ورقة قوانين الرياضيات

- مجموع عدة حدود لمتتالية حسابية $S = n\frac{(a+\ell)}{2}$
- مجموع عدة حدود لمتتالية هندسية $S = a\frac{1-q^n}{1-q}$
- شرط الحسابية $U_{n+1} - U_n = r =$ ثابت
- شرط الهندسية $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q =$ ثابت
- لاثبات صحة علاقة بالتدريج: ١- نثبت صحتها من أجل $n=1$ ٢- نفرض صحة n ونثبت صحة $n+1$
- علاقة عبر عن U_n بدلالة n حسابية $U_m = U_p + (m-p)r$
- علاقة عبر عن U_n بدلالة n هندسية $U_m = U_p \cdot q^{m-p}$
- علاقة ثلاثة حدود حسابية $b = \frac{a+c}{2}$
- علاقة ثلاثة حدود هندسية $b^2 = a\cdot c$
- لدراسة اطراد متتالية حسابية أو هندسية:
  - ١- ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$
  - ٢- نحول إلى تابع $f(n)$ ونوجد مشتقه
  - ٣- نقارن الكسر $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مع العدد 1
- لحساب نهاية صحيح: عند (a) نوجد صورة (a) وعند $\mp\infty$ نأخذ فقط الحد المسيطر ونهمل الباقي
- لحساب نهاية كسري: ١- عندما $x \to a$ نوجد النهاية من اليمين و اليسار عند المقام صفر و عند $\mp\infty$ نقسم نهاية $\left(\frac{\text{المسيطر}}{\text{المسيطر}}\right)$
- لحساب نهاية جذري: نعوض تعويضاً عادياً
- لحساب نهاية مثلثي:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\\ \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1\end{array}\right\} \quad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$$

- مبرهنة الإحاطة: إذا كان $h \geq f(x) \geq g$

$$\lim_{x\to a} h = \ell ، \lim_{x\to a} g = \ell \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

- حالات عدم التعيين: $\frac{0}{0} ، \frac{\infty}{\infty} ، 0\times\infty ، +\infty-\infty$
- لإزالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$ نضرب ونقسم على العامل المشترك.
- لإزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ نطبق قواعد الكسرية.
- لإزالة عدم التعيين من الشكل $0\times\infty$ نغير شكل التابع
- لإزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نحلل البسط والمقام ونختصر العوامل المشتركة
- شرط المقارب المائل: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$

- معادلة المقارب الأفقي: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = a$
  $y = a$ مقارب أفقي $// x'x$ في جوار $\mp\infty$
- معادلة المقارب الشاقولي: $\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} a} f(x) = \mp\infty$
  $x = a$ مقارب شاقولي $// y'y$ يقع على يمينه أو يساره
- لإيجاد مركز ونصف قطر مجال $M = \frac{a+b}{2}$ ، $R = \frac{b-a}{2}$
- لاثبات أن التابع محدود: نحصره وفق الإحاطة ثم نجد أنه يبلغ حديه الأعلى والأدنى
- لاثبات أن للمعادلة جذر وحيد $f(x)=0$
  لدينا حالتان: أ- نفرض مجال $[a,b]$ نقول f معرف ومستمر ومطرد تماماً على $[a,b]$ - ب $f(a)\cdot f(b)$ من إشارتين مختلفتين
  ب- نفرض تابع f نقول f معرف مستمر ومطرد تماماً على $[a,b]$ وبما أن $0 \in f[a,b]$ فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد
- لإيجاد معادلة المماس يجب أن يكون لدينا: نقطة تماس $A(x_0,y_0)$ ، و تابع f'
  $\Delta: y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$
- لإيجاد نهاية تابع مركب: نفرض الداخلي $g(x)$ ثم نوجد نهاية $g(x)$ وبعدها نأخذ نهاية f
- لدراسة الوضع النسبي نضع جدول دراسة الوضع النسبي:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$		$+$
الوضع النسبي	Δ تحت C		Δ فوق C

