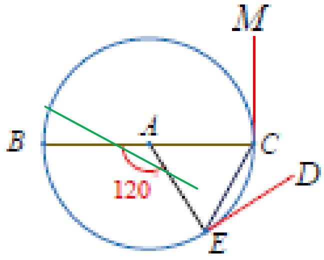
# بحث الدائرة

1) $[BC]$ قطر في الدائرة φ مركزها A .
E نقطة من هذه الدائرة تُحقق $\widehat{BAE} = 120^o$

1 . احسب قياسات الزوايا الآتية
$\widehat{CAE}$ ، $\widehat{ECB}$ ، $\widehat{CBE}$

2 . احسب قياسات الزاوية المماسية $\widehat{CED}$ و قياس $\widehat{BCM}$




**الحل :**

1 .

* الزاوية $\widehat{CAE}$ مكملة للزاوية $\widehat{BAE}$ ومنه :

$\widehat{CAE} = 180 - 120 = 60^o$

* الزاوية ECB محيطية مشتركة مع الزاوية المركزية CAB بذات القوس فهي تساوي نصفها وبالتالي:

$ECB = \frac{1}{2}\ EAB = \frac{1}{2}\ 120 = 60^o$

* الزاوية CBE محيطية مشتركة مع الزاوية المركزية CAE بذات القوس في تساوي نصفها وبالتالي:

$ECB = \frac{1}{2}\ EAB = \frac{1}{2}\ 60 = 30^o$

2 .

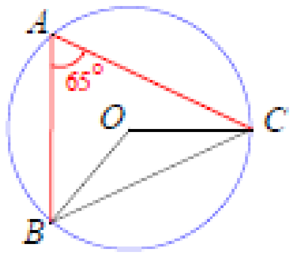
* الزاوية المماسية CED مشتركة مع الزاوية المحيطية CBE بذات القوس فهما زاويتان متساويتان وبالتالي :

$\widehat{CED} = 30^o$

* الزاوية المماسية BCM تقاس بنصف قياس القوس BC
وبما أن قياس القوس $BC = 180^o$ إذاً :

$BCM = \frac{1}{2} \times 180 = 90^o$

2) A و B و C ثلاث نقاط من دائرة مركزها O
نعلم أن $\widehat{BAC} = 65^o$
احسب قياس كل من :
1 . $\widehat{BOC}$
2 . $\widehat{OBC}$
3 . $\widehat{OCB}$




**الحل :**

1 . الزاوية $\widehat{BOC}$ مركزية مشتركة مع الزاوية المحيطية $\widehat{BAC}$ بالقوس BC وبالتالي :

$\widehat{BOC} = 2\ BAC = 2 \times 65^o = 130^o$

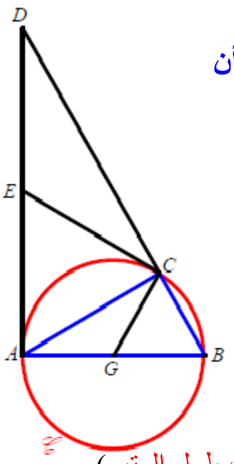
2 . المثلث BOC متساوي الساقين ، زاوية الرأس $\hat{O} = 130^o$

مجموع زوايا القاعدة $\widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180 - 130 = 50^o$

$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{50}{2} = 25^o$

3) ABC مثلث قائم في C ومرسوم في الدائرة φ فيه :
$AB = 12$ و $\widehat{BAC} = 30^o$ ، مماس الدائرة φ في النقطة A يتقاطع مع المستقيم BD في النقطة D .

1 . احسب مساحة المثلث ACD .
2 . لتكن E منتصف القطعة AD ، أثبت أن CE مماس للدائرة .
3 . لتكن G مركز الدائرة φ ، أثبت أن الرباعي AGCE هو دائري .




**الحل :**

1 . AB وتر المثلث القائم هو قطر للدائرة المارة برؤوسه .

نحسب أطوال المثلث ABC :

بما أن الزاوية $\widehat{BAC} = 30$

الطول $BC = 6$

( لأن الضلع المقابل للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر )

نحسب AC حسب فيثاغورث :

$AB^2 = BC^2 + AC^2$
$(12)^2 = (6)^2 + AC^2$
$144 = 36 + AC^2$
$AC^2 = 144 - 36 = 108$
$AC = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$

* المستقيم AD مماس عمودي على نصف القطر .

ومنه الزاوية $\widehat{DAB} = 90^o$ وبالتالي :

$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} - \widehat{CAB}$
$= 90 - 30 = 60^o$

* المثلث ACD قائم في C

( لأن الزاوية $\widehat{DCA}$ مكملة للزاوية $\widehat{ACB}$ )

نحسب CD :

$\tan DAC = \frac{CD}{AC}$

$\tan 60 = \frac{CD}{6\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} = \frac{CD}{6\sqrt{3}}$

$CD = \sqrt{3} \times 6\sqrt{3} = 6 \times 3 = 18$

* نحسب مساحة المثلث ACD

$S_{(ACD)} = \frac{CD \times AC}{2} = \frac{6\sqrt{3} \times 18}{2} = \frac{108\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$

2 . CE خط متوسط في المثلث القائم ACD يساوي نصف طول الوتر AD أي أن :

$CE = AE$ فالمثلث AEC متساوي الساقين

فيه الزاوية $A = 60^o$

فالمثلث AEC متساوي الأضلاع فيه الزاوية $\widehat{ECA} = 60^o$

الزاوية $\widehat{GCA} = 30^o$ في المثلث المتساوي الساقين AGC

( لأن ضلعاه أنصاف أقطار في الدائرة )

$\widehat{ECG} = \widehat{ECA} + \widehat{ACG}$

$\widehat{ECG} = 60 + 30 = 90^o$

. 3

الزاوية $\widehat{GCE} = 90$ إثباتاً

الزاوية $\widehat{EAG} = 90$ مماس عمودي على نصف القطر

$\widehat{GCE} + \widehat{EAG} = 90 + 90 = 180$

ومنه الرباعي AGCE دائري .

