^x = \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} 3^y = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$3^x = 3.\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}}$, $3^y = 3^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$, $\boxed{y = \frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

---

7) إذا علمت ان $a > 0$ و $b > 0$ ، فهل صحيح ان $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ ؟

$$L_1 = a^{\ln} = e^{\ln\ .\ln} = \left(e^{\ln}\right)^{\ln a} = b^{\ln a} = L_2$$

---

8) ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = x.2^{-x}$ ادرس تغيرات f و ارسم خطه البياني .

$$f(x) = x.2^{-x} = x.e^{-x\ln 2}$$

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \times +\infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty.0$

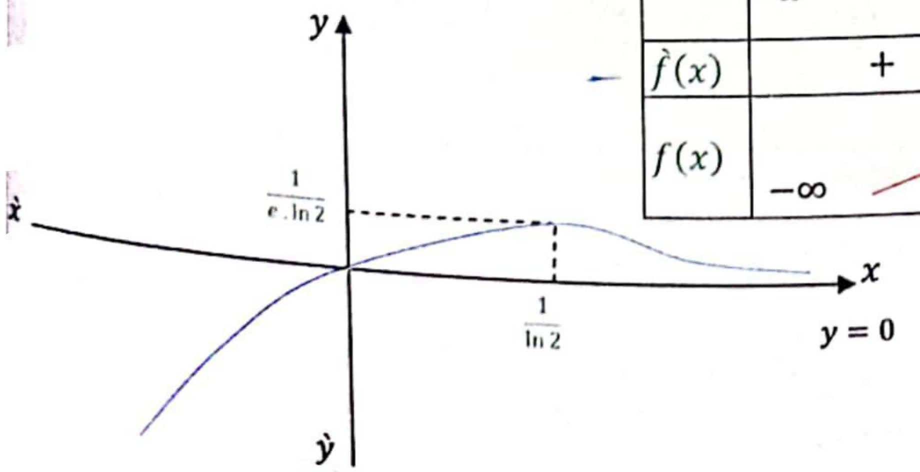
$$f(x) = x.e^{-x\ln 2} = \frac{x}{e^{x\ln 2}} = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{x\,.\ln 2}{e^{x\,.\ln 2}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow +\infty$ عند $x\grave{x}$ مقارب افقي منطبق على $y = 0$

$$\grave{f}(x) = 1.e^{-x\ln 2} - \ln 2\ .e^{-x\ln 2}.x$$
$$= e^{-x\ln 2}(1 - x\ln 2)$$
$$\grave{f}(x) = 0 \Rightarrow 1 - x\ln 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\ln 2}} : f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\,.e^{\frac{-1}{\ln}.\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\,.e^{-1} = \frac{1}{e\,.\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e\,.\ln 2}$	↘	0



نقطة مساعدة :

$x = 0 : f(0) = 0$

$(0,0)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

9) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$

① ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

نكتب f بشكل ابسط :

$$f(x) = 2^{2x} - 2^2 . 2^x = e^{2x \ln 2} - 4 . e^{x \ln 2}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي لـ C منطبق على $x\acute{x}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$ $\quad +\infty - \infty$ عدم تعيين

$$f(x) = e^{x . \ln 2}[e^{x \ln 2} - 4]$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 4) = +\infty$$

$$\acute{f}(x) = 2. \ln 2 . e^{2x \ln 2} - 4 \ln 2 \ e^{x \ln 2}$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Longrightarrow 2 \ln 2 \ e^{2x \ln 2} - 4 \ln 2 \ e^{x \ln 2} = 0 \quad (\div 2 \ln 2)$$

$$e^{2x \ln 2} - 2e^{x \ln 2} = 0$$

$$e^{x \ln 2}(e^{x \ln 2} - 2) = 0$$

$$e^{x \ln 2} = 2$$

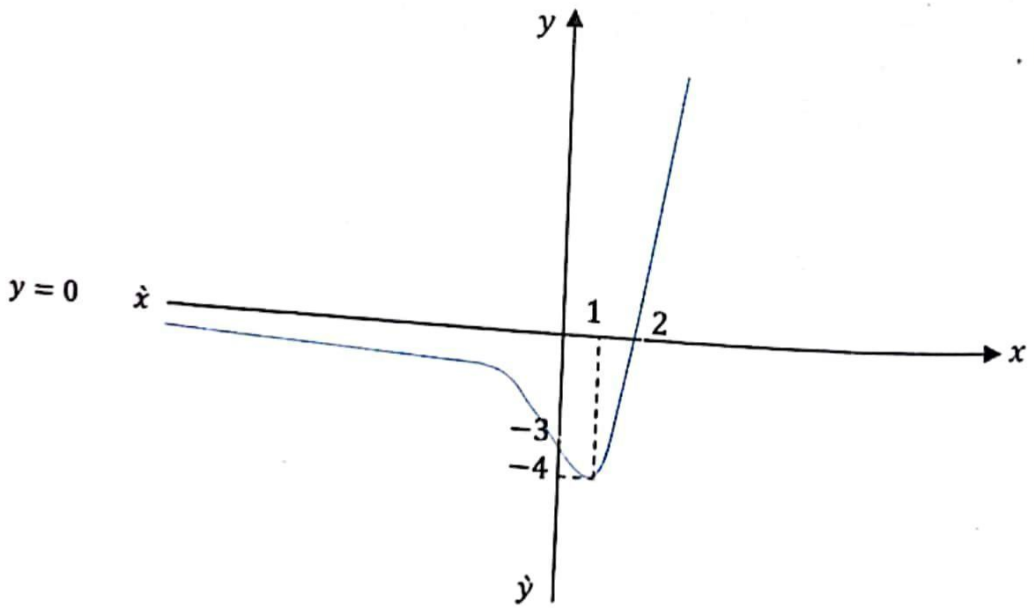
$$e^{x \ln 2} = e^{\ln 2}$$

$$x \ln 2 = \ln 2$$

$$\boxed{x = 1} : f(1) = -4$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

② ارسم C .



نقط مساعدة :

C قطع $x\acute{x}$ اي $y = 0$

$$0 = 2^{2x} - 2^{x+2}$$

$$2^{x+2} = 2^{2x}$$

$$x + 2 = 2x \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow (2,0)$$

C قطع $y\acute{y}$ اي $x = 0$

$: f(0) = -3$

$(0, -3)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

10) ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = (1-x).2^x$

ادرس تغيرات f و ارسم خطه البياني .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$.

$f(x) = (1-x).e^{x\ln 2}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $+\infty.0$

$$f(x) = (1-x)e^{x\ln 2} = e^{x\ln 2} - xe^{x\ln 2} = e^{x\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}.x\ln 2\,.e^{x\ln 2}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $y=0$ مقارب افقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $-\infty$

(علماً ان : $\lim_{x\to-\infty}(x\ln 2\,.e^{x\ln 2}) = 0$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

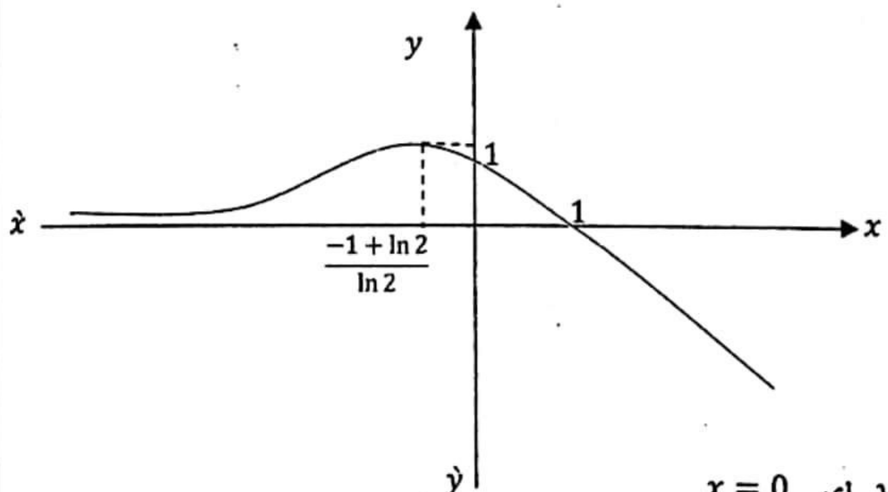
$$\acute{f}(x) = -e^{x\ln 2} + \ln 2\,.e^{x\ln 2}(1-x)$$
$$= e^{x\ln 2}[-1+\ln 2(1-x)] = e^{x\ln 2}[-1+\ln 2 - x\ln 2]$$

$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow -1+\ln 2 - x\ln 2 = 0$

$$\boxed{x = \frac{-1+\ln 2}{\ln 2}}$$

$$:f\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right) = \left(1-\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right).e^{\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right).\ln 2} = \left(\frac{\ln 2 + 1 - \ln 2}{\ln 2}\right)e^{-1+\ln 2}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}.e^{-1+\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.e^{\ln 2 - 1} = \frac{1}{\ln 2}.e^{\ln\left(\frac{2}{e}\right)} = \frac{1}{\ln 2}.\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e.\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e.\ln 2}$	$\searrow$	$-\infty$



$y=0$

$x\acute{x}$ اي $y=0$: ، C قطع $y\acute{y}$ اي $x=0$

$0 = (1-x).$

$0 = 1-x$

$x = 1 \Rightarrow$

$f(0) = 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معادلات تفاضلية بسيطة

مبرهنة: إن حلول المعادلة التفاضلية $a \neq 0$: $\acute{y} = ay$ هي التوابع $f_k: x \to ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي.

مبرهنة: إن حلول المعادلة التفاضلية $(a \neq 0, b \in R)$: $\acute{y} = ay + b$

هي التوابع $g_k: x \to ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي.

نتيجة: أياً كان (x_0, y_0) فيوجد حل وحيد f معرف على R للمعادلة التفاضلية $a \neq 0$: $\acute{y} = ay$ يحقق: $f(x_0) = y_0$.

ملاحظة: نرتب المعادلة التفاضلية بالشكل النظامي قبل استخراج قيمة a.

****

تدريب صفحة 205:

1) حل المعادلات التفاضلية الآتية:

2) $\acute{y} + 2y = 0$ $\acute{y} = -2y$ $y = k.e^{-2x}$; $k \in R$	1) $\acute{y} = 3y$ $y = k.e^{3x}$; $k \in R$
4) $2\acute{y} + 3y = 0$ $\acute{y} = \frac{-3}{2}y$ $y = k.e^{\frac{-3}{2}x}$; $k \in R$	3) $3\acute{y} = 5y$ $\acute{y} = \frac{5}{3}y$ $y = k.e^{\frac{5}{3}x}$; $k \in R$

---

2) في كل حالة عين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

1) $\acute{y} = 2y$ والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$.

حلها يكون $y = k.e^{2x}$ ، لكن $f(0) = 1$ اي نعوض ($y = 1$ و $x = 0$)

$$k.e^0 = 1 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

عندئذ: $y = e^{2x}$

---

2) $\acute{y} + 5y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$.

