(نموذج تجريبي – نهاية المتتالية)

السؤال الأول:

لدينا المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$ معرفتان وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

والمتتالية w_n معرفة وفق: $w_n = u_n - v_n$

1. أثبت أنّ المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، عيّن أساسها وحدها الأول.
2. اكتب عبارة w_n بدلالة n ثم احسب نهاية w_n.
3. أثبت أن المتتالية t_n المعرفة وفق: $t_n = 3u_n + 8v_n$ متتالية ثابتة، ثم احسب نهايتها.
4. أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.
5. استنتج نهاية كلاً من u_n ، v_n.

السؤال الثاني:

لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. احسب u_1 ، u_2 ، v_1 ، v_2.
2. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $w_n = v_n - u_n$.
   a. بيّن أن المتتالية w_n هندسية.
   b. اكتب حدها العام وأوجد نهايتها.
3. ادرس اطراد كل من المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$ ثم استنتج أنهما متجاورتين.
4. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$
   برّهن أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ ثابتة، ثم استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$.

السؤال الثالث:

$(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين معرفتين وفق:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$$

1. برهن بالتدريج أنّ: $u_n < v_n$ (أياً يكن $n \in N$).
2. نفرض أنّ: $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ ، أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتين.

السؤال الرابع:

لدينا المتتالية المعرفة على N وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}$$

1. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. برهن أنّ: $u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
3. احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$ ثم استنتج أنها متقاربة.

السؤال الخامس:

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_1\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

برّهن أنّ من أجل $n \in N^*$:

$$\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

@bacmaths12 0941342868

السؤال السادس:

$(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على N^* وفق:

$$u_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\tfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)$$

1. احسب u_3, u_2, u_1.
2. أثبت أنّ: $u_n = \ln(n+1)$.
3. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

السؤال السابع:

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \end{cases}$$

و $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق:

$$v_n = u_n + 1$$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، عيّن أساسها وحدها الأول واكتب حدها العام.
2. استنتج عبارة u_n بدلالة n.
3. احسب المجموع S_n بدلالة n حيث:
$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$$

السؤال الثامن:

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \in N^*$ وفق:

$$u_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$$

استنتج أنّ:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$$

السؤال التاسع:

$(u_n)_{n\geq0}$, $(v_n)_{n\geq0}$ متتاليتين معرفتين على N وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$$

$$v_n = u_n + 3$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n

$$t_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

1. برّهن أنّ (v_n) متتالية هندسية، يُطلب أساسها وحدها العام.
2. عيّن نهاية كل من المتتاليات (u_n) ، (s_n) ، (t_n)

السؤال العاشر:

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ نضع:

$$S_n = 1 + 2\times 2 + 3\times 2^2 + 4\times 2^3 + \cdots + (n-1)\times 2^{n-2}$$

برّهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ أنّ:

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)\times 2^n$$

السؤال الحادي عشر:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$$

1. احسب S_4, S_3, S_2, S_1.
2. أثبت بالتدرج أنّ:
$S_n = n^2$.
3. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

@bacmaths12 0941342868

السؤال الثاني عشر:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

$(v_n)_{n\geq 0}$متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

1. عبّر عن u_n بدلالة n.
2. برّهن بالتدريج أنّ:

$$v_n = 1 + n^2$$

السؤال الثالث عشر:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

1. أثبت أنّ من أجل $n \geq 1$ فإنّ: $u_n > 1$.
2. أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.
3. استنتج أنّ المتتالية متقاربة، ثم احسب نهايتها.
4. أثبت أنّ $u_n \leq \frac{3}{2}$ حيث $n \geq 1$.

السؤال الرابع عشر:

$(u_n), (v_n)$ متتاليتان معرفتان من أجل $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n} \quad , v_n = 3 - \frac{5}{n}$$

1. احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. هل المتتاليتان $(u_n), (v_n)$ متجاورتان.

السؤال الخامس عشر:

(u_n) متتالية معرفة من أجل $n \geq 0$ وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

1. برهن بالتدريج أنّ أياً يكن $n \geq 0$ فإنّ:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2. استنتج أنّ المتتالية متقاربة، ثم احسب نهايتها ℓ.

السؤال السادس عشر:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة من أجل $n \geq 0$ وفق:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{11}{4} \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$$

1. احسب u_1 , u_2.
2. برهن أنّ المتتالية متزايدة.
3. نضع المتتالية (v_n) المعرفة على N وفق:

$$v_n = 4u_n + \alpha \,, (\alpha \in R)$$

4. عيّن α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية.
5. نفرض $\alpha = -8$ الحد العام لـ (v_n) ثم استنتج الحد العام لـ (v_n)
6. نضع من أجل $n \in N$:

$$S_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \cdots + \frac{u_n}{4^n}$$

7. برّهن أنّ المتتالية S_n متقاربة نحو العدد $(\frac{17}{3})$.