(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

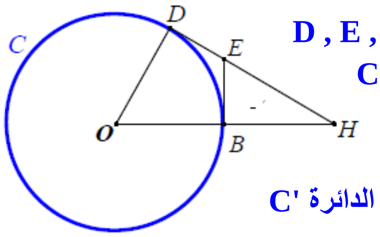
---

**4) في الشكل المرسوم جانباً :**

**BE و DH مماسان للدائرة C ( O , 6 ) في النقطتين B و D على التوالي $\widehat{BOD} = 60^o$ .**

**1 . احسب DH**

**2 . أثبت أن النقاط D , E , B , O واقعة على دائرة واحدة C' عين مركزها وارسمها**




**3 . احسب طول نصف قطر الدائرة C'**

**الحل :**

. 1

بما أن DH مماس للدائرة فهو عمودي على نصف القطر

أي أن OD ⊥ DH وبالتالي المثلث DOH قائم الزاوية في D

$\hat{D} = 90^o$ إثباتاً

$\hat{O} = 60^o$ فرضاً

$\hat{H} = 180 - ( 90 + 60 ) = 180 - 150 = 30^o$

$\tan H = \frac{OD}{DH}$

$\tan 30^o = \frac{6}{DH}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{DH} \Longrightarrow DH = \frac{6 \times \sqrt{3}}{1} = 6\sqrt{3}$

ويمكن أيضاً حسابه عن طريق فيثاغورث في المثلث القائم HDO

. 2

بما أن EB مماس للدائرة فهو عمودي على نصف القطر

أي أن OB ⊥ EB ومنه الزاوية $\hat{B} = 90^o$

$\hat{D} + \hat{B} = 90 + 90 = 180^o$

الرباعي ODEB رباعي دائري

لأنه ( إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري )

وبالتالي النقاط O , B , E , D تقع على دائرة واحدة C'

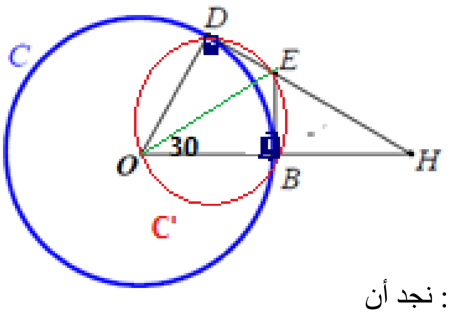
مركزها منتصف الوتر المشترك OE

2 . نصل OE فيكون منصف للزاوية $\hat{O}$

وبما أن قياس الزاوية $\hat{O} = 60^o$ فرضاً نجد أن :

قياس الزاوية $\widehat{DOE} = 30^o$

المستقيم EC مماس للدائرة في C لأنهُ عمودي على نصف القطر GC .




في المثلث القائم ODE : نجد أن

$COS(\widehat{DOE}) = \frac{OD}{OE}$

$COS\ 30^o = \frac{6}{OE}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{OE}$

$OE = \frac{2 \times 6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$

ومنه نصف القطر :

$R = \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

---

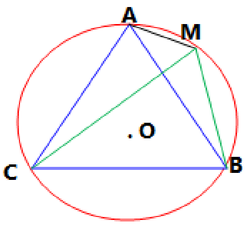
**5) ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة C مركزها O ، M نقطة من الدائرة C**

**1 . احسب قياس كل من الزوايا :**

**1) $\widehat{AMC}$ 2) $\widehat{BMC}$ 3) $\widehat{AMB}$**

**2 . ماذا تسمى نصف المستقيم MC**

**الحل :**




1 . بما أن المثلث متساوي الأضلاع

فكل زاوية من زواياه تساوي $60^o$

الزاوية AMB مكملة للزاوية ACB

أي أن :

$\widehat{AMB} = 180 - 60 = 120^o$

الزاويتان $BMC = BAC = 60^o$

( لأنهما زاويتان محيطيتين مشتركتان بذات القوس )

الزاويتان $AMC = CBA = 60^o$

( لأنهما زاويتان محيطيتين مشتركتان بذات القوس )

2 . MC منصف للزاوية AMB

**6)** A , B , C, D نقاط من دائرة C ، نعلم أن $\widehat{ABC} = 22^o$

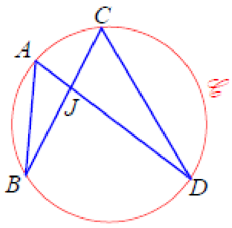
$\widehat{BAD} = 58^o$ الوتران AD ، BC متقاطعان في J

احسب قياس كل من :

1- $\widehat{BCD}$

2- $\widehat{CDA}$

3- $\widehat{CJD}$




**الحل :**

1- $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 58^o$

( لأنهما محيطيتان مشتركتان بذات القوس BD )

2- $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 22^o$

( لأنهما محيطيتان مشتركتان بذات القوس AC )

3- في المثلث CJD :

$\widehat{CJD} = 180 - ( 58 + 22 ) = 180 - 80 = 100^o$

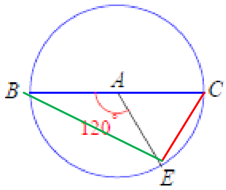
---

**7)** BC قطر في الدائرة C مركزها A ، E نقطة من هذه الدائرة تحقق $\widehat{BAE} = 120^o$ . F نقطة من C تختلف عن E, C, B احسب قياسات الزوايا الآتية :

1- $\widehat{CAE}$

2- $\widehat{ECB}$

3- $\widehat{CBE}$




**الحل :**

1 - الزاوية CAE مكملة للزاوية BAE أي أن :

$\widehat{CAE} = 180 - 120 = 60^o$

2- $\widehat{ECB} = \frac{1}{2}\ \widehat{EAB}$

$\widehat{ECB} = \frac{1}{2} \times 120 = 60^o$

( لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس EB )

3- $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\ \widehat{CAE}$

$\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \times 60 = 30^o$

( لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس EC )

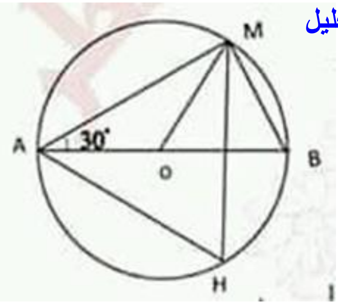
## مسائل امتحانية

**8)** $[AB]$ قطر في دائرة C مركزها O ونصف قطرها يساوي 5 cm . النقطة M تقع على الدائرة بحيث يكون $\widehat{MAB} = 30^O$

1- احسب قياس الزاوية $\widehat{AMB}$ وقياس القوس AM

2 - ما نوع المثلث OMB مع التعليل

3- علل قياس الزاوية $\widehat{ABM}$ يساوي قياس الزاوية $\widehat{AHM}$




**الحل :**

1- $\widehat{AMB} = 90$ زاوية محيطية تحصر قوس نصف الدائرة .