$\acute{y} = -5y$ وحلها يكون $y = k.e^{-5x}$

لكن C يمر بالنقطة $A(-2,1)$ اي نعوض ($y = 1$ و $x = -2$)

$$k.e^{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e^{10}} \Rightarrow \boxed{k = e^{-10}}$$

عندئذ: $y = e^{-10}e^{-5x} = e^{-10-5x}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3) $\acute{y}+2y=0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها (2−) من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

$\acute{y}=-2y$ وحلها يكون $y=k.e^{-2x}$

لكن ميل المماس يساوي $\frac{1}{2}$ اي $\left(\acute{y}=\frac{1}{2}\right)$ في النقطة التي فاصلتها (2−) اي $(x=-2)$

$$\acute{y}+2y=0$$

$$\frac{1}{2}+2y=0$$

$$y=\frac{-1}{4}$$

إذاً نقطة التماس $\left(-2,\frac{-1}{4}\right)$

$$y=k.e^{-2x}\Longrightarrow k.e^{4}=\frac{-1}{4}\Rightarrow k=\frac{-1}{4e^{4}}\Rightarrow \boxed{k=\frac{-e^{-4}}{4}}$$

عندئذ:

$$y=\frac{-1}{4}e^{-4}e^{-2x}=\frac{-1}{4}e^{-4-2x}$$

---

3) حل المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\acute{y}=2y+1$ $y=k.e^{2x}-\frac{1}{2}$;$k\in R$	2) $y+3\acute{y}=2$ $\acute{y}=-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$ $y=k.e^{\frac{-1}{3}x}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{-1}{3}}$ $y=ke^{\frac{-1}{3}x}+2$;$k\in R$
3) $2\acute{y}=y-1$ $\acute{y}=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$ $y=k.e^{\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{2}}$ $y=ke^{\frac{1}{2}x}+1$;k $\in R$	4) $2y+3\acute{y}-1=0$ $\acute{y}=\frac{-2}{3}y+\frac{1}{3}$ $y=k.e^{\frac{-2}{3}x}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2}{3}}$ $y=k.e^{\frac{-2}{3}x}+\frac{1}{2}$;$k\in R$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرينات و مسائل صفحة 209

① في كل من الحالات الآتية ، احسب التابع المشتق للتابع f على المجموعة I المشار إليها :

1 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x)$$
$$= e^x[2x - 2 + x^2 - 2x]$$
$$= e^x(x^2 - 2)$$

2 $f(x) = e^{-x}.\ln x \quad : I =]0,+\infty[$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = -e^{-x}\ln x + \frac{1}{x}e^{-x}$$
$$= e^{-x}\left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

3 $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x} \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = (2x-1)e^{-x} - e^{-x}(x^2 - x + 1)$$
$$= e^{-x}[2x - 1 - x^2 + x - 1]$$
$$= e^{-x}(-x^2 + 3x - 2)$$

4 $f(x) = \frac{1}{x}.e^x \quad : I = R\backslash\{0\}$

f اشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}e^x + e^x.\frac{1}{x}$$
$$= e^x\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = e^x\left(\frac{-1+x}{x^2}\right)$$

5 $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}} \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{-x}) + e^{-x}(e^x - 1)}{(1+e^{-x})^2}$$
$$= \frac{e^x + 1 + 1 - e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(1+e^{-x})^2}$$

6 $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}} \quad : I = R\backslash\{0\}$

f اشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}.x = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$
$$= e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

7 $f(x) = \ln(1 + e^x) \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

8 $f(x) = e^{x\ln x} \quad : I =]0,+\infty[$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right).e^{x\ln x}$$
$$= (\ln x + 1)e^{x\ln x}$$

9 $f(x) = (\sin x + \cos x).e^x \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = (\cos x - \sin x)e^x + e^x(\sin x + \cos x)$$
$$= e^x[\cos x - \sin x + \sin x + \cos x]$$
$$= 2\,e^x\cos x$$

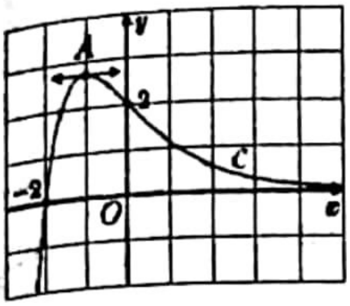
10 $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② C هو الخط البياني لتابع f معرف على R وفق $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان اعتماداً على ما تجد في الشكل :



1) احسب قيمة كل من a و b

من الخط البياني للتابع f نلاحظ ان C يمر بالنقطتين $(0,2)$, $(-2,0)$

$$(0,2) \in C \quad : x = 0 \quad , \quad f(0) = 2$$

$$(0+b)e^{0} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 2}$$

$$(-2,0) \in C \quad : x = -2 \,, \quad f(-2) = 0$$

$$(-2a+b)e^{+2} = 0 \qquad (\div e^{+2}) \quad ,(b=2)$$

$$-2a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

نجد ان : $\boxed{f(x) = (x+2)e^{-x}}$

2) احسب $\acute{f}(x)$ ، و استنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f

f معرف واشتقاقي على R

$$\acute{f}(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x+2)$$

$$= e^{-x}(1-x-2) = e^{-x}(-1-x)$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow \; e^{-x}(-1-x) = 0$$

$$e^{-x} \neq 0$$

$$-1 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$: f(-1) = (-1+2)e = e \quad : A(-1, e)$$

3) اثبت ان محور الفواصل مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $+\infty . 0$

$$f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^{x}} + 2e^{-x}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$: $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$:

---

③ ارسم الخط البياني C للتابع الأسي exp ثم استنتج رسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية :

① $f: x \to e^{x} - 2$ ② $g: x \to 1 - e^{x}$ ③ $h: x \to |1 - e^{x}|$

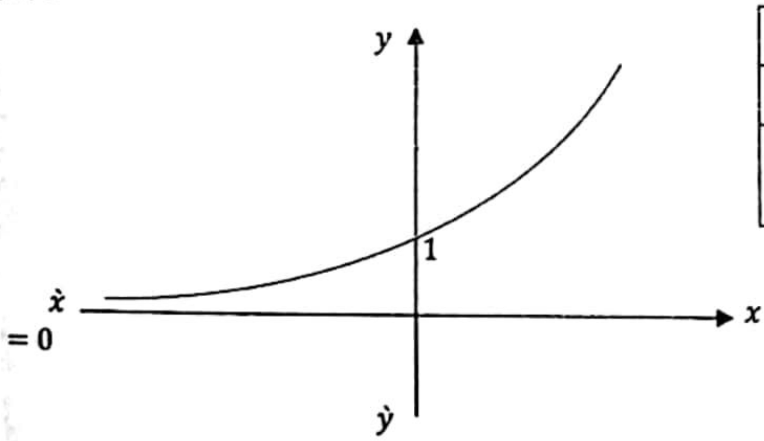
لنناقش : $\boxed{P(x) = exp(x) = e^{x}}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$: $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $-\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\acute{f}(x) = e^{x} > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\acute{f}(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$



نقطة مساعدة:

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$$f(0) = e^{0} = 1$$

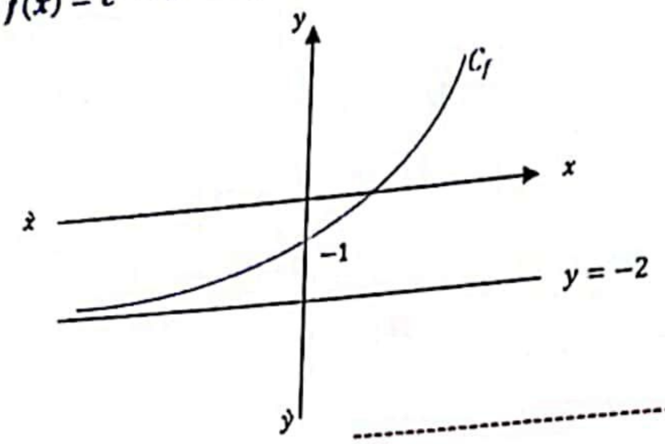
$$(0,1)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① $f(x) = e^x - 2 = P(x) - 2$

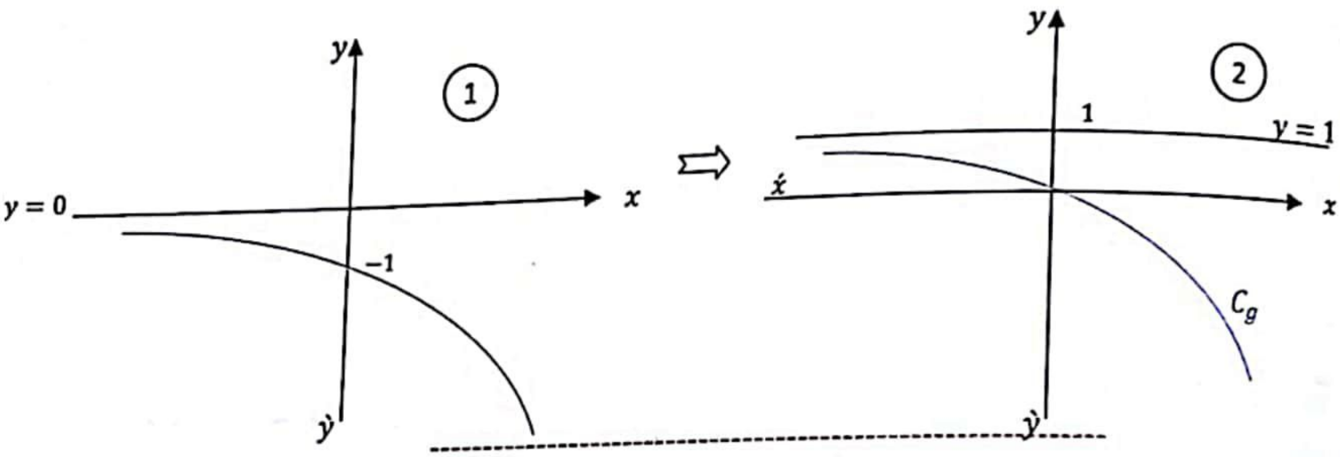
C_f ينتج عن C_P بانسحاب متجهه $\vec{u} = -2\vec{j}$

	بعد	قبل
المقارب	$y = -2$	$y = 0$
نقطة التقاطع مع $y\acute{y}$	$(0,-1)$	$(0,1)$



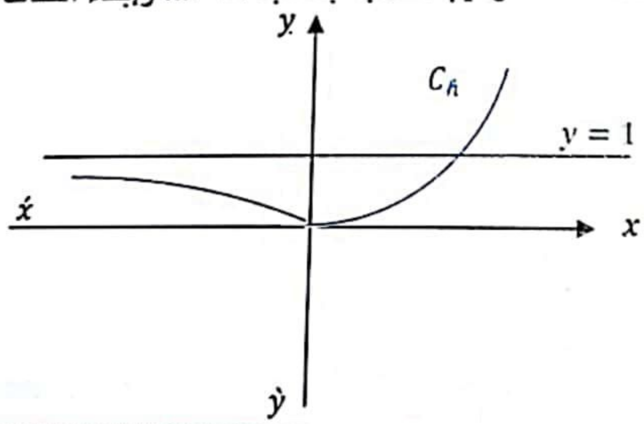
② $g(x) = 1 - e^x$
$= 1 - P(x) = -P(x) + 1$

C_g ينتج عن C_P بـ: 1) اخذ نظير C_P بالنسبة لـ $x\acute{x}$
2) ثم انسحاب متجهة $\vec{u} = \vec{j}$



③ $h(x) = |1 - e^x|$
$= |g(x)|$

C_h ينتج عن C_g بأخذ نظائر النقاط ذات التراتيب السالبة بالنسبة لـ $x\acute{x}$ وإبقاء النقاط ذات التراتيب الموجبة كما هي:



④ ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

1) ما نهاية f عند طرفي مجموعة تعريفه؟

f معرف عند $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2) ادرس تغيرات f وارسم C

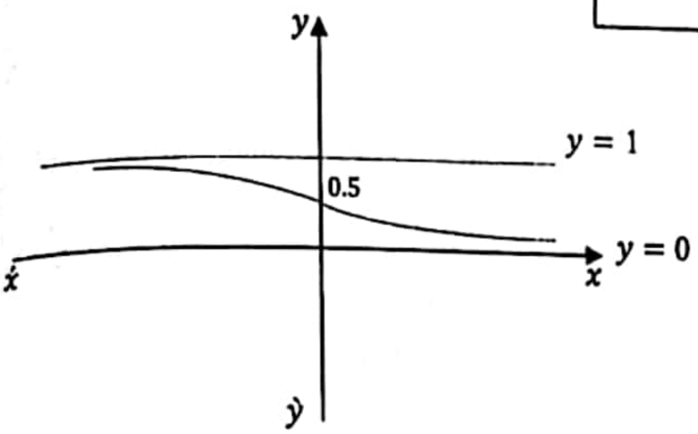
f معرف ومستمر واشتقاقي على R .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ $y = 1$ مقارب افقي // $x\acute{x}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

$\acute{f}(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\acute{f}(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$



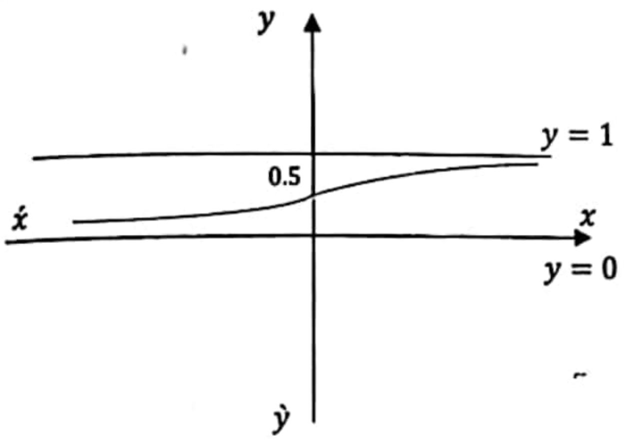
نقطة مساعدة:

C قطع $y\acute{y}$ اي

$x = 0 \; : f(0) = \frac{1}{2}$

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

3) g هو التابع المعرف على R وفق $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ اثبت ان $g(x) = f(-x)$ ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع g انطلاقاً من C.