- شرط الاستمرار لتابع: $\lim_{x\overset{>}{\to} a} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to} a} f(x) = f(a)$
- عند البحث عن مقارب مائل: $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، $b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$
- لكتابة حد جبري أو كثير حدود بالصيغة القانونية: نتمم إلى مربع كامل حيث نضيف ونطرح مربع نصف أمثال x وبعدها نرجع المطابقة لأصلها
- عندما يطلب عين a ، b ، c ونقسم التابع بالقسمة الإقليدية فإننا نوجد المقامات ثم نقارن مع السؤال ونوجد a ، b ، c
- لإيجاد ميل المماس أو المستقيم لدينا ثلاث حالات:
  ١- مماس أفقي $m = f'(a) = 0$ ٢- مماس شاقولي: غير معين
  ٣- مماس مائل نطبق قانون الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- لدراسة قابلية الاشتقاق يجب تحقق الشرط:
  $g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$
- عندما يقال علماً أن هناك نهاية حدية: يجب تحقق
  $f(a) = b$ ، $f'(a) = 0$
- شرط التابع الزوجي:
  ١- أياً كانت $x \in D$ كانت $-x \in D$ - تحقق دخولها
  ٢- $f(-x) = f(x)$ وصفته التناظرية أنه متناظر بالنسبة للمحور $y'y$

- شرطا التابع الفردي :
-١- أياً كانت $x \in D$ كانت $-x \in D$ فتحقق وضوحاً
-٢- $f(-x) = -f(x)$ وصفته التناظرية أنه متناظر بالنسبة للمبدأ $O(0,0)$

- شرط تعامد مستقيمين :
$$m_1 \times m_2 = -1$$

- عندما يطلب أثبت أن النقطة $A(x_0, y_0)$ مركز تناظر للخط C : -١- أياً كانت $x \in D$ كانت $2x_0 - x \in D$
-٢- $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$

- لايجاد نهاية متتالية نطبق نفس قواعد نهايات التوابع حيث دوماً ندرس نهاية المتتالية فقط عند $+\infty$

- نقول عن متتاليتين أنهما متجاورتين إذا :
-١- احداهما متزايدة والأخرى متناقصة
-٢- لهما النهاية نفسها

- قواعد اللوغاريتم : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ ، $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
$\ln(\frac{1}{b}) = -\ln b$ ، $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln(a)$

- نهايات اللوغاريتم : $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ، $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$ ، $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

- لحل معادلة لوغاريتمية $\ln(a) = \ln(b)$ نوجد مجموعة التعريف : $D = D_1 \cap D_2$ ثم نختصر ونحل المعادلة $a = b$ ونأخذ الحلول التي تنتمي فقط

- لحل جملة معادلتين باللوغاريتمي : نحل بطريقة الحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض.

- قواعد الأسي : $e^a \times e^b = e^{a+b}$ ، $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$(e^a)^n = e^{na}$ ، $\frac{1}{e^n} = e^{-n}$

- نهايات الأسي : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ، $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$ ، $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- لحل معادلة أسية $e^a = e^b$ نختصر مباشرة ونحل المعادلة $a = b$

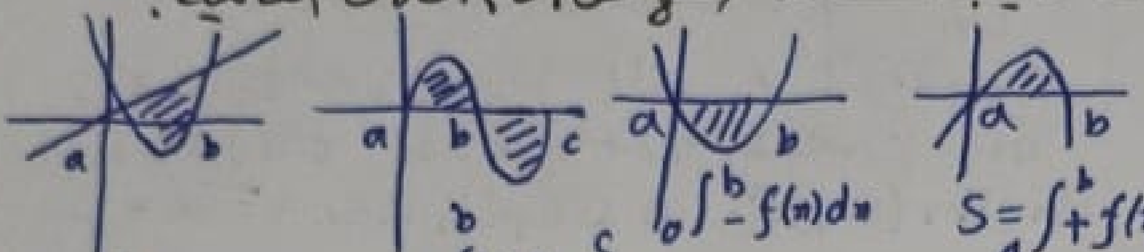
- لايجاد تابع أصلي لتابع f نرمزه F نتبع قواعد التابع الأصلي المذكورة سابقاً