المثلث AMB قائم وفيه $\widehat{MAB} = 30$

وهي زاوية محيطية قياس القوس المقابل لها MB = 60

وبما أن AB قطر فالقوس AB = 180

وبالتالي قياس القوس AM :

AM = 180 – 60 = 120

2 – المثلث OMB متساوي الساقين . ( لأن ضلعاه أنصاف أقطار في الدائرة . )

وفيه زاوية MBA = 60 فهو مثلث متساوي الأضلاع .

3 – $\widehat{ABM} = \widehat{AHM}$ زاويتان محيطيتان مشتركتان بذات القوس AM

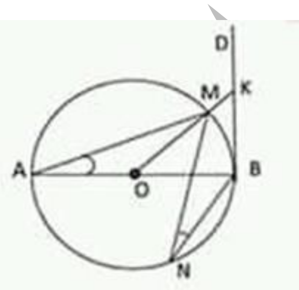
---

**9)** دائرة مركزها ( O ) قياس $\widehat{MNB} = 15$

BD مماس . نمدد OM ليقطع المماس K بحيث BK = 5

1 - احسب قياس القوس MB ، واستنتج قياس الزاوية $\widehat{KOB}$ وقياس الزاوية $\widehat{MAB}$

2 – احسب طول $[OK]$ ، ثم احسب نصف قطر الدائرة OB .




**الحل :**

1 – بما أن قياس الزاوية المحيطية $\widehat{MNB} = 15$ فقياس القوس المقابل يساوي ضعف قياسها MB = 30

$\widehat{KOB} = 2\ \widehat{MNB} = 30$

( لأن الزاوية المركزية تساوي ضعفي الزاوية المحيطية المشتركة معها بذات القوس )

$\widehat{MAB} = \widehat{MNB} = 15$

( زاويتان محيطيتان مشتركتان بذات القوس )

2 - بما أن BD مماس للدائرة في B

BD ⊥ BO

فالمثلث KBO قائم

في الصفحة التالية

ومنه :

$\sin(\widehat{BOK}) = \frac{BK}{OK}$

$\sin 30 = \frac{5}{OK}$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{OK} \Longrightarrow OK = \frac{5\times 2}{1} = \frac{10}{1} = 10$

$\tan(\widehat{BOK}) = \frac{BK}{OB}$

$\tan 30 = \frac{5}{OB}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{OB} \Longrightarrow OB = \frac{5\times\sqrt{3}}{1} = \frac{5\sqrt{3}}{1} = 5\sqrt{3}$

---

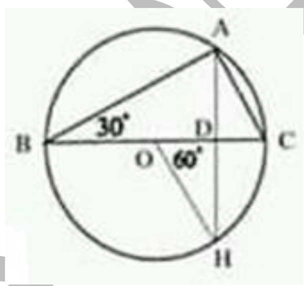
**10)** في الشكل المرسوم جانباً :

[BC] قطر في دائرة مركزها O . H نقطة من الدائرة حيث $\widehat{COH} = 60$ وقياس $\widehat{ABC} = 30$ والمطلوب :

1- أثبت أن AC // OH

2 - أثبت أن القوس AB = 2 CH

3- أثبت أن AH يعامد OC




**الحل :**

1 – المثلث ABC قائم في A

( لأن ضلعه BC قطر الدائرة المارة برؤوسه )

وفيه قياس الزاوية $\widehat{ABC} = 30$

وبالتالي قياس الزاوية $\widehat{ACB} = 60$

ومنه :

$\widehat{ACB} = \widehat{COH} = 60$ ( زاويتان متبادلتان داخلاً )

ومنه : AC // OH

2 - بما أن قياس الزاوية المحيطية $\widehat{ACB} = 60$ فقياس القوس المقابل يساوي ضعف قياسها AB = 120

و بما أن قياس الزاوية المركزية $\widehat{COH} = 60$ تقاس بقياس القوس المقابل لها CH = 60

ومنه : قياس القوس AB = 2 CH

3 - لدينا قياس الزاوية المحيطية $\widehat{CAH} = \frac{1}{2}\widehat{COH} = 30$

( لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس )

فالمثلث ADC فيه :

$\widehat{ACB} = 60$ والزاوية $\widehat{CAH} = 30$

فيكون قياس الزاوية $\widehat{ADC} = 90$

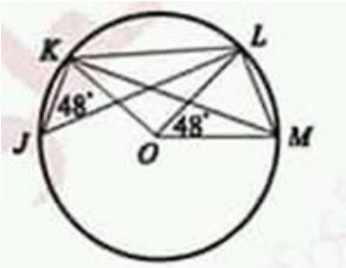
ومنه $AH \perp OC$

**11)** لتكن J , K , L , M نقاط من دائرة مركزها O

$\widehat{KJL} = \widehat{LOM} = 48$

1 – احسب قياسات الأقواس LM ، LK وقياس الزاوية $\widehat{LOK}$

2 – احسب قياسات زوايا المثلث KLM




**الحل :**

1 - بما أن قياس الزاوية المركزية $\widehat{LOM} = 48$ تقاس بقياس القوس المقابل لها LM = 48

- بما أن قياس الزاوية المحيطية $\widehat{KJL} = 48$ فقياس القوس المقابل يساوي ضعف قياسها LK = 96

قياس الزاوية $\widehat{LOK} = 96$ زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها LK = 96

2 – المثلث KLM فيه :