C_g نظير C_f بالنسبة لـ $y\acute{y}$

---

⑤ في الحالات الآتية، بيّن ان الخط البياني C للتابع f المعطى على R يقبل مقارباً مائلاً d، عينه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d.

$\boxed{1}$ $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x - 1$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x - 1 + e^{-2x} - (x - 1) = e^{-2x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$f(x) - y_d = e^{-2x} > 0 \Rightarrow$ d فوق C

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\boxed{2}$ $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x + 1$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + 1 + 4e^{-x} - (x + 1) = 4e^{-x}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$f(x) - y_d = 4e^{-x} > 0 \Rightarrow$ d فوق C

$\boxed{3}$ $f(x) = x + 2 + xe^{x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x + 2$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + 2 + xe^{x} - (x + 2) = xe^{x}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$\left.\begin{array}{l} f(x) - y_d = xe^{x} \\ f(x) - y_d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $xe^{x} = 0$, $e^{x} \neq 0$, $\boxed{x = 0}: f(0) = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	d تحت C	$(0,2)$	d فوق C

---

⑥ بين أن الخط البياني C للتابع f المعرف على R بالصيغة $f(x) = \ln(3 + e^{x})$ يقبل مقاربين أحدهما افقي والآخر مائل يطلب تعيينهما.

$f(x) = \ln(3 + e^{x})$: $I =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(3)$: $y = \ln 3$ مقارب افقي $// x\acute{x}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \ln[e^{x}(3e^{-x} + 1)]$$
$$= \ln e^{x} + \ln(3e^{-x} + 1) = x + \ln(3e^{-x} + 1)$$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + \ln(3e^{-x} + 1) - x = \ln(3e^{-x} + 1)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - y_d) = \ln 1 = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب لـ C عند $-\infty$

---

⑦ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{2e^{x} - 3}{e^{x} + 1}$

1) لماذا المستقيمان d_1 الذي معادلته $y = 2$ و d_2 الذي معادلته $y = -3$ مقاربان للخط C؟

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$: $y = -3$ مقارب افقي لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$ $\frac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{e^{x}(2 - 3e^{-x})}{e^{x}(1 + e^{-x})} = \frac{2 - 3e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ $y = 2$ مقارب افقي لـ C عند $+\infty$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1) - e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+3e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-3 ↗	2

3) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

نقطة التقاطع مع yy' اي $\quad x = 0 : \quad f(0) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \left(0, \frac{-1}{2}\right)$

معادلة المماس

$$y - f(0) = m(x-0)$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x-0)$$

$$T \;:\; y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(0) = m = \frac{5e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{5}{4}$$

4) ادرس وضع C بالنسبة إلى T ثم ارسم في معلم متجانس C, T, d_2, d_1

الوضع النسبي للمماس مع المنحني :

$$f(x) - y_T = \frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

نلاحظ انه تابع غير مألوف لدراسة وضعه النسبي ندرس تغيراته:

$$g(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{20e^x - 5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2} = \frac{20e^x - 5(e^{2x}+2e^x+1)}{4(e^x+1)^2}$$

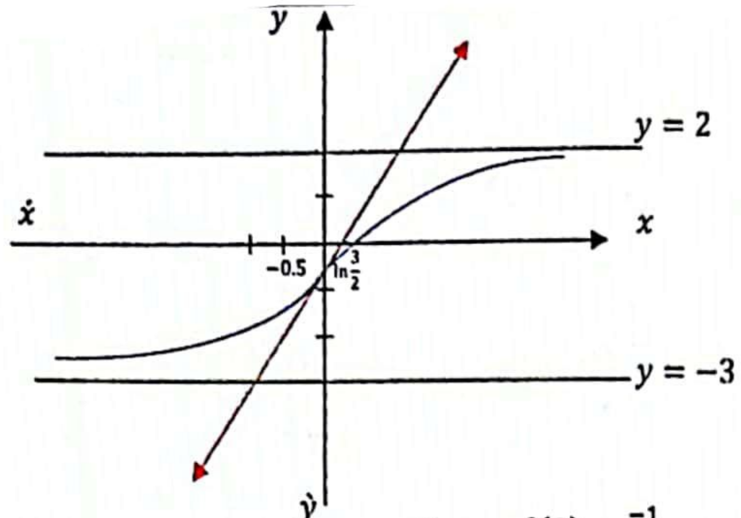
$$= \frac{20e^x - 5e^{2x} - 10e^x - 5}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5e^{2x}+10e^x-5}{4(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-5(e^{2x}-2e^x+1)}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -5(e^x-1)^2 = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x=0} : g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x) = f(x) - y_d$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
الوضع النسبي		T فوق C	$\left(0, \frac{-1}{2}\right)$	T تحت C	

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



$y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$

x	0	$\frac{2}{5}$
y	$\frac{-1}{2}$	0

$\left(0,\frac{-1}{2}\right),\left(\frac{2}{5},0\right)$

نقط مساعدة:

$x=0\quad:\quad f(0)=\frac{-1}{2}\qquad:\qquad\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

$y=0\;\Rightarrow 2e^x-3=0\Rightarrow x=\ln\frac{3}{2}\quad:\quad\left(\ln\frac{3}{2},0\right)$

---

⑧ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=(x-1)e^x$ ادرس نهايات التابع f عند اطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم C.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=?\qquad -\infty.0$ حصلنا على حالة عدم تعيين

$f(x)=xe^x-e^x$

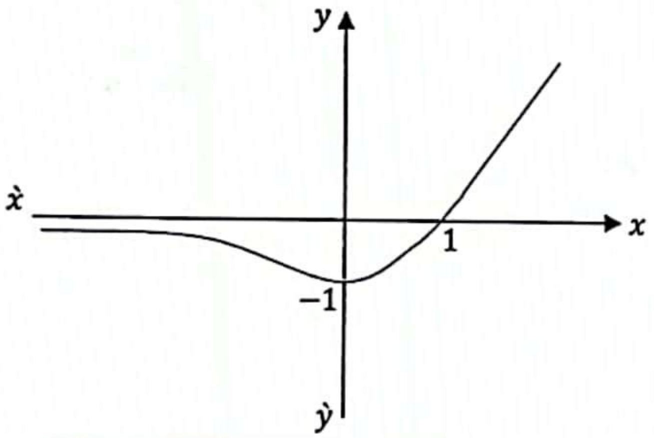
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\qquad\Rightarrow$ $y=0$ مقارب منطبق على $x\acute{x}$ عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\acute{f}(x)=e^x+e^x(x-1)=e^x(1+x-1)=xe^x$

$\acute{f}(x)=0\;\Rightarrow xe^x=0\quad\Rightarrow\boxed{x=0}\;:\;f(0)=-1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$



نقطة مساعدة :

C قطع $x\acute{x}$ اي $y=0$

$(x-1)e^x=0$

$x-1=0$

$x=1$

$(1,0)$

---

⑨ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=e^x-x$

1) جد نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه.

$f(x)=e^x-x\quad:\quad D=R=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\quad,\quad\lim_{x\to+\infty} f(x)=?\qquad +\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x)=e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-0)=+\infty\quad;\quad\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0 \text{ علماً ان}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2) بين ان المستقيم d الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط C.

$f(x)-y_d = e^x - x - (-x) = e^x$

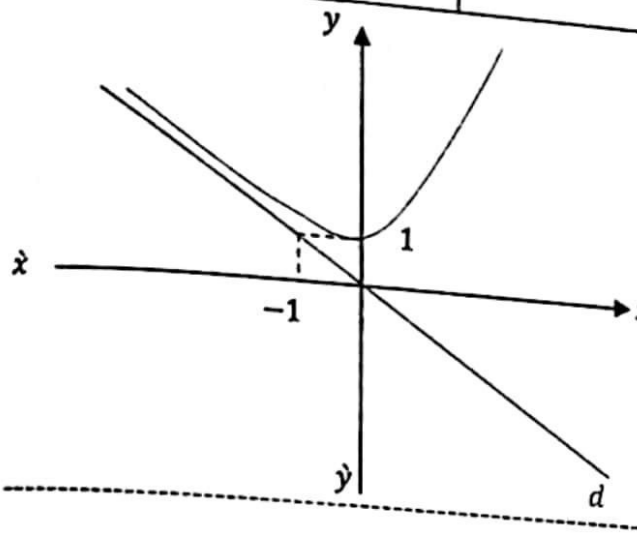
$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_d)=0 \Rightarrow$ $d: y=-x$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم d و C .

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x)=0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \ : \boxed{x=0} : f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



$d: y=-x$

x	0	-1
y	0	1
	$(0,0)$	$(-1,1)$

---

⑩ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$$

1) جد نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه.

$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$ $\qquad D = R =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y = x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$f(x) - y_d = x - 1 + \frac{4}{e^x+1} - (x-1) = \frac{4}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_d) = 0 \Rightarrow$ $d: y = x-1$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

3) اثبت ان المستقيم d' الذي معادلته $y = x+3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

$f(x) - y_{d'} = x - 1 + \frac{4}{e^x+1} - (x+3)$

$= \frac{4}{e^x+1} - 4 = \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x+1} = \frac{-4e^x}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_{d'}) = 0 \Rightarrow$ $d': y = x+3$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (e^x-1)^2 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x=0} : f(0) = 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

5) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

نقطة التقاطع مع yy' اي $x=0$:

$$f(0) = 1 \quad : (0,1)$$

$$m = f'(0) = 0$$

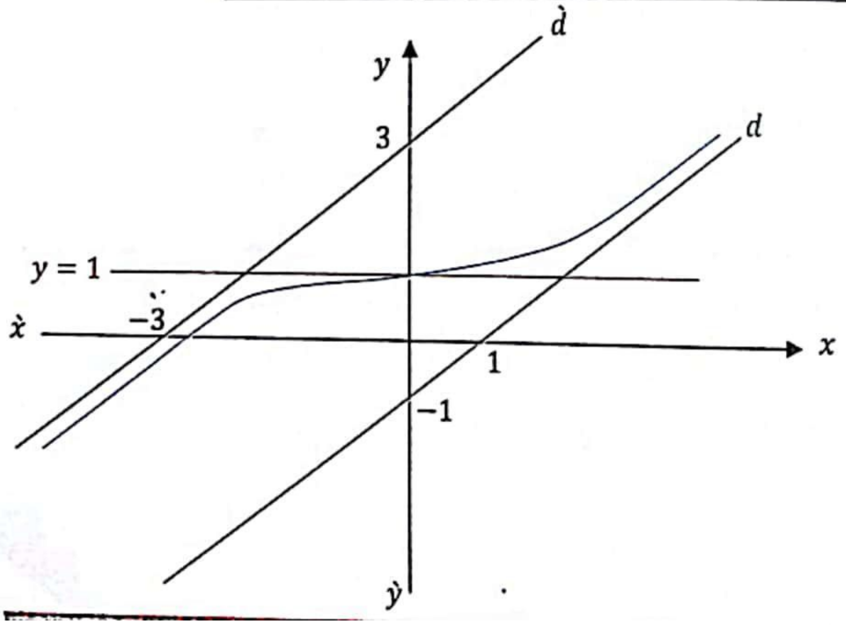
$$y - f(0) = m(x-0)$$

$$y - 1 = 0(x-0) \Rightarrow T: \boxed{y=1}$$

6) ادرس وضع C بالنسبة إلى T ثم ارسم في معلم متجانس d و d' و T و C .

$$f(x) - y = f(x) - 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$
$f(x)-1$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
الوضع النسبي		C تحت T	$(0,1)$	C فوق T	



$d: y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0
	$(0,-1)$	$(1,0)$

$d': y = x + 3$

x	0	-3
y	3	0
	$(0,3)$	$(-3,0)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(11) ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = 2e^x - x - 2$

1) جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ عدم تعيين $+\infty - \infty$

$$f(x) = e^x\left(2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(2-0-0) = +\infty$$

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2e^x - 1 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2e^x - 1 = 0 \\ e^x = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$x = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 2}$$

$$: f(-\ln 2) = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 - 2$$

$$= \frac{2}{e^{\ln 2}} + \ln 2 - 2 = 1 + \ln 2 - 2 = -1 + \ln 2$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3) استنتج من (2) أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر،

f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty, -\ln 2[$
$0 \in f(]-\infty, -\ln 2[) =]-1+\ln 2, +\infty[$
إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]-\infty, -\ln 2[$

f مستمر و متزايد تماماً على $[-\ln 2, +\infty[$
$0 \in f([-\ln 2, +\infty[) = [-1+\ln 2, +\infty[$
إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-\ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين مختلفين في R

لاحظ أن:

$f(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$ و منه الجذر الأول هو $x = 0$

4) نرمز إلى الجذر الآخر للمعادلة: $f(x) = 0$ بالرمز α أثبت أن $-2 < \alpha < -1$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2e^{-1} + 1 - 2 = \frac{2}{e} - 1 < 0 \\ f(-2) = 2e^{-2} + 2 - 2 = \frac{2}{e^2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f(-1) \times f(-2) < 0 \\ -2 < \alpha < -1 \end{array}$$

5) ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x.