- التكامل بالتجزئة وفق القاعدة :
$$\int_a^b u \cdot v' \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot u' \, dx$$

- نطبق تجزئة فقط في الحالات : • $\int_a^b x^n \cos(x) \, dx$ • $\int_a^b x^n \sin x \, dx$ • $\int_a^b x^n e^x \, dx$ • $\int_a^b x^n \ln x \, dx$

- تكامل الكسور الجزئية • إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام بالقسمة الاقليدية • إذا كانت درجة البسط أصغر نحلل المقام ونفرق كسرين ونوجد a و b

- لايجاد مساحة سطح نحن أمام الحالات التالية :



$S = \int_0^b (y - f(x)) dx$ ، $S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c -f(x) dx$ ، $\int_0^b -f(x) dx$ ، $S = \int_a^b +f(x) dx$

- إحداثيات شعاع : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
- دستور منتصف نقطة : $I(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2})$
- البعد بين نقطتين : $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- الارتباط الخطي لشعاعين : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
- الارتباط لثلاثة أشعة : $\vec{u} = k\vec{v} + k\vec{w}$
- علاقة المتوسط : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$
- علاقة متوازي الاضلاع : مجموع الضلعين = القطر
- علاقة مركز الابعاد المتناسبة : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- علاقة هامة لمركز الثقل : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- إحداثيات مركز الثقل $G(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3})$
- عبارتي الجداء السلمي : • $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ • $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$
- شرط تعامد شعاعين : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- لايجاد مجموعة النقاط وفق تعليم :
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$
- بعد نقطة عن مستقيم : $d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- بعد نقطة عن مستوي : $d_{(A,P)} = \frac{|ax + by + cz + d|}{a^2 + b^2 + c^2}$
- المعادلة الديكارتية لمستوي : $ax + by + cz + d = 0$
- المعادلات الوسيطية لمستقيم : $\left\{ \begin{array}{l} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}$
- لتحديد أوضاع مستويين : نوجد ناظميهما ونختبرهما
- أشكال العدد العقدي : الجبري $z = a + bi$ ، $z = r \cdot e^{i\theta}$ ، مثلثي $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$
- حل معادلة درجة ثانية : $az^2 + bz + c = 0$ ، $\Delta = b^2 - 4ac$
- مرافق عدد عقدي : $\bar{z} = a - bi$
- طويلة عدد عقدي : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- تحويل جبري لمثلثي : $\left. \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{a}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} \end{array} \right\} r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- تحويل مثلثي لجبري : $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$
- دستور (دوموافر) رفع لأس : $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$
- لايجاد الجذرين التربيعيين
$z' = z + \vec{u}$ انسحاب :
دوران : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
تحاكي : $z' - \omega = k(z - \omega)$

- المبدأ الأساسي في العد:
عدد الطرق لتجربة يساوي جداء كافة المجموعات لهذه التجربة.

- عند توزيع كلمة أو عدد على عدة خانات فإذا كان هناك مجال للتكرار $(n)^r$ وإن كانت مختلفة مثنى مثنى نستخدم $n!$

- التوافيق: عندما نعطي مجموعة جزئية من كلية عشوائياً
$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots}{r!}$$

- الترابيب: هي كل قائمة مأخوذة من عناصر E وبنودها مختلفة مثنى مثنى:
$$P_n^r = \underbrace{n(n-1)(n-2)}_{r \text{ مرة}}$$

- التباديل: نستخدمه عند توزيع كراسي أو منصب بعد تنازلي: $n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times 1$

- خواص هامة: $\binom{n}{1}=n$ ، $\binom{n}{n}=1$ ، $\binom{n}{0}=1$

- $$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

- عندما نطلب تعيين قيم n في معادلة $\binom{n}{2}=36$ نأخذ بداية شرط الحل وهو $n \geq r$ وبعدها نفك التوافيق للوصول إلى الحل.