$\widehat{KML} = \widehat{KJL} = 48$

( زاويتان محيطيتان مشتركتان بذات القوس )

- $\widehat{LKM} = \frac{1}{2}\widehat{LOM}$

$\widehat{LKM} = \frac{1}{2} \times 48 = 24^o$

( لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس LM )

ومنه :

$\widehat{KLM} = 180 - (48 + 24) = 180 - 72 = 108$

---

**12)** في الشكل المرسوم جانباً :

A , N , M ,B نقاط من دائرة مركزها O

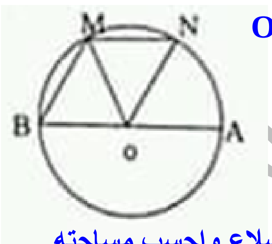
وطول قطرها AB = 8

فيه الأقواس BM = MN = NA

1 - احسب قياس الزاويتين $\widehat{AON}$ ، $\widehat{ABM}$

2 - استنتج أن BM // ON

3 – أثبت أن المثلث ONM متساوي الأضلاع واحسب مساحته .




**الحل :**

1 - بما أن AB قطر يحصر نصف قوس الدائرة AB = 180

$BM = MN = NA = \frac{180}{3} = 60$

$\widehat{AON} = 30$ زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها NA

مجموع قياس القوسين MN + NA = 60 + 60 = 120

وبالتالي قياس الزاية: $\widehat{ABM} = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} \times 120 = 60$

( زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها )

2 - $\widehat{MBA} = \widehat{NOA} = 60$ ( زاويتان بوضع التناظر )

ومنه BM // ON

في الصفحة التالية

3 - المثلث OMN متساوي الساقين

( لأن ضلعاه أنصاف أقطار في الدائرة )

وفيه قياس الزاوية $\widehat{MON} = 60$ ومنه المثلث متساوي الأضلاع

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

---

**13) في الشكل المرسوم جانباً :**

**دائرة مركزها O قطرها AD**

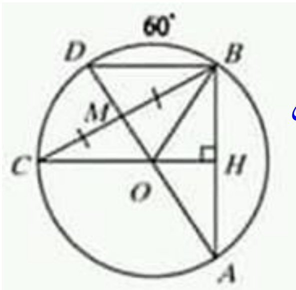
**قياس القوس AB = 60**

**M منتصف BC**

**1- مانوع المثلث DBA ، واحسب قياس زواياه .**

**2- أثبت أن OD يعامد CB**

**3 - احسب قياس الزاوية $\widehat{BOC}$**




**الحل :**

1 – المثلث DBA قائم في B

( لأن ضلعه AD قطر الدائرة المارة برؤوسه )

$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

( زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها )

$\widehat{BDA} = 180 - ( 90 + 30 ) = 180 - 120 = 60$

2 -

في المثلث COB بما أن M منتصف BC فإن $OM \perp BC$

( لأن المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها يكون عمودياً على ذلك الوتر )

ومنه OD يعامد CB

3 –

المثلث COM متساوي الساقين

( لأن ضلعاه أنصاف أقطار في الدارة )

وبالتالي الارتفاع OM هو منصف للزاوية $\widehat{COB}$

وقياس الزاوية $\widehat{BOD} = 60$

زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها BD

وبالتالي : $\widehat{COD} = \widehat{BOD} = 60$

ومنه : $\widehat{BOC} = 120$

---

**14) في الشكل المرسوم جانباً :**

**[AB] قطر في الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 5 فيها :**

**[FD] يعامد [AB] في النقطة E**

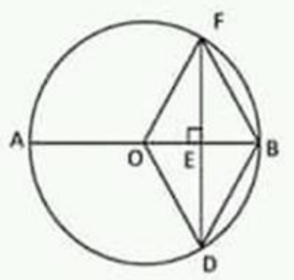
**القوس AF = 2BF**

**1 - أثبت أن قياس القوس BF = 60**

**2 - استنتج نوع المثلث BOF بالنسبة لأضلاعه .**

**3- احسب الأطوال FB ، EB ، EF**

**4- أثبت أن الرباعي FODB معين واحسب مساحته .**




**الحل :**

1 - بما أن AB قطر يحصر نصف قوس الدائرة AB = 180

ولدينا القوس AF = 2BF ومنه :

$AF + BF = 180$

$2\,BF + BF = 180 \Longrightarrow BF = \frac{180}{3} = 60$

2 -

المثلث BOF متساوي الساقين ( لأن ضلعاه أنصاف أقطار )

وفيه قياس الزاوية المركزية $\widehat{FOB} = 60$

ومنه المثلث BOF متساوي الأضلاع .

-3

بما أن المثلث BOF متساوي الأضلاع فأن:

$OB = OF = FB = 5$

الارتفاع FE هو متوسط ومحور ومنصف بأن واحد في المثلث المتساوي الأضلاع . ومنه :

$EB = \frac{1}{2} BO = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5$

وكما نعلم أن الارتفاع في المثلث المتساوي الأضلاع يساوي :

$EF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

-4

المثلث FOD متساوي الساقين ( لأن ضلعاه أنصاف أقطار )

الارتفاع OE هو متوسط ومحور ومنصف بأن واحد في المثلث المتساوي الساقين .

فالرباعي FODB مُعين ( لتناصف قطريه وتعامدهما )

**مساحة المُعين = $\frac{\text{جداء قطريه}}{2}$**

القطر FD يساوي :

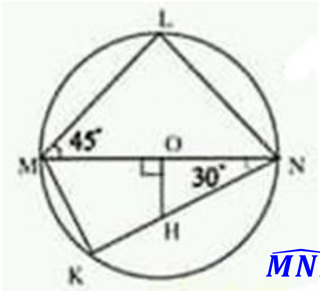
$FD = 2 \times EF = 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2}$

$S = \frac{OB \times FD}{2} = \frac{5 \times \frac{10\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{50\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{4}$

**15)** في الشكل المرسوم جانباً :

K , M , L , N نقاط من دائرة مركزها O حيث MN قطر في الدائرة طوله 8 cm

$\widehat{KNM} = 30$ ، $\widehat{LMN} = 45$




1- ما نوع المثلث LMN بالنسبة لأضلاعه ، واستنتج قياس الزاوية $\widehat{MNL}$

2- احسب قياس كل من $\widehat{MKN}$ ، القوس LMK

3 - احسب طول كلاً من ML ، MK ، KN

4- إذا كان $HO \perp MN$ أثبت أن الرباعي OHKM دائري عين مركز الدائرة المارة برؤوسه .