نلاحظ من جدول التغيرات و من حلول المعادلة $f(x) = 0$ و من سطر $f(x)$ أن :

إذا كان $x \in]-\infty, \alpha[$ فإن $f(x) > 0$

إذا كان $x \in]\alpha, 0[$ فإن $f(x) < 0$

إذا كان $x \in]0, +\infty[$ فإن $f(x) > 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

12) ليكن C_ℓ, C_E الخطان البيانيان للتابع exp واللوغاريتمي ln بالترتيب ايقبل هذان الخطان مماسات مشتركة؟

$$g(x) = e^x \qquad\qquad f(x) = \ln x$$

T_ℓ مماس الخط C_E في النقطة B حيث:

$$x = b : g(b) = e^b : B(b, e^b)$$

$$g'(x) = e^x$$

$$m_E = g'(b) = e^b$$

$$T_E : y_B - e^b = e^b(x - b)$$

$$\boxed{y_B = e^b x - be^b + e^b}$$

T_ℓ مماس الخط C_ℓ في النقطة A حيث

$$x = a : f(a) = \ln a : A(a, \ln a)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$m_\ell = f'(a) = \frac{1}{a}$$

$$T_\ell : y_A - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$$

$$\boxed{y_A = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a}$$

لاحظ: إذا وجد مماس مشترك للخطين C_ℓ, C_E يمسهما على التوالي في A, B لكان المماسين منطبقين اي $(m_\ell = m_E)$

ومنه بالحل المشترك لهما:

$$y_A = y_B$$

$$(*) \quad \boxed{\frac{1}{a}x - 1 + ln\, a = e^b x - be^b + e^b}$$

بما ان $m_\ell = m_E$ فإن: ① $\boxed{\frac{1}{a} = e^b}$:

$$a = \frac{1}{e^b} \Rightarrow a = e^{-b} \Rightarrow \boxed{\ln a = -b} \ ②$$

نعوض ① و ② في * فنجد:

$$e^b x - 1 - b = e^b x \underbrace{-be^b + e^b}$$

$$-1 - b = e^b(-b + 1) \qquad \div(-b + 1)$$

$$\frac{-1 - b}{-b + 1} = e^b$$

$$\frac{-(b + 1)}{-(b - 1)} = e^b$$

$$\frac{b + 1}{b - 1} = e^b$$

$$-e^b + \frac{b + 1}{b - 1} = 0$$

نلاحظ أن حل هذه المعادلة جبرياً صعبة جداً على الطالب وصعب إيجاد حلولها فلذلك نلجا لتحويلها إلى تابع وندرس تغيراته:

$$f(x) = -e^x + \frac{x + 1}{x - 1} \qquad ; \quad R \setminus \{1\}$$

f مستمر واشتقاقي على المجالين $]1, +\infty[\cup]-\infty, +1[$ ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = -e^x + \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = -e^x - \frac{2}{(x - 1)^2} < 0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$

نلاحظ من تغيرات f أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين مختلفين

احدهما $(b_1 = a_1 < 1)$ والآخر $(b_2 = a_2 > 1)$ وبالتالي:

يوجد مماسان مشتركان للخطين C_ℓ, C_E .

- احدهما يمس C_E في النقطتين $(b_2, e^{b_2}), (b_1, e^{b_1})$
- والآخر يمس C_ℓ في النقطتين $(a_2, \ln a_2), (a_1, \ln a_1)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑬ تابع القوة : $P_a(x) = x^a$ بالصيغة ، $]0,+\infty[$ المعرف على P_a نهدف إلى دراسة التابع . ليكن a عدداً حقيقياً غير معدوم .

نعلم ان $P_a(x) = x^a = e^{a\ln x}$ نفرض $u(x) = a\ln x$.

1) عيّن تبعاً لإشارة a جهة إطراد التابع u ، و استنتج جهة إطراد P_a .

لدينا $u(x) = a\ln x$ ، u اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ و مشتقه $u'(x) = \frac{a}{x}$

- ومنه في حال : $a > 0$ فإن $u'(x) > 0$ على المجال $]0,+\infty[$ و منه u متزايد تماماً

فيكون P_a متزايد تماماً على $]0,+\infty[$.

- واما في حال : $a < 0$ فإن $u'(x) < 0$ على المجال $]0,+\infty[$ و منه u متناقص تماماً

فيكون P_a متناقص تماماً على $]0,+\infty[$.

2) ادرس تبعاً لإشارة a نهاية P_a عند طرفي مجموعة تعريفه ، و بيّن انه في حالة $a > 0$ يمكننا ان نعرف $P_a(0) = 0$ فنحصل على تابع مستمر على $[0,+\infty[$ في هذه الحالة .

$P_a(x) = e^{a\ln x}$ معرف على المجال $]0,+\infty[$.

- في حال $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = 0 \quad ; \quad \left(\lim_{x\to 0^+} a\ln x = -\infty , \quad \boxed{a > 0}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x\to +\infty} a\ln x = +\infty , \quad \boxed{a > 0}\right)$$

- في حال $a < 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x\to 0^+} a\ln x = +\infty , \quad \boxed{a < 0}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = 0 \quad ; \quad \left(\lim_{x\to +\infty} a\ln x = -\infty , \quad \boxed{a < 0}\right)$$

وجدنا في حالة $a > 0$ ان : $\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = 0$

والتابع P_a في هذه الحالة يكون متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$ و منه فإن :

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = P_a(0) = 0$$

ومنه يتحقق شرط الاستمرار اي التابع P_a معرف و مستمر على المجال $[0,+\infty[$

3) اثبت ان P_a اشتقاقي على $]0,+\infty[$ و ان $P'_a = a\,P_{a-1}$.

$P_a(x) = e^{a\ln x}$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ، لأن التابع $a\ln x$ اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ،

$$P_a(x) = x^a$$
$$P'_a(x) = a\,x^{a-1} = a\,P_{a-1}(x)$$
$$P'_a = a\,P_{a-1}$$

4) نفترض $0 < a < 1$ و اننا عرفنا في هذه الحالة $P_a(0) = 0$ احسب نهاية نسبة التغير $x \mapsto T(x) = \frac{P_a(x) - P_a(0)}{x}$ عند الصفر ، ماذا تستنتج؟

$$T(x) = \frac{P_a(x) - P_a(0)}{x} = \frac{x^a - 0}{x} = x^{a-1} = e^{(a-1)\ln}$$

$$\lim_{x\to 0^+} T(x) = +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x\to 0^+} (a-1)\ln x = +\infty , 0 < a < 1\right)$$

اي نستنتج ان التابع P_a غير اشتقاقي عند الصفر ، في حالة $0 < a < 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

5) أعد السؤال السابق في حال فرضنا ان $a > 1$

اعتماداً على ما حصلنا عليه سابقاً :

$$\lim_{x\to 0^+} T(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{(a-1)\ln} = 0 \in R \ ; \quad \left(\lim_{x\to 0^+}(a-1)\ln x = -\infty \ , \ \boxed{a>1}\right)$$

ومنه P_a اشتقاقي عند الصفر في حالة $a > 1$

6) اثبت ان $P_a \circ P_B = P_{a.B}$

$$P_B(x) = x^B \quad , \quad P_a(x) = x^a$$

لدينا :

$$(P_a \circ P_B)(x) = P_a(P_B(x)) = (x^B)^a = x^{a.B} = P_{a.B}$$

ونلاحظ ان $P_a \circ P_B$ و $P_{a.B}$ معرف على $]0,+\infty[$ و بالتالي فإن :

$$(P_a \circ P_B)(x) = P_{a.B}(x)$$

7) مقارنة تابع القوة بالتابعين الأسي و اللوغاريتمي .

1. اثبت انه في حالة $a > 0$ يكون $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = 0$ و $\lim_{x\to 0} x^a \ln x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{a\ln x}{x^a}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln x^a}{x^a}\right) = \frac{1}{a}.0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^a \ln x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\,x^a\,.\,a\ln x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\,x^a\,.\ln x^a\right) = \frac{1}{a}.0 = 0$$

2. اثبت في حالة $a > 0$ يكون $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0$

$$\frac{e^x}{x^a} = \frac{e^x}{e^{a\ln x}} = e^{x-a\ln x} = e^{x\left(1-a\frac{\ln x}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(1-a\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty$$

$$x^a\,e^{-x} = e^{a\ln x}.e^{-x} = e^{a\ln x-} = e^{x\left(a\frac{\ln x}{x}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^a.e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(a\frac{\ln}{x}-1\right)} = 0 \ ; \ \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \ \text{ حيث } \ \lim_{x\to+\infty} x\left(a\frac{\ln x}{x}-1\right) = -\infty\right)$$

---

1) حل كلاً من المعادلات او المتراجحات الآتية:

$\boxed{1}$ $\dfrac{e^{-x}-1}{e^x-1} = -2$	$\boxed{2}$ $4e^{2x}+e^{-2x} \le 5$
شرط الحل : $e^x - 1 \ne 0$	نضرب بـ (e^{2x}) : $4e^{4x}+1 \le 5e^{2x}$
$e^x \ne 1 \Rightarrow x \ne 0 \Rightarrow D = R\setminus\{0\}$	$4e^{4x}-5e^{2x}+1 \le 0$
$e^{-x}-1 = -2e^x+2$	$4e^{4x}-5e^{2x}+1 = 0$
$2e^x+e^{-x}-3 = 0$	$\Delta = 25-4(4)(1) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$
نضرب بـ (e^x) : $2e^{2x}+1-3e^x = 0$	اما $e^{2x} = \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{1}{4}$
$2e^{2x}-3e^x+1 = 0$	$2x = \ln\dfrac{1}{4}$
$\Delta = 9-4(2)(1) = 1$	$2x = -\ln 4$
اما $e^x = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2}$	$x = -\dfrac{1}{2}\ln 4 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 2}$
او $e^x = \dfrac{3+1}{4} = 1 \Rightarrow x = 0 \notin D$ (مرفوض)	او $e^{2x} = \dfrac{5+3}{8} = 1$
	$2x = \ln 1$
	$2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3

$$e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$$

$e^{x+1}(e^{2x}+4e^{x}-5)=0$

$e^{x+1}(e^{x}+5)(e^{x}-1)=0$

إما $e^{x+1}=0$ (مرفوض)

او $e^{x}=-5$ (مرفوض)

او $e^{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

4

$$e^{2x}-3ee^{x}+2e^{2}=0$$

$e^{2x}-3e.e^{x}+2e^{2}=0$

$(e^{x}-2e)(e^{x}-e)=0$

إما $e^{x}=2e \Rightarrow \boxed{x=\ln(2e)}$

او $e^{x}=e \Rightarrow \boxed{x=1}$

5

$$e^{x}+\frac{e}{e^{x}}=1+e$$

نضرب بـ (e^{x}) : $e^{2x}+e=e^{x}+e.e^{x}$

$e^{2x}-e^{x}-e.e^{x}+e=0$

(لنحاول تحليلها باستخدام التجميع لفئات)