- منشور ذو الحدين:
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n\cdot b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

- لإيجاد صيغة الحد ذي الدليل r أو الحد الثابت المستقل عن x نستخدم:
$$T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$$

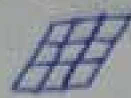
- أنواع السحب

معاً	دون إعادة	مع الإعادة
نستخدم توافيق $\binom{n}{r}$	نستخدم ترتيب	نستخدم $(n)^r$
$n(\Omega)=\binom{n}{r}$	$n(\Omega)=P_n^r$	$n(\Omega)=(n)^r$
	وراء كل عملية سحب ينقص العدد (1)	نكرر الكرة نفسه ولا ينقص منه

(في حال الاحتمالات نضرب بعدد مرات السحب)

- لإيجاد عدد المضلعات التي تشكل مثلثاً بشكل عام أو (مثلث، مضلع رباعي، مخمس، سداسي...) نأخذ توافيق
$\binom{n}{r}$ (n: عدد رؤوس المضلع، r: عدد أضلاع الشكل)

- لإيجاد عدد (المستطيلات، المتوازيات، المربعات...) لشبكة نستخدم:



$$\binom{n}{2}\times\binom{\bar{n}}{2} = ???$$

حيث n: عدد الأضلاع الأفقية، $\bar{n}$: عدد الأضلاع الشاقولية

- لإيجاد تكامل بدلالة مضاعفات الزاوية (a) ثم إيجاد تكامل نحوله بعدها تبعاً لدستوري أويلر
$$\cos(a) = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \quad ، \quad \sin(a)=\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}$$
مثلاً:
$$\cos^3(a) = \left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ia}+e^{-ia}\right)^3$$
وبعدها نكمل حسب دستور الشروح ثم نطبق قواعد التابع الأصلي لإيجاد التكامل.

* احتمال أي حدث: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ الممكنة / الكلية

* قوانين الاحتمالات بشكل عام:
- $1 \geq P(A) \geq 0$
- الحدث المعاكس $P(\bar{A}) = 1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ احتمال اجتماع حدثين
- المستحيل $P(\phi)=0$ ، أكيد $P(\Omega)=1$
- $P(A)+P(B)+P(C)+\ldots=1$
- الاحتمال الشرطي $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
للمعرفة أن الاحتمال الشرطي يذكر عبارات (بشرط، علماً، إذا علمت...)
- حدثين مستقلين $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

- في جميع مسائل الصناديق أو الورشات أو الألعاب نستخدم شجرة الاحتمالات لتسهيل الحل مع مراعاة قواعد الشجرة وهي: مجموع احتمالات فرعين $= 1$ وعند الانتقال من فرع لفرع نضرب ومن شجرة لشجرة نجمع

- التوقع الرياضي: $E(X)=\sum x_i \times p_i$
- التباين: $V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$
- الانحراف المعياري: $\sigma(x)=\sqrt{V(x)}$

- يتم المتغير العشوائي (ن) X بأخذ قيمه حسب نص المسألة .

- نقول عن متحولين عشوائيين X و Y أنهما مستقلان احتمالياً إذا تحقق الشرط:

$$P(X=x_n \cap Y=y_n) = P(X=x_n) \times P(Y=y_n)$$

- التجربة البرنولية : عندما نهتم في مسألة أو نركز على حدث ما فنحن أمام تجربة برنولية كأن نلقي حجر نرد خمس مرات ونهتم بعدد مرات ظهور الشعار .

- عندما يطلب إكمال جدول ناتج عن تجربة برنولية نبدأ بالرمز $(P)^n = P(X=k)$

(والله الموفق)

- إعداد الأستاذ د. : أحمد عبد الناصر زين
مدرس في معاهد وجامعات دمشق