**الحل :**

1- المثلث LMN قائم الزاوية

( لأن ضلعه MN قطر الدائرة المارة برؤوسه )

وفيه $\widehat{LMN} = 45$ فهو مثلث متساوي الساقين

قياس الزاوية $\widehat{LNM} = 45$

2- الزاوية $\widehat{MKN} = 90$ ( محيطية تحصر قوس نصف الدائرة )

قياس القوس LM = 90 ( مقابل للزاوية المحيطية $\widehat{LNM}$ )

قياس القوس MK = 60 ( مقابل للزاوية المحيطية $\widehat{MNK}$ )

ومنه قياس القوس LMK = 90 + 60 = 150

3 –

في المثلث القائم MNL نجد :

$$\cos \widehat{LMN} = \frac{ML}{MN}$$

$$\cos 45 = \frac{ML}{MN}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ML}{8} \Longrightarrow ML = \frac{8 \times \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

في المثلث القائم KMN نجد :

$$KM = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

( لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر )

في المثلث القائم KMN نجد :

$$\cos \widehat{MNK} = \frac{KN}{MN}$$

$$\cos 30 = \frac{KN}{MN}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{KN}{8} \Longrightarrow KN = \frac{8 \times \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

4 – الرباعي OHKM

$\widehat{MOH} = 90$ لأن $HO \perp MN$

$\widehat{MKN} = 90$ ( محيطية تحصر قوس نصف الدائرة )

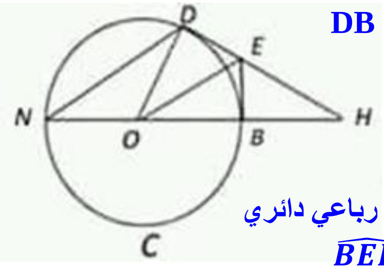
( إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري )

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك MH

بين المثلثين MHO , MHK

**16)** في الشكل المرسوم جانباً :

C دائرة مركزها O و [NB] قطر فيها و D نقطة من الدائرة بحيث القوس $ND = \frac{2}{3} NB$ و ( BE ) ، ( DH ) مماسان للدائرة في النقطتين B و D على التوالي .




**المطلوب :**

1 - أثبت أن قياس القوس DB = 60

2 – احسب قياسات زوايا المثلث HOD

استنتج أن $OB = \frac{1}{2} OH$

3 - أثبت أن الرباعي ODEB رباعي دائري واستنتج قياس الزاوية $\widehat{BED}$

4- أثبت أن المثلث OEH متساوي الساقين واحسب قياس الزاوية $\widehat{BOE}$

5 - أثبت أن DN // OE

**الحل :**

1 – بما أن NB قطر للدائرة فقياس القوس NB = 180

نعوض $ND = \frac{2}{3} NB = \frac{2}{3} \times 180 = \frac{360}{3} = 120$

ومنه قياس القوس : DB = 180 – 120 = 60

2 –

بما أن DH مماس للدائرة فهو عمودي على نصف القطر

فالمثلث ODH مثلث قائم فيه D = 90

قياس الزاوية $\widehat{DOH} = 60$ ( مركزية مقابلة للقوس BD )

ومنه قياس الزاوية $\widehat{H} = 180 - (90 + 60) = 180 - 150 = 30$

$DO = \frac{1}{2} OH$ ( الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر )

لدينا OD = OB ( أنصاف أقطار في الدائرة )

ومنه : $OB = \frac{1}{2} OH$

3 –

بما أن EB مماس للدائرة فالمثلث EBO قائم في B

$\widehat{D} + \widehat{B} = 90 + 90 = 180$

الرباعي ODEB رباعي دائري

( إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

بما أن قياس الزاوية $\widehat{BOD} = 60$

ومنه قياس الزاوية $\widehat{BED} = 180 - 60 = 120$

4 –

لدينا $OB = \frac{1}{2} OH$ فأن B منتصف OH

ومنه نجد EB متوسط وارتفاع بأن واحد في المثلث OEH

ومنه المثلث OEH متساوي الساقين رأسه E

قياس الزاوية $\widehat{BOE} = \widehat{DHO} = 30$ ( زوايا القاعدة )

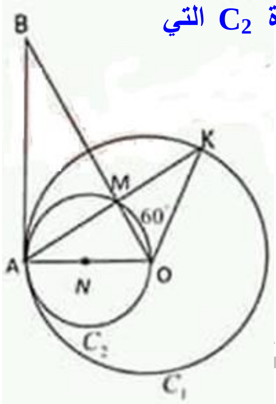
5 – لدينا $\widehat{DNB} = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

( زواية محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها )

ومنه الزاويتان $\widehat{DNB} = \widehat{EOB} = 30$ ( وهما في وضع التناظر )

ومنه DN // OE

**17) في الشكل المرسوم جانباً :**




**$C_1$ دائرة مركزها O و AO قطر للدائرة $C_2$ التي مركزها N**
**الدائرتان $C_1$ و $C_2$ متماستان داخلاً في النقطة A حيث AO = 4 ، BO = 8**
**قياس القوس OM = 60**
**BA مماس مشترك للدائرتين في النقطة A**

**والمطلوب:**

**1 - أثبت أن $BA = 4\sqrt{3}$**
**2 - احسب قياس القوس AM ثم استنتج قياسات زوايا المثلث AMO**
**3- احسب طول كل من OM ، AM ، BM**
**4- أثبت أن الرباعي BAOK دائري ، ثم عين مركز الدائرة المارة برؤوسه .**

**الحـل :**

**1** - بما أن BA مماس فهو عمودي على نصف القطر
فالمثلث BAO قائم حسب فيثاغورث :

$BO^2 = AB^2 + AO^2$
$(8)^2 = AB^2 + (4)^2$
$64 = AB^2 + 16$
$AB^2 = 64 - 16 = 48$
$AB = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