$e^{x}(e^{x}-1)-e(e^{x}-1)=0$

$(e^{x}-1)(e^{x}-e)=0$

إما $e^{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

او $e^{x}=e \Rightarrow \boxed{x=1}$

6

$$e^{3x}-(e^{2}-1)e^{2x}=e^{x+2}$$

$e^{3x}-(e^{2}-1)e^{2x}-e^{x+2}=0$

$e^{3x}-(e^{2}-1)e^{2x}-e^{2}.e^{x}=0$

$e^{x}\left[\underbrace{e^{2x}-(e^{2}-1)e^{x}-e^{2}}\right]=0$

$e^{x}(e^{x}-e^{2})(e^{x}+1)=0$

إما $e^{x}=0$ (مرفوض)

او $e^{x}=e^{2} \Rightarrow \boxed{x=2}$

او $e^{x}=-1$ (مرفوض)

7

$$\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1}<\frac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$$

$(e^{x}-1)(e^{x}+2)<(e^{2x}+1)(e^{x}-2)$

$e^{2x}+e^{x}-2<e^{3x}-2e^{2x}+e^{x}-2$

$e^{3x}-3e^{2x}>0$

$e^{2x}(e^{x}-3)>0 \qquad \div(e^{2x})$

$e^{x}-3>0$

$e^{x}>3$

$x>\ln 3$

$S=]\ln 3,+\infty[$

---

⑮ في كل حالة اتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$(1)\qquad \begin{cases} e^{x}-\frac{1}{e}e^{y}=1 & ① \\ 2e^{x}+e^{y}=4+e & ② \end{cases}$$

نضرب المعادلة ① بالعدد -2 ثم نجمع المعادلة الناتجة مع ② :

$$\begin{cases} -2e^{x}+\frac{2}{e}e^{y}=-2 \\ + \\ 2e^{x}+e^{y}=4+e \end{cases}$$

$\left(\frac{2}{e}+1\right)e^{y}=2+e$

$\left(\frac{2+e}{e}\right)e^{y}=2+e \qquad \div(2+e)$

$\frac{1}{e}.e^{y}=1$

$e^{y}=e \Rightarrow \boxed{y=1}$

نعوض في المعادلة ① : $e^{x}-\frac{1}{e}.\overset{1}{e}=1 \Rightarrow e^{x}=2$: $\boxed{x=\ln 2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(2) $\begin{cases} e^{4x}e^{y} = \dfrac{1}{e^{2}} \\ xy = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} e^{4x+y} = e^{-2} \\ x.y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = -2 & ① \\ x.y = -2 & ② \end{cases}$$

من ① نجد ان: $y = -2 - 4x \quad (*)$

نعوض $(*)$ في المعادلة ② :

$$x(-2-4x) = -2$$
$$-2x - 4x^2 = -2$$
$$4x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$2x^2 + x - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

اما $x_1 = \dfrac{-1-3}{4} \Rightarrow \boxed{x = -1} \xrightarrow{\text{نعوض في } *} y_1 = 2$

او $x_2 = \dfrac{-1+3}{4} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{1}{2}} \xrightarrow{\text{نعوض في } *} y_2 = -4$

(3) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^{x} - e^{y+3} - 2e^{2} = 0 \end{cases}$

① نجد ان: $y = 1 - x \quad (*)$

نعوض * ب ② :

$$3e^{x} - e^{-x+4} - 2e^{2} = 0$$

نضرب بـ (e^{x})

$$3e^{2x} - e^{4} - 2e^{2}e^{x} = 0$$
$$3e^{2x} - 2e^{2}.e^{x} - e^{4} = 0$$
$$\Delta = 4e^{4} - 4(3)(-e^{4}) = 16e^{4}$$
$$\sqrt{\Delta} = 4e^{2}$$

اما $e^{x} = \dfrac{2e^{2} - 4e^{2}}{6} = \dfrac{-1}{3}e^{2}$ (مرفوض)

او $e^{x} = \dfrac{2e^{2} + 4e^{2}}{6} = e^{2}$

$e^{x} = e^{2} \Rightarrow \boxed{x = 2} \xrightarrow{\text{نعوض في} *} \boxed{y = -1}$

ان C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

a بين ان التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم C.

- $x \in R : -x \in R$ محقق
- $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -f(x)$ محقق

تابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

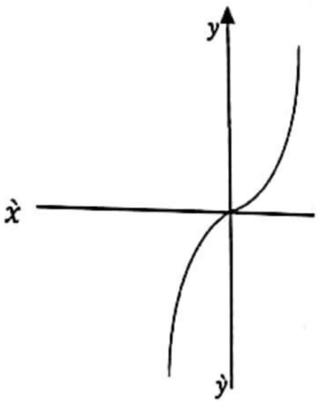
$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) > 0$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

نقطة مساعدة

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$(0,0)$



، معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم d

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \\ m = f'(0) &= \frac{1}{2}(e^{0} + e^{0}) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{d:\ y = x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$f(x) - y_d = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

دراسة الوضع النسبي :

نفرض ان:

$$g(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x} - 2x]$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = ?$ عدم تعيين $+\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{e^x}{2}\left(1 - \frac{e^{-x}}{e^x} - \frac{2x}{e^x}\right)$$

$$g(x) = \frac{e^x}{2}\left(1 - e^{-2x} - 2\frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty(1) = +\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = ?$ عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{e^x}{e^{-x}} - 1 - \frac{2x}{e^{-x}}\right)$$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2}(e^{2x} - 1 - 2xe^x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty(-1) = -\infty$$

$$\acute{g}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{e^x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}(e^{2x} - 2e^x + 1) = \frac{1}{2}e^{-x}(e^x - 1)^2$$

$$\acute{g}(x) = 0 \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \ : g(x) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\acute{g}(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
الوضع النسبي	d تحت C	$(0,0)$	d فوق C

2) a) ليكن m عدداً حقيقياً: أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في R ، ليكن α هذا الحل.

f مستمر ومتزايد تماماً على R
$m \in f(R) = R$

إذاً للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في R وليكن α بحيث $f(\alpha) = m$

b) اثبت ان المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$ ثم استنتج أن $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$

$$f(x) = m$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = m$$

$$e^x - \frac{1}{e^x} = 2m \qquad : (e^x) \text{ نضرب بـ}$$

$$e^{2x} - 1 = 2m.e^x$$

$$e^{2x} - 2m.e^x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 4(1)(-1) = 4m^2 + 4 = 4(m^2 + 1)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

إما $e^x = \frac{2m + 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m + \sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow \boxed{x = \ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right) = \alpha}$

او $e^x = \frac{2m - 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m - \sqrt{m^2 + 1} < 0$ (مرفوض)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R \setminus \{0\}$ وفق: $f(x) = e^x + \ln|x|$.

وليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x) = xe^x + 1$.

1) ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $R \setminus \{0\}$.

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1} : g(-1) = -e^{-1} + 1 = \frac{-1+e}{e}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{-1+e}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من جدول التغيرات انه اياً يكن $x \in R$: $g(x) \geq \frac{-1+e}{e}$ وبالتالي $g(x) > 0$

إذاً كانت : $x \in]0, +\infty[$; $\frac{g(x)}{x} > 0$ ، إذاً كانت : $x \in]-\infty, 0[$; $\frac{g(x)}{x} < 0$

2) ادرس تغيرات f وارسم C.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $R\setminus\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

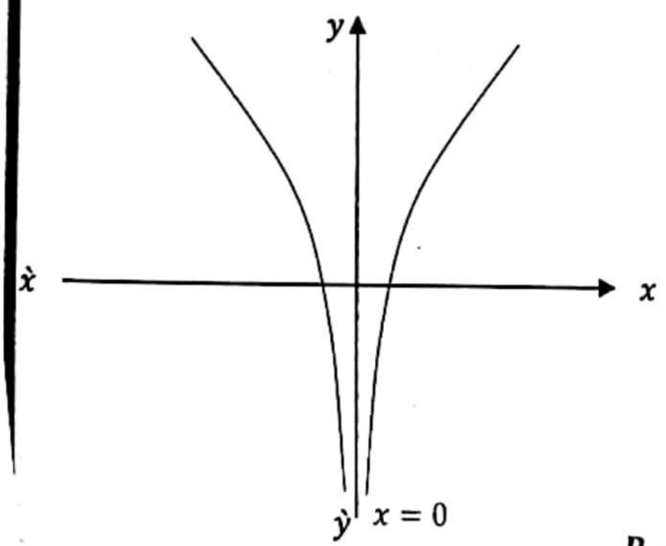
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = -\infty \quad \Longrightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على yy' عند $-\infty$

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \quad \Longrightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على yy' عند $+\infty$

$$f(x) = \begin{cases} e^x + \ln(x) & ; x > 0 \\ e^x + \ln(-x) & ; x < 0 \end{cases} \quad , \quad f'(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ e^x + \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x+1}{x} = \frac{g(x)}{x}$ (درسنا إشارتها في الطلب 1)



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

بت ان المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين مختلفين اياً يكن m من R

$\begin{cases} \text{مستمر ومتناقص تماماً على المجال }]-\infty, 0[\\ m \in f(]-\infty, 0[) = \end{cases}$ إذاً للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $]-\infty, 0[$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$
$m \in f(]0,+\infty[) = R$
إذاً للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين في $R\backslash\{0\}$

---

⑱ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

1) تحقق من كلٍ من المقولات الآتية:

a) f معرف على R

شرط اللوغاريتم $e^{2x} - e^x + 1 > 0$

نفرض $e^{2x} - e^x + 1 = 0$

(مستحيلة الحل) , $\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$

إذاً فهي توافق إشارة e^{2x} اي $(e^{2x} - e^x + 1 > 0)$ محققة دوماً) إذاً $D = R$

b) يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})]$$
$$f(x) = \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

c) المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C.

$$f(x) - y_d = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$
$$= \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y_d) = ?$ $\quad -\infty + \infty$ حالة عدم تعيين

$$f(x) - y_d = \ln[e^{-x}(e^x - 1 + e^{-x})]$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب مائل عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

وبالتالي d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$.

d) الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

المماس يوازي محور الفواصل $\Leftarrow m = 0$.

f اشتقاقي على R $\qquad f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$

نبحث عن نقطة x_0 بحيث: $f'(x_0) = m = 0$

$$f'(x_0) = 0 \Longrightarrow 2e^{2x_0} - e^{x_0} = 0$$
$$e^{x_0}(2e^{x_0} - 1) = 0$$
$$2e^{x_0} - 1 = 0 \;\Rightarrow e^{x_0} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_0 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$:f(-\ln 2) = \ln\left(e^{2(-\ln 2)} - e^{-\ln 2} + 1\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{e^{2\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \qquad \Longrightarrow A\left(-\ln 2, \ln\frac{3}{4}\right)$$

الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل معادلته : $\Delta: y_\Delta = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف و مستمر و اشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على xx' عند $-\infty$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $+\infty - \infty$ حصلنا على حالة عدم تعيين

$$f(x) = \ln\left[e^x\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

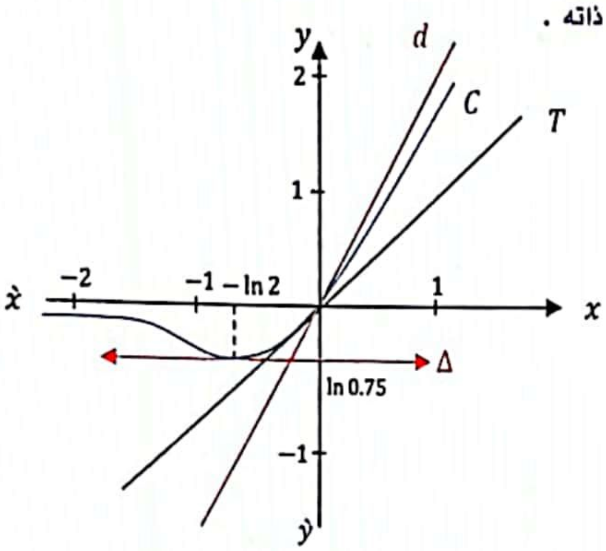
$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 2} \; : f(-\ln 2) = \ln\frac{3}{4}$$ (وذلك بالاستفادة من الطلب السابق)

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها 0 منه .

$$f(0) = 0 \; : O(0,0) \; , \qquad m = f'(0) = \frac{2-1}{1} = 1 \quad \Rightarrow T: y_T = x$$

4) ارسم كلاً من d و Δ و T ، ثم ارسم C في المعلم ذاته .



