Hyperbolic functions
الدوال الزائدية
Math 111
Lecture 10

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تعريف :

تعرف دالة الجيب الزائدي والتي يرمز لها بالرمز sinh كما يلي

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

تعريف :

تعرف دالة الجيب الزائدي والتي يرمز لها بالرمز sinh كما يلي

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

تعرف دالة جيب التمام الزائدي والتي يرمز لها بالرمز cosh كما يلي

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ملحوظات:

- مدى الدالة sinh هو $\mathbb{R}$ و مدى الدالة cosh هو $[1, \infty)$.

ملحوظات:

- مدى الدالة sinh هو $\mathbb{R}$ و مدى الدالة cosh هو $[1, \infty)$.
- الدالة sinh دالة فردية بينما cosh دالة زوجية.

بيان الدالة

$y = \cosh x, \qquad y = \sinh x$

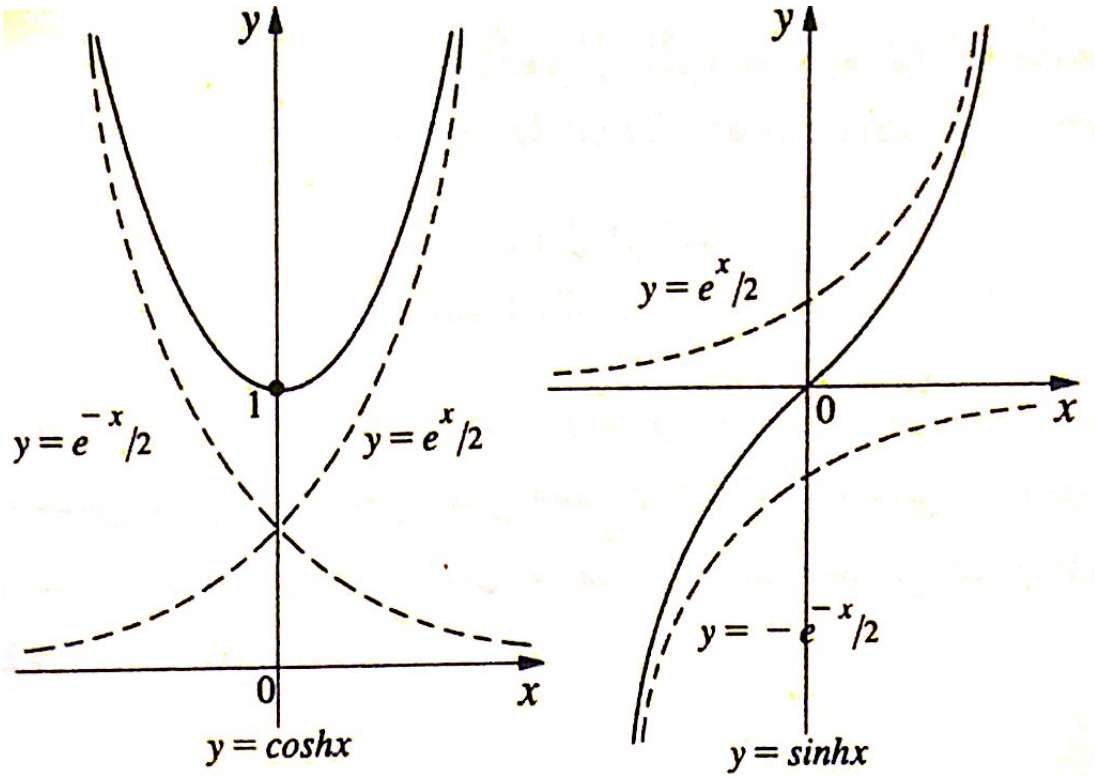

Figure:

مبرهنة :

$$(1)\ \cosh x + \sinh x = e^{x}, \qquad (2)\ \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$$

مبرهنة :

$$(1)\ \cosh x + \sinh x = e^{x}, \qquad (2)\ \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

مبرهنة:

$$(1)\ \cosh x + \sinh x = e^{x}, \qquad (2)\ \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

البرهان:

$$(\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^{x} e^{-x} = e^{0} = 1.$$

خصائص الدوال الزائدية :

مبرهنة:

- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$

خصائص الدوال الزائدية :

مبرهنة:

- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

خصائص الدوال الزائدية :

مبرهنة:

- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,
- $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$,

خصائص الدوال الزائدية :

مبرهنة :

- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$
- $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$
- $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y,$

خصائص الدوال الزائدية :

مبرهنة :

- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$
- $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$
- $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y,$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x,$

خصائص الدوال الزائدية :

مبرهنة :

- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$
- $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$
- $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y,$
- $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x,$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1.$

مبرهنة :

- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$

مبرهنة :

- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \neq 0,$

مبرهنة :

- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \neq 0,$
- $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$

مبرهنة :

- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \neq 0,$
- $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$
- $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \neq 0.$

بيان الدالة

$$y = \coth x, \qquad y = \tanh x$$

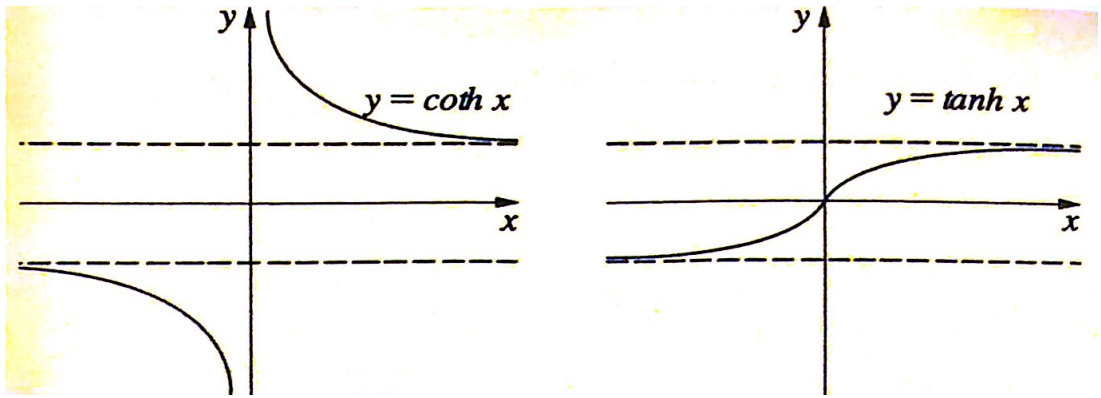

Figure:

بيان الدالة

$$y = \operatorname{csch} x, \qquad y = \operatorname{sech} x$$

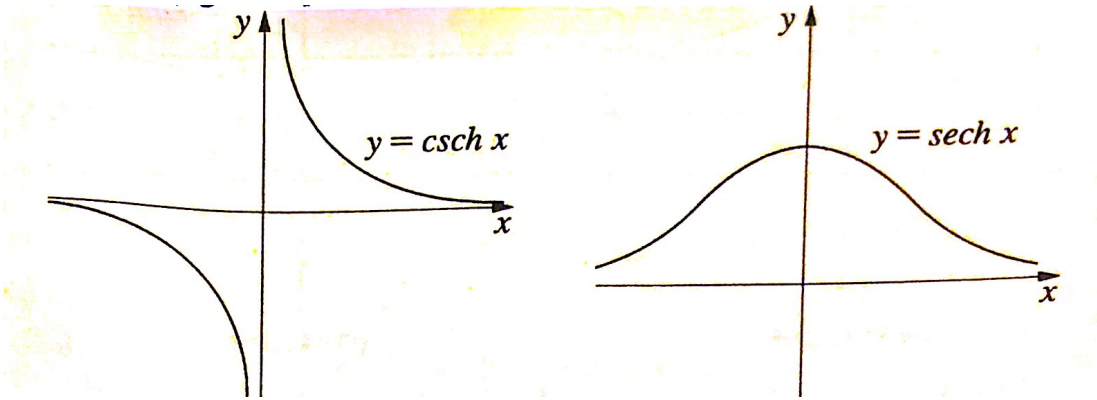

Figure:

مبرهنة :

- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$

مبرهنة :

- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$
- $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x,$

مبرهنة :

- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$
- $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x,$
- $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y},$

مبرهنة :

- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$
- $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x,$
- $\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y},$
- $\tanh(x - y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y},$

مبرهنة :

- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$
- $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x,$
- $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y},$
- $\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y},$
- $\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$

Thanks for listening.