**2 –**
بما أن AO قطر للدائرة $C_2$ فأن قياس القوس AO = 180
ومنه قياس القوس AM = 180 – 60 = 120
المثلث AMO قائم في M ( لأن ضلعه قطر للدائرة المارة برؤوسه)
فيه : $\hat{M} = 90$
$\widehat{MAO} = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} \times 60 = 30$
( زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها )
ومنه قياس الزاوية :
$\widehat{M\,OA} = 180 - (90 + 30) = 180 - 120 = 30$

**3 –**
في المثلث القائم AMO نجد :
$OM = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \times 4 = 2$
( لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر )
حساب AM حسب فيثاغورث

$AO^2 = AM^2 + MO^2$
$(4)^2 = AM^2 + (2)^2$
$16 = AM^2 + 4$
$AM^2 = 16 - 4 = 12$
$AM = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

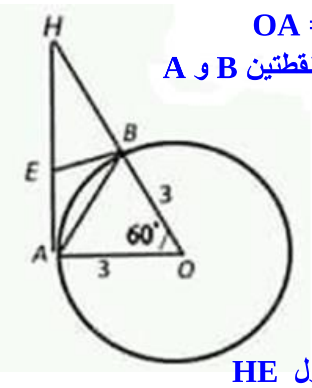
حساب BM :

BM = BO - OM = 8 – 2 = 6

**4-** المثلث AOK فيه :
OA = OK ( أنصاف أقطار في الدائرة في الدائرة )
فالمثلث متساوي الساقين
$\widehat{KAO} = \widehat{AKO} = 30$ ( زوايا القاعدة )
المثلث ABO قائم فيه :
$\widehat{AOM} = 60$
( زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس AM المقابل لها )
ومنه قياس الزاوية :
$\widehat{ABO} = 180 - (90 + 60) = 180 - 150 = 30$
ولدينا $\widehat{AKO} = 30$
فالرباعي BAOK دائري لتساوي زاويتان بجهة واحدة بالنسبة للقطعة المستقيمة AO .
مركز الدائرة هو منتصف الوتر BO للدائرة المارة برؤوسه .

---

**18) في الشكل المرسوم جانباً :**




**دائرة مركزها O ونصف قطرها OA = 3**
**EB ، HA مماسان للدائرة في النقطتين B و A**
**على الترتيب . $\widehat{BOA} = 60$**

**المطلوب:**

**1 – احسب قياس كلاً من الزاويتين $\widehat{BAH}$ ، $\hat{H}$**
**2- أثبت أن OH = 6 ثم احسب طول AH**
**3- احسب $\widehat{EHB}$ Cos واستنتج طول HE**
**4 – أثبت أن النقاط A, E , B , O تقع على دائرة واحدة . ثم عين مركز ها .**

**الحـل :**

**1** - بما أن HA مماس فهو عمودي على نصف القطر
فالمثلث AOH قائم في A
فيه قياس الزاوية $\widehat{BOA} = 60$
ومنه: $\hat{H} = 180 - (90 + 60) = 180 - 150 = 30$
لدينا قياس الزاوية : $\widehat{BAH} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$
( الزاوية المماسية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس AB ) .

**2 –**
بما أن المثلث AOH قائم في A فيه :
$AO = \frac{1}{2} OH$
$3 = \frac{1}{2} OH \Longrightarrow OH = 2 \times 3 = 6$
( في المثلث القائم الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر)
$\sin \hat{O} = \frac{AH}{OH}$
$\sin 60 = \frac{AH}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{6} \Longrightarrow AH = \frac{6 \times \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

في الصفحة التالية

-3

$Cos\ \widehat{EHB} = \frac{HB}{HE}$

$Cos\ 30 = \frac{3}{HE}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{HE} \Longrightarrow HE = \frac{3 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$

– 4

EB مماس للدائرة فهو عمودي على نصف القطر

أي أن قياس الزاوية $\widehat{EBO} = 90$

ولدينا $\widehat{EAO} = 90$

$\widehat{EBO} + \widehat{EAO} = 180$

الرباعي AEBO رباعي دائري

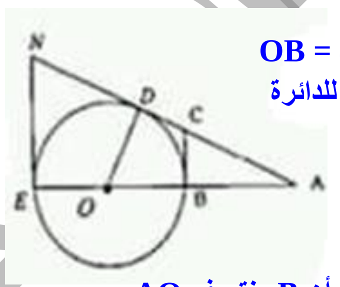
( إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري )

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك OE

بين المثلثين OEA , OEB

---

**19)** **في الشكل المرسوم جانباً :**




**دائرة مركزها O ونصف قطرها OB = 4**

**EN , NA , BC ثلاثة مماسات للدائرة**

**في النقاط E , D ,B على الترتيب**

**وقياس الزاوية $\hat{A} = 30$**

**المطلوب :**

**1- أثبت أن DOB = 60 ، واستنتج أن B منتصف AO**

**2 - أثبت أن النقاط O , D , C , B تقع على دائرة واحدة ، عين مركزها .**

**3 - أثبت أن $AD = 4\sqrt{3}$**

**4- احسب $Cos\ \hat{A}$ واستنتج أن $2EA = \sqrt{3}\ AN$**

**الحل :**

1 - بما أن HA مماس فهو عمودي على نصف القطر

فالمثلث ADO قائم في D

فيه قياس الزاوية $\hat{A} = 30$

ومنه: $\widehat{DOB} = 180 - (90 + 30) = 180 - 120 = 60$

( الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر ) $OB = \frac{1}{2}OA$

لدينا $OD = OB$ ( أنصاف أقطار في الدائرة )

ومنه : $OB = \frac{1}{2}OA$

وبالتالي B منتصف AO

– 2

بما أن CB مماس فهو عمودي على نصف القطر

فالمثلث CBO قائم في B

أي أن قياس الزاوية $\widehat{CBO} = 90$

ولدينا $\widehat{CDO} = 90$

$\widehat{CBO} + \widehat{CDO} = 180$

الرباعي ODCB رباعي دائري

( إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري )

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك OC

بين المثلثين ADO , CBO

– 3

حساب AD : حسب فيثاغورث في المثلث القائم ADO

$AO^2 = AD^2 + DO^2$

$(8)^2 = AD^2 + (4)^2$

$64 = AD^2 + 16$

$AD^2 = 64 - 16 = 48$

$AD = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

– 4

$Cos\ \hat{A} = Cos\ 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ......... ( 1 )

بما أن EN مماس فهو عمودي على نصف القطر

فالمثلث NEA قائم في E

$Cos\ A = \frac{EA}{NA}$ ......... ( 2 )

من ( 1 ) و ( 2 ) نجد أن :

$\frac{EA}{NA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه : $2\ EA = \sqrt{3}\ NA$

---

**20)** **في الشكل المرسوم جانباً :**

**[AB] قطر في الدائرة $C(O , R)$ ، نرسم المماس للدائرة C في النقطة A ونعين عليه النقطة D بحيث [BD] يقطع الدائرة C في النقطة H ، فإذا كانت النقطة E منتصف [AD] .**

**- برهن أن المثلث AHB قائم الزاوية ، وأن المثلث AEH متساوي الساقين .**

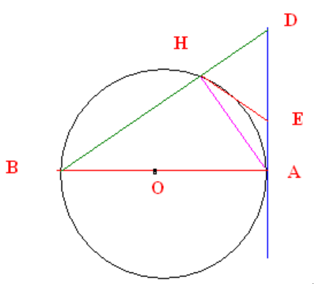
**الحل:**

الزاوية $A\hat{H}B$ محيطية

تحصر نصف قوس الدائرة

أي : $\hat{H} = \frac{1}{2} \times 180 = 90^{\circ}$

فالمثلث AHB قائم الزاوية في H .




الزاويتان $A\hat{H}D$ , $A\hat{H}B$ متكاملتان

$A\hat{H}D = 180^{\circ} - A\hat{H}B = 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ}$

لدينا HE متوسط في المثلث القائم AHD

وبما أن طول المتوسط في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر فإن :

$HE = AE$

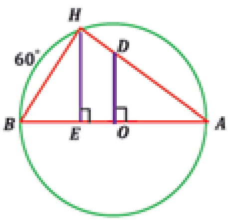
فالمثلث AEH متساوي الساقين .

**21)** في الشكل المرسوم جانباً :

دائرة $C(0,6)$ $[HE] \perp [AB]$

$[DO] \perp [AB]$

وقياس القوس $HB$ يساوي $60^\circ$




**والمطلوب :**

1- احسب قياسات زوايا المثلث $HAB$ وأطوال أضلاعه.

2- احسب $HE$ ثم $AE$ .

3- برهن أن المثلثين $DOA$, $HEA$ متشابهان ، احسب $OD$

4- برهن أن الرباعي $ODHB$ دائري ، ثم عين مركز الدائرة المارة برؤوسه .

**الحل:**

1- المثلث HAB قائم في H

( لأن ضلعه MN قطر الدائرة المارة برؤوسه )

$AB = 2R = 2 \times 6 = 12$

الزاوية المحيطية تقاس بنصف القوس BH أي :

$H\hat{A}B = 30^\circ \Longrightarrow H\hat{B}A = 60^\circ$

وبما أن الضلع المقابلة للزاوية $30^\circ$ في المثلث القائم تساوي نصف طول الوتر فإن :

$HB = \frac{1}{2} \times AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

حساب $HA$

$\cos 30^\circ = \frac{HA}{AB}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HA}{12} \Longrightarrow HA = \frac{12 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

2- حساب $HE$

في المثلث القائم HEA فيه $\hat{A} = 30^\circ$

بما أن الضلع المقابلة للزاوية $30^\circ$ تساوي نصف طول الوتر فإن

$HE = \frac{1}{2} HA = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

حساب $AE$

وحسب فيثاغورث في المثلث القائم HEA فإن :

$(HA)^2 = (HE)^2 + (AE)^2$

$(6\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{3})^2 + (AE)^2$

$36 \times 3 = 9 \times 3 + (AE)^2$

$(AE)^2 = 108 - 27 = 81 \Longrightarrow AE = 9$

3 - حساب $OD$

- DO // HE لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان

المثلثان DOA , HEA متشابهان حسب النظرية الأساسية .

$\begin{cases} ODA \\ EHA \end{cases} \quad \frac{OD}{EH} = \frac{DA}{HA} = \frac{OA}{EA}$

بأخذ النسبتين (3) , (1) ونعوض :

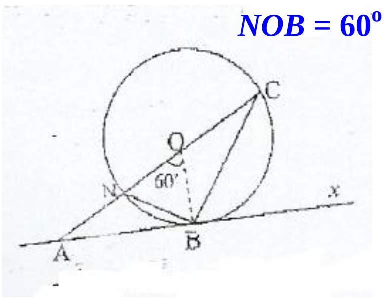
$\frac{OD}{3\sqrt{3}} = \frac{6}{9} \Longrightarrow OD = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{9} = \frac{18\sqrt{3}}{9} = 2\sqrt{3}$

4- الرباعي ODHB فيه زاويتان H , O قائمتان وهما متقابلتان ومتكاملتان فالرباعي دائري .

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك BD بين المثلثين DOB , DHB

**22)** في الشكل المرسوم جانباً دائرة $C\ (O, 5)$

$(Ax)$ مماس لها في $B$ قياس $NOB = 60^\circ$




المطلوب :

١) أوجد قياس كل من

$N\hat{B}A$ , $N\hat{C}B$

٢) ما نوع المثلث $CBN$

واحسب $BC$ , $NB$

٣) برهن أن المثلث $ANB$ متساوي الساقين ، واستنتج $\sin BAC$ .