• $d: y_d = 2x$ (مقارب)

x	0	1
y	0	2
	$(0,0)$	$(1,2)$

• يوازي محور xx' $\Delta: y_\Delta = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

• $T: y_T = x$ (مماس)

x	0	1
y	0	1
	$(0,0)$	$(1,1)$

---

15) ليكن f التابع المعرف على المجال R_+^* وفق $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$.

1) ادرس تغيرات $g: x \to e^x.f'(x)$

f اشتقاقي على R_+^* :

$$f'(x) = -e^{-x}(3 + \ln x) + \frac{1}{x}e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x}\left[-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right]$$

$$g(x) = e^x.f'(x) = e^x.e^{-x}\left(-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}}$$

g معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$: $+\infty$ عند yy' مقارب منطبق على $x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0 \quad , \quad x \in]0, +\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0	$-\infty$

2) استنتج دراسة تغيرات f.

التابع g مستمر و متناقص تماماً و ينتقل من قيمة موجبة $(+\infty)$ الى قيمة سالبة $(-\infty)$

و بالتالي يمر من الصفر من اجل قيمة $x = \alpha$

وبما ان $0 < f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ في المجال $]0, \alpha[$ ويكون فيه f متزايد تماماً .

وايضاً $0 > f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ في المجال $]\alpha, +\infty[$ ويكون فيه f متناقص تماماً .

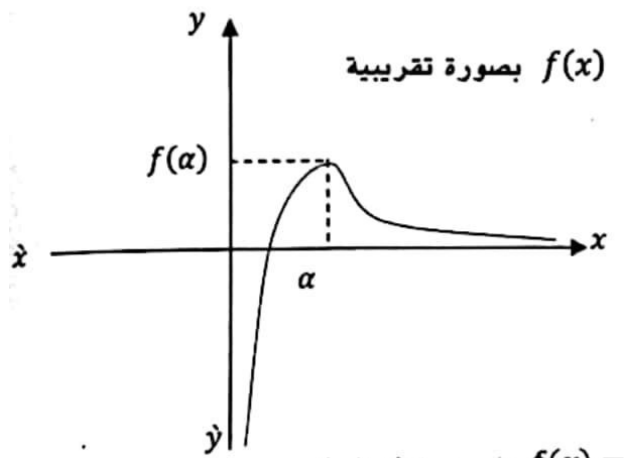
f معرف على $]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ عند الـ $-\infty$ $y\acute{y}$ مقارب شاقولي منطبق على $x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $0.\infty$

$$f(x) = xe^{-x}\left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \frac{x}{e^x}\left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ [redacted] $= 0 \Rightarrow$ عند $+\infty$ $x\acute{x}$ مقارب افقي منطبق على $y = 0$



x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

⑳ ادرس تغيرات التابع f المعرف على $R \setminus \{1\}$ بالصيغة $f(x) = \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

f معرف واشتقاقي على $R \setminus \{1\}$: $f(x) = e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow$ عند $-\infty$ $x\acute{x}$ // مقارب افقي $y = \frac{1}{e}$

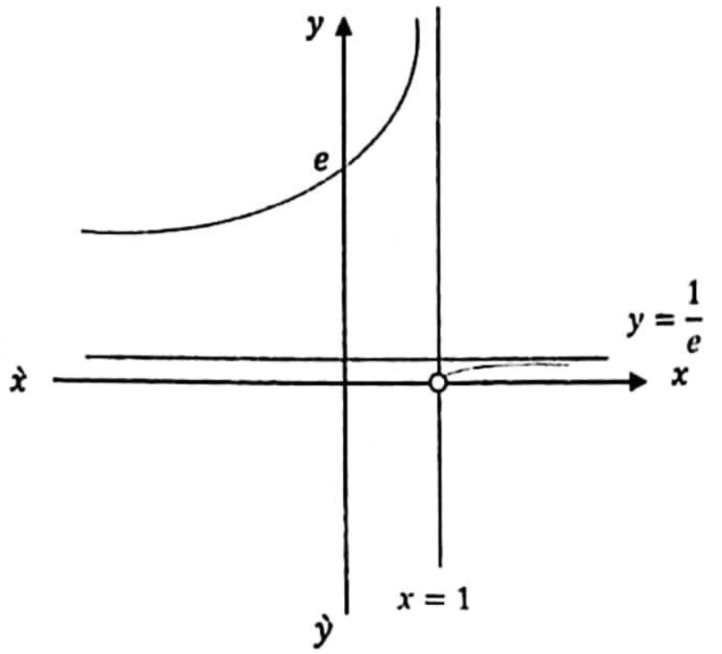
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow$ عند $+\infty$ $x\acute{x}$ // مقارب افقي $y = \frac{1}{e}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ عند $+\infty$ $y\acute{y}$ // مقارب شاقولي $x = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$: لاحظ $(1,0)$ نقطة مقاربة (على الشكل نرسمها مفرغة)

$$f'(x) = \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2} \cdot e^{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)^2} \cdot e^{\frac{1+x}{1-x}} > 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{e} \nearrow +\infty$	‖	$0 \nearrow \frac{1}{e}$

نقطة مساعدة :

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$f(0) = e$

نقطة التقاطع مع محور $y\grave{y}$ هي : $(0, e)$

---

(21) ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$

1) a) جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

b) اثبت ان $f(x) = -x + \ln(e^{x} + 1)$

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$
$$= \ln\left[e^{-x}\left(1 + \frac{1}{e^{-x}}\right)\right] = \ln[e^{-x}(e^{x} + 1)]$$
$$= \ln e^{-x} + \ln(1 + e^{x}) = -x + \ln(e^{x} + 1)$$

c) استنتج أن الخط C يقبل مقارباً مائلاً وليكن d في جوار $-\infty$

بفرض المستقيم $d: y_d = -x$ ومنه:

$$f(x) - y_d = -x + \ln(1 + e^{x}) + x = \ln(1 + e^{x})$$

$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = \ln 1 = 0 \;\Rightarrow\;$ $d: y_d = -x$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم في معلم واحد d ثم C

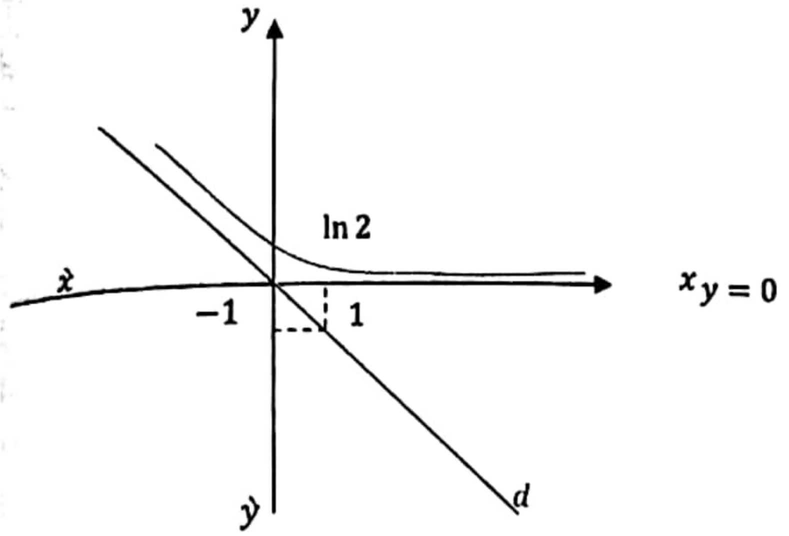
f معرف واشتقاقي على R:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



$d: y_d = -x$

x	0	1
y	0	-1
	(0,0)	(1,1)

نقطة مساعدة

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$f(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln 2$

نقطة التقاطع مع محور $y\grave{y}$ هي: $(0, \ln 2)$

3) نرمز إلى نقاط C التي فواصلها (0) و (1) و (-1) على التوالي بالرموز D, B, A

اثبت ان مماس C في A يوازي المستقيم (BD).

مماس الخط C في A يوازي المستقيم BD اي ان : $m_A = m_{BD}$

اولاً لنوجد إحداثيات النقاط D, B, A

$x_A = 0 : f(0) = \ln(2) \quad : \boxed{A(0, \ln 2)}$

$x_B = 1 : f(1) = \ln(e^{-1} + 1) = \ln\left(\frac{1}{e} + 1\right) = \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$

$= \ln(1+e) - \ln e = \ln(1+e) - 1 \quad : \boxed{B(1, \ln(e+1) - 1)}$

$x_D = -1 : f(-1) = \ln(e+1) \quad : \boxed{D\,(-1, \ln(e+1)\,)}$

$\acute{f}(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

$m_A = \acute{f}(x_A) = \acute{f}(0) = \frac{-e^0}{e^0 + 1} = \frac{-1}{2}$

$m_{BD} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D}$

$= \frac{\ln(e+1) - 1 - \ln(e+1)}{1 - (-1)} = \frac{-1}{2}$

$$m_A = m_{BD} = \frac{-1}{2}$$

إذاً مماس الخط C في A يوازي BD

---

22 محل هندسي:

تامل التابعين: $f_1 : x \to e^x$, $f_2 : x \to e^{-x}$ وخطاهما البيانيان C_2, C_1 في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

يقطع المستقيم المرسوم من $A(m, o)$ موازياً محور التراتيب الخطين C_2, C_1 في N, M بالترتيب.

1) ارسم C_2, C_1.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\acute{f_1}(x)$	+
$f_1(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

* $f_1(x) = e^x > 0$

f_2, f_1 معرفان على R

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0 \implies$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

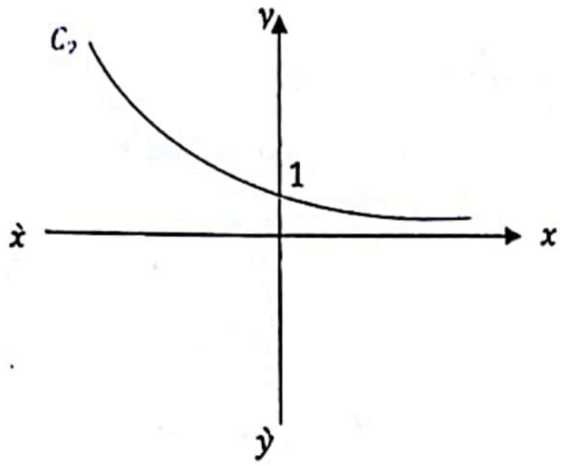
$\acute{f}(x) = e^x > 0$

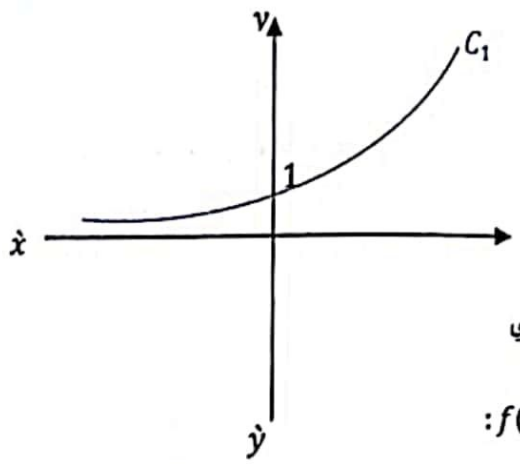
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

** $f_2(x) = e^{-x} > 0$

نلاحظ ان : $f_1(x) = f_2(-x)$

اي : C_2 نظير C_1 بالنسبة لـ $y\acute{y}$





نقطة مساعدة

C_1 يقطع $y\acute{y}$ اي

$x = 0$

$: f(0) = 1 \Rightarrow (0,1)$

2) نرمز بالرمزين T_2, T_1 إلى مماسي C_2, C_1 في N, M بالترتيب، اكتب معادلة لكل من T_2, T_1

واستنتج ان T_2, T_1 متعامدان

بما ان المستقيم المار من $A(m,0)$ يقطع C_2, C_1 فإن فاصلتي كل N, M هي m ومنه:

$x_M = m$	$x_N = m$
$f_1(m) = e^m$	$f_2(m) = e^{-m}$
$M(m, e^m)$	$N(m, e^{-m})$
$\acute{f_1}(x) = e^x$	$\acute{f_2}(x) = -e^{-x}$
$m_{T_1} = e^m$	$m_{T_2} = -e^{-m}$
$y - e^m = e^m(x - m)$	$y - e^{-m} = -e^{-m}(x - m)$
$T_1:$ $y_{T_1} = e^m x - me^m + e^m$	$T_2:$ $y_{T_2} = -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m}$

$m_{T_1} \times m_{T_2} = (e^m) \times (-e^{-m}) = -e^0 = -1 \Rightarrow$ متعامدان T_1, T_2

3) اثبت أن إحداثيي P، نقطة تقاطع T_2, T_1 هما $\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} T_1: y_{T_1} = e^m x - me^m + e^m \\ T_2: y_{T_2} = -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{بالحل المشترك}$$

$$e^m x - me^m + e^m = -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m}$$

$$e^m x + e^{-m}x = me^m + me^{-m} - e^m + e^{-m}$$

$$(e^m + e^{-m})x = m(e^m + e^{-m}) - (e^m - e^{-m}) \qquad \div (e^m + e^{-m})$$

$$\boxed{x = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}}$$

نعوض في T_1 :

$$y = e^m\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}\right) - me^m + e^m$$

$$= me^m - \frac{e^{2m} - 1}{e^m + e^{-m}} - me^m + e^m$$

$$= -\frac{e^{2m} - 1}{e^m + e^{-m}} + e^m = \frac{-e^{2m} + 1 + e^{2m} + 1}{e^m + e^{-m}} = \frac{2}{e^m + e^{-m}}$$

$$P\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

4) لتكن النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.

a) احسب بدلالة m إحداثيي النقطة I.

$$M(m,e^m)\ ,\ N(m,e^{-m})$$

$$I\left(\frac{m+m}{2},\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)\Rightarrow I\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$$

b) جد Γ المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول m في R.