**الحل:**

١) بما أن $N\hat{O}B = 60^\circ$ زاوية مركزية $\Longleftarrow N\hat{C}B = 30^\circ$

لأن ( الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس )

$N\hat{B}A = 30^\circ$ زاوية مماسية تساوي نصف القوس المقابلة

٢) المثلث $CBN$ قائم في B

( لأن المماس عمودي على نصف القطر)

NB = 5 ( لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر )

حسب فيثاغورث في المثلث القائم $CBN$

$BC^2 = CN^2 - NB^2$

$BC^2 = 100 - 25 = 75 \Longrightarrow BC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

٣)

المثلث ONB متساوي الأضلاع فيه :

قياس الزاوية $\widehat{ONB} = 60$

ومنه قياس الزاوية $\widehat{ANB} = 180 - 60 = 120$

( زاوية $\widehat{ONB}$ مكملة للزاوية $\widehat{ANB}$ )

ولدينا قياس الزاوية $\widehat{NBA} = \frac{1}{2}\widehat{NOB} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

( لأن قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المشتركة معها بذات القوس )

فيكون قياس الزاوية :

$\widehat{NAB} = 180 - (120 + 30) = 180 - 150 = 30$

ومنه $\widehat{NAB} = \widehat{NBA} = 30$

فالمثلث ANB متساوي الساقين

$\sin\widehat{BAC} = \sin 30 = \frac{1}{2}$

23) في الشكل المرسوم جانباً :

$C(O , R)$ دائرة حيث $AB = 4$

$BD = 5$ ، $( AB )$ مماس للدائرة

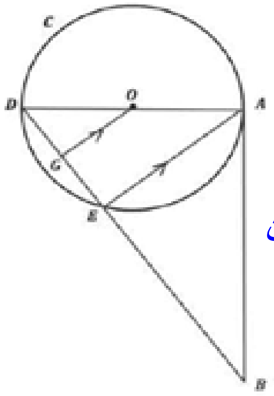
في A و $AE // OG$

1) احسب طول نصف قطر الدائرة C

2) برهن تشابه المثلثين $OGD , AED$

3) احسب $AE , ED$

4) برهن أن الرباعي OABG دائري وعين مركز الدائرة لمارة ا بروؤسه .




**الحل:**

١) المثلث BAD قائم في A

( لأن المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس )

حسب فيثاغورث في المثلث القائم BAD

$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$

$(5)^2 = (4)^2 + (AD)^2$

$(AD)^2 = 25 - 16 = 9 \Longrightarrow AD = \sqrt{9} = 3$

$R = \frac{3}{2} = 1.5$

٢) بما أن $AE // OG$ فرضاً

حسب المبرهنة الأساسية في التشابه المثلثان $OGD , AED$ متشابهان .

٣) حساب $AE$

المثلث $AED$ قائم في $\widehat{AED}$

( لأن الزاوية المحيطة التي تحصر قوس نصف الدائرة قائمة )

في المثلث القائم $BAD$ : $\sin B = \frac{AD}{BD}$

و في المثلث القائم $BEA$ : $\sin B = \frac{AE}{AB}$

بالمقارنة نجد أن :

$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AB} \Longrightarrow \frac{3}{5} = \frac{AE}{4} \Longrightarrow AE = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$

حساب $ED$

حسب فيثاغورث في المثلث القائم $AED$ :

$(AD)^2 = (AE)^2 + (ED)^2$

$(3)^2 = (\frac{12}{5})^2 + (ED)^2$

$(ED)^2 = 9 - \frac{144}{25} \Longrightarrow (ED)^2 = \frac{225}{25} - \frac{144}{25} = \frac{81}{25}$

$ED = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}$

٤)

بما أن $B\hat{A}O = B\hat{G}O = 90$ فهما متكاملتان

(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

ومنه OABG رباعي دائري .

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك OB

بين المثلثين BAO , BGO

24) في الشكل المرسوم جانباً :

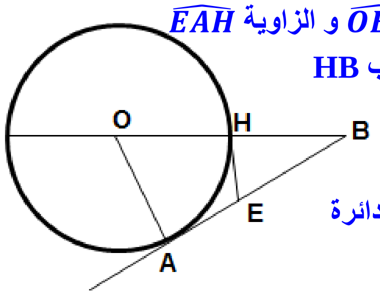
$C ( O , 6 )$ دائرة فيها $EH$ , $AB$ مماسان لها في النقطتين $A , H$ على الترتيب وقياس القوس $AH = 60$

١- احسب قياس الزاوية $\widehat{OBA}$ و الزاوية $\widehat{EAH}$

2- احسب $\tan \widehat{AOB}$ واحسب HB

3- أثبت أن $AE = \frac{1}{2} EB$

4- برهن أن النقاط $A , O , H , E$ تقع على دائرة واحدة ، عين مركزها .




**الحل:**

1- المثلث OBA قائم الزاوية في A

( لأن المماس عمود على نصف القطر )

$\widehat{HOA} = 60$ ( زاوية مركزية مقابلة للقوس AH )

$\widehat{B} = 180 - ( 90 + 60 ) = 180 - 150 = 30$

حساب $\widehat{EAH}$ :

$\widehat{EAH} = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

( قياس الزاوية المماسية تساوي نصف قياس القوس المقابل لها )

2 –

حساب $\tan \widehat{AOB}$ :

$\tan \widehat{AOB} = \tan 60 = \sqrt{3}$

حساب $HB$ :

في المثلث OBA القائم في A :

$AO = \frac{1}{2} OB$

$6 = \frac{1}{2} OB \Longrightarrow OB = 2 \times 6 = 12$

( لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر )

لدينا $AO = OH = 6$ ( أنصاف أقطار )

ومنه : $HB = OB - OH = 12 - 6 = 6$

3 –

حساب $AB$ :

$\cos \hat{B} = \frac{AB}{OB}$

$\cos 30 = \frac{AB}{OB}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{12} \Longrightarrow AB = \frac{12 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

حساب $EB$ : من المثلث القائم EHB :

$\cos \hat{B} = \frac{HB}{EB}$

$\cos 30 = \frac{HB}{EB}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{EB} \Longrightarrow EB = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$AE = AB - EB = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

أي أن : $AE = \frac{1}{2} EB$

4 –

بما أن $\widehat{OAE} = \widehat{EHO} = 90$ فهما متكاملتان

(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

ومنه AOHE رباعي دائري .

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك OE

بين المثلثين EHO , EAO