لاحظ ان النقطة I إحداثييها $\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$ فمعادلة المحل الهندسي Γ للنقطة I هي: $y=\frac{e^m+e^{-m}}{2}$

اي ان Γ هو الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R وفق: $f_I(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

c) ارسم مجموعة النقاط I في المعلم الذي رسمت فيه الخطين $C_2\ ,C_1$.

$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $\qquad$ $:D=R$

f معرف واشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ $\quad$, $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=0$$

$$e^x-e^{-x}=0$$

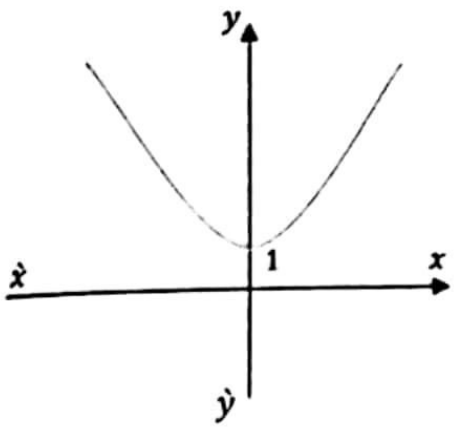
$$e^x=e^{-x}\ \Rightarrow x=0\ :\ f(0)=1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

لسهولة الرسم:

سنرسم نقط المحل الهندسي للنقطة I فقط

ورسمنا سابقاً $C_2\ ,C_1$.



5) a) احسب بدلالة m، مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{IP}$

$$A(m,0)\ \ ,\ P\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}},\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right)\ \ ,\ \ I\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AP}=\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}-m\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}-0\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{IP}=\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}-m\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}-\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{4-(e^m+e^{-m})^2}{2(e^m+e^{-m})}\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{2-e^{2m}-e^{-2m}}{2(e^m+e^{-m})}\right)\vec{j}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

b) استنتج ان المستقيم (IP) مماس للخط Γ في النقطة I وان الطول AP ثابت.

$$* \quad m_{IP} = \frac{y_P - y_I}{x_P - x_I} = \frac{\frac{2}{e^m+e^{-m}} - \frac{e^m+e^{-m}}{2}}{m - \frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}} - m} = \frac{\frac{2-e^{2m}-e^{-2m}}{2(e^m+e^{-m})}}{-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}}$$

$$m_{IP} = \frac{2-e^{2m}-e^{-2m}}{-2(e^m-e^{-m})} = \frac{-(e^{2m}-2+e^{-2m})}{-2(e^m-e^{-m})} = \frac{(e^m-e^{-m})^2}{2(e^m-e^{-m})} = \frac{1}{2}(e^m-e^{-m})$$

$$\boxed{m_{IP} = \frac{1}{2}(e^m-e^{-m})} \qquad ①$$

لكن $f_I(x) = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

حيث $I\left(m, \frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$, $f'_I(x) = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$$\boxed{f'_I(m) = \frac{1}{2}(e^m-e^{-m})} \qquad ②$$

من ① و ② نجد ان: $f'_I(m) = m_{IP}$ ومنه IP مماس للخط Γ في I.

$$** \quad \|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{\frac{(e^m-e^{-m})^2}{(e^m+e^{-m})^2} + \frac{4}{(e^m+e^{-m})^2}} = \sqrt{\frac{e^{2m}-2+e^{-2m}+4}{(e^m+e^{-m})^2}} = \sqrt{\frac{e^{2m}+2+e^{-2m}}{(e^m+e^{-m})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(e^m+e^{-m})^2}{(e^m+e^{-m})^2}} = \sqrt{1} = 1$$

ومنه فإن $\|\overrightarrow{AP}\| = 1$ ثابت.

ابحث عن نهاية كل من المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية :

1 $u_n = \frac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$	4 $u_n = e^{1+\frac{-1}{n}+\frac{-1}{n^2}}$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$
2 $u_n = \frac{e^{2n}}{(1+n)^2}$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = ? \quad \frac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين $u_n = \frac{e^{2n}}{1+2n+n^2} = \frac{e^{2n}}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1\right)}$ $= \left(\frac{e^n}{n}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1}\right]$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\left(\frac{1}{1}\right) = +\infty$	5 $u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ $u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ نفرض : $\begin{cases} \frac{1}{n} = t \\ n\to+\infty \Rightarrow t\to 0 \end{cases}$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t-1}{t}\right] = 1$
3 $u_n = \ln(2+e^{-n})$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$	6 $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

㉔ المشتق من المرتبة n:

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$

ولتكن $f^{(1)} = \acute{f}$ و $f^{(2)} = \acute{\acute{f}}$ وهكذا...... $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية للتابع f $(n \geq 1)$.

1) احسب $f^{(1)}$ و $f^{(2)}$.

$$f^{(1)}(x) = \acute{f}(x) = (2x+1).e^x + e^x(x^2 + x - 1)$$
$$= e^x(2x + 1 + x^2 + x - 1) = (x^2 + 3x)e^x$$

$$f^{(2)}(x) = \acute{\acute{f}}(x) = (2x+3).e^x + e^x(x^2 + 3x)$$
$$= e^x(2x + 3 + x^2 + 3x) = (x^2 + 5x + 3)e^x$$

2) a) اثبت ان: $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ مع $a_{n+1} = a_n + 2$ و $b_{n+1} = b_n + a_n$.

لنثبت صحة الخاصة السابقة بالتدريج:

- لنثبت تحقق الخاصة من اجل $n = 2, n = 1$

$$n = 1\begin{cases} f^{(1)}(x) = (x^2 + 3x)e^x = (x^2 + 3x + 0)e^x \\ f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x) = (x^2 + a_1 x + b_1)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 3 \\ b_1 = 0 \end{matrix}$$

$$n = 2\begin{cases} f^{(2)}(x) = (x^2 + 5x + 3)e^x = (x^2 + (3+2)x + 3)e^x \\ f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x \xrightarrow{n=2} f^{(2)}(x) = (x^2 + a_2 x + b_2)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_2 = 3 + 2 \\ b_2 = 3 = 0 + 3 \end{matrix}$$

لاحظ ان $\begin{matrix} a_2 = 3 + 2 \\ a_2 = a_1 + 2 \end{matrix}$ و $\begin{matrix} b_2 = 3 = 0 + 3 \\ b_2 = b_1 + a_1 \end{matrix}$

ومنه $\boxed{a_{n+1} = a_n + 2 \quad \text{و} \quad b_{n+1} = b_n + a_n}$

فالخاصة صحيحة من اجل $n = 1$ و $n = 2$

- نفرض ان الخاصة صحيحة من اجل n اي: $\boxed{f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x}$ صحيحة .
- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n + 1$ اي : $\boxed{f^{(n+1)}(x) \stackrel{?}{=} (x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1})e^x}$

لدينا : $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$

نشتق : $\left[f^{(n)}(x)\right]' = f^{(n+1)}(x) = (2x + a_n)e^x + e^x(x^2 + a_n x + b_n)$

$$L_1 = f^{(n+1)}(x) = e^x[2x + a_n + x^2 + a_n x + b_n]$$
$$= e^x[x^2 + a_n x + 2x + a_n + b_n]$$
$$= e^x[x^2 + (a_n + 2)x + (a_n + b_n)]$$
$$= e^x[x^2 + a_{n+1}\,x + b_{n+1}] = L_2$$

فالخاصة صحيحة من اجل $n + 1$.

الخاصة السابقة صحيحة من اجل $n \geq 1$.

ستنتج ان a_n و b_n أعداد عادية .

ا ان $a_1 = 3$, $b_1 = 0$ فهما عددان طبيعيان من اجل $n = 1$

$a_2 = 5 = a_1 + 2$, $b_2 = 3 = 0 + 3 = b_1 + a_1$ فهما عددان طبيعيان من اجل $n = 2$

$a_{n+1} = a_n + 2$ مجموع عددين طبيعيين هو عدد طبيعي .

$b_{n+1} = b_n + a_n$ مجموع عددين طبيعيين هو عدد طبيعي .

مع ملاحظة ان كل عدد طبيعي هو عدد عادي .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3) في هذا السؤال نريد كتابة a_n و b_n بدلالة n .

a) اثبت ان المتتالية (a_n) حسابية ، استنتج كتابة a_n بدلالة n .

$$a_{n+1} = a_n + 2$$
$$a_{n+1} - a_n = 2 \quad \text{(ثابت)}$$

فهي متتالية حسابية أساسها $r = 2$ و حدها الأول $a_1 = 3$.

دستور الحد العام في المتتالية الحسابية :

$$a_n = a_m + (n-m)r$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases} : \qquad a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$= 3 + (n-1)(2)$$
$$= 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$
$$\boxed{a_n = 2n+1}$$

b) تحقق من ان $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$ (اياً يكن $n \geq 1$) ، ثم استنتج b_n بدلالة n

$$b_{n+1} = a_n + b_n$$

و منه $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2}$$
$$= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + b_{n-3}$$
$$= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + b_{n-4}$$
$$\vdots$$
$$b_n = a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

نجد ان b_n مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية حدها الأول $a_1 = 3$ و عدد حدودها $(n-1-1+1 = n-1)$

لدينا : $a_n = 2n+1$ ، فيكون حدها الأخير $a_{n-1} = 2(n-1)+1$

$$= 2n - 2 + 1 = 2n - 1$$

$$b_n = S = (n-1)\left(\frac{2n-1+3}{2}\right) = (n-1)\left(\frac{2n+2}{2}\right) = (n-1)\left(\frac{2(n+1)}{2}\right) = (n-1)(n+1)$$

و منه نكتب $b_n = (n-1)(n+1)$

معادلة تفاضلية :

1) لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2\grave{y} + 3y = 0$ عين جميع حلول (E) .

$$\grave{y} = \frac{-3}{2}\, y$$

$a = \frac{-3}{2}$: حلولها $y = f_k(x) = k.e^{\frac{-3}{2}x}$: حيث $k \epsilon R$

) لتكن $(\grave{E})$ المعادلة التفاضلية $2\grave{y} + 3y = x^2 + 1$

a) عين كثير حدود من الدرجة الثانية f يحقق المعادلة $(\grave{E})$.

ليكن كثير الحدود من الدرجة الثانية $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ \grave{y} = 2ax + b \end{cases}$

لدينا $2\grave{y} + 3y = x^2 + 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالتعويض : $2(2ax+b)+3(ax^2+bx+c)=x^2+1$

$$4ax+2b+3ax^2+3bx+3c=x^2+0x+1$$

$$3ax^2+(4a+3b)x+(2b+3c)=x^2+0x+1$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases} 3a \quad =1 \rightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}} \\ 4a+3b=0 \rightarrow 4\left(\frac{1}{3}\right)+3b=0 \rightarrow \boxed{b=-\frac{4}{9}} \\ 2b+3c=1 \rightarrow 2\left(\frac{-4}{9}\right)+3c=1 \rightarrow 3c=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9} \rightarrow \boxed{c=\frac{17}{27}} \end{cases}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}}$$

b) بين انه إذا كان g حلاً للمعادلة $(\grave{E})$ كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E)

و برهن بالعكس انه إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة $(\grave{E})$.

- بما ان g هو حل للمعادلة: $(\grave{E}): 2\grave{y}+3y=x^2+1$

إذاً: $2\grave{g}+3g=x^2+1 \quad (*)$

وبما ان f هو حل للمعادلة $(\grave{E})$ ايضاً إذاً: $(**) \quad 2\grave{f}+3f=x^2+1$

بطرح $(**)$ من $(*)$ طرفاً لطرف نجد:

$$2\grave{g}+3g-2\grave{f}-3f=0$$
$$2\grave{g}-2\grave{f}+3g-3f=0$$
$$2(\grave{g}-\grave{f})+3(g-f)=0$$
$$2(g-f)'+3(g-f)=0$$

اي $g-f$ هو حل للمعادلة $(E): \quad 2\grave{y}+3y=0$

- إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة $(E): \quad 2\grave{y}+3y=0$

$$2(g-f)'+3(g-f)=0$$
$$2\grave{g}-2\grave{f}+3g-3f=0$$
$$2\grave{g}+3g-\left(2\grave{f}+3f\right)=0 \qquad (*)$$

لكن f حل للمعادلة التفاضلية :

$$\grave{E}: \quad 2\grave{y}+3y=x^2+1$$
$$2\grave{f}+3f=x^2+1$$

بالتعويض في $(*)$ نجد ان: $2\grave{g}+3g-(x^2+1)=0$

$$2\grave{g}+3g=x^2+1$$

و منه g حلاً للمعادلة $(\grave{E}): 2\grave{y}+3y=x^2+1$.

c) استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية $(\grave{E})$.

$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$ حلاً للمعادلة $(\grave{E})$.

$y=ke^{-\frac{3}{2}x} \; ; k\in R$ حلاً للمعادلة (E) ومنه :

$$y=k.e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27} \qquad ; k\in R$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ⓐ نتأمل المعادلة التفاضلية $(E): \acute{y} + 3y = 2e^{-x}$

1) عين العدد a ليكون التابع $x \to ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E) .

$y = ae^{-x}$ فإن $\acute{y} = -ae^{-x}$ نعوض في المعادلة (E) :

$$-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$$

$$2ae^{-x} = 2e^{-x} \qquad (\div e^{-x} \neq 0)$$

$$2a = 2 \to \boxed{a = 1}$$

2) ليكن العدد a الذي وجدناه في ① و ليكن g تابعاً اشتقاقياً على R نعرف التابع $h: x \to g(x) - ae^{-x}$

اثبت ان التابع g حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا و فقط إذا كان h حلاً للمعادلة التفاضلية (F) : $\acute{y} + 3y = 0$

بما ان $a = 1$ إذاً $h(x) = g(x) - e^{-x}$ و منه $g(x) = h(x) + e^{-x}$

يجب ان نثبت ان:

$g(x) = h(x) + e^{-x}$ حل للمعادلة $(E): \acute{y} + 3y = 2e^{-x} \Leftrightarrow h(x) = g(x) - e^{-x}$ حل للمعادلة $(F): \acute{y} + 3y = 0$

اولاً : بفرض $g(x) = h(x) + e^{-x}$ حل للمعادلة $(E) : \acute{y} + 3y = 2e^{-x}$

$\acute{g}(x) = \acute{h}(x) - e^{-x}$ نعوض في المعادلة :

$$\acute{y} + 3y = 2e^{-x}$$

$$\acute{h}(x) - e^{-x} + 3(h(x) + e^{-x}) = 2e^{-x}$$

$$\acute{h}(x) - e^{-x} + 3h(x) + 3e^{-x} = 2e^{-x}$$

$$\acute{h}(x) + 3h(x) = 0$$

إذاً $h(x)$ حل للمعادلة $(F) : \acute{y} + 3y = 0$.

ثانياً : $h(x) = g(x) - e^{-x}$ حل للمعادلة $(F): \acute{y} + 3y = 0$:

$\acute{h}(x) = \acute{g}(x) + e^{-x}$ نعوض في المعادلة :

$$\acute{y} + 3y = 0$$

$$\acute{g}(x) + e^{-x} + 3(g(x) - e^{-x}) = 0$$

$$\acute{g}(x) + e^{-x} + 3g(x) - 3e^{-x} = 0$$

$$\acute{g}(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$$

إذاً $g(x)$ حل للمعادلة التفاضلية $(E): \acute{y} + 3y = 2e^{-x}$.

3) حل المعادلة التفاضلية (F) و استنتج مجموعة حلول (E) .

$$(F): \quad \acute{y} + 3y = 0$$

$$\acute{y} = -3y \qquad : a = -3$$

حلها : $f_k(x) = k.e^{-3x} \quad ; \quad k \in R$

- وبما ان $h(x)$ هو حل للمعادلة (F) إذاً $h(x) = ke^{-3x}$

لكن $g(x) = h(x) + e^{-x}$

وهي مجموعة حلول (E) المطلوبة : $g(x) = ke^{-3x} + e^{-x}$

ليكن n عدداً طبيعياً اكبر او يساوي 2 .

1) a) حل المعادلة التفاضلية (1) الآتية : $\acute{y} - \frac{1}{n}y = 0$

$$\acute{y} = \frac{1}{n}y, \quad a = \frac{1}{n}$$

حلها : $y = f_k(x) = ke^{\frac{1}{n}x}$ حيث : $k \in R$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

b) نتامل المعادلة التفاضلية (2) الاتية : $\acute{y}-\frac{1}{n}y=-\frac{x+1}{n(n+1)}$

عين a , b ليكون التابع $x\to g(x)=ax+b$ المعرف على R حلاً للمعادلة (2) .

$\begin{cases} g(x)=ax+b \\ \acute{g}(x)=a \end{cases}$ نعوض في المعادلة التفاضلية

$$a-\frac{1}{n}(ax+b)=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

$$a-\frac{a}{n}x-\frac{b}{n}=\frac{-x}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{-a}{n}x+\left(a-\frac{b}{n}\right)=\frac{-1}{n(n+1)}x-\frac{1}{n(n+1)}$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases} \dfrac{-a}{n}=\dfrac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{1}{n+1}} \\ \\ a-\dfrac{b}{n}=\dfrac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow \dfrac{1}{n+1}-\dfrac{b}{n}=\dfrac{-1}{n(n+1)} \end{cases}$$

$$\frac{-b}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}-\frac{1}{n+1}$$

$$b=\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

إذاً $g(x)=\frac{1}{n+1}x+1$ هو حل للمعادلة (2)

c) 1. اثبت انه ليكون تابع h معرف على R حلاً للمعادلة (2) يلزم و يكفي ان يكون $h-g$ حلاً للمعادلة (1)

$$\boxed{h \text{ حلاً للمعادلة } (2):\acute{y}-\frac{1}{n}y=-\frac{x+1}{n(n+1)} \iff h-g \text{ حلاً للمعادلة } (1):\acute{y}-\frac{1}{n}y=0}$$

اولاً : h حلاً للمعادلة (2) اي :

$$\acute{h}-\frac{1}{n}h=-\frac{x+1}{n(n+1)} \qquad (*)$$

لكن من الطلب (b) نجد ان $g(x)$ حلاً للمعادلة (2) فإن :

$$\acute{g}-\frac{1}{n}g=-\frac{x+1}{n(n+1)} \qquad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد ان:

$$\acute{h}-\frac{1}{n}h=\acute{g}-\frac{1}{n}g$$

$$\acute{h}-\acute{g}-\frac{1}{n}h+\frac{1}{n}g=0$$

$$(\acute{h}-\acute{g})-\frac{1}{n}(h-g)=0$$

$$(h-g)'-\frac{1}{n}(h-g)=0$$

ثانياً : $h-g$ حلاً للمعادلة (1) فإن :

$$(h-g)'-\frac{1}{n}(h-g)=0$$

$$\acute{h}-\acute{g}-\frac{1}{n}h+\frac{1}{n}g=0$$

$$\acute{h}-\frac{1}{n}h=\acute{g}-\frac{1}{n}g \qquad (*)$$

من الطلب (b) وجدنا أن g حلاً للمعادلة التفاضلية (2) اي :

$$\acute{g}-\frac{1}{n}g=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

نعوض في $(*)$:

$$\acute{h}-\frac{1}{n}h=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

إذاً h حلاً للمعادلة التفاضلية (2)

إذاً $h-g$ حلاً للمعادلة التفاضلية (1) .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2. استنتج من ذلك حلول المعادلة (2) .

$g(x)=\frac{1}{n+1}x+1$ حل للمعادلة التفاضلية (2) .

$y=ke^{\frac{1}{n}x}$ حل للمعادلة التفاضلية (1) .

y حل للمعادلة التفاضلية (2) إذا كان $y-g$ هو حل للمعادلة التفاضلية (1):

$$y-g(x)=ke^{\frac{1}{n}x} \qquad : k\in R$$

$$y=ke^{\frac{1}{n}x}+g(x)$$

$$\boxed{y=ke^{\frac{1}{n}x}+\frac{1}{n+1}x+1} \qquad (I)$$

3. و من بينها عيّن تلك الحلول f التي تحقق $f(0)=0$

نعوض في (I) :

$$0=ke^{0}+0+1$$

$$k=-1$$

$$\boxed{y=-e^{\frac{1}{n}x}+\frac{1}{n+1}.x+1}$$

2) نتامل التابع f_n المعرف على R بالعلاقة : $f_n(x)=1+\frac{x}{n+1}-e^{\frac{x}{n}}$

a) ادرس إشارة $f'_n(x)$ واستنتج جدول تغيرات التابع f_n

أثبت على الخصوص أن التابع f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة يطلب تعيينها

$f_n(x)$ معرف و مستمر و اشتقاقي على R :

$$(n\geq 2)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=? \qquad +\infty-\infty \text{ عدم تعيين}$$

$$f_n(x)=x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{n+1}-\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)=x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{n+1}-\frac{e^{\frac{x}{n}}}{n.\frac{x}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=+\infty\left(0+\frac{1}{n+1}-\infty\right)=-\infty$$

$$\left.\begin{aligned} f'_n(x)&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}}\\ f'_n(x)&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}}=\frac{1}{n+1}$$

$$e^{\frac{x}{n}}=\frac{n}{n+1}$$

$$\ln e^{\frac{x}{n}}=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\Rightarrow \boxed{x=n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$f_n\left(n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)=1+\frac{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n+1}-e^{\frac{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n}}$$

$$=1+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-e^{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$=1+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)-\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{n+1-n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

x	$-\infty$	$n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow -\infty$

$$M\left(n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ و } \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$$

) اثبت أن الخط البياني C_n للتابع f_n يقبل مقارباً مائلاً d_n ، اعط معادلة للمستقيم d_n

ارسم كلاً من d_2 و C_2 .

فرض لدينا المستقيم $d_n: y_{d_n} = 1+\frac{x}{n+1}$ و منه :

$$f_n(x) - y_{d_n} = 1+\frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}} - \left(1+\frac{x}{n+1}\right) = -e^{\frac{x}{n}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f_n(x)-y_{d_n}\right)=0 \quad \Rightarrow$ $d_n: y = 1+\frac{x}{n+1}$ مقارب مائل للخط C_n عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-y_{d_n}\right)=-\infty \quad \Rightarrow$ d_n ليس مقارب مائل لـ C_n عند $+\infty$

<u>الرسم</u> : من اجل $n=2$:

$$f_2(x) = 1+\frac{1}{3}x - e^{\frac{1}{2}x} \quad , \quad d_2: y_{d_2} = 1+\frac{1}{3}x$$

x	$-\infty$	$2\ln\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f_2'(x)$	$+$	0	$-$
$f_2(x)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow -\infty$

x	0	-3
y	1	0
	$(0,1)$	$(-3,0)$